VILNIAUS UNIVERSITETAS

Povilas Banys

# RIBINĖS TEOREMOS TIESINIAMS ATSITIKTINIAMS LAUKAMS NAUDOJANT BEVERIDGE-NELSON DEKOMPOZICIJĄ

Daktaro disertacijos santrauka

Fiziniai mokslai, matematika (01P)

Vilnius, 2011

Disertacija rengta 2006–2010 metais Vilniaus universitete

**Mokslinis vadovas:**

Prof. habil. dr. Vygantas Paulauskas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

**Disertacija ginama Vilniaus universiteto matematikos mokslo krypties taryboje:**

**Pirmininkas:**

Prof. habil. dr. Alfredas Račkauskas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

**Nariai:**

Prof. habil. dr. Algimantas Bikelis (Vytauto Didžiojo universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Prof. habil. dr. Romanas Januškevičius (Vilniaus Pedagoginis universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Prof. habil. dr. Remigijus Leipus (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Prof. habil. dr. Rimas Norvaiša (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

**Oponentai:**

Prof. habil. dr. Vigirdas Mackevičius (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Prof. Marie-Claude Viano (Lilio Mokslų ir Technologijų universitetas, Prancūzija, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Disertacija bus ginama viešame Matematikos mokslo krypties tarybos posėdyje 2011 m. birželio mėn. 22 d. 15 val. Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultete, Zigmo Žemaičio auditorijoje. Adresas: Naugarduko g. 24, LT-03225, Vilnius, Lietuva.

Disertacijos santrauka išsiuntinėta 2011 m. gegužės mėn.

Su disertacija galima susipažinti Vilniaus universiteto bibliotekoje.

VILNIUS UNIVERSITY

Povilas Banys

# LIMIT THEOREMS FOR RANDOM LINEAR FIELDS VIA BEVERIDGE–NELSON DECOMPOSITION

Summary of Doctoral Dissertation

Physical Sciences, Mathematics (01P)

Vilnius, 2011

The dissertation was prepared in 2006–2010 at Vilnius University

**Scientific supervisor:**

Prof. habil. dr. Vygantas Paulauskas (Vilnius University, Physical Sciences, Mathematics – 01P)

**The dissertation will be defended in the council of Mathematics of Vilnius University:**

**Chairman:**

Prof. habil.dr. Alfredas Račkauskas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P)

**Members:**

Prof. habil. dr. Algimantas Bikelis (Vytautas Magnus University, Physical sciences, Mathematics – 01P)

Prof. habil.dr. Romanas Januškevičius (Vilnius Pedagogical University, Physical sciences, Mathematics – 01P)

Prof. habil.dr. Remigijus Leipus (Vilniaus University, Physical sciences, Mathematics – 01P)

Prof. habil. dr. Rimas Norvaiša (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P)

**Oponents:**

Prof. habil. dr. Vigirdas Mackevičius (Vilniaus University, Physical sciences, Mathematics – 01P)

Prof. Marie-Claude Viano (Université des Sciences et Technologies de Lille, France, Physical sciences, Mathematics – 01P)

The dissertation will be defended at the public meeting of the council on June 22, 2011, 3 p.m. in Vilnius University, Faculty of Mathematics and Informatics, Zigmas Žemaitis Hall (101).

Address: Naugarduko str. 24, LT-03225, Vilnius, Lithuania.

The summary of dissertation was distributed on May, 2011.

The dissertation is available at the Library of Vilnius University.

# 1 Įvadas

Ribinės teoremos vaidina labai svarbų vaidmenį tiek tikimybių teorijoje, tiek matematinėje statistikoje, tiek kitose šių mokslų taikymo srityse. Gerai žinomi keli ribinių teoremų tipai: centrinės ribinės teoremos (CRT), stiprieji didžiųjų skaičių dėsniai (SDSD), kartotinio logaritmo dėsniai ir kitos modifikacijos. Tačiau juos visus vienija tai, kad jie suteikia informacijos apie atsitiktinių dydžių, pasižyminčių tam tikromis savybėmis, sumos ribinį elgesį.

Gana plati teorija yra išvystyta atsitiktinių dydžių sekoms su vienmačiu indeksu. Mus domina atsitiktiniai dydžiai $X_{\mathbf{t}},\ \mathbf{t} \in \mathbb{Z}^d,\ d \geqslant 2$ su daugiamačiu indeksu. Tokius dydžius yra įprasta vadinti atsitiktiniais laukais. Jie yra svarbūs sprendžiant daugelį teorinių ir praktinių uždavinių. Taikymo sritys pačios įvairiausios– pradedant statistine mechanika [6], žmogaus smegenų veiklos atvaizdavimu [2], kompiuterine grafika ir baigiant teksto atpažinimo ir apdorojimo technologijomis [7].

Kai kurie labai plačiai naudojami atsitiktiniai laukai turi jau nusistovėjus pavadinimus, kaip antai: Markovo atsitiktiniai laukai, Gibso atsitiktiniai laukai, Gauso laukai, sąlyginiai atsitiktiniai laukai. Darbe yra nagrinėjami tiesiniai atsitiktiniai laukai, kurie yra laiko eilučių apibendrinimas plokštumoje ir didesnio matavimo erdvėse.

## 1.1 Tyrimo objektas

Darbe nagrinėjami tiesiniai atsitiktiniai laukai gaunami visai taip pat kaip ir tiesiniai procesai, t. y. paimame atsitiktinį lauką $\{\varepsilon_{\mathbf{t}},\ \mathbf{t} \in \mathbb{Z}^d\}$ (kuris dar vadinamas inovacijų lauku) ir naują lauką gauname pritaikę deterministinius koeficientus (kurie dar vadinami tiesiniu filtru):

$$X_{\mathbf{t}} = \sum_{\mathbf{k} \geqslant 0} \varphi_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{t}-\mathbf{k}}, \quad \mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{Z}^d, \mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d. \tag{1.1}$$

Jei $X_{\mathbf{t}}$ yra korektiškai apibrėžtas (t. y. eilutė konverguoja beveik tikrai), tuomet $\{X_{\mathbf{t}}, \mathbf{t} \in \mathbb{Z}^d\}$ yra vadinamas tiesiniu atsitiktiniu lauku. Darbe nagrinėjamų tiesinių atsitiktinių laukų, inovacijos yra arba nepriklausomi vienodai pasiskirstę (n. v. p.) atsitiktiniai dydžiai, arba martingaliniai skirtumai (m. s.).

## 1.2 Uždaviniai ir tikslai

Pagrindiniai darbe nagrinėjami klausimai yra šie:

- Beveridge–Nelson dekompozicijos pritaikymas tiesiniams atsitiktiniams laukams;
- Martingalinių skirtumų apibrėžimas daugiamačio diskretaus indekso atsitiktiniams dydžiams;
- CRT tiesiniams atsitiktiniams laukams įrodymas, naudojant Beverdige-Nelson dekompoziciją, kai prieaugiai yra martingaliniai skirtumai, apibrėžiami trim skirtingais būdais;
- SDSD įrodymas tiesiniams atsitiktiniams laukams su n. v. p. inovacijomis.

Disertacijoje apibendrinami tiesiniams procesams darbe [14] gauti rezultatai.

## 1.3 Metodas

Pagrindinis naudojamas metodas ribinių teoremų įrodymuose yra Beveridge–Nelson (BN) dekompozicija. Šaltinyje [13] buvo parodyta, kad BN dekompozicijos metodas yra parankus įrodant ribines teoremas sumoms $\sum_{\mathbf{t}\in D_{\mathbf{n}}} X_{\mathbf{t}}$, kur $D_{\mathbf{n}}$ yra aibė iš $\mathbb{Z}^d$, o $X_{\mathbf{t}}$ yra apibrėžtas (1.1) su n. v. p. inovacijomis $\{\varepsilon_{\mathbf{t}},\ \mathbf{t}\in\mathbb{Z}^d\}$. Jei aibės $D_{\mathbf{n}} = \{\mathbf{i}\in\mathbb{Z}^2, \mathbf{1}\leqslant\mathbf{i}\leqslant\mathbf{n}\}$ yra stačiakampiai, tuomet tiesinių laukų sumas, panaudojant BN dekompoziciją, galima užrašyti pavidalu:

$$\sum_{\mathbf{t}\in D_{\mathbf{n}}} X_{\mathbf{t}} = \mu_1 \sum_{\mathbf{t}\in D_{\mathbf{n}}} \varepsilon_{\mathbf{t}} + R_{\mathbf{n}}, \tag{1.2}$$

kur $\mu_1 = \sum_{\mathbf{k}\geqslant 0}\varphi_{\mathbf{k}}$, o $R_{\mathbf{n}}$ yra nesudėtingos išraiškos.

Įrodymo idėja yra ta pati kaip ir šaltinyje [14]: pasinaudoti CRT, gauta inovacijų sumoms ($\sum_{\mathbf{t}\in D_{\mathbf{n}}}\varepsilon_{\mathbf{t}}$), ir parodyti, kad liekanos $R_{\mathbf{n}}$, pritaikius tinkamą normavimą, artėja į nulį.

## 1.4 Darbo struktūra

Disertacija parašyta anglų kalba. Ją sudaro trys skyriai. Pirmame skyriuje pristatoma nagrinėjama tema, istoriškai apžvelgiami martingalai, centrinė ribinė teorema bei pristatomas BN dekompozicijos metodas, kuris bus naudojamas įrodymuose. Antrame skyriuje trimis skirtingais būdais yra apibrėžiami martingaliniai skirtumai bei įrodomos centrinės ribinės teoremos tiesiniams laukams su martingalinių skirtumų inovacijomis. Paskutiniame skyriuje yra įrodomas stiprusis didžiųjų skaičių dėsnis tiesiniams laukams su n. v. p. inovacijomis, panaudojant ergodiškumo teoriją, bei lyginamas su rezultatais, gaunamais panaudojus BN dekompoziciją.

# 2 Svarbiausi rezultatai

Disertacijos antroje dalyje tęsiame straipsnyje [13] iškeltų klausimų analizę, t. y. BN dekompozicijos panaudojimo galimybes tiesiniams laukams. Šaltiniuose [9], [13] ir [1] tiesinio lauko inovacijos buvo laikomos n. v. p. Šiame darbe yra nagrinėjami martingaliniai skirtumai. Gerai žinoma, kad apibrėžus tam tikras priklausomybes tarp daugiamačio indekso atsitiktinių dydžių analizė žymiai pasunkėja. Tą patį galima pasakyti ir apie daugiamačio indekso martingalinius skirtumus. Martingalai ir martingaliniai skirtumai gana plačiai išnagrinėti vienmačiu atveju. Kiek kitokia situacija yra su daugiamačio indekso martingaliniais skirtumais– juos galima apibrėžti įvairiais būdais, priklausomai nuo to, kaip bus konstruojamos $\sigma$-algebros, todėl rezultatų yra gerokai mažiau ir tokio tipo priklausomybės yra mažiau ištyrinėtos.

## 2.1 CRT tiesiniams atsitiktiniams laukams su martingaliniais skirtumais, apibrėžtais [16]

Prieš formuluojant pagrindinius rezultatus, reikia įvesti keletą pažymėjimų. Pateikiant pirmąjį rezultatą daugiausia naudosime žymėjimus, pateiktus straipsnyje [4].

Pažymėkime $T_{\mathbf{a}} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d \colon \mathbf{a} \leqslant \mathbf{x}\}$, $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^d$, $V[\mathbf{a}, \mathbf{x}] := \{\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d \colon \mathbf{a} \leqslant \mathbf{y} \leqslant \mathbf{x}\}$, $\mathbf{a}, \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$. Tokių stačiakampių aibę pažymime $\mathcal{A} = \{V[\mathbf{a}, \mathbf{x}] \colon \mathbf{x} \in T_{\mathbf{a}}\}$. Kadangi tarp aibės $T_{\mathbf{a}}$ elementų ir stačiakampių $V[\mathbf{a},\mathbf{x}]$ egzistuoja abipusiškai vienareikšmiška atitiktis, tai atsitiktinio lauko elementus galima žymėti $Y_{\mathbf{x}} = Y_{V[\mathbf{a},\mathbf{x}]}$, kai $V[\mathbf{a},\mathbf{x}] \in \mathcal{A}$.

Pažymėkime $\mathcal{C}$ klasę $T_{\mathbf{a}}$ poaibių, užrašomų tokiu būdu: $C = A\backslash B,\ A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{A}(u)$, kur $\mathcal{A}(u)$ yra klasė baigtinių sąjungų elementų iš $\mathcal{A}$.

Tikimybinę erdvę pažymėkime $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Filtracija vadinsime klasę $\sigma$-algebrų iš $\mathcal{F}$, tenkinančių savybes: (a) jei $A, B \in \mathcal{A}$, ir $A \subseteq B$, tuomet $\mathcal{F}_A \subseteq \mathcal{F}_B$; (b) $\mathcal{F}_{\bigcap A_i} = \bigcap \mathcal{F}_{A_i}$ visoms mažėjančioms aibėms $(A_i)$ iš $\mathcal{A}$. Jei $T \notin \mathcal{A}$, laikysime $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$.

Jei $\mathcal{F}_1$ ir $\mathcal{F}_2$ yra dvi $\sigma$-algebros iš $\mathcal{F}$, tuomet $\sigma$-algebra $\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2$ yra generuota $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$. Taigi, jei $B \subset \mathcal{A}(u)$, tai $\mathcal{F}_B = \bigvee_{A \in \mathcal{A},\ A \subseteq B} \mathcal{F}_A$. Apibrėžkime stipriosios praeities (Strong past) $\sigma$-algebrą:

$$\mathcal{G}_C^* = \bigvee_{B \in \mathcal{A}(u),\, B \cap C = \emptyset} \mathcal{F}_B, \quad \text{kur } C \in \mathcal{C}\backslash\mathcal{A}.$$

Darbe nagrinėjamas atvejis, kai $C = \{\mathbf{x}\}$, kur $\mathbf{x} \in T_{\mathbf{a}}\backslash\{\mathbf{a}\}$, tuomet $\mathcal{G}_{\{\mathbf{x}\}}^* = \bigvee_{i=1}^{d} \mathcal{F}^i(x_i - 1)$. Čia $\mathcal{F}^i(t) = \bigvee_{\mathbf{z} \in T_{\mathbf{a}},\ z_i \leqslant t} \mathcal{F}_{V[\mathbf{a},\mathbf{z}]}$, $t \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \ldots, d$.

**2.1 Apibrėžimas.** Atsitiktinis procesas $Y = \{Y_A, A \in \mathcal{A}\}$, indeksuotas elementais iš $\mathcal{A}$, vadinamas suderintu, jei $Y_A$ yra $\mathcal{F}_A$ išmatuojamas visiems $A \in \mathcal{A}$. $Y$ yra vadinamas integruojamu, jei $E|Y_A| < \infty$ visiems $A \in \mathcal{A}$.

Nagrinėsime adityvius procesus. Adityvumas bus suprantamas taip: jei $C, C_1, C_2 \in \mathcal{C}$, $C = C_1 \cup C_2$ ir $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, tuomet $Y_{C_1} + Y_{C_2} = Y_C$ beveik tikrai ($Y_\emptyset = 0$). Adityvumo savybės naudą procesui $Y = (Y_A, A \in \mathcal{A})$ galima pailiustruoti pavyzdžiu. Imkime aibę $(\mathbf{y},\mathbf{x}] = \prod_{i=1}^{d} (y_i, x_i]$, kur $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in T_{\mathbf{a}}$. Ši aibė yra iš $\mathcal{C}$ ir procesas $Y$ gali būti užrašoma tokiu būdu:

$$Y_{(\mathbf{y},\mathbf{x}]} = \sum_{i=1,\ldots,d,\, \varepsilon_i = 0,1} (-1)^{d - \sum_{i=1}^{d} \varepsilon_i} Y_{V[\mathbf{a},(y_1 + \varepsilon_1(x_1 - y_1), \ldots, y_d + \varepsilon_d(x_d - y_d))]}. \tag{2.1}$$

Pasinaudojus adityvumu, aibės $\mathcal{A}$ elementais indeksuoti procesai gali būti užrašomi analizei daug patogesne išraiška. Pažymėkime $Y_{(\mathbf{y},\mathbf{y}]} = Y_{\{\mathbf{y}\}}$. Kadangi aibė $\mathcal{A}$ yra sudaryta iš stačiakampių, jie gali būti užrašomi kaip nesikertančių aibių iš $\mathcal{C}$ sąjunga, $V[\mathbf{a},\mathbf{x}] = \bigcup_{\mathbf{y} \in V[\mathbf{a},\mathbf{x}]} \{\mathbf{y}\}$.

Pasinaudojus adityvumu galima užrašyti

$$Y_{V[\mathbf{a},\mathbf{x}]} = \sum_{\mathbf{y}\in V[\mathbf{a},\mathbf{x}]} Y_{\{\mathbf{y}\}}. \tag{2.2}$$

Iš (2.2) sąlygos matome, kad jei $\mathbf{y}$ yra iš intervalo $\mathbf{a} \leqslant \mathbf{y} \leqslant \mathbf{x}$, tai atsitiktinis dydis $Y_{(\mathbf{y},\mathbf{x}]}$, pasinaudojus išraiška (2.1), yra $\mathcal{F}_{V[\mathbf{a},\mathbf{x}]}$ išmatuojamas.

**2.2 Apibrėžimas.** Tegu atsitiktinis procesas $Y = \{Y_A, A \in \mathcal{A}\}$ yra adityvus, suderintas ir integruojamas.

- $Y$ yra gardelinis martingalas (lattice martingale LMG), jei visiems $A$ ir $B$ iš $\mathcal{A}$, $A \subseteq B$, galioja lygybė $E(Y_B|\mathcal{F}_A) = Y_A$;
- $Y$ yra stiprusis LMG, jei visiems $C \in \mathcal{C}$ $E(Y_C|\mathcal{G}^*_C) = 0$.

Šiame darbe labai svarbus LMG apibrėžimas procesams indeksuotiems taškais.

**2.1 Teiginys.** *([4]) Tegu $Y = \{Y_A, A \in \mathcal{A}\}$ yra procesas, indeksuotas $\mathcal{A}$ elementais. Jei procesas $Y$ yra integruojamas, adityvus ir suderintas, tuomet $Y$ yra stiprusis LMG, tada ir tik tada, jei $\forall \mathbf{x} \in T_{\mathbf{a}}$, $E(Y_{\mathbf{x}}|\mathcal{G}^*_{\mathbf{x}}) = 0$.*

Tais atvejais, kai aibės $C$ yra taškai $\mathcal{C} = \{C\colon C = \{\mathbf{x}\}, \mathbf{x} \in T_{\mathbf{a}}\}$, šaltiniuose [10], [5] stiprieji LMG buvo vadinami martingaliniais skirtumais.

Formuluojant centrinę ribinę teoremą svarbu turėti stipriųjų LMG sekų apibrėžimą. Imkime baigtinių didėjančių aibių iš $\mathcal{A}$ seką $(D_n), n \in \mathbb{N}$, $D_n \subset D_{n+1}$, $n \geqslant 1$ ir $\mathcal{A}_n := \{A\colon A \subset \mathcal{A},\ A \in D_n\}$. $\mathcal{C}_n$ apibrėžiama tokiu pat būdu kaip ir $\mathcal{C}$, tik vietoje $\mathcal{A}(u)$ imama $\mathcal{A}_n(u)$ – baigtinė sąjunga elementų iš $\mathcal{A}_n$. Taigi, $\mathcal{C}_n$ yra klasė visų poaibių iš $T_{\mathbf{a}}$, turinčių pavidalą $A\backslash B$, kur $A \in \mathcal{A}_n$, $B \in \mathcal{A}_n(u)$.

**2.3 Apibrėžimas.** $(Y^n_A, \mathcal{F}^n_A\colon A \in \mathcal{A}, A \subseteq D_n, n \geqslant 1)$ yra vadinamas stipriųjų LMG seka, jei visiems $n \geqslant 1$ $(\mathcal{F}^n_A)_{A\in\mathcal{A}_n}$ yra filtracija (t. y. tenkina sąlygą $A, B \in \mathcal{A}_n, A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{F}^n_A \subseteq \mathcal{F}^n_B$ ) ir $(Y^n_A)_{A\in\mathcal{A}_n}$ yra stiprusis LMG atžvilgiu $(\mathcal{F}^n_A)_{A\in\mathcal{A}_n}$.

Tolimesniame dėstyme nagrinėsime tokio pavidalo aibes:

$$D_n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d, \mathbf{a} \leqslant \mathbf{x} \leqslant \mathbf{k}(n)\}, \quad \mathbf{k}(n) = (k_1(n), k_2(n), \dots, k_d(n)), \tag{2.3}$$

kur $k_i(n)$ nemažėjančios $n$ funkcijos ir $\min_{1 \leqslant i \leqslant d}\{k_i(n)\} \to \infty$, kai $n \to \infty$. Pažymėkime $|D_n| := k_1(n)k_2(n)\cdots k_d(n)$ ir

$$Z_n = \sum_{\mathbf{x} \in D_n} Y_{\mathbf{x}}^n.$$

**2.4 Apibrėžimas.** Sakysime, jog atsitiktinių dydžių seka $(Y_n)$ konverguoja į atsitiktinį dydį $Y$ stabiliai, jei egzistuoja $Y'$, turintis tą patį skirstinį kaip $Y$, ir toks, kad $\exp(itY_n)$ silpnai konverguoja į $\exp(itY') = Z(t)$ erdvėje $L^1$ ir $E(Z(t)\mathbf{1}_E)$, kaip funkcija nuo $t$, yra tolydi $\forall E \in \mathcal{F}$. Čia $L^1$ žymi erdvę atsitiktinių dydžių $Y$, kuriems $E|Y| < \infty$.

Sakysime, jog $(\mathcal{F}_A, A \in \mathcal{A})$ tenkina sąlyginio nepriklausomumo savybę, jei

$$E(E(\cdot|\mathcal{F}_A)|\mathcal{F}_B) = E(\cdot|\mathcal{F}_{A\cap B}), \; A, B \in \mathcal{A}. \tag{2.4}$$

Sąlyga $\mathcal{L}_{q,p}$ darbe žymi tokį sąryšį:

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} \left( \prod_{i=1}^{d} (|k_i| + 1) \right)^q |\varphi_{\mathbf{k}}|^p < \infty.$$

Pažymėkime

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{|D_n|}} \sum_{\mathbf{t} \in D_n} X_{\mathbf{t}}. \tag{2.5}$$

Dabar galime suformuluoti tiesinių laukų, generuotų stipriųjų LMG, sumoms centrinę ribinę teoremą.

**2.2 Teorema.** *Tegu* $\{X_{\mathbf{t}}, \mathbf{t} \in \mathbb{Z}^2\}$ *tiesinis atsitiktinis laukas, apibrėžtas* (1.1), *koeficientai* $\varphi_{\mathbf{k}}$ *tenkina sąlygą* $\mathcal{L}_{2,2}$, *o* $\{\varepsilon_A, A \in \mathcal{A}\}$, *kur* $\varepsilon_A = \sum_{\mathbf{t} \in A} \varepsilon_{\mathbf{t}}$ *yra stiprieji LMG,* $E\varepsilon_{\mathbf{t}}^2 = 1$ *bei patenkintos sąlygos:*

$$\sum_{\mathbf{x} \in D_n} E\left( \frac{\varepsilon_{\mathbf{x}}^2}{|D_n|} \,\middle|\, \mathcal{G}_{\mathbf{x}}^{n*} \right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} \eta^2, \tag{2.6}$$

$$\forall \epsilon > 0, \quad \sum_{\mathbf{x} \in D_n} E\left( \frac{\varepsilon_{\mathbf{x}}^2}{|D_n|} \mathbf{1}_{\{|\varepsilon_{\mathbf{x}}^n| > \epsilon\}} \,\middle|\, \mathcal{G}_{\mathbf{x}}^{n*} \right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} 0. \tag{2.7}$$

*Čia kai* $\mathbf{x} \in \mathcal{C}_n$, $\mathcal{G}^{n*}_{\mathbf{x}}$ *yra* $\mathbf{x}$ *stipriosios praeities* $\sigma$*-algebra, susieta su filtracija* $(\mathcal{F}^n_A)_{A\in\mathcal{A}_n}$, *o* $\eta^2$ *yra aprėžtas atsitiktinis dydis. Taip pat tarkime, kad* $\forall n \geqslant 1$ $(\mathcal{F}^n_A)_{A\in\mathcal{A}_n}$ *tenkina* (2.4) *sąlyginio nepriklausomumo sąlygą ir* $\forall n \geqslant 1$, $\forall A \in \mathcal{A}_n$, $\mathcal{F}^n_A \subseteq \mathcal{F}^{n+1}_A$. *Tuomet* $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} S$ *stabiliai, kur atsitiktinis dydis* $S$ *turi charakteristinę funkciją* $E(\exp(-\frac{1}{2}t^2\eta^2\mu_1^2))$.

## 2.2 CRT tiesiniams atsitiktiniams laukams su martingaliniais skirtumais, apibrėžtais [12]

Prieš formuluojant centrinę ribinę teoremą vėl įvesime reikiamus pažymėjimus, nes čia tiek martingalai, tiek martingaliniai skirtumai bus suprantami šiek tiek kitaip.

Tegu turime tikimybinę erdvę $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ir erdvę visų baigtinių $\mathbb{Z}^d$, $d \geqslant 1$ poaibių $\mathcal{W}$. Pažymėkime atsitiktinius dydžius $S_V$, $V \in \mathcal{W}$, o $\mathcal{F}_V$, $V \in \mathcal{W}$ $\sigma$-algebras su daline tvarka:

$$\mathcal{F}_V \subset \mathcal{F}, \quad V, \bar{V} \in \mathcal{W}; \bar{V} \subset V \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}_{\bar{V}} \subset \mathcal{F}_V, \mathcal{F}_\varnothing = \{\varnothing, \Omega\}.$$

Jei visiems $V \in \mathcal{W}$ atsitiktinis dydis $S_V$ yra $\mathcal{F}_V$ išmatuojamas, tuomet šeima $S = (S_V, \mathcal{F}_V), V \in \mathcal{W}$ vadinama stochastine šeima.

**2.5 Apibrėžimas.** Stochastinę šeimą $S = (S_V, \mathcal{F}_V)$ vadiname martingalu, jei kiekvienam $\bar{V}, V \in \mathcal{W}$, $\bar{V} \subset V$ galioja sąlygos

$$E|S_V| < \infty \quad \text{ir} \quad E(S_V|\mathcal{F}_{\bar{V}}) = S_{\bar{V}} \text{ b.t.} \tag{2.8}$$

**2.6 Apibrėžimas.** Atsitiktinį lauką $\{\xi_{\mathbf{t}}, \mathbf{t} \in \mathbb{Z}^d\}$ vadinsime martingalinių skirtumų atsitiktiniu lauku aibės $\sigma$-algebrų $\{\mathcal{F}_V,\, V \in \mathcal{U}\}, \mathcal{U} \subset \mathcal{W}$, kurioms galioja dalinė tvarka, atžvilgiu, jei

$$E|\xi_{\mathbf{t}}| < \infty \quad \text{ir} \quad \text{visoms aibėms } V \in \mathcal{U}, \mathbf{t} \notin V \ E(\xi_{\mathbf{t}}|\mathcal{F}_V) = 0 \text{ b.t.}$$

*2.1 Pastaba.* Sąryšį tarp stipriųjų LMG ir martingalinių skirtumų, apibrėžtų čia pasinaudojus 2.1 teiginiu, galima būtų apibūdinti taip: jei turime $\{\varepsilon_{\mathbf{t}},\ \mathbf{t} \in \mathbb{Z}^d\}$, kurie yra čia apibrėžti martingaliniai skirtumai arba n. v. p. ir paimsime aibę $V[\mathbf{a}, \mathbf{x}] \subset \mathcal{A}$, tuomet

$$Y_{V[\mathbf{a},\mathbf{x}]} = \sum_{\mathbf{t}\in V[\mathbf{a},\mathbf{x}]} \varepsilon_{\mathbf{t}}$$

bus stiprusis LMG.

Tegu $\Omega = \{(x_{\mathbf{t}}, \mathbf{t} \in \mathbb{Z}^d)\}$ žymi visų funkcijų, apibrėžtų $\mathbb{Z}^d$, aibę ir $x_{\mathbf{t}} \in X$, $X \subseteq \mathbb{R}^1$. $\mathcal{B}$ yra $\sigma$-algebra, generuota cilindrinių $\Omega$ poaibių. Jei $V \in \mathcal{W}$, pažymėsime $\mathcal{B}^V$ cilindrinių poaibių su pagrindu $X^V$ $\sigma$-algebrą. Postūmių grupę žymėsime $\tau_{\mathbf{h}}, \mathbf{h} \in \mathbb{Z}^d$,

$$(\tau_{\mathbf{h}} x)_{\mathbf{t}} = x_{\mathbf{t}+\mathbf{h}}, \quad \mathbf{h} \in \mathbb{Z}^d,\ x \in \Omega,$$

o $\sigma$-algebrą visų invariantiškų $\Omega$ poaibių $\mathcal{T}$: $\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{B} \colon \tau_{\mathbf{h}} A = A\}$.

Atsitiktinis laukas $\{\xi_{\mathbf{t}},\ \mathbf{t} \in \mathbb{Z}^d\}$ su pasiskirstymu $P$ vadinamas stacionariu, jei kiekvienam $A \in \mathcal{T}$ ir $\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^d$

$$P(\tau_{\mathbf{h}} A) = P(A).$$

(Šaltinyje [11] toks laukas vadinimas homogeniniu.)

Atsitiktinis laukas $\{\xi_{\mathbf{t}}, \mathbf{t} \in \mathbb{Z}^d\}$ yra vadinamas ergodišku, jei $\forall A \in \mathcal{T}, P(A) = 0$ arba $P(A) = 1$.

Sakysime, jog galioja CRT atsitiktiniam laukui $\{X_{\mathbf{t}},\ \mathbf{t} \in \mathbb{Z}^d, E|X_{\mathbf{t}}|^2 < \infty\}$, jei

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_{D_n} - ES_{D_n}}{(\mathrm{Var}(S_{D_n}))^{\frac{1}{2}}} < z\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}u, \tag{2.9}$$

kur

$$S_{D_n} = \sum_{\mathbf{t}\in D_n} X_{\mathbf{t}}, \tag{2.10}$$

ir $D_n$ apibrėžta (2.3).

Pasinaudojant rezultatais, gautais [12], atsitiktiniams laukams, disertacijoje įrodoma CRT tiesiniams atsitiktiniams laukams:

**2.3 Teorema.** *Tegu tiesinis atsitiktinis, laukas apibrėžtas* (1.1), *kai* $d = 2$ *ir* $\{\varepsilon_{\mathbf{t}}\}$ *sudaro stacionarų ergodišką martingalinių skirtumų atsitiktinį lauką,* $0 < \sigma^2 = E\varepsilon_{\mathbf{0}}^2 < \infty$. *Jei koeficientai* $\varphi_{\mathbf{k}}$ *tenkina sąlygą* $\mathcal{L}_{0,1}$, *tuomet CRT galioja tiesinių atsitiktinių laukų* (1.1) *sumoms.*

## 2.3 CRT tiesiniams atsitiktiniams laukams su martingaliniais skirtumais, apibrėžtais [3]

Pagrindinis skirtumas tarp martingalinių skirtumų, apibrėžiamų šioje dalyje ir dalyse prieš tai, yra tas, jog čia indeksų aibėje naudojama leksikografinė tvarka. Tokio tipo tvaka apibrėžia visišką tvarką, t. y. bet kurie du elementai yra palyginami. Daugelis pažymėjimų sutampa su įvestais ankstesniame skyriuje, todėl apibrėšime tik naujus ir pradėsime nuo leksikografinės tvarkos.

Leksikografinė tvarka $\mathbb{Z}^d$ apibrėžiama tokiu būdu: jei $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_d)$ ir $\mathbf{j} = (j_1, j_2, \ldots, j_d)$ yra skirtingi elementai iš $\mathbb{Z}^d$, pažymėjimas $\mathbf{i} <_{\text{lex}} \mathbf{j}$ reiškia arba $i_1 < j_1$, arba kažkuriam $p$ iš aibės $\{2, 3, \ldots, d\}$, $i_p < j_p$ ir $i_q = j_q$, kai $1 \leqslant q < p$.

Pažymėkime $\{V_{\mathbf{i}}^k : \mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d, k \in \mathbb{N}\}$ aibes, apibrėžtas tokiu būdu:

$$V_{\mathbf{i}}^1 = \{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d : \mathbf{j} <_{\text{lex}} \mathbf{i}\},$$

ir kai $k \geqslant 2$:

$$V_{\mathbf{i}}^k = V_{\mathbf{i}}^1 \cap \{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d : |\mathbf{i} - \mathbf{j}| \geqslant k\}, \quad \text{kur } |\mathbf{i} - \mathbf{j}| = \max_{1 \leqslant k \leqslant d} |i_k - j_k|.$$

Aibėms $\Gamma$ iš $\mathbb{Z}^d$, $\sigma$-algebra $\mathcal{F}_\Gamma$ apibrėžiama tokiu būdu $\mathcal{F}_\Gamma = \sigma(x_{\mathbf{i}} : \mathbf{i} \in \Gamma)$, o sąlyginiai vidurkiai $E_{|\mathbf{k}|}$ taip:

$$E_{|\mathbf{k}|}(x_{\mathbf{i}}) = E(x_{\mathbf{i}} | \mathcal{F}_{V_{\mathbf{i}}^{|\mathbf{k}|}}), \quad \mathbf{k} \in V_{\mathbf{i}}^1.$$

Šioje dalyje nagrinėsime tiokio pavidalo $\Gamma_n$:

$$\Gamma_n = [-n, n]^d \cap \mathbb{Z}^d. \tag{2.11}$$

Stacionariems, turintiems baigtinį antrą momentą, atsitiktiniams laukams Dedeckeris [3] įrodė CRT, reikalaudamas, jog $(\varepsilon_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d}$ galiotų sąlyga:

$$\sum_{\mathbf{k} \in V_{\mathbf{0}}^1} |\varepsilon_{\mathbf{k}} E_{|\mathbf{k}|}(\varepsilon_{\mathbf{0}})| \in \mathbb{L}^1. \tag{2.12}$$

Martingalinius skirtumus čia apibrėžiame tokiu būdu:

**2.7 Apibrėžimas.** Atsitiktinis laukas $(\varepsilon_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ yra vadinamas martingalinių skirtumų atsitiktiniu lauku, jei $E|\varepsilon_{\mathbf{k}}| < \infty$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$ ir kiekvienam $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$, $E(\varepsilon_{\mathbf{n}}|\sigma(\varepsilon_{\mathbf{k}}, \mathbf{k} <_{\text{lex}} \mathbf{n})) = 0$ b.t.

Remiantis [8] šiems martingaliniams skirtumams teisinga (2.12).

Remiantis šaltinyje [3] gautais rezultatais, disertacijoje įrodoma centrinė ribinė teorema tiesiniams atsitiktiniams laukams, generuotiems čia apibrėžtų martingalinių skirtumų.

**2.4 Teorema.** *Tegu $(\varepsilon_{\mathbf{t}})_{t\in\mathbb{Z}^d}$ stacionarus martingalinių skirtumų atsitiktinis laukas, kuriam $E\varepsilon_{\mathbf{0}} = 0$, $E\varepsilon_{\mathbf{0}}^2 < \infty$, o $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ yra baigtinių poaibių, turinčių pavidalą* (2.11)*, seka. Be to, galioja sąlyga* (2.12)*, o koeficientai $\{\varphi_{\mathbf{k}}\}$ tenkina sąlygą $\mathcal{L}_{2,2}$. Pažymime*

$$\eta = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} E(\varepsilon_{\mathbf{0}}\varepsilon_{\mathbf{k}}|\mathcal{I}).$$

*Tuomet atsitiktinių dydžių $S_{\Gamma_n}/(\mu_1\sqrt{|\Gamma_n|})$ seka konverguoja pagal pasiskirstymą į $\zeta\eta^{1/2}$, kur $\zeta$ standartinis Gauso atsitiktinis dydis nepriklausomas nuo $\eta$.*

## 2.4 Keletas pastebėjimų apie SDSD tiesiniams atsitiktiniams laukams

Paskutinėje disertacijos dalyje yra nagrinėjamas SDSD tiesiniams atsitiktiniams laukams.

Pirmiausia įvesime reikiamus pažymėjimus.

Tegu $Y = \{Y_{\mathbf{t}},\ \mathbf{t} \in \mathbb{Z}^d\}$- stacionarus griežtąja prasme atsitiktinis laukas. Pažymėkime $\mathrm{H} = R^{\mathbb{Z}^d}$ erdvę visų funkcijų, apibrėžtų $\mathbb{Z}^d$ ir įgyjančių realiąsias reikšmes, o $\mathcal{H}$ cilindrinių aibių generuotą $\sigma$-algebrą. Postūmių aibę pažymime $\{U_{\mathbf{h}},\ \mathbf{h} \in \mathbb{Z}^d\}$:

$$U_{\mathbf{h}}x_{\mathbf{t}} = x_{\mathbf{t}-\mathbf{h}}, \quad x \in \mathrm{H},\ \mathbf{t}, \mathbf{h} \in \mathbb{Z}^d.$$

Atsitiktinio lauko $Y$ iš H pasiskirstymą pažymime $\mathbf{P}$. Stacionarumas griežtąja prasme $Y$ reiškia $\mathbf{P}$ invariantiškumą postūmių atžvilgiu $\mathbf{P}U_{\mathbf{h}}^{-1} = \mathbf{P}$. Visų invariantiškų aibių $\sigma$-algebrą žymime $\mathcal{T}$: $\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{H}\colon U_{\mathbf{h}}(A) = A,\ \forall \mathbf{h} \in \mathbb{Z}^d\}$. Atsitiktinį lauką laikysime *ergodiniu*, jei

$$\forall A, B \in \mathcal{H} \quad n^{-d} \sum_{\mathbf{0} \leqslant \mathbf{h} \leqslant \bar{\mathbf{n}} - \mathbf{1}} \mathbf{P}\big(A \cap U_{\mathbf{h}}^{-1}(B)\big) \to \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B), \tag{2.13}$$

kai $n \to \infty$, čia $\bar{\mathbf{n}} = (n, \ldots, n)$.

Laikysime, jog atsitiktinis laukas $Y$ tenkina sumaišymo sąlygas (*mixing*), jei

$$\forall A, B \in \mathcal{H} \quad \mathbf{P}\big(A \cap U_{\mathbf{h}}^{-1}(B)\big) \to \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B), \tag{2.14}$$

kai $||\mathbf{h}|| \to \infty$, čia $|| \cdot ||$ bet kuri iš erdvės $R^d$ normų.

Naudojant ergodiškumo teoriją, galima nagrinėti kiek bendresnius tiesinius atsitiktinius laukus, sumuojant ne tik teigiamame kvadrante, bet visoje $\mathbb{Z}^d$:

$$Y_{\mathbf{t}} = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} \varphi_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{t}-\mathbf{k}}, \quad \mathbf{t} \in \mathbb{Z}^d, \tag{2.15}$$

Nagrinėjame sumas

$$S_{\mathbf{n}} = \sum_{\mathbf{t} \in D_{\mathbf{n}}} Y_{\mathbf{t}}. \tag{2.16}$$

Pažymėjus $|\mathbf{n}| := \prod_{i=1}^d n_i$, sakysime, jog $S_{\mathbf{n}}$ galioja SDSD, jei

$$|\mathbf{n}|^{-1} S_{\mathbf{n}} \xrightarrow{\text{a.s.}} 0, \tag{2.17}$$

kai $\mathbf{n}$ tolsta į begalybę. Galimi du indekso $\mathbf{n}$ neaprėžto augimo būdai, kuriuos pažymime taip:

- $\mathbf{n} \to \infty$, kai $n_i \to \infty, \ i = 1, \ldots, d$;
- $|\mathbf{n}| \to \infty$, kai $\prod_{i=1}^d n_i \to \infty$.

Pažymėjimas $X \in L \log L^{d-1}$ reiškia, jog

$$E|X|(\ln(1 + |X|))^{d-1} < \infty. \tag{2.18}$$

**2.5 Teorema.** *Tegu turime $\{\varepsilon_{\mathbf{t}}, \ \mathbf{t} \in \mathbb{Z}^d\}$, stacionarų griežtąja prasme, ergodišką atsitiktinį lauką, kuriam $E\varepsilon_{\mathbf{0}} = 0$ ir $\varepsilon_{\mathbf{0}} \in L \log L^{d-1}$. Tarkime, kad patenkinta sąlyga $\mathcal{L}_{0,1}$, o $S_{\mathbf{n}}$ yra apibrėžta* (2.16)*. Tuomet teisinga* (2.17)*, jei $\mathbf{n} \to \infty$.*

Teoremos teiginys galioja atskiru atveju, kai $\{\varepsilon_{\mathbf{t}},\ \mathbf{t} \in \mathbb{Z}^d\}$, yra n. v. p. atsitiktiniai dydžiai su tais pačiais reikalavimais momentams, todėl Teorema 2.5 apibendrina rezultatą [15].

Sugriežtinus reikalavimus $\{\varepsilon_{\mathbf{t}},\ \mathbf{t} \in \mathbb{Z}^d\}$, galima gauti stipresnį teiginį.

**2.6 Teorema.** *Tegu turime $\{\varepsilon_{\mathbf{t}},\ \mathbf{t} \in \mathbb{Z}^d\}$, stacionarų griežtąja prasme, tenkinantį sumaišymo sąlygas, atsitiktinį lauką, kuriam $E\varepsilon_{\mathbf{0}} = 0$ ir $\varepsilon_{\mathbf{0}} \in L \log L^{d-1}$. Be to, tenkinama sąlyga $\mathcal{L}_{0,1}$. Tuomet, kai $|\mathbf{n}| \to \infty$, teisinga* (2.17).

Panaudojus BN dekompoziciją atsitiktiniams laukams apibrėžtiems formule (1.1) ir pažymėjus

$$S_{\mathbf{n}}^{(1)} = \sum_{\mathbf{t} \in D_{\mathbf{n}}} X_{\mathbf{t}}, \tag{2.19}$$

galima įrodyti tokį teiginį.

**2.7 Teiginys.** *Tegu turime n.v.p atsitiktinį lauką $\{\varepsilon_{\mathbf{t}},\ \mathbf{t} \in \mathbb{Z}^2\}$, kuriam $E\varepsilon_{\mathbf{0}} = 0$ ir $1 < p \leqslant 2$ galioja momentinė sąlyga $E|\varepsilon_{\mathbf{0}}|^p < \infty$. Tegu filtro koeficientai tenkina sąlygą $\mathcal{L}_{p,p}$. Tada, kai $|\mathbf{n}| \to \infty$, $S_{\mathbf{n}}^{(1)}$ galioja SDSD.*

# 3 Apibendrinimas

## 3.1 Išvados

Darbo tikslas buvo praplėsti jau gautas ribines teoremas tiesiniams atsitiktiniams laukams panaudojant Beveridge–Nelson dekompoziciją. Darbo pabaigoje galima pateikti tokius pastebėjimus:

- Buvo išanalizuoti žinomi ribinių teoremų įrodymo, panaudojant BN dekompoziciją, rezultatai tiesinių atsitiktinių laukų sumoms. Įvertinus pliusus ir minusus galima teigti, kad pati sėkmingiausia BN dekompozicijos panaudojimo sritis yra centrinės ribinės teoremos įrodymas.

- Didžiausias BN dekompozicijos privalumas tas, jog ribinės teoremos įrodytos atsitiktiniams laukams, gali būti lengvai pritaikomos tiesiniams atsitiktiniams laukams, padarius papildomas prielaidas apie tiesinį filtrą. Vienas svarbiausių reikalavimų taikymui, jog liekanų sruktūra būtų ne per daug sudėtinga. Labiausiai ją įtakoja sumavimo aibių tipas. Kai sumavimo aibės yra stačiakampiai gaunamos gana paprastos išraiškos.

- Dėl apribojimų tiesiniam filtrui, BN dekompozicija nėra skirta nagrinėti ilgos atminties modelius.

- Darbe nagrinėjami skirtingi martingalinių skirtumų apibrėžimai plokštumoje ir aukštesnio matavimo erdvėje. Skirtingus apibrėžimus nulemia $\sigma$-algebros pasirinkimas. Detaliau yra nagrinėjami trys apibrėžimo tipai.

- Panaudojant BN dekompoziciją, pasirinkus tris skirtingus diskretaus parametro martingalinių skirtumų apibrėžimus, buvo įrodytos trys centrinės ribinės teoremos tiesiniams atsitiktiniams laukams, generuotiems martingalinių skirtumų prieaugių.

- Nors taikant BN dekompoziciją ribinių teoremų įrodymai yra gana paprasti, tačiau įrodant SDSD, panaudojus ergodiškumo teoriją, įrodymai gaunami taip pat paprasti, o rezultatai– stipresni.

Ateityje ribinių teoremų įrodymuose būtų įdomu panaudoti M. Gordin 2009 metais pasiūlytą "martingale-coboundary" išdėstymą.

## 3.2 Rezultatų pristatymas

Disertacijos rezultatai buvo pristatyti šiose konferencijose:

1. Tarptautinėje konferencijoje, surengtoje Kijeve, Ukrainoje pavadinimu "Modern Stochastics: Theory and Applications II", 2010 metų rugsėjo 7–11 dienomis. Pranešimo tema: CLT for linear random fields with martingale increments.

2. Tarptautinėje konferencijoje, surengtoje Vilniuje pavadinimu “10th International Vilnius Conference on Probability and Mathematical Statistics”, 2010 metų birželio 28 – liepos 2 dienomis. Pranešimo tema: CLT for linear random fields with martingale increments.

3. LI Lietuvos matematikų draugijos konferencijoje, surengtoje Šiauliuose 2010 metų birželio 17–18 dienomis. Pranešimo tema: CLT for linear random fields with martingale increments.

4. L Lietuvos matematikų draugijos konferencijoje, surengtoje Vilniuje 2009 metų birželio 18–19 dienomis. Pranešimo tema: Remarks on the SLLN for linear random fields.

## 3.3 Pagrindinių publikacijų sąrašas

Pagrindiniai darbo rezultatai yra publikuoti šiuose leidiniuose:

1. P. Banys, Yu. Davydov, and V. Paulauskas. Remarks on the SLLN for linear random fields. Statist. Probab. Lett., 80:489–496, 2010.

2. P. Banys and V. Paulauskas. CLT for linear random fields with martingale increments. Lith. Math. J., 2011 (priimtas spausdinti, pasirodys 4 numeryje).

3. P. Banys. CLT for linear random fields with stationary martingale-difference innovations. Lith. Math. J., 2011 (priimtas spausdinti, pasirodys 3 numeryje).

## Padėka

Nuoširdžiai dėkoju prof. V. Paulauskui už pagalbą suvokiant nagrinėjamos temos specifiką bei paramą rašant disertaciją nuo pačių pirmųjų iki paskutinių žingsnių. Esu dėkingas prof. Yu. Davydov už įžvalgas ir pagalbą gaunant disertacijos rezultatus. Taip pat dėkoju visiems Finansų ir draudimo matematikos bei Ekonometrinės analizės katedrų mokslinių seminarų dalyviams bei pranešėjams, kurie nuolatos skatino judėti į priekį.

Galiausiai visiems, kurie kokiu nors būdu prisidėjo prie to, jog ši disertacija būtų pabaigta.

## 3.4 Summary

The main objective of this thesis is the extension of limit result for sums of random linear field by using Beveridge–Nelson decomposition.

To achieve this goal, we use Beveridge–Nelson decomposition generalization by V. Paulauskas presented in 2010 and D. Marinucci and S. Poghosyan presented in 2001. These works extend results of P.C.B. Phillips and V. Solo for random linear fields, which were formulated for linear processes. The method enables results proved for random fields of innovations apply to random linear fields, generated by these innovations, under some additional assumption on linear filter.

After the investigation of Beveridge–Nelson decomposition we came to the conclusion that the best application of the method is for the proof of Central limit theorem. We consider random linear fields on $\mathbb{Z}^d$ generated by different type of innovation.

In Chapter 2 we analyze random linear fields generated by martingale difference innovations. Definition of martingale difference in the plane and higher dimension spaces is another important topic analyzed in the thesis, because there exist different ways to define them. We use different definitions of martingale difference presented in the works by D. Tjøstheim, R. Morkvėnas, B. Nahapetian, M. El Machkouri, and prove Central limit theorems for random linear fields with three different types of martingale difference innovations.

In the last chapter we consider random linear fields generated by ergodic or mixing (in particular case, independent identically distributed (i.i.d.)) random variables. There we generalize the classical Strong Law of Large Numbers for multi-indexed sums of i.i.d. random variables. These results are easily obtained using ergodic theory. Also we compare the results for SLLN obtained using ergodic theory and with the help of the Beveridge–Nelson decomposition.

## Literatūra


[1] P. Banys, Yu. Davydov, and V. Paulauskas, *Remarks on the SLLN for linear random fields*, Statist. Probab. Lett. **80** (2010), 489–496.

[2] J. Cao and K. Worsley, *The geometry of correlation fields with an application to functional connectivity of the brain*, Ann. Appl. Probab. **9** (1999), no. 4, 1021–1057.

[3] J. Dedecker, *A central limit theorem for stationary random fields*, Probab. Theory Relat. Fields **110** (1998), no. 3, 397–426.

[4] A. Illig and B. Truong-Van, *Conditional Lindeberg central limit theorem for strong lattice martingales*, http://www.mathpreprints.com/statistics/0304010/ (2003).

[5] T.L. Koval, *An estimate of the convergence rate in the central limit theorem for two parameter martingale*, Ukr. Mat. J. **44** (1992), no. 8.

[6] K. Kuroda and H. Manaka, *Limit theorem related to an interface of three-dimensional Ising model*, Kobe J. Math. **15** (1998), no. 1, 17–39.

[7] J. Lafferty, A. McCallum, and F. Pereira, *Conditional random fields: Probabilistic models for segmenting and labeling sequence data*, Proc. 18th International Conf. on Machine Learning, 2001, pp. 282–289.

[8] M. El Machkouri and R. Stoica, *Asymptotic normality of kernel estimates in a regression model for random fields*, J. Nonparam. Statist. **22** (2010), no. 8, 955–971.

[9] D. Marinucci and S. Poghosyan, *Asymptotics for linear random fields*, Statist. Probab. Lett. **51** (2001), 131–141.

[10] R. Morkvėnas, *Invariance principle for martingales on the plane.*, Lith. Math. J. **3** (1984), 127–132.

[11] B. Nahapetian, *Billingsley–Ibragimov theorem for martingale difference random fields and its application to some models of clasical statistical physics*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **320** (1995), 1539–1544.

[12] B.S. Nahapetian and A.N. Petrosian, *Martingale-difference random fields limit theorems and some applications*, Izv. Nats. Akad. Nauk Armenii Mat. **30** (1995), no. 6, 5–23.

[13] V. Paulauskas, *On Beveridge–Nelson decomposition and limit theorems for linear random fields*, J. Multivariate Anal. **101** (2010), 621–639.

[14] P.C.B. Phillips and V. Solo, *Asymptotics for linear processes*, Ann. Statist. **20** (1992), 971–1001.

[15] R.T. Smythe, *Strong law of large numbers for $r$-dimensional arrays of random variables*, Ann. Probab. **1** (1973), 164–170.

[16] D. Tjøstheim, *Statistical spatial series modelling II. Some further results on unilateral lattice processes*, Adv. Appl. Probab. **3** (1983), 562–584.

## 3.5 Trumpos žinios apie autorių

**Gimimo data ir vieta**

1981 m. rugsėjo 20 d., Alytus.

**Išsilavinimas**

1989–2000 Alytaus A. Ramanausko-Vanago vidurinė mokykla;

2000–2010 Vilniaus Universitetas Matematikos ir Informatikos fakultetas:

- 2004 – Bakalauro diplomas;
- 2006 – Magistro diplomas;
  *Studijų specializacija– finansuosų ir draudimo matematika*;
- 2006–2010 Doktorantūros studijos.

**Darbo patirtis**

- 2004.04.01 – UAB "If draudimas", Aktuaro padėjėjas;
- 2005.01.01 – UAB "If draudimas", Aktuaras;
- 2005.05.01–2011 – "If P&C Insurance AS" filialas, IT projektų vadovas.

## 3.6 Short information about the author

**Birth date and place**

1981 $20^{\text{th}}$ of September, Alytus.

**Education**

1989–2000 Alytus, A. Ramanauskas-Vanagas secondary school;

2000–2010 Vilnius University, Faculty of Mathematics and Informatics:

- 2004 – Bachelor of Mathematics,
- 2006 – Master of Mathematics,
  *Specialization in financial and insurance mathematics.*
- 2006–2010 Doctoral studies.

**Work experience**

- 2004.04.01 – UAB "If draudimas" Actuary assistant
- 2005.01.01 – UAB "If draudimas" Actuary
- 2005.05.01–2011 – branch of "If P&C Insurance AS" IT project manager