VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATIKOS MAGISTRANTŪROS STUDIJŲ PROGRAMA

Tiesiniai tolydūs operatoriai. Izomorfizmai

Bounded Linear Operators. Isomorphisms

Magistro baigiamasis darbas

Atliko:
Dominyka Kaliatkaitė

VU el. p.: dominyka.kaliatkaite@mif.stud.vu.lt

Darbo vadovas:
asist. dr. Audrius Kačėnas

Vilnius
2024

Turinys

Santrumpų sąrašas

$\mathbb{C}$ — kompleksinių skaičių aibė;

$\mathbb{R}$ — realiųjų skaičių aibė;

$\mathbb{K}$ — skaliarų kūnas;

$a \in A$ — elementas a priklauso aibei A;

$A \subset B$ — aibė A yra aibės B poaibis;

$f : A \to B$ — funkcija f aibę A atvaizduoja aibėje B;

$D(f), E(f)$ — funkcijos f apibrėžimo ir reikšmių sritys;

$f(A)$ — aibės A vaizdas funkcijos f atžvilgiu;

$f^{-1}(A)$ — aibės A pirmavaizdis funkcijos f atžvilgiu;

$f^{-1} : B \to A$ — atvirkštinė funkcija f^{-1} aibę B atvaizduoja aibėje A;

$d(a, b)$ — metrinės erdvės metrika;

$\rho(a, b)$ — atstumas tarp elementų a ir b metrinėje erdvėje;

$| a |$ — skaičiaus a modulis (absoliutusis didumas);

$|| \cdot ||_A$ — erdvės A norma;

$\langle a, b\rangle$ — vektorių a ir b skaliarinė sandauga;

$\forall$ — bendrumo kvantorius: ”kiekvienas”, ”bet kuris”, ”visi”;

$\exists$ — egzistavimo kvantorius: ”egzistuoja bent vienas”, ”galima rasti”;

$\Longrightarrow$ — implikacija: $p \Rightarrow q$; ”jei p, tai q, ”iš q išplaukia q”;

$\Longleftrightarrow$ — ”tada ir tik tada”, ”būtina ir pakankama”;

$\inf A$ — aibės A tikslusis apatinis rėžis;

$\sup A$ — aibės A tikslusis viršutinis rėžis;

$\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ — elementų $x_1, x_2, \ldots, x_n$ suma;

$\{x_n\}$ — Koši seka su n - tuoju nariu x_n;

(x_n) — seka su n - tuoju nariu x_n;

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ — sekos (x_n) riba;

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ — funkcijos f riba taške a.

Santrauka

Šiame darbe nagrinėjami pagrindiniai tiesinių tolydžiųjų operatorių ir izomorfizmų apibrėžimai bei savybės metrinėse ir normuotose erdvėse. Taip pat pateikiami pavyzdžiai bei taikymo metodikos funkcinėje analizėje.

Tiesiniai tolydūs operatoriai yra pagrindiniai įrankiai, skirti nagrinėti ryšį tarp skirtingų metrinių erdvių bei skirtingų normuotų erdvių. Operatoriai yra tiesiniai atvaizdžiai, kurie išlaiko vektorinių erdvių algebrinę struktūrą. Šiame darbe nagrinėjami tiesinių tolydžiųjų operatorių apibrėžimai ir savybės, pabrėžiant jų vaidmenį išlaikyti atstumus ir geometrines savybes tarp normuotų erdvių.

Kita vertus, izomorfizmai nusako bijekciją tarp elementų skirtingose normuotose erdvėse, kai yra išlaikoma jų algebrinė struktūra. Šiame darbe nagrinėjamos izomorfizmų savybės ir jų taikymas funkcinėje analizėje, ypatingai, nustatant ekvivalentiškumą tarp metrinių ir normuotų erdvių.

Pateikiant išsamius pavyzdžius ir literatūros analizę, šiame darbe iliuostruojama, kaip tiesinius tolydžius operatorius ir izomorfizmus galima naudoti kaip puikius įrankius analizuojant metrinių ir normuotų erdvių savybes funkcinėje analizėje. Šių funkcinės analizės įrankių taikymas galimas įvairiuose matematiniuose kontekstuose, pradedant topologija ir geometrija, baigiant metodų optimizavimu įvairiose matematikos mokslui gimininingose srityse.

Raktiniai žodžiai: tiesiniai tolydūs operatoriai, operatorius, atvaizdis, izomorfizmas, homeomorfizmas, metrinė erdvė, normuota erdvė.

Summary

Bounded Linear Operators. Isomorphisms

In this thesis we delve into the fundamental concepts of bounded linear operators and isomorphisms in the context of metric and normed spaces, providing insights into their properties, applications, and significance in functional analysis.

Bounded linear operators serve as essential tools for studying the relationship between different metric and normed spaces. These operators are linear mappings that preserve the algebraic structure of vector spaces. This thesis explores the definition and properties of bounded linear operators, emphasizing their role in preserving idstances and geometric properties between normed spaces.

Isomorphisms, on the other hand, establish a one-to-one correspondence between elements of different normed spaces while preserving their algebraic structure. This thesis investigates the properties of isomorphisms and their significance in functional analysis, particularly in establishing equivalence between metric and normed spaces.

Through detailed examples and theoretical discussions, we illustrate how bounded linear operators and isomorphisms contribute to the development of functional analysis and provide powerful tools for studying the properties of metric and normed spaces. It explores applications of these concepts in various mathematical contexts, ranging from topology and geometry to optimization and mathematical physics.

Keywords: bounded linear operators, operator, image, isomorphism, homeomorphism, metric space, normed space.

Įvadas

Analizuojant tiesinių operatorių teoriją su begalinėmis erdvėmis, susiduriama su keliomis problemomis. Pagrindinė problema kyla iš tolydumo sąvokos: tiesiniai operatoriai baigtinėse normuotose vektorinėse erdvėse visada bus tolydūs. Tačiau, kai erdvė yra begalinės dimensijos - bendru atveju, tolydumo sąvoka gali ir negalioti. Šiame darbe nagrinėsime tiesinius operatorius, kurie bus tolydūs ir kurių apiibrėžimo sritys ir reikšmių sritys bus Banacho erdvėse.

Taip pat bus nagrinėjamos tiesinių tolydžiųjų operatorių ir izomorfizmų sąvokos, aptariamos metrinių ir normuotų erdvių savybės. Pagrindinis šio darbo tikslas yra susipažinti su šiomis sąvokomis bei pateikti pavyzdžius, taip pat įsigilinti į homeomorfizmo ir izomorfizmo sąvokas ir skirtumus metrinėse ir normuotose erdvėse.

Pirmame skyriuje susipažinsime su pagrindinėmis sąvokomis ir apibrėžimais, antrame skyriuje aptarsime tolydžiųjų funkcijų savybes metrinėse erdvėse bei tolydžiųjų operatorių savybes normuotose erdvėse, taip pat akcentuosime skirtumus tarp homeomorfizmų ir izomorfizmų. Trečiame skyriuje pritaikysime įgytas žinias konkrečiuose uždaviniuose.

1. Bendrinės sąvokos ir apibrėžimai

Apibrėžimas 1.1. Elementas $y = f(x)$ yra vadinamas funkcijos f ***reikšme*** taške x, aibė X - funkcijos f ***apibrėžimo sritimi*** (žymima $D(f)$), aibė Y - funkcijos f ***kitimo sritimi***.
Aibė $R(f)$ yra funkcijos f ***reikšmų sritis***.

$$R(f) := \{f(x) \in Y : x \in X\}$$

Aibė $G(f)$ yra funkcijos f ***grafikas***.

$$G(f) := \{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\}$$

Jei $A \subset X, B \subset Y$, tai aibė $f(A)$ yra vadinama aibės A ***vaizdu***, veikiant atvaizdžiui f.

$$f(A) := \{f(x) \in Y : x \in A\}$$

Aibė $f^{-1}(B)$ - aibės B ***pirmavaizdis***.

$$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$$

[1; 2; 3]

Apibrėžimas 1.2. Sakykime, kad X ir Y yra dvi bet kokios aibės. ***Vienareikšmė funkcija*** f, apibrėžta aibėje X su reikšmių sritimi aibėje Y, kiekvienam aibės elementui $x \in X$ priskiria po vieną aibės Y elementą y, $f(x) = y \in Y, x \in X$.

$$f : X \to Y$$

Vienareikšmės funkcijos sinonimai yra terminai ***atvaizdis, atitiktis, transformacija*** ir ***operatorius***.
[1; 2; 3]

Apibrėžimas 1.3. Atvaizdis $f : X \to Y$ vadinamas:

- ***siurjekcija*** arba ***aibės*** X ***atvaizdžiu į aibę*** Y, jei atvaizdžio vaizdas $f(X)$ yra visa aibė Y: $f(X) = Y$;
- ***injekcija*** aibėje Y, kai skirtingi aibės X elementai turi skirtingus vaizdus: $f(x_1) \neq f(x_2)$, kai $x_1 \neq x_2$;
- ***bijekcija*** arba ***abipus vienareikšmiu atvaizdžiu***, jei f yra ir injekcija, ir siurjekcija. Žymima $f : X \rightleftarrows Y$.

Jei $f : X \to Y$ yra bijekcija, tai su kiekvienu $y \in Y$ egzistuoja tik vienas toks elementas $x \in X$, kad $y = f(x)$. Šiuo atveju sakoma, kad egzistuoja funkcijos f ***atvirkštinė funkcija***, kuri žymima f^{-1} ir kuri aibę Y atvaizduoja į aibę X pagal šią taisyklę:

$$f^{-1}(y) = x, \quad \text{jei} \quad f(x) = y.$$

[2; 4]

Apibrėžimas 1.4. Sakykime, X ir Y yra tiesinės erdvės. Atvaizdis $A : X \to Y$ tenkina sąlygas:

1. $A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2)$,
2. $A(\alpha x_1) = \alpha A(x_1), \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad x_1, x_2 \in X.$

Tada atvaizdis A yra vadinamas ***tiesiniu atvaizdžiu***. Jeigu $Y = \mathbb{C}$, tai atvaizdis A vadinamas ***tiesiniu funkcionalu***.

[1]

Apibrėžimas 1.5. Aibė $\mathbb{E}$ vadinama ***tiesine*** arba ***vektorine erdve*** virš skaliarų kūno $\mathbb{K}$, jei bet kuriems dviems elementams $x, y \in \mathbb{E}$ taip apibrėžta jų suma $x + y \in \mathbb{E}$ ir bet kuriems $x \in \mathbb{E}$ ir $\alpha \in \mathbb{K}$ taip apibrėžta sandauga $\alpha \cdot x \in \mathbb{E}$, kad teisingos šios aksiomos:

(1) Sumos komutatyvumo:
$x + y = y + x, \quad \text{su visais} \quad x, y \in \mathbb{E}$;

(2) Sumos asociatyvumo:
$x + (y + z) = (x + y) + z, \quad \text{su visais} \quad x, y, z \in \mathbb{E}$;

(3) egzistuoja nulinis elementas, t.y. toks elementas $0 \in \mathbb{E}$, kad
$x + 0 = x, \quad \text{su kiekvienu} \quad x \in \mathbb{E}$

(4) kiekvieną $x \in \mathbb{E}$ atitinka priešingasis elementas, t.y. toks elementas $-x \in \mathbb{E}$, kad
$x + (-x) = 0$;

(5) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x, \quad \text{su visais} \quad x \in \mathbb{E}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{K}$;

(6) $\alpha(x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y, \quad \text{su visais} \quad x, y \in \mathbb{E}, \ \alpha \in \mathbb{K}$;

(7) Sandaugos asociatyvumo:
$\alpha(\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x, \quad \text{su visais} \quad x \in \mathbb{E}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{K}$;

(8) $1 \cdot x = x, \quad \text{su kiekvienu} \quad x \in \mathbb{E}$ (čia 1 yra kūno $\mathbb{K}$ vienetas).

[2]

2. Pagrindinės teoremos ir teiginiai

Erdvę įprasta vadinti aibę, kurios elementams aksiomomis aprašyti kokie nors sąryšiai. *[5]*

2.1. Metrinės erdvės

Šiame poskyryje nagrinėjamos metrinės erdvės yra tokios aibės, tarp kurių elementų nustatyti atstumai.
[5]

2.1.1. Metrinės erdvės apibrėžimas ir savybės

Atstumas tarp aibės elementų apibrėžiamas naudojantis aksiomomis.

Apibrėžimas 2.1. Tarkime, $\mathbb{X}$ — netuščia aibė. Funkcija $d : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ vadinama ***aibės*** $\mathbb{X}$ ***metrika (atstumo funkcija)***, jei su visais $x, y, z \in \mathbb{X}$ teisingos šios aksiomos:

(A1) $d(x, y) \geq 0$;

(A2) Vienaties
$d(x, y) = 0$ tada ir tik tada, kai $x = y$;

(A3) Simetriškumo
$d(x, y) = d(y, x)$;

(A4) Trikampio nelygybės
$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Skaičius $d(x, y)$ vadinamas ***metrika*** tarp elementų x ir y. Pora $(\mathbb{X}, d)$ vadinama ***metrine erdve***.
[2; 6]

Jei $(\mathbb{X}, d)$ — metrinė erdvė ir $\mathbb{Y} \subset \mathbb{X}$, tai funkcijos $d(x, y)$ siaurinys aibėje $\mathbb{Y} \times \mathbb{Y}$ yra aibės $\mathbb{Y}$ metrika. Ją žymėsime ta pačia raide d, o metrinę erdvę $(\mathbb{Y}, d)$ vadinsime ***metrinės erdvės*** $(\mathbb{X}, d)$ ***poerdviu***.
[2; 6]

2.1.2. Tolydūs atvaizdžiai metrinėse erdvėse

Sakykime, turime dvi metrines erdves $(\mathbb{X}, d), (\mathbb{Y}, \rho)$ ir aibę $X_0 \subset \mathbb{X}$, kur d žymi aibės $\mathbb{X}$ metriką, o ρ žymi aibės $\mathbb{Y}$ atstumą. Nagrinėkime atvaizdį $f : X_0 \to \mathbb{Y}$.

Apibrėžimas 2.2. Funkcijos riba. Sakykime, turime atvaizdį $f : X_0 \to \mathbb{Y}$, o x_0 yra aibės $\mathbb{X}$ ribinis taškas. Tarkime, kad yra toks taškas $y_0 \in \mathbb{Y}$, pasižymintis šia savybe: kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuoja toks $\delta > 0$, kad visiems $x \in X_0$, kurie tenkina nelygybę

$$0 < d(x, x_0) < \delta;$$

būtų

$$\rho(f(x), y_0) < \varepsilon,$$

y_0 vadinsime funkcijos $f(x)$ riba, kai $x \to x_0$.

Tada žymėsime $f(x) \to y_0,$ kai $x \to x_0,$ arba

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0.$$

*[**7**]*

$x_0 \in \mathbb{X}$, tačiau aibei X_0 taškas x_0 gali ir nepriklausyti. Gali būti, kad $x_0 \in X_0$, tada

$$f(x_0) \neq \lim_{x \to x_0} f(x).$$

*[**7**]*

Apibrėžimas 2.3. Atvaizdis $f : X_0 \to \mathbb{Y}$ vadinamas ***tolydžiu taške*** $x_0 \in X_0$, jei kiekvieną $\varepsilon > 0$ atitinka toks $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$, kad

$$\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon,$$

su visais $x \in S_\delta(x_0) \cap X_0$, kurie tenkina nelygyę $d(x, x_0) < \delta$. Atvaizdis $f : X_0 \to \mathbb{Y}$ vadinamas ***tolydžiuoju***, jei jis yra tolydus kiekviename aibės X_0 taške. Kad atvaizdis būtų tolydus taške x_0, jis turi būti tame taške apibrėžtas.
*[**2**; **7**]*

Iš **2.3 Apibrėžimo** seka, kad būtinai turi būti:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Apibrėžimas 2.4. Atvaizdis $f : X_0 \to \mathbb{Y}$ vadinamas ***tolygiai tolydžiu***, jei kiekvieną $\varepsilon > 0$ atitinka toks $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, kad naudojantis realiųjų skaičių aibe $\mathbb{R}$, apibrėžiame atstumą

$$\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

su visais tokiais $x, y \in X_0$, kurie tenkina nelygyę $d(x, y) < \delta$.
*[**2**]*

Kiekviena tolygiai tolydi funkcija yra tolydi, bet ne atvirkščiai. Pavyzdžiui, funkcija $f : (0, 1) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x}, \quad \mathbb{X} = (0, 1), \quad d(x,y) = |x - y|,$ yra tolydi, bet ne tolygiai tolydi.

Pavyzdys 2.1. Fiksuokime metrinės erdvės $(\mathbb{X}, d)$ tašką $a \in \mathbb{X}$ ir nagrinėkime funkciją $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, $f(x) = d(x, a)$, $x \in \mathbb{X}$. Naudojantis metrikos apibrėžimu: $d(x, y) \to 0$, funkcija f yra tolygiai tolydi, nes

$$|f(x) - f(y)| = |d(x,a) - d(y, a)| \le d(x, y)$$

su visais $x, y \in \mathbb{X}$. Šią atstumo funkcijos savybę išvedame iš trikampio nelygybės aksiomos. *[2]*

Pavyzdys 2.2. Bet kuri funkcija, apibrėžta diskrečiojoje metrinėje erdvėje $(\mathbb{X}, d)$, o reikšmes įgyjanti bet kurioje metrinėje erdvėje $(\mathbb{Y}, \rho)$, yra tolydi.

Įrodymas. Tarkime, $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ yra funkcija apibrėžta diskrečioje metrinėje erdvėje $\mathbb{X}$ ir metrinėje erdvėje $\mathbb{Y}$. Imame tašką x_0, priklausantį aibei $\mathbb{X}$: $x_0 \in \mathbb{X}$, $\varepsilon > 0$.
Kadangi, $\mathbb{X}$ yra diskrečioji metrinė erdvė su metrika:

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, x \neq y; \\ 0, x = y. \end{cases}$$

egzistuoja tokia $0 < \delta < 1$, kad atvirame rutulyje $S(\delta, x_0)$ priklausys vienintelis taškas x_0.
Kadangi, $\mathbb{X}$ yra diskrečioji metrinė erdvė, gauname

$$d(x, x_0) = 0 \quad \text{tada ir tik tada, kai} \quad x = x_0.$$

Taigi, bet kokiam $x \in \mathbb{X}$, kai $d(x, x_0) < \delta$, gauname $x = x_0$, $f(x) = f(x_0)$, $0 < \delta < 1$, pasirenkame $\delta = \frac{1}{2}$.

Kadangi, $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, pagal tolydumo **2.3 Apibrėžimą** gauname

$$\rho(f(x_0), f(y)) < \varepsilon \quad \text{tada ir tik tada, kai} \quad d(x, y) < \delta = \frac{1}{2}, \; x, y = x_0.$$

Kai $S(\delta, x_0)$ turi vienintelį tašką x_0, gauname

$$d(x, x_0) < \delta, \quad \text{visiems} \quad x \in \mathbb{X}, x \neq x_0.$$

Pagal **2.2 Apibrėžimą**, tarkime, kad turime tokį $x \in \mathbb{X}$, kad

$$d(x, x_0) < \delta$$

Todėl, pagal **2.3 Apibrėžimą**:

$$\rho(f(x), f(x_0)) = 0 < \varepsilon \quad \text{visiems} \quad x \in \mathbb{X}, \quad \text{kuriems} \quad d(x, x_0). < \delta$$

Kadangi, x_0 yra vienintelis taškas, tai galioja visiems $x_0 \in \mathbb{X}$. Gauname, kad funkcija $f : f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ yra tolydi kiekviename taške $x_0 \in \mathbb{X}$:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

Taigi, bet kuri funkcija, apibrėžta diskrečioje metrinėje erdvėje, o reikšmes įgyjanti bet kurioje metrinėje erdvėje, yra tolydi. □

Teorema 2.1. Atvaizdis $f : X_0 \to \mathbb{Y}$ yra tolydus taške $x_0 \in X_0$ tada ir tik tada, kai bet kuriai konverguojančiai į x_0 sekai $(x_n) \subset X_0$

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0).$$

[2; 7]

Įrodymas. Palyginkime **2.2** ir **2.3 Apibrėžimus**.
Tarkime, atvaizdis $f : X_0 \to \mathbb{Y}$ yra tolydus taške x_0 ir seka (x_n) konverguoja į x_0. Remiantis tolydumo **2.3 Apibrėžimu**, kiekvieną $\varepsilon > 0$ atitinka toks $\delta > 0$, kad nelygybė

$$\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

teisinga, kai $x \in X_0$ ir $d(x_n, x_0) < \delta$, kai $n \geq N_\delta$. Imdami $n \geq N_\delta$, gauname

$$\rho(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Vadinasi, $f(x_n) \to f(x_0)$, kai $n \to \infty$.
Remiantis funkcijos ribos **2.2 Apibrėžimu**, tarkime,

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0),$$

kai

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0,$$

bet f nėra tolydi taške x_0. Jei taip, tai egzistuoja toks $\varepsilon > 0$, su kuriuo teisinga ši savybė: bet kurį $\delta > 0$ atitinka toks $x \in X_0$, kad

$$d(x, x_0) < \delta, \quad \text{bet} \quad \rho(f(x), f(x_0)) \geq \varepsilon.$$

Imdami $\delta = \dfrac{1}{n}$, gauname seką $(x_n) \subset X_0$, su kuria

$$\rho(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon, \quad \text{nors} \quad d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}.$$

Akivaizdu, kad

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0,$$

bet seka $(f(x_n))$ nekonverguoja į $f(x_0)$. Ši prieštara įrodo, kad prielaida buvo klaidinga.
[2] □

Teorema 2.2. Atvaizdis $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ tolydus tada ir tik tada, kai su kiekviena atvirąja aibe $A \subset \mathbb{Y}$ pirmavaizdis $f^{-1}(A)$ yra atviroji aibė.
[2]

Įrodymas.
Būtinumas. Tarkime, atvaizdis f tolydus ir $A \subset \mathbb{Y}$ — atviroji aibė. Jei $x \in f^{-1}(A)$, tai $f(x) \in A$. Kadangi aibė A atvira, egizstuoja toks $\varepsilon > 0$, su kuriuo $S_\varepsilon(f(x)) \subset A$. Iš funkcijos f tolydumo gauname, kad spindulį ε atitinka toks $\delta > 0$, su kuriuo $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$, kai $d(x, y) < \delta$. Vadinasi, su kiekvienu $y \in S_\delta(x)$, $f(y) \in A$, kitaip tariant $S_\delta(x) \subset f^{-1}(A)$. Taigi, aibė $f^{-1}(A)$ atvira.

Pakankamumas. Fiksuokime $x_0 \in \mathbb{X}$. Nesvarbu, kokį paimtume atvirąjį rutulį $S_\varepsilon(f(x_0))$, kuris, beje, yra atviroji aibė, jo pirmavaizdis $f^{-1}(S_\varepsilon(f(x_0))$ yra atvira aibė ir jai priklauso x_0. Todėl egzistuoja toks $\delta > 0$, su kuriuo $S_\delta(x_0) \subset f^{-1}(S_\varepsilon(f(x_0)))$. O tai reiškia, kad $\rho(f(y), f(x_0)) < \varepsilon$, jei $d(x_0, y) < \delta$. Vadinasi, funkcija f tolydi taške x_0. Kadangi x_0 — bet kuris erdvės $\mathbb{X}$ taškas, tai funkcija f tolydi.
[2] □

2.1.3. Homeomorfizmai

Prisiminkime, kad bet kuriai bijekcijai $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ atvirkštinis atvaizdis $f^{-1} : \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ yra apibrėžtas pagal taisyklę $f^{-1}(y) = x$, jei $f(x) = y$.

Apibrėžimas 2.5. Tarkime, $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ yra bijekcija. Jei abu atvaizdžiai f ir f^{-1} yra tolydūs, tai atvaizdis f vadinamas ***homeomorfiniu***. Jei toks atvaizdis egzistuoja, tai metrinės erdvės $\mathbb{X}$ ir $\mathbb{Y}$ vadinamos ***homeomorfinėmis***.
[2]

Apibrėžimas 2.6. Homeomorfizmas $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ vadinamas ***izometrija***, jei

$$\rho(f(x), f(y)) = d(x, y)$$

su visais $x, y \in \mathbb{X}$. Jei egzistuoja erdvių $\mathbb{X}$ ir $\mathbb{Y}$ izomerija, tai sakome, kad tos erdvės yra ***izometrinės***.
[2]

Akivaizdu, kad izometrija yra taip par it homeomorfinis atvaizdis, bet ne atvirkščiai. Pavyzdžiui, metrinės erdvės $\mathbb{X} = (-1, 1)$, $d(x,y) = |x - y|$, ir $\mathbb{Y} = \mathbb{R}$, $\rho(x, y) = |x - y|$, yra homeomorfinės, bet ne izomorfinės. Funkcija $f(x) = tan\frac{\pi x}{2}$ yra erdvių $\mathbb{X}$ ir $\mathbb{Y}$ homeomorfizmas. Kita vertus, jei aibėje $\mathbb{X} = (-1, 1)$ nagrinėsime atstumo funkciją $d(x,y) = |tan\frac{\pi 2}{2} - tan\frac{\pi y}{2}|$, tai $(\mathbb{X}, d)$ bus izometrinė metrinei erdvei $\mathbb{R}$.
[2]

Homeomorfinis atvaizdis išsaugo visas pagrindines, vadinamąsias topologines, metrinių erdvių savybes: atvirosios aibės atvaizduojamos į atvirąsias, ribiniai taškai — į ribinius.
Izometrinis atvaizdis išsaugo dar ir metrines savybes — atstumus tarp elementų ir jų vaizdų.
[2]

2.2. Normuotos erdvės

Erdvės, kurios kartu yra ir tiesinės, ir metrinės, sudaro svarbią šeimą. Joje išsiskiria normuotosios, — tos, kurių metrika aprašoma remiantis normomis. Pilnosios normuotos erdvės vadinamos Banacho erdvėmis.
[2; 6]

2.2.1. Normuotos erdvės apibrėžimai ir savybės

Tarkime, $\mathbb{E}$ yra tiesinė erdvė virš skaliarų kūno $\mathbb{K}$.

Apibrėžimas 2.7. Atvaizdis $||\cdot|| : \mathbb{E} \to [0, \infty)$ vadinamas ***erdvės*** $\mathbb{E}$ ***norma***, jei teisingos šios aksiomos:

(B1) Vienaties
$||x|| \geq 0$ su visais $x \in \mathbb{E}$;
$||x|| = 0$ tada ir tik tada, kai $x = 0$;

(B2) Homogeniškumo

$$||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x|| \quad \text{su visais} \quad x \in \mathbb{E} \quad \text{ir} \quad \alpha \in \mathbb{K};$$

(B3) Trikampio nelygybės

$$||x+y|| \leq ||x|| + ||y|| \quad \text{su visais} \quad x, y \in \mathbb{E}.$$

[2; 6]

Apibrėžimas 2.8. Pora $(\mathbb{E}, ||\cdot||)$, kai $\mathbb{E}$ yra tiesinė erdvė virš skaliarų kūno $\mathbb{K}$, o $||\cdot||$ — erdvės $\mathbb{E}$ norma, vadinama ***tiesine normuotąja erdve virš skaliarų kūno*** $\mathbb{K}$. Skaičius $||x||$ vadinamas elemento $x \in \mathbb{E}$ norma.
[2]

Tais atvejais, kai norma fiksuota arba iš konteksto suprantama, vietoj poros $(\mathbb{E}, ||\cdot||)$ rašysie tik $(\mathbb{E})$. Norėdami pažymėti erdvės normą, kartais prirašysime indeksą $||x||_{\mathbb{E}}$, $||x||_{\mathbb{F}}$ ir t.t.

Kiekviena normuotoji erdvė kartu yra ir metrinė, kurios atstumo funkcija

$$d(x,y) = ||x-y||, \quad x, y \in \mathbb{E} \tag{2.1}$$

Nesunku įsitikinti, kad taip apibrėžta funkcija $d : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ tenkina visas metrikos aksiomas. Tikrai, $d(x,y) = 0$ reiškia, kad $||x-y|| = 0$, o taip gali būti tada ir tik tada, kai $x = y$. Simetriškumo aksioma teisinga, nes $x-y = (-1)(y-y)$, todėl $d(x,y) = ||(-1)(y-x)|| = |-1| \cdot ||y-x|| = d(y,x)$. Pagaliau trikampio nelygybės aksioma įrodoma iš atitinkamos normos savybės:

$$\begin{aligned} d(x,y) &= ||x-y|| = ||(x-z)+(z-y)|| \\ &\leq ||x-z|| + ||z-y|| \\ &= d(x,z) + d(z,y). \end{aligned}$$

Pastebėsime, kad iš atstumo funkcijos apibrėžimo (žr. (2.1) formulę) gauname

$$||x|| = d(x,0).$$

Taigi, elemento x norma yra jo atstumas iki nulinio elemento. Galime sakyti, kad norma apibendrina skaičiaus modulį.

Vadinasi, normuotosios erdvės yra metrinių erdvių šeimos pošeimis. Todėl visos metrinių erdvių sąvokos, teoremos ir teiginiai tinka normuotosioms erdvėms.
[2]

2.2.2. Normų ekvivalentumas

Vienoje ir toje pačioje tiesinėje erdvėje gali būti apibrėžtos kelios normos. Labai svarbus uždavinys — normų palyginimas.

Apibrėžimas 2.9. Tarkime, $||\cdot||_1$ ir $||\cdot||_2$ yra dvi skirtingos erdvės $\mathbb{E}$ normos. Sakoma, kad jos yra ekvivalenčios, jei egzistuoja tokios dvi baigtinės konstantos $c > 0$, $C > 0$, kad

$$c||x||_1 \leq ||x||_2 \leq C||x||_1$$

[2]

Teorema 2.3. Bagtiniamatės tiesinės erdvės visos normos ekvivalenčios.
[2]

2.2.3. Tiesiniai tolydūs operatoriai normuotose erdvėse

Šiame poskyryje nagrinėsime tiesinius tolydžius operatorius $T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ tarp normuotų erdvių $\mathbb{E}, \mathbb{F}$. Tiesinis funkcionalas tam tikru atveju gali būti laikomas tiesiniu operatoriumi, kai $\mathbb{F}$ laikome skaliarine erdve $\mathbb{R}$ arba $\mathbb{C}$.

Tarkime, $\mathbb{E}, \mathbb{F}$ yra tiesinės normuotosios erdvės virš to paties skaliarų kūno $\mathbb{K}$, $T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ — funkcija, apibrėžta aibėje $D(T) \subset \mathbb{E}$ ir įgyjanti reikšmes erdvėje $\mathbb{F}$. Funkcija T vadinama tiesiniu operatoriumi, jei:

- aibė $D(T)$ yra tiesinė;
- $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$ su bet kuriais $x, y \in D(T)$ ir $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

[5]

Toliau vartodami terminą ***operatorius*** turėsime omenyje, kad tai ***tiesinis operatorius***. Aibė $D(T)$ vadinama operatoriaus T apibrėžimo sritimi, o aibė $R(T) = \{Tx : x \in D(T)\} = T(D(T))$ — reikšmių aibe.

Atvaizdis $T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ yra tolydus taške $x_0 \in D(T)$, jei kiekvieną $\varepsilon > 0$ atitinka toks $\delta_\varepsilon > 0$, kad

$$||Tx - Tx_0|| \leq \varepsilon,$$

kai $x \in D(T)$ ir $||x - x_0|| < \delta_\varepsilon$. Atvaizdis T tolydus, jei jis yra tolydus kiekviename apibrėžimo srities $D(T)$ taške.
[5]

Patikrinti atvaizdžio tolydumą dažnai lengviau pasinaudojus ekvivalenčiu apibrėžimu ribų terminais: T tolydus taške x_0 tada ir tik tada, kai $\lim\limits_{n\to\infty} Tx_n = Tx_0$ su kiekviena seka $(x_n) \subset D(T)$, kurios riba $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.
[5]

Apibrėžimas 2.10. Atvaizdis $T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ vadinamas aprėžtuoju, jei jis kiekvieną aprėžtą apibrėžimo srities $D(T)$ aibę atvaizduoja į aprėžtą aibę.
[5]

Teorema 2.4. Jei $T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ yra tiesinis operatorius, tai šios jo savybės yra ekvivalenčios:

(B1) T yra tolydus nulyje;

(B2) T yra tolydus;

(B3) T yra aprėžtas;

(B4) egzistuoja toks skaičius $M \geq 0$, kad

$$||T(x)|| \leq M||x||$$

su visais $x \in D(T)$.

[5]

Įrodymas.

(B1) $\Longrightarrow$ **(B2)**. Pirmiausia pastebėsime, kad tiesinis operatorius erdvės nulį atvaizduoja į nulį: $T(0) = 0$, nes

$$T(0) = T(0 \cdot x) = 0 \cdot T(x) = 0.$$

Todėl iš operatoriaus T tolydumo nulyje gauname, kad kiekvieną $\varepsilon > 0$ atitinka toks $\delta_\varepsilon > 0$, su kuriuo

$$||T(x)|| < \varepsilon,$$

kai $||x|| < \delta_\varepsilon$. Tegu $x_0 \in \mathbb{E}$ ir $||x - x_0|| < \delta_\varepsilon$. Tuomet

$$||T(x) - T(x_0)|| = ||T(x - x_0)|| < \varepsilon.$$

Vadinasi, T tolydus taške x_0.

(B2) $\Longrightarrow$ **(B3)**. Tarkime, $A \subset \mathbb{E}$ yra aprėžta aibė, $A \subset S_r(0)$. Įrodysime, kad aibė $T(A) = \{T(x) : x \in A\} \subset \mathbb{F}$ aprėžta. Iš operatoriaus T tolydumo nulyje, žinome, kad egzistuoja toks $\delta > 0$, su kuriuo $||T(x)|| < 1$, kai $||x|| < \delta$. Jei $y \in A$, tai $||y|| < r$, o $||r^{-1}\delta y|| < \delta$. Todėl $||T(r^{-1}\delta y)|| < 1$ arba $||T(y)|| < \frac{r}{\delta}$, nes $T(r^{-1}\delta y) = r^{-1}\delta T(y)$. Vadinasi, aibė $T(A)$ aprėžta.

(B3) $\Longrightarrow$ **(B4)**. Pakanka įsitikinti, kad **2.4 Teoremos** nelygybė **(B4)** teisinga, kai $x \neq 0$. Aibė $T(S_1(0))$ yra aprėžta, todėl egzistuoja toks $M > 0$, kad

$$||T(x)|| \leq M$$

su visais $x \in \mathbb{E}$, kurių norma $||x|| \leq 1$. Imdami $x \in \mathbb{E}, x \neq 0$, gauname

$$||T(x)|| = ||x|| \cdot ||T(x||x||^{-1})|| \leq M||x||.$$

[5; 8] □

Remiantis **2.4 Teorema**, jei operatorius $T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ tiesinis tolydus erdvės $\mathbb{E}$ operatorius, tai skaičius

$$||T|| = \inf\{M \geq 0 : ||Tx|| \leq M||x|| \quad \text{su visais} \quad x \in D(T)\} \tag{2.2}$$

yra baigtinis. Jis vadinamas operatoriaus T norma. Dažnai naudojami šie ekvivalentūs operatoriaus normos apibrėžimai:

$$||T|| = \sup_{x \in D(T):||x||=1} ||Tx||;$$

$$||T|| = \sup_{x \in D(T):x \neq 0} \frac{||Tx||}{||x||};$$

$$||T|| = \sup_{x \in D(T):||x|| \leq 1} ||Tx||.$$

Iš (2.2) sąryšio gauname

$$||Tx|| \leq ||T|| \cdot ||x||, \quad x \in D(T). \tag{2.3}$$

[5]

Dviejų operatorių $S : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ ir $T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ suma $S + T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ yra atvaizdis, apibrėžtas aibėje $D(S + T) = D(S) \cap D(T)$:

$$(S + T)(x) = Sx + Tx, \quad x \in D(S + T).$$

Skaliaro $\alpha \in \mathbb{K}$ ir operatoriaus $T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ sandauga $\alpha T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ yra atvaizdis, apibrėžtas aibėje:

$$(\alpha T)(x) = \alpha Tx, \quad x \in D(T).$$

Galima įsitikinti, kad tiesinių tolydžiųjų operatorių suma yra tiesinis tolydus operatorius ir teisingas jo normos įvertis

$$||S + T|| \leq ||S|| + ||T|| \tag{2.4}$$

Tarkime, operatoriai $S : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ ir $T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ yra tolydūs. Imdami $x \in D(S) \cap D(T)$, gauname

$$\begin{aligned} ||(T+S)x|| &= ||Tx + Sx|| \\ &\leq ||Tx|| + ||Sx|| \\ &\leq (||T|| + ||S||)||x|| \\ &. \end{aligned}$$

Vadinasi, operatorius $(T + S)$ yra aprėžtas ir jo normai teisinga (2.4) nelygybė. Taip pat galima patikrinti, kad αT yra tolydus operatorius, jei T tiesinis tolydus ir $\alpha \in \mathbb{K}$. Be to, $||\alpha T|| = |\alpha| \cdot ||T||$. *[5]*

Tarkime, $\mathbb{E}, \mathbb{F}, \mathbb{G}$ yra normuotos erdvės, $T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ ir $S : \mathbb{F} \to \mathbb{G}$ — tiesiniai operatoriai. Jei $D(S) \subset R(T)$, tai sandauga $ST : \mathbb{E} \to \mathbb{G}$ vadinamas atvaizdis, apibrėžtas lygybe

$$||ST|| \leq ||S|| \cdot ||T||.$$

Analogiškai galime apibrėžti sumą ir sandaugą daugiau nei dviejų operatorių.
[5]

2.2.4. Izomorfinės erdvės

Apibrėžimas 2.11. Normuotosios erdvės $(\mathbb{E}, ||\cdot||_{\mathbb{E}})$ ir $(\mathbb{F}, ||\cdot||_{\mathbb{F}})$ vadinamos ***izomorfinėmis***, jei egzistuoja tiesinė abipusiškai tolydi bijekcija $T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$. Atvaizdis T vadinamas ***izomorfiniu atvaizdžiu***.

Iš **2.3 Teoremos** kaip išvadą gauname tokią teoremą.

Teorema 2.5. Visos n-matės tiesinės normuotosios erdvės virš skaliarų kūno $\mathbb{K}$ yra izomorfinės erdvei $\mathbb{K}^n$, kartu izomorfinės viena kitai.

Apibrėžimas 2.12. Normuotosios erdvės $(\mathbb{E}, ||\cdot||_{\mathbb{E}})$ ir $(\mathbb{F}, ||\cdot||_{\mathbb{F}})$ vadinamos ***izometriškai izomorfinėmis***, jei egzistuoja toks izomorfinis atvaizdis $J : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$, kad

$$||Jx||_{\mathbb{F}} = ||x||_{\mathbb{E}}$$

su visais $x \in \mathbb{E}$. Šiuo atveju atvaizdis J vadinamas ***izometriniu izomorfizmu***.
[2]

Paprastai izometriškai izomorfinės normuotosios erdvės sutapatinamos, nes jų tiek tiesinės, tiek metrinės savybės identiškos. Pavyzdžiui, normuotosios erdvės $\mathbb{R}^{2n}$ ir $\mathbb{C}^n$ izometriškai izomorfinės, o $J(x) = y$, kai $x = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$ ir $y = (x_1 + ix_{n+1}, \ldots, x_n + ix_{2n}) \in \mathbb{C}^n$, yra izometrija.

2.2.5. Izomorfizmai

Svarbi tiesinių tolydžiųjų operatorių klasė yra izomorfizmai. Tiesinis operatorius $T : X \to Y$ tarp normuotų erdvių X, Y yra vadinamas ***izomorfizmu***, kai jam egzsistuoja atvirkštinis atvaizdis T^{-1} ir abu T, T^{-1} yra tolydūs. Erdvės X, Y yra vadinamos ***izomorfiškomis***, jei egzistuoja izomorfizmas tarp šių erdvių. Taigi, tiesinis vaizdas $T : X \to Y$ tarp normuotų erdvių X, Y yra izomorfizmas tada ir tik tada, kai T yra atvirkštinis ir $T \in L(X,Y), T^{-1} \in L(X,Y)$.
[6]

Pavyzdys 2.3. Izometrija Hilberto erdvėje vadinama vienetiniu operatoriumi - siurjektyviu aprėžtu operatoriumi Hilberto erdvėje, kuris išsaugo skaliarinę sandaugą (dar gali būti vadinama vidiniu produktu).
[6]

Teorema 2.6. Visos begalinės dimensijos atskirosios Hilberto erdvės yra izometriškos viena kitai. Kiekvienai erdvei X ir Y galima rasti tiesinį bijektyvų atvaizdį $T : X \to Y$, kuris išsaugo skaliarinę sandaugą:

$$\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle \quad \text{visiems} \quad x, y \in X.$$

[6]

Pavyzdys 2.4. Bet kokioje klasikinėje eilučių erdvėje dešinysis poslinkis $D(x_1, x_2, ..) = (0, x_1, x_2, ...)$ nėra izometrija, nes poslinkis D nėra siurjektyvus, nors $||Dx|| = ||x||$. Kairysis poslinkis $K(x_1, x_2, ...) = (x_2, x_3, ...)$ akivaizdžiai nėra atvirkštinis bet yra aprėžtas/tolydus ir $||K|| = 1$.
[6]

Įrodymas.

1. Poslinkis į dešinę $D(x_1, x_2, ..) = (0, x_1, x_2, ...)$ yra tiesinis operatorius erdvėse $c_{00}, c_0, c, l_\infty, l_1$. Šiose erdvėse visada galioja lygybė

   $$||Dx|| = ||x||, \quad \text{nes} \quad (0 + \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} = (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

   Todėl D yra aprėžtas operatorius ir nėra siurjektyvus, nes $x : D(x) = (1, 0, 0, ...)$. Gauname

   $$||Dx|| = 1$$

2. Poslinkis į kairę $K(x_1, x_2, ...) = (x_2, x_3, ...)$ yra tiesinis operatorius tose pačiose erdvėse. Todėl galioja nelygybė

$$||K(x)|| = (\sum_{i=r}^{\infty} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (|x_1|^p + \sum_{i=2}^{\infty} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} = ||x||$$

Todėl $||K|| \leq 1$. Pastebime, kad kiekvienam $x = (x_1, x_2, ...)$, kur $x_1 = 0$, gauname $||Kx|| = ||x||$, taigi $||K|| = 1$.
Taip pat $K(x_1, x_2, ...) = (x_2, x_3, ...)$ nėra injekcija, todėl neturi atvirkštinio atvaizdžio. Pavyzdžiui, $K(0, x_1, x_2, ...) = K(1, x_1, x_2, ...)$, nors $(0, x_1, x_2, ...) \neq (1, x_1, x_2)$.

$\square$

3. Uždaviniai

Uždavinys 3.1. Parodykite, kad siurjektyvus tiesinis atvaizdis $T : X \to Y$ tarp normuotų erdvių yra izomorfizmas tada ir tik tada, jei egzistuoja tokios $C, c > 0$, kad

$$c||x||_X \leq ||Tx||_Y \leq C||x||_X \text{ visiems } x \in X.$$

Sprendimas.

- Tarkime, kad $T : X \to Y$ yra izomorfizmas. Pagal **2.4 Teoremą**, jei T yra tolydus, tai jis yra ir aprėžtas, todėl $\exists\, c > 0$:

  $$||Tx||_Y \leq C||x||_X \text{ visiems } x \in X.$$

  Kadangi T^{-1} taip pat yra tolydus ir aprėžtas, tai $\exists\, \tilde{c} > 0$:

  $$||T^{-1}y||_X \leq \tilde{c}||y||_Y \text{ visiems } y \in Y.$$

  Taigi, kiekvienam $x \in X, \quad (T(x) = y)$:

  $$||T^{-1}(T(x))||_X \leq \tilde{c}||Tx||_Y \iff ||Tx||_Y \geq \frac{1}{\tilde{c}}||x||_X$$

- Tarkime, kad $T : X \to Y$ yra tiesinis ir siurjektyvus operatorius. Taip pat, tarkime, kad $\exists\, c, C > 0$:

  $$c||x||_X \leq ||Tx||_Y \leq C||x||_X \text{ visiems } x \in X.$$

  1. Iš nelygybės matosi, kad T yra aprėžtas ir kartu tolydus.
  2. Jeigu $T(x) = T(y)$, tai $T(x - y) = 0$ ir pagal nelygybę:

     $$0 \leq c||x - y|| \leq ||T(x - y)|| = 0 \implies x = y.$$

     Taigi, T yra ir siurjekcija, ir injekcija, todėl taip pat ir bijekcija.
  3. Jeigu $y \in Y$, tai $\exists\, x \in X$, kad

     $$Tx = y \iff x = T^{-1}y.$$

     $$c||x||_X \leq ||Tx||_Y \iff ||T^{-1}y||_X \leq \frac{1}{c}||y||_Y$$

     todėl T^{-1} yra aprėžtas ir kartu tolydus.

  Vadinasi, operatorius T yra izomorfizmas.

$\square$

Uždavinys 3.2. Parodykite, kad izomorfizmas tarp normuotų erdvių atvaizduoja:

(a) atvirąsias aibes į atvirąsias aibes,

(b) uždarąsias aibes į uždarąsias aibes,

(c) konverguojančias sekas į konverguojančias sekas,

(d) pilnąsias erdves į pilnąsias erdves (Banacho į Banacho).

Sprendimas. Tegul $T : X \to Y$ yra izomorfizmas tarp normuotų erdvių X ir Y.

(a) Kadangi T^{-1} yra tolydi funkcija, tai pirmavaizdis, atviros aibės $U \subseteq X$ atžvilgiu, yra atvira aibė, t.y. $(T^{-1})^{-1}(U) = T(U)$ yra atvira aibė erdvėje Y.

(b) Jeigu $F \subseteq X$ yra uždara aibė, tai $(T(F))^c = T(F^c)$ yra atviroji aibė pagal (a) dalį. Vadinasi, $T(F)$ yra uždaroji aibė.

(c) Jeigu $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$, pagal tolydumo apibrėžimą, yra koverguojanti seka ir $x_n \to x$, tai, kadangi, T yra tolydus operatorius: $T(x_n) \to T(x)$. Vadinasi, T atvaizduoja konverguojančią seką į konverguojančią seką.

(d) Tarkime, X yra Banacho erdvė ir pasirinkime Koši seką $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq Y$. Apibrėžkime $x_n := T^{-1}y_n$. Tuomet $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ yra Koši seka, nes

$$0 \leq ||x_n - x_m|| = ||T^{-1}y_n - T^{-1}y_m|| = ||T^{-1}(y_n - y_m)|| \leq ||T^{-1}|| \cdot ||y_n - y_m|| \xrightarrow{n,m\to\infty} 0.$$

Tai reiškia, kad seka $\{x_n\}$ konverguoja. Pažymėsime šios sekos ribą $\lim (x_n) = x \in X$. Tuomet įrodysime, kad mūsų pasirinkta Koši seka $\{y_n\}$ konverguoja (turi ribą $y = Tx$) į elementą $y = T(x) \in Y$:

$$0 \leq ||y_n - y|| = ||Tx_n - Tx|| = ||T(x_n - x)|| \leq ||T|| \cdot ||x_n - x|| \longrightarrow 0.$$

Vadinasi, kiekviena erdvės Y Koši seka konverguoja ir tai parodo, kad Y yra Banacho erdvė.

$\square$

Išvados

Išanalizuotos tiesinių operatorių savybės baigtinėse erdvėse: tiesiniai operatoriai baigtinėse normuotose erdvėse visada bus tolydūs. O paprasčiausios operacijos atliekamos su operatoriaisi, kurie yra tolydūs ir kurių apibrėžimo sritis yra normuotoje (Banacho) erdvėje.

Išanalizuotos homeomorfinių atvaizdžių ir izomorfizmų savybės:

Homeomorfinis atvaizdis:

(a) išsaugo visas pagrindines (vadinamąsias topologines) metrinių erdvių savybes:

- atvirosios aibės atvaizduojamos į atvirąsias,
- ribiniai taškai — į ribinius.

(b) jeigu yra izometrija, tai išsaugo metrines savybes:

- atstumus tarp elementų ir jų vaizdų.

Izomorfizmas išsaugo:

(a) visas pagrindines (vadinamąsias topologines) normuotų erdvių savybes:

- atvirosios aibės atvaizduojamos į atvirąsias,
- ribiniai taškai — į ribinius,
- uždarąsias aibes — į uždarąsias,
- konverguojančias sekas — į konverguojančias sekas,
- pilnąsias erdves — į pilnąsias erdves (Banacho — į Banacho).

Taip pat, pagal atliktą literatūros analizę ir pateiktus pavyzdžius, išspręsti uždaviniai.

Literatūros šaltiniai

[1] Misevičius, E. (1998). *Matematinė analizė I dalis*. Vilnius, Lietuva: TEV; p. 12-14.

[2] Paulauskas, V., Račkauskas, A. (2007). *Funkcinė analizė I knyga. Erdvės*. Vilnius, Lietuva: UAB "Vaistų žinios"; p. 8-9, 12-13, 104-109, 128-133.

[3] Kabaila, V. (1983). *Matematinė analizė 1 dalis*. Vilnius, Lietuva: Mokslas; p. 7-10.

[4] Alekna, P., Indila, K. (2001). *Matematinės analizės įvadas*. Šiauliai, Lietuva: Šiaulių universitetas; p. 5-8, 18.

[5] Paulauskas, V., Račkauskas, A. (2007). *Funkcinė analizė II knyga. Funkcijos ir lygtys*. Vilnius, Lietuva: UAB "Vaistų žinios"; p. 7-9, 60-95.

[6] Vershynin, R. (2010). *Lectures in Functional Analysis*. Nuoroda: https://www.math.uci.edu/~rvershyn/teaching/2010-11/602/functional-analysis.pdf (tikrinta 2024-04-10)

[7] Rudinas, V. (1978). *Matematinės analizės pagrindai*. Vilnius, Lietuva: Mokslas; p. 17, 22-23, 68-72.

[8] Rudin, W. (2016). *Mathematics 522. Bounded Linear Operators and the Definition of Derivatives*. Nuoroda https://people.math.wisc.edu/~aseeger/522/lin.pdf (tikrinta 2024-05-06)