VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATIKOS MAGISTRANTŪROS STUDIJŲ PROGRAMA

Kompaktinės aibės. Kompaktiniai operatoriai Banacho erdvėse.

Compact sets. Compact operators on Banach spaces.

Baigiamasis magistro darbas

Atliko: Aušrinė Abariūtė
VU el. p.: ausrine.abariute@mif.stud.vu.lt

Vadovas: Dr. Audrius Kačėnas

Vilnius
2024

Turinys

Kompaktinės aibės. Kompaktiniai operatoriai Banacho erdvėse.

Santrauka

Šis magistro darbas sudarytas iš teorinės ir praktinės dalių. Teorinėje darbo dalyje yra pristatoma kompaktinių aibių ir kompaktinių operatorių įvairiose erdvėse apibendrinta teorinė medžiaga. Ši medžiaga nagrinėjama topologinėse, metrinėse ir tiesinėse normuotose erdvėse. Dalis teiginių teisingi tik pilnoms metrinėms erdvėms. Paskutiniame teorinės dalies skyriuje yra įrodomos pagrindinės kompaktinių operatorių spektrinės teoremos. Magistro darbo praktinė dalis iliustruoja teorinę dalį keliais išspręstais uždaviniais: nagrinėjami Hilberto Šmito operatoriai, įrodomas jų kompaktiškumas ir kiti iš to sekantys rezultatai, randamas spektras.

Šio darbo tikslas – nuodugniai susipažinti su kompaktiškumo sąvoka įvairiose erdvėse, apžvelgti tiesinius kompaktinius operatorius ir jų spektrinę teoriją.

Raktiniai žodžiai: reliatyviai kompaktinė aibė, kompaktinė aibė, kompaktinis operatorius, tiesinių tolydžių operatorių spektras.

Compact sets. Compact operators on Banach spaces.

Abstract

This Master's thesis consists of theoretical and practical parts. In the theoretical part of the work, the theoretical material of compact sets and compact operators in various spaces is presented. This material is considered in topological, metric and normed linear spaces. Some statements are valid only for complete metric spaces. The last chapter of the theoretical part proves the main spectral theorems of compact operators. The practical part of the Master's thesis illustrates the theoretical part with several solved problems: the Hilbert Schmidt operators are considered, their compactness and other results are proved, and the spectrum is found.

The goal of this thesis is to present the concept of compactness in various spaces, review linear compact operators and their spectral theory.

Key words: relatively compact set, compact set, compact operator, spectrum of bounded linear operators.

1 Įvadas

Kompaktiškumo idėja vystėsi vienu iš pažangiausių matematinės veiklos laikotarpių, tiriant realiųjų skaičių aibės $\mathbb{R}$ savybes. Nepriklausomai viena nuo kitos, XIX amžiuje atsirado dvi kompaktiškumo sampratos: pirmoji kompaktinę aibę aiškino naudojantis aibės $\mathbb{R}$ topologiniais bruožais, antroji ją aiškino sekų konvergavimu.

1872 m. Heinrich Eduard Heine įrodė, kad tolydi funkcija uždarame ir aprėžtame realiųjų skaičių intervale yra tolygiai tolydi. Savo įrodymą H. E. Heine pagrindė lema, teigiančia, kad kiekvienai uždaro ir aprėžto intervalo skaičiai atvirųjų intervalų dangai egzistuoja baigtinis podenginis. Taikydamas panašų į H. E. Heine įrodymo metodą, 1894 m. Émile Borel nustatė šią realiųjų skaičių aibės savybę: kiekviena uždaro ir aprėžto intervalo atviroji danga turi baigtinį podenginį. ([6]) Aibės, turinčios šią savybę, vėliau buvo pavadintos kompaktinėmis.

Apibrėžimas. *Aibė $A \subset \mathbb{R}$ vadinama kompaktine, jei iš kiekvienos jos atviros dangos galima išrinkti baigtinį podenginį.*

Ši aibės savybė, kaip buvo pastebėta, yra būdinga tik aprėžtiems ir uždariems realiųjų skaičių aibės intervalams. Todėl normuotoje erdvėje $\mathbb{R}$ kompaktinės aibės apibrėžimas dar yra užrašomas kita ekvivalenčia forma, dažnai vadinama Heine-Borel teorema.

Teorema. (Heine-Borel) *Aibė $A \subset \mathbb{R}$ yra kompaktinė tada ir tik tada, kai ji yra uždara ir aprėžta.*

Kita kompaktiškumo samprata siejama su matematikų Karl Weierstrass ir Bernard Bolzano darbais. 1877 m. K. Weierstrass, pritaikęs B. Bolzano lemą (1817 m.) apie realiųjų skaičių didžiausią apatinį rėžį, įrodė funkcijos, apibrėžtos uždarame ir aprėžtame realių skaičių intervale, maksimumo egzistavimą. ([6]) Tiek K. Weierstrass, tiek B. Bolzano idėjos rėmėsi realiųjų skaičių aibės sekų terminais ir taip iškėlė vieną svarbiausių sekos savybių, kuri šiandien yra žinoma kaip Bolzano-Weierstrass teorema.

Teorema. (Bolzano-Weierstrass) *Kiekviena aprėžta realiųjų skaičių seka turi konverguojantį posekį.*

Kitaip tariant, Bolzano-Weierstrass teorema teigia, kad kiekviena aprėžta realiųjų skaičių seka turi ribinį tašką. Jei aibė yra uždara, tai visi jos ribiniai taškai priklauso tai aibei. Uždara ir aprėžta aibė, kaip jau minėta, yra kompaktinė.

Kompaktiškumo sampratą palaipsniui papildė ir pagilino kitos garsių matematikų teorijos. Įrodyta, kad Heine-Borel ir Bolzano-Weierstrass teoremos yra teisingos ne tik realiųjų skaičių aibei $\mathbb{R}$, bet ir visoms baigtinės dimensijos Euklido erdvėms $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Vis dėlto, perėjus prie abstrakčių erdvių, pastebėta, kad baigtinės dimensijos erdvėms galiojusi Bolzano-Weierstrass kompaktinės aibės savybė bendru atveju nėra teisinga: begalinės dimensijos erdvės aprėžta aibė gali turėti sekų, iš kurių negalima išrinkti jokio konverguojančio posekio. Siekiant išsaugoti šią aibės savybę bendruoju atveju, buvo įvestos papildomos sąlygos, kurias turėjo tenkinti aibė (jas pristatysime vėliau).

Tiesinio kompaktinio operatoriaus sąvokos atsiradimas buvo motyvuojamas integralinių lygčių tyrimu ir siekiu apibendrinti baigtinio rango matricomis išreiškiamus tiesinius operatorius, veikiančius tarp baigtinės dimensijos erdvių. Pirmieji teoriniai pagrindai buvo suformuoti XIX ir XX amžių sandūroje matematikų David Hilbert, Erik Ivar Fredholm ir Frigyes Riesz darbuose. Reikšmingais metais laikomi 1912 m., kuomet D. Hilbert įrodė, kad integralinės lygties išsprendžiamumas priklauso ne nuo integralinio operatoriaus išraiškos, bet nuo sąlygos, kad integralinės lygties tiesinis operatorius yra kompaktinis. ([1]) Šis rezultatas buvo labai svarbus formuluojant Fredholmo teoriją.

Darbo aktualumas.

Nagrinėjant abstrakčias begalinės dimensijos erdves įrodoma, kad kompaktiškumas išlaiko kai kurias savybes, būdingas baigtinės dimensijos erdvėms. Bendruoju atveju normuotos erdvės kompaktinė aibė yra tam tikra prasme „beveik“ baigtinės dimensijos, o tiesinis kompaktinis operatorius panašus į baigtinio rango tiesinį operatorių. Be abejonės, baigtinės dimensijos erdvės ir baigtinio rango operatoriai yra kur kas aiškesni, jie mažiau abstraktūs, juos lengviau konstruoti ir su jais paprasčiau dirbti. Taigi, kompaktiškumas yra galingas įrankis, leidžiantis kiek įmanoma „priartėti“ prie baigtinės dimensijos erdvių teorijos.

Kita vertus, dėl Fredholmo teorijos pritaikomumo, kompaktiniai operatoriai atlieka esminį vaidmenį sprendžiant sudėtingesnio pavidalo tiesines lygtis, tokias kaip integralines, diferencialines ir dalinių išvestinių diferencialines lygtis. Visos šios lygtys yra svarbios matematinei fizikai, kvantinei mechanikai, inžinerijai ir kitoms mokslo sritims.

Darbo tikslas: nuodugniai susipažinti su kompaktiškumo sąvoka įvairiose erdvėse, apžvelgti tiesinius kompaktinius operatorius ir jų spektrinę teoriją.

2 Teorinė dalis

2.1 Kompaktinės aibės

2.1.1 Kompaktinės aibės sąvoka

Skyrelį pradėkime nuo pagrindinio kompaktinės aibės apibrėžimo, kuris yra Heine-Borel teoremos apie dangas apibendrinimas bendruoju atveju.

1 Apibrėžimas ([2]). Tegul $(\mathbb{X}, \tau)$ yra topologinė erdvė. Aibė $A \subset \mathbb{X}$ vadinama kompaktine, jei iš bet kurios aibės A atvirosios dangos, t. y. tokios atvirųjų aibių $G_\alpha \in \tau$, $\alpha \in I$ sistemos $\{G_\alpha\}$, kad

$$A \subset \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha,$$

galima išrinkti baigtinį podenginį, t. y. egzistuoja tokios aibės $G_{\alpha_1}, \ldots, G_{\alpha_n}$, $n \in \mathbb{N}$, jog

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}.$$

Topologinė erdvė $(\mathbb{X}, \tau)$ yra kompaktinė, jei aibė $\mathbb{X}$ yra kompaktinė.

Dabar tarkime, kad nagrinėjamu atveju turime erdvę su joje apibrėžta metrika. Kadangi tiek metrika, tiek norma generuoja topologijas, natūralu, kad pastarasis kompaktinės aibės apibrėžimas galioja ir metrinėms bei normuotosioms erdvėms.

Pagal kitą Heine-Borel teoremos formuluotę normuotosioms erdvėms, žinome, kad baigtinės dimensijos Euklido erdvėse $\mathbb{R}^n$ kompaktinės aibės apibrėžimas yra ekvivalentus tos aibės uždarumui ir aprėžtumui. Be to, kompaktinei erdvės $\mathbb{R}^n$ aibei yra teisinga Bolzano-Weierstrass savybė: kiekviena aprėžta seka turi konverguojantį posekį. Vis dėlto, bendruoju atveju ši aibės savybė negalioja: aprėžta bet kurios metrinės erdvės aibė gali turėti sekų, iš kurių negalima išrinkti konverguojančio posekio. Pavyzdžiui, galima nesunkiai patikrinti, kad metrinės erdvės ℓ_2 bazinių elementų seka $(e_n, n \in \mathbb{N})$ yra aprėžta, tačiau neturi jokio konverguojančio posekio. Taigi, siekiant išsaugoti šią aibės savybę bendruoju atveju, akivaizdu, kad aibės kompaktiškumas turi būti apibrėžiamas kitaip. Įvesime naują sąvoką, kuri, kaip matysime, yra stipresnė už aibės aprėžtumą.

2 Apibrėžimas ([2]). Tegul $(\mathbb{X}, d)$ yra metrinė erdvė. Aibė $K \subset \mathbb{X}$ vadinama reliatyviai kompaktine, jei iš kiekvienos tos aibės elementų sekos galima išrinkti erdvėje $\mathbb{X}$ konverguojantį posekį.

Prisiminę Bolzano-Weierstrass teoremą, iškart pastebime, kad bet kuri baigtinės dimensijos normuotosios erdvės aprėžta aibė yra reliatyviai kompaktinė. Galima įrodyti, kad atvirkščia įdėtis taip pat yra teisinga. Tiksliau, galioja šis faktas.

1 Išvada ([2]). Tiesinės normuotosios erdvės kiekviena aprėžta aibė yra reliatyviai kompaktinė tada ir tik tada, kai erdvė yra baigtinės dimensijos.

Bendruoju atveju metrinės erdvės aprėžta aibė nebūtinai yra reliatyviai kompaktinė, tačiau atvirkščias teiginys visuomet teisingas.

2 Išvada ([2]). Tegul $(\mathbb{X}, d)$ yra bet kuri metrinė erdvė. Tada reliatyviai kompaktinė aibė yra aprėžta.

Įrodymas. Tarkime, reliatyviai kompaktinė aibė $K \subset \mathbb{X}$ nėra aprėžta, $x_1 \in K$ – bet kuris elementas. Tuomet egzistuoja toks $x_2 \in K$, kad $d(x_1, x_2) > 1$. Toliau rasime tokį $x_3 \in K$, kad $d(x_1, x_3) > d(x_1, x_2) + 1$. Bet tada egzistuoja toks $x_4 \in K$, kad $d(x_1, x_4) > d(x_1, x_3) + 1$. Tęsdami šį procesą, indukcijos būdu gausime neaprėžtą seką $(x_n) \subset K$, kuri tenkina nelygybę $d(x_n, x_m) > 1$ su visais n, $m \in \mathbb{N}$. Tačiau tokia seka neturi jokio konverguojančio posekio, kadangi konverguojantis posekis turi būti aprėžtas. $\square$

Dabar jau galime pateikti kitą kompaktinės aibės apibrėžimą, kuris galioja metrinėse erdvėse bendruoju atveju.

3 Apibrėžimas ([2]). Tegul $(\mathbb{X}, d)$ yra metrinė erdvė. Aibė $K \subset \mathbb{X}$ vadinama kompaktine, jei ji yra uždara ir reliatyviai kompaktinė. Metrinė erdvė $(\mathbb{X}, d)$ yra kompaktinė, jei aibė $\mathbb{X}$ yra kompaktinė.

Kadangi dauguma šiame darbe pateiktų rezultatų bus skirti normuotosioms erdvėms, toliau naudosimės tik antruoju kompaktinės aibės apibrėžimu. Jį, beje, galime užrašyti kitais žodžiais: metrinės erdvės aibė $K \subset \mathbb{X}$ yra kompaktinė, jei kiekviena jos seka turi konverguojantį posekį aibėje K. Šiuo atveju visi ribiniai elementai priklauso aibei K, todėl ji automatiškai yra uždara. Toks aibės kompaktiškumo formulavimas dažnai sutinkamas užsienio autorių literatūroje, angliškai yra vadinamas terminu *sequential compactness.* ([1])

Pagal Heine-Borel teoremą, jei $\mathbb{X}$ yra baigtinės dimensijos normuota erdvė, tai uždaras vienetinis rutulys $B_{\mathbb{X}} := B_{\mathbb{X}}(0, 1) = \{x \in \mathbb{X} : \|x\| \leqslant 1\}$ yra kompaktinė aibė. Sekanti Ryso lema teigia, kad begalinio matavimo erdvėse taip niekada negali būti.

1 Lema (Ryso, [7]). Begalinės dimensijos normuotoje erdvėje $\mathbb{X}$ apibrėžtas uždaras vienetinis rutulys $B_{\mathbb{X}}$ nėra kompaktinė aibė.

Pastebėkime, kad ši Ryso lema dar kartą patvirtina, jog bendruoju atveju aibės aprėžtumas ir uždarumas negarantuoja jos kompaktiškumo. Toliau įrodysime svarbią kompaktinės aibės savybę – pilnumą.

1 Teiginys ([2]). Kompaktinė metrinė erdvė yra pilna.

Įrodymas. Tegul $(\mathbb{X}, d)$ yra kompaktinė metrinė erdvė ir (x_n) – jos Koši seka. Koši seka yra aprėžta, todėl remiantis kompaktiškumo apibrėžimu seka (x_n) turi konverguojantį posekį. Bet tada ir pati seka konverguoja. □

Pilna metrinė erdvė nebūtinai yra kompaktinė – turime patikrinti reliatyvų kompaktiškumą. Vis dėlto, nustatyti, ar iš kiekvienos aibės elementų sekos galima išrinkti konverguojantį posekį, praktikoje gali būti sudėtinga. Sekančiame skyrelyje pristatysime kelis alternatyvius kriterijus, padedančius nustatyti pilnų metrinių erdvių reliatyvų kompaktiškumą. Hausdorfo teorema bus esminė.

2.1.2 Aibės kompaktiškumo kriterijai

Šiame skyrelyje $(\mathbb{X}, d)$ yra metrinė erdvė. Pirmiausia apibrėšime ε tinklo sąvoką.

4 Apibrėžimas ([2]). Tegul aibė $K \subset \mathbb{X}$ ir $\varepsilon > 0$. Aibė $\mathcal{N}_\varepsilon \subset \mathbb{X}$ vadinama aibės K ε tinklu, jei kiekvieną $x \in K$ atitinka toks $x_\varepsilon \in \mathcal{N}_\varepsilon$, kad $d(x, x_\varepsilon) < \varepsilon$.

1 Teorema (Hausdorfo, [2]). Tarkime, $(\mathbb{X}, d)$ yra pilna metrinė erdvė. Aibė $K \subset \mathbb{X}$ yra reliatyviai kompaktinė tada ir tik tada, kai su kiekvienu $\varepsilon > 0$ egzistuoja aibės K baigtinis ε tinklas.[1]

Vadinasi, pilnos metrinės erdvės aibė yra kompaktinė, jei ji yra uždara ir turi ε tinklą, sudarytą iš baigtinio skaičiaus elementų. Pastaroji aibės savybė kai kuriuose literatūros šaltiniuose dar vadinama visišku aprėžtumu (angl. *total boundedness*). ([1], [5]) Vaizdžiai

[1]Ekvivalenčiai, pilnos metrinės erdvės aibė $K \subset \mathbb{X}$ yra reliatyviai kompaktinė tada ir tik tada, kai su kiekvienu $\varepsilon > 0$ egzistuoja aibės K reliatyviai kompaktinis ε tinklas, t. y. egzistuoja toks baigtinis poaibis $K_\varepsilon \subset \mathbb{X}$, kad $d(x, K_\varepsilon) < \varepsilon$ su visais $x \in K$. ([2])

tariant, aibė $K \subset \mathbb{X}$ yra visiškai aprėžta, jei su kiekvienu $\varepsilon > 0$ aibė K yra padengta baigtine sąjunga atvirųjų rutulių su spinduliu ε.

Sekantis rezultatas teigia, kad aibės visiškas aprėžtumas yra būtina sąlyga, kad abstrakti metrinė erdvė būtų kompaktinė. Išvados įrodymui pakanka pasinaudoti 1 Teiginiu ir Hausdorfo teorema.

3 Išvada ([1]). Tarkime, $(\mathbb{X}, d)$ yra kompaktinė metrinė erdvė. Tada aibė $\mathbb{X}$ turi baigtinį ε tinklą.

Atskiru atveju, tiesinėse normuotose erdvėse Hausdorfo teorema aiškiai atspindi baigtinės dimensijos idėją. Kiekvienas kompaktinės aibės taškas gali būti aproksimuojamas baigtinio ε tinklo tašku. Būtent, jei $\mathbb{X}$ yra tiesinė normuota erdvė virš skaliarų kūno $\mathbb{K}$, $K \subset \mathbb{X}$ – kompaktinė aibė, $\mathcal{N}_\varepsilon = \{x_1, \dots, x_m\}$ – aibės K baigtinis ε tinklas, tai aibės $\mathcal{N}_\varepsilon$ generuotas tiesinis apvalkalas

$$\operatorname{tap}(\mathcal{N}_\varepsilon) = \left\{ \sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k : \ x_1, \dots, x_m \in \mathcal{N}_\varepsilon, \ \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K} \right\}$$

yra erdvės $\mathbb{X}$ baigtinės dimensijos poerdvis, o kažkuris jo poaibis aproksimuoja aibę K ε tikslumu. Aibės $\mathcal{N}_\varepsilon$ tiesinio apvalkalo dimensija neviršija m, t. y. $\dim \operatorname{tap}(\mathcal{N}_\varepsilon) \leqslant m$.

4 Išvada ([2]). Kompaktinė metrinė erdvė yra separabili.

Įrodymas. Tegul $(\mathbb{X}, d)$ yra kompaktinė metrinė erdvė. Pagal 3 Išvadą, su kiekvienu $n \in \mathbb{N}$ egzistuoja aibės $\mathbb{X}$ baigtinis $1/n$ tinklas $K_n = \{y_1^{(n)}, \dots, y_{k_n}^{(n)}\}$. Parodysime, kad aibė

$$K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$$

yra skaiti ir visur tiršta. Kadangi K yra skaiti sąjunga baigtinių aibių, tai K yra skaiti. Dabar imkime $\varepsilon > 0$, $x \in \mathbb{X}$ ir $n \in \mathbb{N}$ tokį, kad $1/n < \varepsilon$. Aibė K_n yra aibės $\mathbb{X}$ baigtinis $1/n$ tinklas, todėl atsiras toks $y_j^{(n)} \in K_n \subset K$, su kuriuo $d(x, y_j^{(n)}) < 1/n < \varepsilon$. Taigi, aibė K yra visur tiršta. $\square$

Toliau be įrodymo pateiksime ekvivalenčias teoremas apie erdvių $C[a, b]$ ir $L_p(a, b)$ reliatyviai kompaktines aibes.

2 Teorema (Arcela-Askolio, [2]). Aibė $K \subset C[a, b]$ yra reliatyviai kompaktinė tada ir tik tada, kai ji yra aprėžta ir lygialaipsniškai tolydi, t. y. kiekvieną $\varepsilon > 0$ atitinka toks

$\delta = \delta(\varepsilon) > 0,$ kad bet kuriai funkcijai $f \in K$

$$|f(t) - f(s)| \, < \, \varepsilon,$$

kai $|s - t| < \delta.$

3 Teorema (Ryso, [2]). Aibė $K \subset L_p(a, b),$ čia $a, b \in \mathbb{R},\ a < b,\ p \geqslant 1,$ yra reliatyviai kompaktinė tada ir tik tada, kai ji yra aprėžta ir lygialaipsniškai p-integruojama, t. y. kiekvieną $\varepsilon > 0$ atitinka toks $\delta = \delta(\varepsilon) > 0,$ kad bet kuriai funkcijai $f \in K$

$$\int\limits_a^b |f(t+h) - f(t)|^p \, dt \, < \, \varepsilon,$$

kai $0 \leqslant h < \delta.$

Šios dvi teoremos yra plačiai taikomos praktikoje sprendžiant įvairius uždavinius. Kaip pavyzdį parodykime, kad diferencijuojamų uždarame intervale $[a, b]$ aprėžtų funkcijų aibė su aprėžtomis išvestinėmis yra kompaktinė erdvėje $C[a, b]$. Iš tikrųjų, tarkime, kad $L, M > 0,$ aibė

$$K \, := \, \{f \in C^1[a, b] : \ |f(x)| \leqslant L, \, |f'(x)| \leqslant M, \ \forall x \in [a, b]\}.$$

Akivaizdu, kad K yra aprėžta ir uždara aibė. Tegul $|x - y| < \delta,\ \delta = \varepsilon / M.$ Pasinaudoję vidutinės reikšmės teorema gauname, kad egzistuoja toks $c \in [a, b],$ su kuriuo

$$|f(x) - f(y)| \, = \, |f'(c)(x - y)| \, \leqslant \, M \cdot |x - y| \, < \, M\delta \, = \, \varepsilon,$$

čia $x,\ y \in [a, b],\ x > y.$ Pastaroji nelygybė yra teisinga visoms funkcijoms $f \in K,$ todėl aibė K yra lygialaipsniškai tolydi. Remiantis Arcela-Askolio teorema, K yra kompaktinė erdvėje $C[a, b]$. Suprantama, kad aibė K nebūtų reliatyviai kompaktinė, jeigu ją sudarančios funkcijos arba tų funkcijų išvestinės būtų neaprėžtos.

Panašiai samprotaujant galima įrodyti, kad aibės

$$K_1 \, := \, \{f \in C^1[0, 1] : \ |f(0)| + \max_{x \in [0,1]} |f'(x)| \, \leqslant \, 1, \ \forall x \in [0, 1]\},$$
$$K_2 \, := \, \{f \in C[0, 1] : \ |f(0)| + \int_0^1 |f(x)| \, dx \, \leqslant \, 1, \ \forall x \in [0, 1]\}$$

yra kompaktinės erdvėje $C[0, 1]$.

2.2 Kompaktiniai operatoriai

Šiame skyriuje apžvelgsime svarbią tiesinių tolydžiųjų operatorių klasę – kompaktinius operatorius. Kaip matysime, kompaktiniai operatoriai yra tam tikra prasme panašūs į baigtinės dimensijos erdvėse veikiančius operatorius (panašiai kaip normuotų erdvių kompaktinės aibės yra „beveik" baigtinės dimensijos). Svarbi kompaktinių operatorių klasė yra Hilberto Šmito operatoriai, kuriuos detaliau nagrinėsime praktinėje darbo dalyje.

2.2.1 Kompaktinio operatoriaus sąvoka

Tegul $\mathbb{E}, \mathbb{F}$ yra tiesinės normuotos erdvės virš to paties skaliarų kūno $\mathbb{K}$, $L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ – tiesinių tolydžiųjų (aprėžtųjų) operatorių $T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ tiesinė erdvė.

5 Apibrėžimas ([3]). Tiesinis operatorius $T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ vadinamas kompaktiniu, jei su kiekviena aprėžtąja aibe $A \subset \mathbb{E}$ aibė $T(A)$ yra reliatyviai kompaktinė.

Kitaip tariant, operatorius $T \in L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ yra kompaktinis, jei su kiekviena aprėžtąja seka $(x_n) \subset \mathbb{E}$ seka $(Tx_n) \subset \mathbb{F}$ turi konverguojantį posekį. Pastebėkime, kad kompaktinio operatoriaus apibrėžime vietoje aprėžtųjų aibių pakanka nagrinėti aibės $\mathbb{E}$ kokį nors vienetinį rutulį. Iš tiesų, tiesinis operatorius $T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ yra kompaktinis tada ir tik tada, kai jis aibę $B_{\mathbb{E}} = \{x \in \mathbb{E} : \ \|x\| \leqslant 1\}$ atvaizduoja į reliatyviai kompaktinę aibę. Šio teiginio įrodymas yra pateiktas B. P. Rynne ir M. A. Youngson knygoje [4].

Kompaktinis operatorius ekvivalenčiai dar gali būti apibrėžiamas įvedant prekompaktinės aibės[2] (angl. *precompact set*) sąvoką. Sakoma, kad metrinės erdvės aibė K yra prekompaktinė, jei jos uždarinys $\overline{K}$ yra kompaktinė aibė. ([7]) Tada teisingas sekantis kompaktinio operatoriaus apibrėžimas.

5* Apibrėžimas ([7]). Tiesinis operatorius $T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ vadinamas kompaktiniu, jei su kiekviena aprėžtąja aibe $A \subset \mathbb{E}$ aibė $T(A)$ yra prekompaktinė.

Ekvivalentumo įrodymas. Tegul $T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ yra tiesinis operatorius ir su kiekviena aprėžtąja aibe $A \subset \mathbb{E}$ aibė $T(A) \subset \mathbb{F}$ yra reliatyviai kompaktinė. Tegul $(y_n) \subset \overline{T(A)}$ yra bet kokia seka. Tada su visais $n \in \mathbb{N}$, egzistuoja tokie elementai $x_n \in A$, kad $\|y_n - Tx_n\| < n^{-1}$, čia seka (x_n) yra aprėžta, nes A – aprėžta aibė. Kadangi seka (Tx_n) turi konverguojantį posekį, tai seka (y_n) turės konverguojantį posekį su ribiniu tašku uždarinyje $\overline{T(A)}$. Kadangi seką (y_n) pasirinkome bet kokią, tai aibė $\overline{T(A)}$ yra kompaktinė.

[2]Dalis autorių vietoje prekompaktinės aibės termino naudoja tą pačią reliatyvaus kompaktiškumo sąvoką.

Dabar tarkime, kad su kiekviena aprėžtąja aibe $A \subset \mathbb{E}$ aibė $T(A) \subset \mathbb{F}$ yra prekompaktinė. Tuomet su kiekviena aprėžta seka $(x_n) \subset A$ seka (Tx_n) guli kompaktinėje aibėje, taigi, (Tx_n) turi konverguojantį posekį. T. y. aibė $T(A)$ yra reliatyviai kompaktinė. $\square$

E. Kreyszig knygoje [1] įrodoma, kad bet kuri metrinės erdvės (nebūtinai pilnos) prekompaktinė aibė yra visiškai aprėžta, t. y. su kiekvienu $\varepsilon > 0$ turi baigtinį ε tinklą.[3] Kita vertus, jei metrinės erdvės aibė K yra reliatyviai kompaktinė, tai jos uždarinys $\overline{K}$ yra kompaktinė aibė. Pagal 3 Išvadą žinome, kad aibei $\overline{K}$ egzistuoja baigtinis ε tinklas. Tačiau $K \subset \overline{K}$, taigi, aibė K irgi turi baigtinį ε tinklą. Vadinasi, 3 Išvadą iš tiesų galima susilpninti nereikalaujant reliatyviai kompaktinės aibės uždarumo.

Kompaktinis operatorius anksčiau buvo vadinamas visiškai tolydžiu (angl. *completely continuous*) operatoriumi. ([1]) Šis pavadinimas buvo motyvuojamas tuo, kad tiesinis kompaktinis operatorius visada yra tolydus (aprėžtas). Išties, tiesinių kompaktinių operatorių $T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ aibę pažymėję $K(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ ir prisiminę, kad reliatyviai kompaktinė aibė yra aprėžta (2 Išvada), turime $K(\mathbb{E}, \mathbb{F}) \subset L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$. Įrodysime, kad aibė $K(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ iš tikrųjų yra erdvės $L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ tiesinis poerdvis.

2 Teiginys ([4]). Aibė $K(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ yra tiesinė ir uždara erdvėje $L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$.

Įrodymas. Aibės $K(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ tiesiškumas erdvėje $L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ įrodomas paprastai, todėl šią teiginio dalį praleisime. Įsitikinsime aibės $K(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ uždarumu. Tegul seka $(T_n) \subset K(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ yra tokia, kad $T_n \to T$ erdvėje $L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$. Tada kiekvieną $\varepsilon > 0$ atitinka toks $n \in \mathbb{N}$, kad $\| T_n - T \| < \varepsilon$. Vadinasi, su visais $x \in B_{\mathbb{E}}$ teisingas įvertis $\| T_n x - Tx \| < \varepsilon$. Ši nelygybė rodo, kad $T_n(B_{\mathbb{E}})$ yra prekompaktinis aibės $T(B_{\mathbb{E}})$ ε tinklas. Kadangi $\varepsilon > 0$ yra bet koks, tai aibė $T(B_{\mathbb{E}})$ yra prekompaktinė. Taigi, $T \in K(\mathbb{E}, \mathbb{F})$. $\square$

Sekantys rezultatai paaiškina, kodėl kompaktiniai operatoriai yra panašūs į baigtinės dimensijos erdvėse veikiančius operatorius. Priminsime, kad tiesinis operatorius $T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ vadinamas baigtiniamačiu (baigtinio rango), jei $\dim R(T) < \infty$.

3 Teiginys ([4]). Tarkime, $T \in L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$. Teisingi šie teiginiai:

(1) Jei T yra baigtiniamatis, tai T yra kompaktinis.

(2) Jei $\dim \mathbb{E} < \infty$ arba $\dim \mathbb{F} < \infty$, tai T yra kompaktinis.

[3] Ekvivalenčiai, jei metrinės erdvės aibė $K \subset \mathbb{X}$ yra prekompaktinė, tai su kiekvienu $\varepsilon > 0$ egzistuoja aibės K prekompaktinis ε tinklas. ([7])

Įrodymas. (1) Baigtiniamačio operatoriaus $T \in L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ vaizdas $T(B_{\mathbb{E}})$ yra aprėžta aibė baigtinės dimensijos erdvėje $R(T) \subseteq \mathbb{F}$. Pagal Heine-Borel teoremą tiesinėms normuotosioms erdvėms, šiuo atveju aprėžtumas ir reliatyvus kompaktiškumas yra ekvivalentūs.

(2) Jei $\dim \mathbb{E} < \infty$, tai $\dim R(T) \leqslant \dim \mathbb{E}$, taigi, T yra kompaktinis pagal teiginio pirmą punktą. Jei $\dim \mathbb{F} < \infty$, tai būtinai $\dim R(T) < \infty$, kadangi $R(T) \subset \mathbb{F}$. Taigi, gauname tą pačią išvadą. $\square$

4 Teiginys ([7]). Tarkime, operatorių $T \in L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ galima aproksimuoti baigtinio rango operatorių seka $T_n \in L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$, t. y. $\|T_n - T\| \to 0$, kai $n \to \infty$. Tada T yra kompaktinis.

Remiantis 3 Teiginiu ir 4 Teiginiu, akivaizdu, kad kompaktinių operatorių klasė yra natūralus baigtinio rango operatorių klasės apibendrinimas begalinės dimensijos atveju. Dėl šios priežasties kompaktinių operatorių teorija daugeliu atžvilgių yra panaši į baigtinės dimensijos erdvėse apibrėžtų operatorių teoriją. Tai matyti ir iš sekančio rezultato, kuris tiesiogiai išplaukia iš 4 Teiginio.

5 Teiginys ([4]). Jei tiesinis operatorius $T \in K(\mathbb{E}, \mathbb{F})$, tai $R(T)$ yra separabili aibė.

Kiekvieno baigtiniamačio operatoriaus reikšmių sritis yra separabili aibė. Todėl jei baigtinio rango operatorių seka (T_n) konverguoja į operatorių T, tai sekos (T_n) riba irgi turės separabilią reikšmių sritį. Vadinasi, net jei aibė $\mathbb{E}$ yra „didelė“ (neseparabili), kompaktinio operatoriaus $T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ reikšmių sritis yra visuomet „maža“ (separabili).

2.2.2 Kompaktinių operatorių savybės

Tegul $\mathbb{E}, \mathbb{F}, \mathbb{G}$ yra tiesinės normuotos erdvės virš to paties skaliarų kūno $\mathbb{K}$.

6 Teiginys ([4]). Jei $S \in L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$, $T \in L(\mathbb{F}, \mathbb{G})$ ir bent vienas iš operatorių T, S yra kompaktinis, tai tiesinė kompozicija $T \circ S \in L(\mathbb{E}, \mathbb{G})$ yra kompaktinis operatorius.

Įrodymas. Tegul $(x_n) \subset \mathbb{E}$ yra aprėžta seka. Jei $S \in L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ yra kompaktinis, tai egzistuoja toks posekis $(x_{n(r)}) \subset (x_n)$, kad $(Sx_{n(r)})$ konverguoja. Operatorius T tolydus, todėl seka $(TSx_{n(r)})$ taip pat konverguoja. Taigi, $T \circ S \in L(\mathbb{E}, \mathbb{G})$ yra kompaktinis. Iš kitos pusės, jei S yra tolydus, tai seka (Sx_n) aprėžta. Kadangi $T \in K(\mathbb{F}, \mathbb{G})$, tai egzistuoja toks posekis $(Sx_{n(r)}) \subset (Sx_n)$, kad $(TSx_{n(r)})$ konverguoja. Gauname tą pačią išvadą. $\square$

Pagal 3 Teiginį, jei $\mathbb{E}$ yra baigtinės dimensijos erdvė, tai tapatingasis operatorius $I_{\mathbb{E}} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$, $I_{\mathbb{E}}x = x$ yra kompaktinis. Galima įsitikinti, kad jei $\mathbb{E}$ yra begalinės dimensijos erdvė, šis teiginys niekada nėra teisingas.

7 Teiginys ([7]). Tegul $\mathbb{E}$ yra begalinės dimensijos normuota erdvė. Tada tapatingasis operatorius $I_{\mathbb{E}}$ nėra kompaktinis. Bendruoju atveju, bet kuris izomorfizmas $T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ nėra kompaktinis.

Įrodymas. Pirmosios teiginio dalies įrodymui pakanka pasinaudoti Ryso lema. Įrodysime antrąją teiginio dalį. Tarkime, izomorfizmas $T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ yra kompaktinis, čia $\mathbb{E}$ yra begalinės dimensijos. Tuomet pagal 6 Teiginį tapatingasis operatorius $I_{\mathbb{E}} = T^{-1} \circ T$ irgi yra kompaktinis. Gauta prieštara įrodo tvirtinimą. □

Vadinasi, operatorius $I_{\mathbb{E}}$ yra kompaktinis tada ir tik tada, kai $\dim(\mathbb{E}) < \infty$. Iš 6 Teiginio ir 7 Teiginio pastebėkime kitą svarbią išvadą. Sakoma, kad tiesinis operatorius $T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ yra apverčiamas, jei jis turi atvirkštinį atvaizdį $T^{-1} : \mathbb{F} \to \mathbb{E}$ tokį, kad $T^{-1} \circ T = I_{\mathbb{E}}$ ir $T \circ T^{-1} = I_{\mathbb{F}}$. ([3]) Pagal 6 Teiginį, jei $T \in K(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ būtų apverčiamas, tai tapatingasis operatorius $I_{\mathbb{E}}$ būtų kompaktinis. Tačiau jei $\mathbb{E}$ yra begalinės dimensijos, pagal 7 Teiginį taip negali būti. Taigi, teisingas šis rezultatas.

5 Išvada ([4]). Tarkime, $\mathbb{E}$ yra begalinės dimensijos normuota erdvė ir operatorius $T \in K(\mathbb{E}, \mathbb{E})$. Tada T nėra apverčiamas.

2.2.3 Jungtinių operatorių kompaktiškumas

Kompaktiniai jungtiniai operatoriai atlieka svarbų vaidmenį Fredholmo teorijoje ir dėl to yra reikalingi apibrėžiant kompaktinio operatoriaus, veikiančio Banacho erdvėje, spektrą. Šio skyrelio pagrindiniu rezultatu yra laikoma vadinamoji Šauderio teorema apie jungtinio operatoriaus kompaktiškumą. Pirmiausia apibrėšime tiesinio tolydžiojo operatoriaus jungtinio operatoriaus sąvoką atskirai Banacho ir Hilberto erdvėse.

Tegul $\mathbb{E}, \mathbb{F}$ yra Banacho erdvės, $\mathbb{E}^*, \mathbb{F}^*$ – atitinkamos jungtinės erdvės, $f \in \mathbb{F}^*$ ir $T \in L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ toks, kad operatoriaus T apibrėžimo sritis $D(T) = \mathbb{E}$. Funkcionalo f reikšmę taške x žymėkime simboliu $\langle f, x \rangle$, t. y. $\langle f, x \rangle = f(x)$.

6 Apibrėžimas ([3]). Atvaizdis $T^* : \mathbb{F}^* \to \mathbb{E}^*$, apibrėžtas lygybe $\langle T^*f, x \rangle = \langle f, Tx \rangle$, $f \in \mathbb{F}^*$, $x \in \mathbb{E}$, vadinamas operatoriaus T jungtiniu operatoriumi.

Yra žinoma, kad jei $T \in L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$, tai $T^* \in L(\mathbb{F}^*, \mathbb{E}^*)$ ir $\|T^*\| = \|T\|$. ([3]) Be to, kiekvieną operatorių T atitinka vienintelis jungtinis operatorius T^*.

Dabar tarkime, kad $\mathbb{H}$ yra Hilberto erdvė su skaliarine daugyba $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $T \in L(\mathbb{H})$, $y \in \mathbb{H}$.

7 Apibrėžimas ([3]). Atvaizdis $T^* : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, turintis savybę $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$, $x, y \in \mathbb{H}$, vadinamas operatoriaus T Hilberto erdvės jungtiniu operatoriumi.

8 Apibrėžimas ([3]). Tiesinis tolydus operatorius $T : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ vadinamas savijungiu, jei $T = T^*$, t. y. kai $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ su visais $x, y \in \mathbb{H}$.

Svarbu pabrėžti, kad savijungiai operatoriai yra apibrėžiami tik Hilberto erdvėse veikiantiems operatoriams. Kai kuriuose literatūros šaltiniuose savijungis operatorius dar vadinamas Ermito operatoriumi. ([1], [5]) Toks suteiktas pavadinimas yra logiškas, nes jungtiniai operatoriai iš esmės yra matricos transponavimo tiesinėje algebroje apibendrinimas, o savijungiai operatoriai savo ruožtu yra simetrinės Ermito matricos atitikmuo begalinės dimensijos atveju. Dėl šios priežasties savijungį operatorių $T \in L(\mathbb{H})$ yra patogu nagrinėti per jo kvadratinę formą $f(x) = \langle Tx, x\rangle$, $x \in \mathbb{H}$. ([7]) Akivaizdu, kad ši kvadratinė forma yra realioji, t. y. $f(x) \in \mathbb{R}$ su visais $x \in \mathbb{H}$. Be to, kvadratinė forma operatorių T apibrėžia vieninteliu būdu.

Sekanti lema teigia, kad tolydaus operatoriaus branduolys ir jo jungtinio operatoriaus reikšmių sritis yra dualūs Hilberto erdvėse. Lema yra svarbi įrodant Fredholmo teorijos teiginius.

2 Lema ([5]). Tegul $T \in L(\mathbb{H})$. Teisingi šie sąryšiai:

(1) $\ker T = R(T^*)^{\perp}$;

(2) $\ker T^* = R(T)^{\perp}$.

Dabar be įrodymo pateiksime minėtąją Šauderio teoremą apie jungtinio operatoriaus kompaktiškumą. Kadangi Hilberto erdvė yra kartu ir Banacho, natūralu, kad Šauderio teorema teisinga ir Hilberto erdvės jungtiniams ir savijungiams operatoriams.

4 Teorema (Šauderio, [3]). Jei erdvė $\mathbb{F}$ yra Banacho ir $T \in L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$, tai $T \in K(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ tada ir tik tada, kai $T^* \in K(\mathbb{F}^*, \mathbb{E}^*)$.

2.3 Kompaktinių operatorių spektras

Tiesinio operatoriaus, veikiančio baigtinės dimensijos erdvėje, spektrinė teorija iš esmės yra tikrinių reikšmių radimo uždavinys baigtinėms matricoms. Išties, iš tiesinės algebros žinome, kad bet kurį baigtinės dimensijos kompleksinėje erdvėje veikiantį tiesinį operatorių $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ galima užrašyti baigtinio rango kvadratine matrica. Tuomet tiesinė lygtis $Tx = \lambda x$ yra tapatinga lygčiai $Ax = \lambda x$, čia A yra tiesinį operatorių T atitinkanti kvadratinė matrica, $x \in \mathbb{C}^n$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Sakoma, kad tiesinio operatoriaus T spektrą sudaro tokie skaičiai λ, su kuriais lygtis $Ax = \lambda x$ turi nenulinius sprendinius x. Šiuo atveju skaičius $\lambda \in \mathbb{C}$ yra vadinamas operatoriaus T tikrine reikšme, o sprendinys $x \in \mathbb{C}^n$ – operatoriaus T tikriniu vektoriumi, atitinkančiu tikrinę reikšmę λ.

Šiame skyriuje apibendrinsime spektro sąvoką tuo atveju, kai erdvė, kurioje veikia tiesinis operatorius, gali būti bet kurios dimensijos. Detaliau apžvelgsime kompaktinio operatoriaus spektrinį išdėstymą.

2.3.1 Pagrindinės spektrinės teorijos sąvokos

Tegul $\mathbb{E}$ žymi begalinės dimensijos tiesinę normuotą erdvę virš skaliarų kūno $\mathbb{K}$, $T : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ yra tiesinis tolydus operatorius. Nagrinėkime tiesinę lygtį $Tx = \lambda x$, čia $x \in \mathbb{E}$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

9 Apibrėžimas ([7]). Skaičius $\lambda \in \mathbb{K}$ yra operatoriaus $T \in L(\mathbb{E})$ reguliarioji reikšmė, jei tiesinis tolydus operatorius $T - \lambda I$ yra apverčiamas, t. y. $(T - \lambda I)^{-1} \in L(\mathbb{E})$. Visos likusios $\lambda \in \mathbb{K}$ reikšmės vadinamos spektro taškais. Reguliariųjų reikšmių aibė vadinama operatoriaus T rezolventine aibe ir yra žymima $\rho(T)$. Operatoriaus T spektru vadinama aibė $\sigma(T) = \mathbb{K} \backslash \rho(T)$.

Begalinės dimensijos atveju operatorius $T - \lambda I$ gali neturėti tiesinio tolydaus atvirkštinio operatoriaus dėl įvairių priežasčių. Atsižvelgiant į tai, operatoriaus T spektras yra skirstomas į kelias rūšis.

10 Apibrėžimas ([3]). Operatoriaus $T \in L(\mathbb{E})$ spektras skirstomas į:

- taškinį spektrą

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \sigma(T) : (T - \lambda I)^{-1} \text{ neegzistuoja}\};$$

- tolydųjį spektrą

$$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \sigma(T) : (T - \lambda I)^{-1} \text{ egzistuoja, yra netolydus,} \\ \text{o aibė } R(T - \lambda I) \text{ yra visur tiršta}\};$$

- likutinį spektrą

$$\sigma_r(T) = \{\lambda \in \sigma(T) : (T - \lambda I)^{-1} \text{ egzistuoja, yra netolydus,} \\ \text{o aibė } R(T - \lambda I) \text{ nėra visur tiršta}\}.$$

Operatoriaus $T \in L(\mathbb{E})$ tikrinėmis reikšmėmis vadinsime visus skaičius $\lambda \in \mathbb{K}$, priklausančius operatoriaus T taškiniam spektrui $\sigma_p(T)$. Kitaip tariant, $\lambda \in \mathbb{K}$ yra operatoriaus $T \in L(\mathbb{E})$ tikrinė reikšmė tada ir tik tada, kai egzistuoja toks nenulinis elementas $x \in \mathbb{E}$, kad $Tx = \lambda x$. Kiekvieną tokį nenulinį x, kuriam teisinga ši lygybė, vadinsime operatoriaus T tikriniu elementu, atitinkančiu tikrinę reikšmę λ.

Kadangi spektras negali būti tuščias ([7]), tai baigtinės dimensijos erdvėje apibrėžtas tiesinis operatorius T visada turi tikrinių reikšmių, o jo spektras yra grynai taškinis: $\sigma(T) = \sigma_p(T)$. Bendruoju atveju, kai $\mathbb{E}$ yra begalinės dimensijos normuota erdvė virš kūno $\mathbb{K}$, operatoriaus $T \in L(\mathbb{E})$ spektras yra užrašomas nesikertančia sąjunga

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T),$$

skaliarų kūnas $\mathbb{K} = \sigma(T) \cup \rho(T)$.

Begalinės dimensijos atveju operatoriaus $T \in L(\mathbb{E})$ spektrinė teorija iš esmės yra operatoriaus $T - \lambda I$ apverčiamumo tyrimas. Operatorius $T - \lambda I$ yra apverčiamas (turi atvirkštinį), jeigu $T - \lambda I$ yra injektyvus, t. y. $\ker(T - \lambda I) = \{0\}$. Remiantis šiuo faktu ir operatoriaus rezolventinės aibės bei spektro apibrėžimais, išskirkime tokius atvejus:

(1) Jei $T - \lambda I$ nėra injektyvus, t. y. $\ker(T - \lambda I) \neq \{0\}$, tai operatorius $T - \lambda I$ nėra apverčiamas. Toks λ yra operatoriaus T tikrinė reikšmė.

(2) Jei $T - \lambda I$ yra injektyvus (todėl apverčiamas), bet nėra siurjektyvus, t. y. $R(T - \lambda I) \neq \mathbb{E}$, tai toks λ priklauso operatoriaus T tolydžiajam arba likutiniam spektrui.

(3) Jei operatorius $T - \lambda I$ yra injektyvus ir siurjektyvus (bijektyvus), tai būtinai $\ker(T - \lambda I) = \{0\}$ ir $R(T - \lambda I) = \mathbb{E}$. Be to, pagal Banacho teoremą apie atvirąjį atvaizdį, $(T - \lambda I)^{-1} \in L(\mathbb{E})$. Šiuo atveju λ yra operatoriaus $T \in L(\mathbb{E})$ rezolventinės aibės taškas.

8 Teiginys ([3]). Tarkime, $T \in L(\mathbb{E})$ ir $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ yra skirtingos operatoriaus T tikrinės reikšmės. Tada šias reikšmes atitinkantys tikriniai elementai $x_1, \dots, x_n$ yra tiesiškai nepriklausomi.

11 Apibrėžimas ([3]). Tarkime, $T \in L(\mathbb{E})$. Aibė $N_\lambda = \ker(T - \lambda I)$ vadinama operatoriaus T tikriniu poerdviu, atitinkančiu tikrinę reikšmę λ. Šio poerdvio dimensija vadinama tikrinės reikšmės λ kartotinumu.

Tikrinio poerdvio sąvoka bus reikalinga nagrinėjant kompaktinio operatoriaus spektrą. Kitais žodžiais tariant, aibę N_λ sudaro erdvės $\mathbb{E}$ nulis ir visi operatoriaus T tikriniai elementai, atitinkantys tikrinę reikšmę λ. Taigi, $x \in N_\lambda$ tada ir tik tada, kai $Tx = \lambda x$.

2.3.2 Kompaktinių operatorių spektrinis išdėstymas

Kaip jau išsiaiškinome, begalinės dimensijos erdvėje veikiančio tiesinio tolydaus operatoriaus T spektras gali būti sudarytas iš visų trijų dedamųjų dalių – taškinio, tolydžiojo ir likutinio spektro. Tačiau jei tiesinis operatorius yra kompaktinis, jo spektrinė teorija gerokai supaprastėja ir netgi tampa panaši į baigtinės dimensijos erdvėje veikiančio tiesinio operatoriaus spektrinę teoriją. Šio skyrelio pabaigoje įrodysime, kad kompaktinio operatoriaus, apibrėžto Banacho erdvėje, spektras yra palyginti paprastas – jį sudaro erdvės nulis ir taškinis spektras.

Tegul $\mathbb{E}$ yra begalinės dimensijos normuota erdvė virš skaliarų kūno $\mathbb{K}$, $T : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ yra kompaktinis operatorius.

9 Teiginys ([7]). Jei $T : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ yra kompaktinis, tai $0 \in \sigma(T)$.

Įrodymas. Tarkime priešingai: operatorius $T \in K(\mathbb{E})$ ir $0 \notin \sigma(T)$. Tada $0 \in \rho(T)$, taigi, egzistuoja operatoriaus T atvirkštinis T^{-1} ir $T^{-1}T = I$ yra kompaktinis operatorius. Gavome prieštarą 7 Teiginiui. □

Jei tiesinis operatorius $T : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ būtų apibrėžtas baigtinės dimensijos erdvėje $\mathbb{E}$, tai būtinai galiotų implikacija: jei $0 \notin \sigma(T)$, tai $0 \in \rho(T)$. Tuo atveju, kai $\dim \mathbb{E} = \infty$, o operatorius $T \in L(\mathbb{E})$ yra kompaktinis, tai erdvės nulis visada priklauso T spektrui ir visi trys variantai yra įmanomi:

$$0 \in \sigma_p(T), \qquad 0 \in \sigma_c(T), \qquad 0 \in \sigma_r(T).$$

Toliau sakykime, kad $\lambda \neq 0$. Bendruoju atveju kompaktinis operatorius, veikiantis begalinės dimensijos erdvėje, gali ir neturėti nenulinių tikrinių reikšmių. Pavyzdžiui, B. P. Rynne ir M. A. Youngson knygoje [4] įrodoma, kad Voltero operatorius $T : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$ yra kompaktinis ir jo spektrą sudaro vienintelė tikrinė reikšmė $\lambda = 0$. Vis dėlto, jei kompaktinis operatorius turi nenulinių tikrinių reikšmių, apie jas galima kai ką įdomaus pasakyti.

5 Teorema ([3]). Operatoriaus $T \in K(\mathbb{E})$ tikrinio poerdvio N_λ, atitinkančio tikrinę reikšmę λ, dimensija yra baigtinė.

Įrodymas. Tegul $S_\lambda = \{x \in N_\lambda : \|x\| \leqslant 1\}$ žymi aibės N_λ uždarą vienetinį rutulį ir nagrinėkime aprėžtą seką $(x_n) \subset S_\lambda$. Kadangi T yra kompaktinis, tai iš sekos (Tx_n) galime išrinkti konverguojantį posekį, pažymėkime jį $(Tx_{n'})$. Kadangi

$$x_n = \frac{1}{\lambda} T x_n$$

su visais $n \geqslant 1$, tai konverguoja ir posekis $(x_{n'})$. Bet tada ir pati seka (x_n) konverguoja. Taigi, gauname, kad bet kuri aibės S_λ aprėžta seka yra reliatyviai kompaktinė. Remiantis 1 Išvada, $\dim(N_\lambda) < \infty$. □

Dabar apibrėšime kompaktinio operatoriaus, veikiančio begalinės dimensijos normuotoje erdvėje $\mathbb{E}$, taškinį spektrą. Sekančios teoremos įrodymas remiasi pagalbiniu teiginiu, dažnai vadinamu Ryso lema apie beveik statmenį.

3 Lema ([2]). Tegul $\mathbb{E}$ yra tiesinė normuota erdvė, $E_0 \subset \mathbb{E}$ – uždaras tiesinis poaibis, nesutampantis su $\mathbb{E}$. Kiekvienam $\varepsilon > 0$ erdvėje $\mathbb{E}$ egzistuoja toks elementas $y_\varepsilon \in \mathbb{E}$, kad $\|y_\varepsilon\| = 1$ ir $\|x - y_\varepsilon\| > 1 - \varepsilon$ su visais $x \in E_0$.

6 Teorema ([3]). Tarkime, $T \in K(\mathbb{E})$. Tada kiekvieną $\varepsilon > 0$ gali atitikti tik baigtinis skaičius tikrinių reikšmių, tenkinančių nelygybę $|\lambda| \geqslant \varepsilon$. Be to, operatoriaus T tikrinių reikšmių aibė $\sigma_p(T)$ yra baigtinė arba skaiti. Jei ji skaiti, tai tikrinių reikšmių seka turi vienintelį ribinį tašką $\lambda = 0$.

Įrodymas. Tarkime priešingai: egzistuoja toks $\varepsilon > 0$ ir seka (λ_k) skirtingų tikrinių reikšmių, kad $|\lambda_k| \geqslant \varepsilon$, $k = 1, 2, \ldots$. Tikrinių elementų, kuriuos apibrėžia lygybės $Tx_n = \lambda_n x_n$, $n \in \mathbb{N}$, seka (x_k) yra tiesiškai nepriklausoma (8 Teiginys).

Nagrinėkime erdvės $\mathbb{E}$ poerdvius $E_n = \text{tap}\{x_1, \ldots, x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Tada $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ ir kiekvienas elementas $x \in E_n$ gali būti užrašomas tiesine kombinacija $x = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$.

Pažymėkime operatorių $T_\lambda := T - \lambda I$. Pasinaudoję lygybe $Tx_j = \lambda_j x_j$, gauname

$$T_{\lambda_n} x \;=\; \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_n)x_1 + \ldots + \alpha_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n)x_{n-1} \;\in\; E_{n-1}$$

su visais $x \in E_n$. Poerdviai E_n yra uždari, todėl, remiantis 3 Lema, egzistuoja erdvės $\mathbb{E}$ elementų seka (y_n), tenkinanti sąlygas: $y_n \in E_n$, $\|y_n\| = 1$, $\|x - y_n\| > 1/2$ su visais $x \in E_{n-1}$, $n > 1$. Kadangi operatorius T yra kompaktinis, o seka (y_n/λ_n) aprėžta, tai seka (Ty_n/λ_n) turi konverguojantį posekį.

Tegul $m > n$. Nagrinėkime skirtumą

$$T(y_m/\lambda_m) - T(y_n/\lambda_n) \;=\; y_m - \left(T_{\lambda_m}\left(\frac{y_m}{\lambda_m}\right) + T\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right)\right) \;:=\; y_m - \tilde{y}.$$

Pagal įrodytus sąryšius turime

$$T_{\lambda_m}\left(\frac{y_m}{\lambda_m}\right) \in E_{m-1}, \qquad T\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right) \in E_n \subset E_{m-1},$$

taigi, elementas $\tilde{y} \in E_{m-1}$. Pritaikę 3 Lemą, gauname

$$\|T(y_m/\lambda_m) - T(y_n/\lambda_n)\| \;=\; \|y_m - \tilde{y}\| \;>\; 1/2.$$

Ši nelygybė rodo, kad seka $(T(y_n/\lambda_n))$ neturi jokio konverguojančio posekio. Tačiau taip negali būti, nes T yra kompaktinis. Gavome prieštarą pradžioje darytai prielaidai. Tai, kad $\lambda = 0$ yra vienintelis tikrinių reikšmių sekos ribinis taškas, išplaukia iš ką tik įrodytų rezultatų. $\square$

Taigi, jei normuotoje erdvėje veikiantis kompaktinis operatorius turi be galo daug tikrinių reikšmių, tai jas galime užrašyti seka, konverguojančia į nulį.

Toliau tarkime, kad $\mathbb{E}$ yra begalinės dimensijos Banacho erdvė, $T \in L(\mathbb{E})$ yra kompaktinis operatorius, $T^* \in L(\mathbb{E}^*)$ – jo jungtinis. Remiantis Šauderio teorema, $T^* \in L(\mathbb{E}^*)$ taip pat yra kompaktinis. Be įrodymo pateiksime pagrindinį Fredholmo-Ryso-Šauderio teorijos teiginį.

7 Teorema ([3]). Tegul $\mathbb{E}$ yra Banacho erdvė, $T \in K(\mathbb{E})$. Šie tvirtinimai ekvivalentūs:

- $R(T - \lambda I) = \mathbb{E}$;
- $R(T^* - \lambda I) = \mathbb{E}^*$;
- $\ker(T - \lambda I) = \{0\}$;
- $\ker(T^* - \lambda I) = \{0\}$.

Iš pateiktų sąryšių gauname, kad jei $T \in K(\mathbb{E})$, tai operatorius $T - \lambda I$ yra injektyvus tada ir tik tada, kai $T - \lambda I$ yra siurjektyvus. Ta pati išvada galioja ir operatoriui $T^* - \lambda I$. Kitas rezultatas, kurį gauname iš 7 Teoremos, pateiktas sekančioje išvadoje. Čia brūkšnys virš $\sigma(T)$ žymi operatoriaus T spektro jungtines reikšmes.

6 Išvada. Tegul $T^* \in L(\mathbb{E}^*)$ yra operatoriaus $T \in K(\mathbb{E})$ jungtinis operatorius. Tuomet $\sigma(T) = \overline{\sigma(T^*)}$.

Būtent, jei $\lambda \notin \sigma(T)$, tai operatorius $T - \lambda I$ yra apverčiamas. Bet tada ir $T^* - \overline{\lambda} I$ apverčiamas, o tai reiškia, kad $\overline{\lambda} \notin \sigma(T^*)$. Taigi, pateikta išvada yra teisinga. Be to, jei T yra savijungis operatorius, tai būtinai $\sigma(T) = \sigma(T^*)$.

Toliau pateiksime Banacho erdvėje $\mathbb{E}$ apibrėžto kompaktinio operatoriaus bendrąją spektro išraišką. Erdvės $\mathbb{E}$ pilnumas čia yra esminė sąlyga, kadangi ji leidžia pasinaudoti Fredholmo-Ryso-Šauderio teorema.

10 Teiginys ([7]). Tegul $T \in K(\mathbb{E})$ yra kompaktinis operatorius, apibrėžtas Banacho erdvėje $\mathbb{E}$. Tada $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\}$.

Įrodymas. Jau įrodėme, kad $0 \in \sigma(T)$. Tarkime, kad $\lambda \in \sigma(T)$, $\lambda \neq 0$. Pagal 7 Teoremą, arba $T - \lambda I$ nėra injektyvus (tada $\lambda \in \sigma_p(T)$), arba $T - \lambda I$ yra injektyvus ir siurjektyvus (bijektyvus). Pastaruoju atveju pagal Banacho teoremą apie atvirąjį atvaizdį, atvirkštinis operatorius $(T - \lambda I)^{-1}$ yra tolydus, vadinasi, $\lambda \notin \sigma(T)$. Teiginys įrodytas. $\square$

Taigi, jei $T \in K(\mathbb{E})$, tai kiekvienas operatoriaus T spektro taškas $\lambda \neq 0$ (jei jis egzistuoja) yra operatoriaus T tikrinė reikšmė. Kompaktinio operatoriaus T taškinis spektras $\sigma_p(T)$ gali būti ir tuščia aibė, tačiau pats spektras $\sigma(T)$ niekada nebus tuščias: kaip jau išsiaiškinome, $\lambda = 0$ visada yra kompaktinio operatoriaus spektro dalis. Be to, nulis yra vienintelė $\lambda \in \mathbb{K}$ reikšmė, galinti priklausyti kompaktinio operatoriaus likutiniam arba tolydžiam spektrui.

Užbaigiant šį skyrių, sakykime, kad kompaktinis operatorius T yra apibrėžtas separabilioje begalinės dimensijos Hilberto erdvėje. Be įrodymo pateiksime sekančią teoremą, kuri dažnai yra vadinama kompaktinio savijungio operatoriaus spektrine teorema.

8 Teorema (Hilberto-Šmito, [7]). Tarkime, $T \in L(\mathbb{H})$ yra kompaktinis savijungis operatorius, apibrėžtas separabilioje Hilberto erdvėje $\mathbb{H}$. Tada egzistuoja erdvės $\mathbb{H}$ ortonormuotoji bazė (ψ_k), sudaryta iš operatoriaus T tikrinių elementų.

Hilberto-Šmito teorema leidžia kompaktinius savijungius operatorius $T \in L(\mathbb{H})$ užrašyti diagonalia forma, panašiai kaip Ermito matricą baigtinės dimensijos atveju. Sakykime, (ψ_k) yra begalinės dimensijos Hilberto erdvės $\mathbb{H}$ ortonormuotoji bazė, sudaryta iš operatoriaus T tikrinių elementų, $T\psi_k = \lambda\psi_k$. Kiekviena separabili Hilberto erdvė $\mathbb{H}$ yra izometriškai izomorfinė erdvei ℓ_2 ([4]), todėl jei (e_k) yra erdvės ℓ_2 standartinė bazė, tai operatorius $T : \ell_2 \to \ell_2$ yra apibrėžiamas formule $Te_k = \lambda_k e_k$. Ekvivalenčiai, $T((x_k)_{k=1}^{\infty}) = (\lambda_k x_k)_{k=1}^{\infty}$ su kiekvienu vektoriumi $x \in \ell_2$.

Kita vertus, jei (ψ_k) – erdvės $\mathbb{H}$ ortonormuotoji bazė, sudaryta iš kompaktinio savijungio operatoriaus T tikrinių elementų, tai kiekvienas elementas $x \in \mathbb{H}$ yra atitinkamos Furjė eilutės suma, t. y.

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x,\, \psi_k\rangle \psi_k.$$

Veikdami šį elementą operatoriumi T, gauname išraišką

$$Tx = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle x,\, \psi_k\rangle \psi_k, \qquad x \in \mathbb{H}.$$

3 Praktinė dalis

Šioje praktinėje darbo dalyje nagrinėsime Hilberto Šmito operatorius. Tegul $\mathbb{H}$ yra begalinės dimensijos separabili Hilberto erdvė su ortonormuota baze (e_n). Tiesinis tolydus operatorius $T : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ vadinamas Hilberto Šmito operatoriumi, jei tenkinama sąlyga

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 < \infty. \tag{3.1}$$

Apie Hilberto Šmito operatorius yra žinomi šie faktai ([4]):

- Hilberto Šmito operatoriaus apibrėžimas nepriklauso nuo erdvės $\mathbb{H}$ ortonormuotos bazės pasirinkimo.
- Operatorius $T \in L(\mathbb{H})$ yra Hilberto Šmito tada ir tik tada, kai jo jungtinis operatorius T^* yra Hilberto Šmito.
- Jei $T \in L(\mathbb{H})$ yra Hilberto Šmito operatorius, tai T yra kompaktinis.

Uždavinys 1

Tegul operatorius $T : \ell_2 \to \ell_2$ yra apibrėžtas lygybe

$$Tx = \left(0,\, x_1,\, \frac{x_2}{2},\, \ldots,\, \frac{x_n}{n},\, \ldots\right), \qquad x = (\,x_1,\, x_2,\, \ldots\,) \in \ell_2. \tag{3.2}$$

Įrodysime, kad T yra kompaktinis operatorius ir surasime jo spektrą.

Akivaizdu, kad operatorius T, apibrėžtas (3.2) lygybe, yra tiesinis tolydus operatorius. Parodysime, kad T yra kompaktinis. Tą galima atlikti dviem būdais: įrodant, kad T yra Hilberto Šmito operatorius, arba naudojantis kompaktinio operatoriaus apibrėžimu. Pademonstruosime abu įrodymo būdus.

Pagal Hilberto Šmito operatoriaus apibrėžimą užtenka patikrinti, kad operatorius T, apibrėžtas separabilioje Hilberto erdvėje ℓ_2 su ortonormuota baze (e_n), tenkina sąlygą (3.1). Nagrinėkime erdvės ℓ_2 standartinę ortonormuotą bazę $(e_n,\, n \in \mathbb{N})$, čia

$$e_n = (\,0,\, 0,\, \ldots,\, \underset{(n)}{1},\, 0,\, 0,\, \ldots\,).$$

Tuomet
$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \;=\; \frac{\pi^2}{6} \;<\; \infty.$$

Vadinasi, (3.2) lygybe apibrėžtas T yra Hilberto Šmito operatorius ir todėl kompaktinis.

Dabar operatoriaus T kompaktiškumą įrodysime naudojantis apibrėžimu. Pagal 4 Teiginį, pakanka rasti tokią baigtinio rango tiesinių tolydžių operatorių seką, kuri konverguoja į operatorių T. Nagrinėkime operatorių seką $T_k : \ell_2 \to \ell_2$ tokią, kad su visais $k \in \mathbb{N}$

$$(T_k\, x)_n \;=\; \begin{cases} 0, & n = 1, \\ \frac{x_{n-1}}{n-1}, & n \leqslant k, \\ 0, & n > k. \end{cases}$$

Akivaizdu, kad T_k yra tiesiniai tolydūs operatoriai su baigtiniu rangu, $\dim R(T_k) = k - 1,\ \forall k \in \mathbb{N}$. Parodysime, kad taip apibrėžta operatorių seka konverguoja į operatorių T. Su visais $x \in \ell_2$ turime

$$\|\,(T_k - T)x\,\|^2 \;=\; \sum_{n=k+1}^{\infty} \left(\frac{|x_{n-1}|}{n-1}\right)^2 \;\leqslant\; k^{-2} \sum_{n=k+1}^{\infty} |x_{n-1}|^2 \;\leqslant\; k^{-2}\|x\|^2.$$

Išplaukia, kad
$$\|\,T_k - T\,\| \;\leqslant\; \frac{1}{k},$$
taigi, $\|\,T_k - T\,\| \to 0$, kai $k \to \infty$. Vadinasi, remiantis 4 Teiginiu, (3.2) lygybe apibrėžtas operatorius T yra kompaktinis.

Suraskime operatoriaus T spektrą. Iš 9 Teiginio žinome, kad $0 \in \sigma(T)$. Nagrinėkime operatoriaus T taškinį spektrą. Sakykime, $\lambda \in \mathbb{C}$ yra (3.2) lygybe apibrėžto operatoriaus T tikrinė reikšmė, atitinkanti nenulinį tikrinį elementą $x \in \ell_2$. Tada

$$\left(0,\, x_1,\, \frac{x_2}{2},\, \ldots,\, \frac{x_n}{n},\, \ldots\right) \;=\; (\,\lambda x_1,\, \lambda x_2,\, \lambda x_3,\, \ldots,\, \lambda x_{n-1},\, \ldots).$$

Jei $\lambda = 0$, tai dešinioji lygybės pusė yra nulinis vektorius, vadinasi, $x_1 = x_2 = \ldots = 0$. Gauname prieštarą, todėl $\sigma_p(T) \not\ni \lambda = 0$. Dabar tarkime, kad $\lambda \neq 0$. Kadangi $\lambda x_1 = 0$, turime $x_1 = 0$. Toliau, kadangi $\lambda x_2 = x_1 = 0$, tai $x_2 = 0$. Tęsdami šį procesą įsitikiname, kad $x_1 = x_2 = \ldots = 0$, o tai vėlgi prieštarauja prielaidai, kad tikrinis elementas $x \in \ell_2$ yra nenulinis. Vadinasi, operatorius T, apibrėžtas (3.2) lygybe, tikrinių reikšmių neturi, t. y. $\sigma_p(T) = \varnothing$.

Lieka patikrinti, kuriam spektrui priklauso erdvės nulis. Tegul $\lambda = 0$. Pastebėkime, kad visų vektorių $x \in R(T)$ pirmoji koordinatė yra 0. Todėl, imant elementą $e_1 = (1, 0, 0, \ldots)$, su visais $x \in R(T)$ yra teisinga nelygybė

$$\|x - e_1\| \geqslant 1.$$

Taigi, radome erdvės ℓ_2 elementą, kurio negalime aproksimuoti jokiu elementu iš reikšmių aibės $R(T)$. Iš čia seka, kad aibė $R(T)$ nėra tiršta erdvėje ℓ_2. Vadinasi, $0 \in \sigma_r(T)$, o (3.2) lygybe apibrėžto operatoriaus spektrą sudaro vienintelis elementas, būtent, $\sigma(T) = \{0\}$.

Uždavinys 2

Tegul operatoriai T, $L : \ell_2 \to \ell_2$ yra apibrėžti lygybėmis

$$Tx = \Big(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots\Big), \qquad Lx = (\,x_2, x_3, x_4, \ldots\,),$$

čia $x = (\,x_1, x_2, x_3, \ldots\,) \in \ell_2$. Įrodysime, kad kompozicija $T \circ L$ yra kompaktinis operatorius ir rasime jo spektrą.

Pirmiausia pastebėkime, kad L yra tolydus operatorius, bet nėra kompaktinis. Būtent, jei $R : \ell_2 \to \ell_2$ yra dešiniojo postūmio operatorius, tai $L \circ R = I$. Remiantis 7 Teiginiu, tapatingasis operatorius I nėra kompaktinis, todėl tiek L, tiek R nėra kompaktiniai.

Tolydaus operatoriaus T kompaktiškumas yra įrodomas panašiai kaip Uždavinyje 1. Vadinasi, jei $T \in K(\ell_2)$, o L – tiesinis tolydus operatorius, tai kompozicija $T \circ L : \ell_2 \to \ell_2$ yra kompaktinis operatorius (6 Teiginys). Ištirkime šio operatoriaus veikimą erdvėje ℓ_2. Su visais $x \in \ell_2$,

$$(T \circ L)x = T(Lx) = T(\,x_2, x_3, x_4, \ldots\,) = \Big(x_2, \frac{x_3}{2}, \frac{x_4}{3}, \ldots\Big).$$

Galima nesunkiai įsitikinti, kad $T \circ L$ yra Hilberto Šmito operatorius. Tegul (e_n) yra erdvės ℓ_2 standartinė ortonormuota bazė. Tada suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|(T \circ L)e_n\|^2 = \sum_{n=2}^{\infty} \|Te_n\|^2 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Taigi, jei $T \circ L$ yra kompaktinis operatorius, tai būtinai $0 \in \sigma(T \circ L)$ (9 Teiginys). Pagal spektro apibrėžimą, $\lambda \in \mathbb{C}$ priklauso operatoriaus $T \circ L$ taškiniam spektrui, jei tiesinė lygtis $(T \circ L)x = \lambda x$ turi nenulinį spendinį $x \in \ell_2$. Užrašykime šią lygtį:

$$\left(x_2,\, \frac{x_3}{2},\, \frac{x_4}{3},\, \dots\right) \;=\; (\,\lambda x_1,\, \lambda x_2,\, \lambda x_3,\, \dots). \tag{3.3}$$

Jei $\lambda = 0$, tai būtinai $x_2 = x_3 = \ldots = 0$. Vadinasi, jei elementas $x \in \ell_2$ yra toks, kad jo pirmoji koordinatė $x_1 \neq 0$, o visos likusios koordinatės yra nuliai, tai toks elementas yra lygties (3.3) sprendinys, atitinkantis tikrinę reikšmę $\lambda = 0$. Taigi, $0 \in \sigma_p(T \circ L)$. Dabar tarkime, kad $\lambda \neq 0$. Su visais $n = 1, 2, \ldots$ turime sistemą

$$\begin{cases} \lambda x_1 \;=\; x_2, \\ \lambda x_2 \;=\; \frac{x_3}{2}, \\ \lambda x_3 \;=\; \frac{x_4}{3}, \\ \quad\cdots\cdots \\ \lambda x_n \;=\; \frac{x_{n+1}}{n}, \\ \quad\cdots\cdots \end{cases}$$

Iš čia gauname, kad kiekviena elemento x koordinatė gali būti išreiškiama per pirmąją koordinatę: $x_n \;=\; (n-1)!\,\lambda^{n-1} x_1,\;\; n \;=\; 1, 2, \ldots.$ Nesiaurindami prasmės laikykime, kad $x_1 = 1$. Tuomet elementas

$$x \;=\; c \cdot \left(1,\, \lambda,\, 2!\lambda^2,\, 3!\lambda^3,\, \dots\right) \tag{3.4}$$

yra tiesinės lygties $(T \circ L)x \;=\; \lambda x$ sprendinys, čia konstanta $c \in \mathbb{C}$. Patikrinkime, ar šis elementas priklauso erdvei ℓ_2. Su visais $\lambda \in \mathbb{C},\; \lambda \neq 0,$ turime

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left|k!\lambda^k\right|^2 \;=\; \infty,$$

t. y. $x \notin \ell_2$, čia x apibrėžtas (3.4) lygybe. Vadinasi, operatoriaus $T \circ L$ taškinį spektrą sudaro vienintelė tikrinė reikšmė, $\sigma_p(T \circ L) \;=\; \{0\}$. Operatoriaus $T \circ L$ tikriniai elementai, atitinkantys tikrinę reikšmę $\lambda = 0$, yra formos $x \;=\; (\,x_1,\, 0,\, 0,\, \dots) \in \ell_2$, čia $x_1 \neq 0$.

Kadangi patikrinome visas $\lambda \in \mathbb{C}$ reikšmes, $\sigma_r(T \circ L) \;=\; \sigma_c(T \circ L) \;=\; \varnothing$.

Uždavinys 3

Tegul integralinis operatorius $T : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$ *yra apibrėžtas formule*

$$(Tf)(s) = \int_0^1 K(s,t) f(t)\, dt \tag{3.5}$$

su branduolio funkcija $K(s,t) \in L_2(0,1)^2$,

$$K(s,t) = \begin{cases} (1-s)t, & 0 \leqslant t \leqslant s, \\ (1-t)s, & s \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Uždavinį suskaidysime į kelias dalis. Pirmiausia surasime integralinio operatoriaus, apibrėžto (3.5) lygybe, spektrą. Tuomet įsitikinsime, kad šio operatoriaus tikrines reikšmes atitinkančios tikrinės funkcijos sudaro erdvės $L_2(0,1)$ *ortogonalią bazę. Pabaigai įrodysime, kad operatorius* T *yra kompaktinis tolydžių funkcijų erdvėje* $C[0,1]$.

Rynne ir Youngson knygoje [4] pateikiamas įrodymas, kad integralinis operatorius, veikiantis bet kurioje separabilioje Hilberto erdvėje, yra Hilberto Šmito operatorius. Taigi, (3.5) lygybe apibrėžtas operatorius T yra kompaktinis ir, remiantis 9 Teiginiu, $0 \in \sigma(T)$.

Operatoriaus T jungtinis operatorius T^* taip pat yra integralinis ir nusakomas branduoliu K^*, $K^*(s,t) = K(t,s)$, t. y.

$$(T^* f)(s) = \int_0^1 K(t,s) f(t)\, dt,$$

čia $s, t \in (0,1)$, $f \in L_2(0,1)$. Akivaizdu, kad nagrinėjamu atveju $K(t,s) = K(s,t)$, t. y. branduolys yra simetrinė funkcija. Gauname $T = T^*$, taigi, (3.5) lygybe apibrėžtas operatorius T yra kompaktinis savijungis ir visos jo tikrinės reikšmės yra realiosios, t. y. $\sigma_p(T) \subset \mathbb{R}$.

Nagrinėkime integralinio operatoriaus T spektrą. Tegul $Tf = \lambda f$, $f \in L_2(0,1)$:

$$\lambda f(s) = \int_0^1 K(s,t) f(t)\, dt = \int_0^s (1-s)t \cdot f(t)\, dt + \int_s^1 (1-t)s \cdot f(t)\, dt. \tag{3.6}$$

Pastebėkime, kad šiai lygčiai yra teisingos kraštinės sąlygos $f(0) = 0$ ir $f(1) = 0$. Be to, funkcija f yra tolygiai diferencijuojama, nes jei $f \in L_2$, o branduolys K – dviejų kintamųjų tolydi funkcija, tai (3.6) tapatybės dešiniojoje pusėje pointegralinės funkcijos yra tolydžios, o patys integralai diferencijuojami. Taigi, pasinaudoję Leibnico formule, diferencijuokime (3.6) tapatybę pagal kintamąjį s:

$$\lambda f'(s) = \int_0^s \frac{\partial}{\partial s}\left[(1-s)t \cdot f(t)\right] dt + (1-s)sf(s) + \int_s^1 \frac{\partial}{\partial s}\left[(1-t)s \cdot f(t)\right] dt -$$
$$- (1-s)sf(s) = \int_0^s -tf(t)\,dt + \int_s^1 (1-t)f(t)\,dt.$$

Panašiai samprotaudami įsitikiname, kad f' taip pat tolygiai diferencijuojama. Pastarąją lygybę dar kartą diferencijuokime pagal kintamąjį s:

$$\lambda f''(s) = \int_0^s \frac{\partial}{\partial s}\left[-tf(t)\right] dt - sf(s) + \int_s^1 \frac{\partial}{\partial s}\left[(1-t)f(t)\right] dt - (1-s)f(s) =$$
$$= -sf(s) - (1-s)f(s) = -f(s).$$

Taigi, gauname antrosios eilės diferencialinę lygtį $\lambda f''(s) + f(s) = 0$. Akivaizdu, kad $\lambda = 0$ negali būti integralinio operatoriaus T tikrine reikšme, kadangi ją atitinka nulinis sprendinys $f = 0$. Toliau tarkime, kad $\lambda \neq 0$ ir perrašykime diferencialinę lygtį tokia forma:

$$f''(s) + \frac{1}{\lambda} f(s) = 0. \tag{3.7}$$

Pažymėkime $h^2 = 1/\lambda$. Gauname, kad (3.7) lygtį atitinkančios charakteristinės lygties

$$k^2 + h^2 = 0$$

šaknys $k_1 = hi$ ir $k_2 = -hi$ yra grynai menamos, todėl (3.7) diferencialinės lygties bendrasis sprendinys yra

$$f(s) = c_1 \sin(hs) + c_2 \cos(hs). \tag{3.8}$$

Įstatę kraštinių sąlygų reikšmes į (3.8) išraišką, gauname $c_2 = 0$ ir $c_1 \sin h = 0$. Pastaruoju atveju, jei $c_1 = 0$, tai gauname trivialų sprendinį $f = 0$. Jei $c_1 \neq 0$, tai $\sin h = 0$, taigi, $h = n\pi$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Tarę, kad $h^2 = 1/\lambda$, gauname, kad (3.5) lygybe apibrėžto integralinio operatoriaus tikrinės reikšmės yra $\lambda_n = (n\pi)^{-2}$, $n = 1, 2, \ldots,$ o jas atitinkančios tikrinės funkcijos yra $f_n(s) = \sin(n\pi s)$, $n = 1, 2, \ldots$. Akivaizdu, kad kiekvienos tikrinės reikšmės λ_n, $n = 1, 2, \ldots$ generuotas tikrinis poerdvis N_{λ_n} yra dimensijos 1, t. y. kiekvienos λ_n kartotinumas yra 1.

Lieka patikrinti tašką $\lambda = 0$, kuris gali priklausyti tolydžiajam arba likutiniam spektrui. Parodysime, kad $0 \in \sigma_c(T)$. Pasinaudoję 2 Lema ir savijungio operatoriaus apibrėžimu, gauname, kad

$$R(T)^{\perp} = \ker T^* = \ker T = \{0\}.$$

Vadinasi, aibė $R(T)$ yra tiršta erdvėje $L_2(0,1)$. Taigi, $0 \in \sigma_c(T)$.

Apibendrinant, (3.5) lygybe apibrėžto integralinio operatoriaus T spektras yra $\sigma(T) = \{0\} \cup \sigma_p(T)$, čia

$$\sigma_p(T) = \{\lambda_n : \ \lambda_n = (n\pi)^{-2}, \ n = 1, 2, \dots\}.$$

Pagal 6 Išvadą, žinome, kad $\sigma(T) = \sigma(T^*)$, t. y. integralinio operatoriaus T ir jo jungtinio operatoriaus T^* spektrai sutampa. Be to, pastebėkime, kad operatoriaus T taškinis spektras yra realus, t. y. $\sigma_p(T) \subset \mathbb{R}$. Taip pat, aišku, kad tikrinių reikšmių aibė yra skaiti, o jos ribinis taškas yra $\lambda = 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2\pi^2} = 0.$$

Toliau parodysime, kad operatoriaus T tikrinės funkcijos, atitinkančios tikrines reikšmes λ_n, sudaro erdvės $L_2(0,1)$ ortogonalią bazę. Tegul $f_n(x) = \sin(n\pi x)$, $n = 1, 2, \dots$. Erdvėje $L_2(0,1)$ nagrinėkime skaliarinę sandaugą, $n \neq m$:

$$\begin{aligned}
\langle f_n, f_m \rangle &= \int_0^1 f_n(x)\overline{f_m(x)}\,dx = \int_0^1 \sin(n\pi x)\,\sin(m\pi x)\,dx = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \cos(n\pi - m\pi)x - \cos(n\pi + m\pi)x\,dx = \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \cos(n\pi - m\pi)x\,dx - \int_0^1 \cos(n\pi + m\pi)x\,dx\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(n\pi - m\pi)x}{n\pi - m\pi}\Bigg|_0^1 - \frac{\sin(n\pi + m\pi)x}{n\pi + m\pi}\Bigg|_0^1\right) = 0,
\end{aligned}$$

čia pasinaudojome žinoma trigonometrine lygybe

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Kai $n = m$, tai $\langle f_n, f_n \rangle = \|f_n\|^2$. Pasinaudoję dvigubo kampo trigonometrine formule, šiuo atveju gauname

$$\|f_n\|^2 = \int_0^1 \sin^2(n\pi x)\,dx = \int_0^1 \frac{1-\cos(2n\pi x)}{2}\,dx = \frac{x}{2}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \cos(2n\pi x)\,dx =$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4\pi}\sin(2n\pi x)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Vadinasi, operatoriaus T tikrinės funkcijos $f_n(x) = \sin(n\pi x)$, $n = 1, 2, \ldots$ sudaro erdvės $L_2(0,1)$ ortogonalią sistemą. Be to, funkcijos f_n yra tiesiškai nepriklausomos, o kadangi erdvė $L_2(0,1)$ yra separabili, tai sistema (f_n) yra skaiti, t. y. (f_n) yra erdvės $L_2(0,1)$ ortogonalioji seka.

Seka (f_n) yra pilna erdvėje $L_2(0,1)$ tada ir tik tada, kai jos ortogonalusis papildymas $(f_n)^{\perp} = \{0\}$. Kitaip tariant, turime parodyti, kad vienintelis erdvės $L_2(0,1)$ elementas, ortogonalus funkcijoms $\sin(n\pi x)$, yra nulinis. Tegul $f \in L_2(0,1)$ ir

$$\int_0^1 f(x)\sin(n\pi x)\,dx = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{3.9}$$

Parodysime, kad $f = 0$ beveik visur intervale $(0,1)$. Šiam įrodymui pasinaudokime žinomu faktu ([7]): eksponenčių sistema $\{(2\pi)^{-1/2}e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ yra erdvės $L_2(-\pi,\pi)$ ortonormuota bazė (todėl yra pilna erdvėje $L_2(-\pi,\pi)$) ir kiekvieną funkciją $f \in L_2(-\pi,\pi)$ galima skleisti tokia Furjė eilute:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cos(nx) + i\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \sin(nx),$$

čia a_n, b_n, c_n yra atitinkami Furjė koeficientai. Kitaip tariant, kiekviena funkcija $f \in L_2(-\pi,\pi)$ gali būti užrašyta lygybe $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, čia

$$f_1(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cos(nx) \ - \text{funkcijos } f \text{ lyginė dalis,}$$
$$f_2(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \sin(nx) \ - \text{funkcijos } f \text{ nelyginė dalis.}$$

Vadinasi, erdvės $L_2(-1,1)$ centruota ortonormuota bazė yra formos $(e^{i\pi nx})_{n\in\mathbb{Z}}$ ir kiekviena funkcija $f \in L_2(-1,1)$, gali būti užrašoma tokia Furjė eilute:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cos(n\pi x) + i \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \sin(n\pi x).$$

Dabar grįžkime prie nagrinėjamos operatoriaus T tikrinių funkcijų sekos (f_n). Pasinaudoję Eulerio formulės išraiška $\sin(n\pi x) = \frac{1}{2i}(\mathrm{e}^{i\pi nx} - \mathrm{e}^{-i\pi nx})$, perrašykime (3.9) lygybę tokia forma:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)\sin(n\pi x)\,dx &= \int_0^1 f(x)\mathrm{e}^{i\pi nx}\,dx - \int_0^1 f(x)\mathrm{e}^{-i\pi nx}\,dx = \\
&= \int_0^1 f(x)\mathrm{e}^{i\pi nx}\,dx - \int_{-1}^0 f(-x)\mathrm{e}^{i\pi nx}\,dx = \\
&= \int_{-1}^1 h(x)\mathrm{e}^{i\pi nx}\,dx = 0, \qquad n = \pm 1, \pm 2, \ldots,
\end{aligned}$$

čia paskutinė lygybė galioja dėl sistemos $(e^{i\pi nx})_{n\in\mathbb{Z}}$ pilnumo erdvėje $L_2(-1,1)$. Naujai sudaryta funkcija $h \in L_2(-1,1)$ yra nelyginė, t. y.

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0,\,1), \\ -f(-x), & x \in (-1,\,0). \end{cases}$$

Kai $n = 0$, tai integralas nuo funkcijos h yra funkcijos h vidutinė reikšmė intervale $(-1,1)$. Tačiau kadangi h – nelyginė, tai jos vidutinė reikšmė intervale $(-1,1)$ yra 0. Vadinasi, funkcija h yra ortogonali visiems pilnos sistemos $(e^{i\pi nx})_{n\in\mathbb{Z}}$ elementams erdvėje $L_2(-1,1)$. Taigi, $h = 0$ beveik visur intervale $(-1,1)$. Bet tada ir $f = 0$ beveik visur intervale $(0,1)$.

Funkciją h, kaip žinoma, galima skleisti Furjė eilute, kurią sudaro tik sinusų nariai:

$$h(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \sin(\pi nx) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_n \sin(\pi nx), \qquad x \in (-1,1). \tag{3.10}$$

Kadangi $h(x) = f(x)$, kai $x \in [0,1)$, tai (3.10) eilutė ir bus funkcijos f eilutė intervale $(0,1)$. Sekos (f_n) pilnumas erdvėje $L_2(0,1)$ yra įrodytas.

Taigi, gauname, kad operatoriaus T tikrinių funkcijų seka (f_n), $f_n(x) = \sin(n\pi x)$, $n = 1, 2, \ldots$ sudaro erdvės $L_2(0,1)$ ortogonalią bazę. Erdvės $L_2(0,1)$ ortonormuota bazė yra funkcijų seka $(\hat{f}_n)$, $\hat{f}_n(x) = \sqrt{2}\sin(n\pi x)$, $n = 1, 2, \ldots$. Turėdami šią bazę, kiekvieną funkciją $f \in L_2(0,1)$ galime užrašyti begaline Furjė sinusų eilute, t. y.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \hat{f}_n \rangle \hat{f}_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left[2 \int_0^1 f(t) \sin(n\pi t)\, dt \right] \sin(n\pi x),$$

o pagal Hilberto-Šmito kompaktinio savijungio operatoriaus spektrinę teoremą, kiekvienos funkcijos $f \in L_2(0,1)$ vaizdas Tf gali būti išskleistas šia eilute:

$$(Tf)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle f, \hat{f}_n \rangle \hat{f}_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi^2} \left[2 \int_0^1 f(t) \sin(n\pi t)\, dt \right] \sin(n\pi x).$$

Galiausiai, tarkime, kad operatorius T, apibrėžtas lygybe (3.5), veikia erdvėje $C[0,1]$ ir atitinka tolydų branduolį $K(s,t)$. Parodysime, kad T yra kompaktinis. Kadangi $C[0,1]$ nėra Hilberto erdvė, taip apibrėžtas operatorius T nėra Hilberto Šmito. Tenka naudotis kompaktinio operatoriaus apibrėžimu.

Tarkime, B yra vienetinis erdvės $C[0,1]$ rutulys. Įrodysime, kad $T(B)$ yra reliatyviai kompaktinė aibė. Remiantis Arcela-Askolio teorema, reikia parodyti, kad aibė $T(B)$ yra aprėžta ir lygialaipsniškai tolydi. Kadangi operatorius T yra aprėžtas (tolydus), tai aibė $T(B)$ aprėžta. Tegul $\varepsilon > 0$, $f \in B$. Branduolys K yra tolydus, todėl egzistuoja toks $\delta_\varepsilon > 0$, kad

$$|K(s_1,t) - K(s_2,t)| < \varepsilon,$$

čia $t \in [0,1]$, o $s_1, s_2 \in [0,1]$ tenkina sąlygą $|s_1 - s_2| < \delta_\varepsilon$. Gauname

$$\begin{aligned} |(Tf)(s_1) - (Tf)(s_2)| &= \left| \int_0^1 [K(s_1,t) - K(s_2,t)] \cdot f(t)\, dt \right| \leqslant \\ &\leqslant \sup\{|K(s_1,t) - K(s_2,t)| \cdot |f(t)| :\ 0 \leqslant t \leqslant 1\} \leqslant \\ &\leqslant \varepsilon \sup\{|f(t)| :\ 0 \leqslant t \leqslant 1\} \leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

Taigi, aibė $T(B)$ lygialaipsniškai tolydi. Pagal Arcela-Askolio teoremą, operatorius T, veikiantis erdvėje $C[0,1]$, yra kompaktinis.

Uždavinys 4

Tegul integralinis operatorius $T : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$ yra apibrėžtas lygybe

$$(Tf)(s) = \int_0^1 K(s,t)f(t)\,dt \tag{3.11}$$

su branduolio funkcija $K(s,t) \in L_2(0,1)^2$, $K(s,t) = \min\{s,t\}$, $0 \leqslant s,\, t \leqslant 1$. Įrodysime, kad T yra kompaktinis savijungis operatorius ir surasime jo spektrą.

Integralinis operatorius T, apibrėžtas (3.11) lygybe, yra Hilberto Šmito, todėl jis kompaktinis. Be to, aišku, kad $K(s,t) = K(t,s)$, taigi, $T = T^*$. Vadinasi, (3.11) lygybe apibrėžtas T yra kompaktinis savijungis operatorius.

Suraskime operatoriaus T spektrą. Pagal 9 Teiginį, žinome, kad $0 \in \sigma(T)$. Nagrinėkime tiesinę lygtį $Tf = \lambda f$, $f \in L_2(0,1)$:

$$\begin{aligned} \lambda f(s) &= \int\limits_0^1 \min\{s,t\} f(t)\,dt = \int\limits_0^s t\cdot f(t)\,dt + \int\limits_s^1 s\cdot f(t)\,dt = \\ &= \int\limits_0^s t\cdot f(t)\,dt - \int\limits_1^s s\cdot f(t)\,dt. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Gauname pirmąją kraštinę sąlygą: $f(0) = 0$. Pasinaudoję Leibnico formule, diferencijuokime (3.12) tapatybės kairiąją ir dešiniąją puses pagal kintamąjį s:

$$\lambda f'(s) = \int\limits_0^s \frac{\partial}{\partial s}[t\cdot f(t)]\,dt + sf(s) - \int\limits_1^s \frac{\partial}{\partial s}[s\cdot f(t)]\,dt - sf(s) = -\int\limits_1^s f(t)\,dt.$$

Antroji kraštinė sąlyga: $f'(1) = 0$. Gautą išraišką dar kartą diferencijuokime pagal kintamąjį s:

$$\lambda f''(s) = -\int\limits_1^s \frac{\partial}{\partial s}[f(t)]\,dt - f(s) = -f(s).$$

Kaip ir Uždavinyje 3, analogiškai įsitikiname, kad $\lambda = 0$ negali būti integralinio operatoriaus, apibrėžto (3.11) lygybe, tikrine reikšme. Taigi, jei $\lambda \neq 0$, gauname tą pačią antrosios eilės diferencialinę lygtį:

$$f''(s) + \frac{1}{\lambda}f(s) = 0. \tag{3.13}$$

Pažymėkime $h^2 = 1/\lambda$. Diferencialinę lygtį atitinkanti charakteristinė lygtis $k^2+h^2 = 0$ turi šaknis $k_1 = hi$ ir $k_2 = -hi$, kurios yra menamos. Todėl (3.13) lygties bendrasis sprendinys yra

$$f(s) = c_1 \sin(hs) + c_2 \cos(hs).$$

Įstatę į šią tapatybę kraštines sąlygas gauname, kad $c_2 = 0$ ir $0 = c_1 \cos h$. Jei $c_1 = 0$, tai turime trivialų sprendinį $f = 0$. Vadinasi, $0 = \cos h$, čia

$$h = \frac{2n+1}{2}\pi, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots .$$

Tuomet (3.11) lygybe apibrėžto integralinio operatoriaus tikrinės reikšmės ir jas atitinkančios tikrinės funkcijos yra štai tokios:

$$\lambda_n = \frac{4}{(2n+1)^2\pi^2}, \qquad f_n(s) = \sin\frac{(2n+1)\pi}{2}s, \qquad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Erdvės nulinis elementas, kaip ir anksčiau nagrinėtu atveju, priklauso tolydžiajam spektrui, t. y. $0 \in \sigma_c(T)$. Taigi, (3.11) lygybe apibrėžto integralinio operatoriaus spektras yra $\sigma(T) = \{0\} \cup \sigma_p(T)$, čia taškinį spektrą

$$\sigma_p(T) = \left\{ \lambda_n : \lambda_n = \frac{4}{(2n+1)^2\pi^2},\ n = 0, 1, 2, \dots \right\}$$

sudarančios tikrinės reikšmės konverguoja į tašką $\lambda = 0$.

Literatūra

[1] E. Kreyszig. *Introductory functional analysis with applications*, University of Windsor, John Wiley & Sons. Inc., 1978 m., p. 405-406, 412-413, 618-619

[2] V. Paulauskas, A. Račkauskas. *Funkcinė analizė. I knyga. Erdvės*, Vilnius: Leidykla TEV, 2007 m., p. 76-91, 134-135

[3] V. Paulauskas, A. Račkauskas. *Funkcinė analizė. II knyga. Funkcijos ir lygtys*, Vilnius: Leidykla TEV, 2007 m., p. 76-77, 83-94, 109-115, 139

[4] B. P. Rynne, M. A. Youngson. *Linear functional analysis (2nd Edition)*, Springer-Verlag London Limited, 2008 m., p. 103, 205-224, 238-239, 246

[5] W. Rudin. *Functional analysis (2nd Edition)*, McGraw-Hill, Inc., 1991 m., p. 72, 312

[6] M. R. Sundström. *A pedagogical history of compactness*, 2014 m., p. 1-5

[7] R. Vershynin. *Lectures in Functional Analysis*, University of Michigan, p. 83-86, 94-98, 101-107, 114-115