LMD mokslo darbai, III tomas, 151–156

Logaritminės eilės $\rho_j \geqslant 1$ begalinio indekso nehomogeninis kraštinis Rymano uždavinys sudėtiniam Dini-Lipšico kontūrui

Petras ALEKNA (ŠU)
el. paštas: alekna@fm.su.lt

Sudėtiniam Dini-Lipšico kontūrui $L = \bigcup_{j=1}^{m} L_j$, tenkinančam [1] darbe suformuluotas sąlygas, nagrinėjamas nehomogeninis kraštinis Rymano uždavinys: rasti dalimis analizinę funkciją $\Phi(z)$, kurios ribinės reikšmės $\Phi^{\pm}(t)$ kontūro $\widetilde{L} = L \setminus \{0, \infty\}$ taškuose tenkina tiesinę funkcinę lygtį

$$\Phi^{+}(t) = G(t)\Phi^{-}(t) + g(t), \quad t \in \widetilde{L}. \tag{1}$$

Duotosios funkcijos $G(t), g(t)$ tenkina sąlygas ($j = \overline{1, m}$):

$$\begin{gathered} g(t),\ \ln G(t) \in \mathfrak{D}_p(L^0), \quad L^0 = L \cap (|z| \leqslant R), \\ \ln|G(t)| \in \mathfrak{D}_p(L_j^*), \quad L_j^* = L_j \setminus L_j^0, \quad p > 2; \end{gathered} \tag{2}$$

$$\arg G(t) = \varphi_j(t) ln^{\rho_j}|t|, \quad t \in L_j^*, \quad 1 \leqslant \rho_j < \infty, \tag{3}$$

čia $\varphi_j(t) \in \mathfrak{D}_{\alpha_j}(L_j^*), \varphi_j(\infty) = \lambda_j, \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j \neq 0, \quad \alpha_j > \rho_j + 2;$

$$g(t) \in \mathfrak{D}_{r_j}(L_j^*), \quad r_j > \rho_j + 1, \quad g(0) = g(\infty) = 0. \tag{4}$$

$$L_j^*\text{- eilės} \quad \gamma_j > \rho_j + 2 \quad \text{Dini-Lipšico kontūras.} \tag{5}$$

Uždavinio (1)–(5) sprendinio ieškosime analizinių ir aprėžtųjų kreiviniuose kampuose D_j funkcijų klasėje **B**.

Logaritminės eilės $\alpha \geqslant 1$ begalinio indekso kraštinis Rymano uždavinys vienajungei sričiai D, apribotai paprastu glodžiu begaliniu Dini-Lipčico kontūru, išnagrinėtas P. Jurovo [2]. Šiame darbe P. Jurovo rezultatai apibendrinti sudėtiniam Dini-Lipčico kontūrui.

Iš funkcinės lygties (1) tiesiškumo išplaukia, jog pakanka rasti nehomogeninio uždavinio (1)-(5) atskirąjį sprendinį $\Phi_0(z) \in \mathbf{B}$. Tada šio uždavinio bendrasis sprendinys

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \Psi(z),$$

čia $\Psi(z) = X(z)F(z)$ atitinkamo homogeninio uždavinio ($g(t) \equiv 0$) bendrasis sprendinys klasėje **B** [1].

Šio darbo tikslas – rasti atskirąjį sprendinį $\Phi_0(z) \in$ **B**. Čia galima naudotis darbuose [2], [3] panaudota atskirojo sprendinio radimo schema. Kai λ_j, ρ_j tenkina homogeninio uždavinio išsprendžiamumo sąlygas klasėje **B** [1], nehomogeninio uždavinio (1)–(5) atskirasis sprendinys nusakomas formule

$$\Phi_0(z) = \frac{\Psi_0(z)}{2\pi i}\int\limits_L \frac{g(t)\,\mathrm{d}t}{\Psi_0^+(t)(t-z)} = \sum_{j=1}^{m}\frac{\Psi_0(z)}{2\pi i}\int\limits_{L_j}\frac{g(t)\,\mathrm{d}t}{\Psi^+(t)(t-z)}, \tag{6}$$

čia $\Psi_0(z) = \prod_{k=1}^{s} F_k(z)X_k(z)$ – klasės **B** homogeninio uždavinio atskirasis sprendinys,

$$X(z) = \prod_{j=1}^{m} X_j(z) = \prod_{j=1}^{m}\exp\left\{\frac{z}{2\pi i}\int\limits_{L_j}\frac{\ln G(\tau)}{\tau(\tau-z)}\,\mathrm{d}\tau\right\} \tag{7}$$

kanoninė funkcija, kurios savybės išnagrinėtos [1] darbe, o sandauga $\prod_{k=1}^{s} F_k(z)X_k(z)$ imama pagal pažymėtuosius indeksus k, kuriems $\rho_k' = \max_{1\leqslant j_k\leqslant m}\rho_{j_k}$ ir $\lambda_k' = \sum_{j_k}\lambda_{j_k} > 0$.

Kanoninės funkcijos dalies $X_k(z) = \exp\left\{\frac{z}{2\pi i}\int\limits_{L_{j_k}}\frac{\ln G(\tau)}{\tau(\tau-z)}\,\mathrm{d}\tau\right\}$ kairinių ribinių reikšmių $X_k^+(t)$ kontūro $L_{j_k}^*$ taškuose ($t\in L_{j_k}^*$) formulė yra žinoma ([2], p. 281):

$$X_k^+(t) = \exp\left\{-\frac{i\lambda_k'(2\pi i)^{\rho_k'}}{\rho_k'+1}\mathbb{B}_{\rho_k'+1}\left(\frac{\ln|t|}{2\pi i}\right) + i\mu_0\ln|t| + f_{\rho_k'}(t)\right\} \tag{8}$$

čia $\mathbb{B}_{\rho_{k+1}'}(w) = \sum_{l=0}^{[\rho_k']+2} C_{\rho_k'+1}^{l} B_l w^{\rho_k'+1-l}$ – Bernulio daugianaris, $\eta_0 = (2\pi)^{-1} \times ln|G(\infty)|$, $f_{\rho_k'}(t) \in \mathfrak{D}_{\mu_{j_k}}(L_{j_k}^*)$, $\mu_{j_k} = \min(p-1, \alpha_{j_k}-\rho_k'-1, \gamma_{j_k}'-\rho_k'-1, k_0-\{\rho_k'\})$, $k_0 = 3$, kai $[\rho_k']$ – lyginis skaičius, kai $k=2$, kai $[\rho_k']$ – nelyginis skaičius.

Kadangi ribinių reikšmių $X_k^+(t)$ asimptotinė formulė (8) yra žinoma, tai sveikąją funkciją $F_k(z)$ konstruosime taip, kad

$$|F_k(t)X_k^+(t)| = O(1), \quad \text{kai} \quad t\to\infty, \quad t\in L_{j_k}^{**}\subset L_{j_k}^*.$$

Šią sąlygą tenkinančių sveikjų funkcijų yra daug. Paprasčiausios iš jų bus tos sveikosios funkcijos, kurių nuliai išdėstyti viename spindulyje $\arg z = \pi + \beta_k$ (parenkamas artimiausias kreivei L_{j_k} spindulys $\arg z = \beta_k$).

Sveikąją funkciją $F_k(z)$ apibrėšime tokiomis lygybėmis:

$$F_k(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\Big(1+\frac{z}{r_n^{(k)}e^{i\beta_k}}\Big), \quad Re(\ln r_n^{(k)} - \pi i)^{\rho_k'} = (2n-1)\pi(\lambda_k')^{-1}, \tag{9}$$

čia $r_n^{(k)} > 0$ – lygties $Re(\ln x - \pi i)^{\rho'_k} = (2n-1)\pi(\lambda'_k)^{-1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ didžiausioji realioji šaknis.

Sveikąją funkciją $F_k(z)$ išreiškiame Koši tipo integralu

$$F_k(z) = \exp\left\{ ze^{i\beta_k} \int\limits_{r_1^{(k)}}^{\infty} \frac{E(\frac{1}{2} + \frac{\lambda'_k}{2\pi} Re(\ln x - \pi i)^{\rho'_k})}{x(x + ze^{i\beta_k})} \, dx \right\}.$$

Žinoma ([5], p. 53), jog kiekvienam z

$$\ln|F_k(z)| \leqslant |z| \int\limits_{r_1^{(k)}}^{\infty} \frac{E(\frac{1}{2} + \frac{\lambda'_k}{2\pi} Re(\ln x - \pi i)^{\rho'_k})}{x(x + |z|)} \, dx \equiv \ln F_k(u),$$

čia $|z| = u$.

Todėl pirmiausia nagrinėsime funkcijos $\ln F_k(u)$ savybes, ją pertvarkydami taip:

$$\begin{aligned} \ln F_k(u) = u \int\limits_{r_1^{(k)}}^{\infty} \frac{n_{\rho'_k}(x)}{x(x+u)} \, dx + \frac{\lambda'_k u}{2\pi} \int\limits_{r_1^{(k)}}^{\infty} \frac{Re(\ln x - \pi i)^{\rho'_k}}{x(x+u)} \, dx \\ \equiv K_{\rho'_k}(u) + I_{\rho'_k}(u), \end{aligned} \tag{10}$$

čia $n_{\rho'_k}(x) = E(\frac{1}{2} + \frac{\lambda'_k}{2\pi} Re(\ln x - \pi i)^{\rho'_k}) - \frac{\lambda'_k}{2\pi} Re(\ln x - \pi i)^{\rho'_k}$.

Vėliau įvertinsime funkcijų skirtumą $\ln F_k(t) - \ln F_k(|t|) \equiv \eta_{\rho'_k}(t)$, kai $t \in L_{jk}^{**}$.

Suformuluosime pagrindinius rezultatus, kurie įrodomi analogiškai samprotaujant kaip [3], [4].

1 lema. *Funkcija $K_{\rho'_k}(u)$, kai $\rho'_k > 1$, yra tolydžioji ir aprėžtoji intervale $1 \leqslant u \leqslant \infty$, o jos išvestinė, kai $u \geqslant R > 1$, $(u \neq \infty)$ tenkina nelygybę*

$$\left| \frac{dK_{\rho'_k}(u)}{du} \right| \leqslant \frac{A_{\rho'_k}}{u(\ln u)^{\rho'_k - 1}}, \quad 0 < A_{\rho'_k} = \text{const}.$$

2 lema. *Kai $\rho'_k \geqslant 1$ ir $u \geqslant R$, funkcijai $I_{\rho'_k}(u)$ teisinga asimptotinė formulė*

$$I_{\rho'_k}(u) = \frac{\lambda'_k (\ln u)^{\rho'_k + 1}}{2\pi(\rho'_k + 1)} - \frac{\lambda'_k}{\rho'_k + 1} \sum_{l=2}^{[\rho'_k]+1} C^l_{\rho'_k+1} |B_l| (2\pi)^{l-1} (\ln u)^{\rho'_k + 1 - l} + S_{\rho'_k}(u),$$

čia $S_{\rho'_k}(u) \in \mathfrak{D}_{k_0 - \{\rho'_k\}}$ $(R + \varepsilon \leqslant u \leqslant \infty)$, $\varepsilon > 0$.

Funkcijos

$$\eta_{\rho'_k}(t) \equiv \ln F_k(t) - \ln F_k(|t|) = |t|(e^{i(\arg t - \beta_k)} - 1) \int\limits_{r_1^{(k)}}^{\infty} \frac{n_{\rho'_k}(x)}{(x+t)(x+|t|)} \mathrm{d}x$$

kontūro $L^*_{j_k}$ taškuose savybės nusakomos

3 lema. *Jeigu $\rho'_k \geqslant 1$ ir $L^{**}_{j_k}$ – eilės $\gamma_{j_k} > \rho'_k + 2$ Dini-Lipšico kontūras, tai:*

1) *funkcija $\eta_{\rho'_k}(t)$ tolydžioji ir aprėžtoji kontūro $t \in L^{**}_{j_k}$ taškuose ir*

$$\lim_{t \in L^{**}_{j_k}} \eta_{\rho'_k}(t) = 0;$$

2) *teisingas funkcijos $\eta_{\rho'_k}(t)$ išvestinės įvertis:*

$$\left|\frac{d\eta_{\rho'_k}(t)}{dt}\right| \leqslant \frac{B_{\rho'_k}}{|t|(\ln|2t|)^{\gamma_{j_k} - \rho'_k}}, \quad 0 < B_{\rho'_k} = \text{const.}$$

4 lema. *Jeigu $\rho'_k \geqslant 1$, $L^{**}_{j_k}$ – eilės $\gamma_{j_k} > \rho'_k + 2$ Dini-Lipšico kontūras, $F_k(z)$ – apibrėžta* (9) *lygybėmis sveikoji funkcija, tai taško $t = \infty$ aplinkoje ($t \in L^{**}_{j_k}$) teisinga asimptotinė formulė:*

$$F_k(t) = \exp\left\{ \frac{\lambda'_k (\ln|t|)^{\rho'_k + 1}}{2\pi(\rho'_k + 1)} - \frac{\lambda'_k}{\rho'_k + 1} \sum_{l=2}^{[\rho'_k]+1} C^l_{\rho'_k + 1} |B_l| (2\pi)^{l-1} (\ln|t|)^{\rho'_k + 1 - l} \right.$$
$$\left. + S_{\rho'_k}(t) + R_{\rho'_k}(t) \right\},$$

čia $R_{\rho'_k}(t) \equiv \eta_{\rho'_k}(t) + K_{\rho'_k}(|t|)$ – aprėžtoji funkcija kontūro $t \in L^{**}_{j_k}$ taškuose, o jos išvestinė tenkina sąlygą

$$\left|\frac{dR_{\rho'_k}(t)}{dt}\right| \leqslant \frac{M_{\rho'_k}}{|t|}, \quad 0 < M_{\rho'_k} = \text{const.}$$
$$S_{\rho'_k}(t) \in \mathfrak{D}_{k_0 - \{\rho'_k\}}(L^{**}_{j_k}).$$

5 lema. *Jeigu patenkintos* (2), (3), (5) *sąlygos, sveikoji funkcija $F_k(z)$ – nusakyta* (9) *lygybėmis, $X^+_k(t)$ –* (8) *formulėmis, tai visiems $t \in L^{**}_{j_k}$ teisinga išraiška*

$$\begin{aligned}\Psi^+_k(t) &= F_k(t) X^+_k(t) \\ &= \exp\left\{ i(\eta_0 \ln|t| + \frac{\lambda'_k}{2\pi}(\arg t - \beta_k - \pi) \ln^{\rho'_k}|t|) + S_{\rho'_k}(t) + f_{\rho'_k}(t) + R_{\rho'_k}(t) \right\},\end{aligned}$$

kurioje funkcijų $S_{\rho'_k}(t)$, $f_{\rho'_k}(t)$ ir $R_{\rho'_k}(t)$ savybės nusakytos (8) *formulėje ir* 4 *lemoje.*

Išvada. Kadangi funkcijos $S_{\rho'_k}(t)$, $f_{\rho'_k}(t)$, $R_{\rho'_k}(t)$ yra aprėžtosios kontūro L^{**}_{jk} taškuose, tai

$$|\ln|\Psi_k^+(t)|| = |\ln|F_k(t)X_k^+(t)||\leqslant N_{\rho'_k} = \text{const}.$$

6 lema. *Jeigu patenkintos* (2)–(5) *sąlygos, sveikoji funkcija $F_k(z)$ nusakyta* (9) *lygybėmis, tai* (6) *integralo tankis*

$$g_1(t) \equiv \frac{g(t)}{\Psi_0^+(t)} \in \mathfrak{D}_{\rho_0}(L_{j_k}),$$

čia $\rho_0 = \min\limits_{j_k}(\mu_{j_k}, r_{j_k} - \rho_{j_k}) > 1$.

1 teorema. *Jeigu $\lambda'_k > 0$, o sveikosios funkcijos $F_k(z)$ $(k = \overline{1,s})$ nusakytos (9) lygybėmis, $X(z)$ – kanoninė funkcija* (7), *tai nehomogeninio uždavinio* (1)– (5) *atskirasis sprendinys* (6) *yra aprėžtas kreiviniuose kampuose D_j $(j = \overline{1,m})$.*

2 teorema. *Jeigu patenkintos atitinkamo homogeninio uždavinio išsprendžiamumo sąlygos* [1], *tai logaritminės eilės $\rho_j \geqslant 1$ begalinio indekso nehomogeninis kraštinis Rymano uždavinys* (1)–(5) *aprėštųjų funkcijų klasėje* **B** *turi be galo daug sprendinių, išreiškiamų formule*

$$\Phi(z) = \frac{\Psi_0(z)}{2\pi i} \int\limits_L \frac{g(\tau)}{\Psi_0^+(\tau)(\tau - z)} d\tau + F(z)X(z),$$

čia $\Psi_0(z) = \prod_{k=1}^s F_k(z)X_k(z)$ – atskirasis aprėžtasis homogeninio uždavinio sprendinys, $X(z)$ – kanoninė funkcija (7), *$F_k(z)$ – sveikosios funkcijos, nusakytos* (9) *lygybėmis, o $F(z)$ – bet kuri nulinės eilės sveikoji funkcija, kuriai taško $z = \infty$ aplinkoje teisingas asimptotinis įvertis*

$$\ln|F(z)| \leqslant \frac{\lambda \ln^{\rho+1}|z|}{2\pi(\rho+1)}(1 + o(\ln^{\rho+1}|z|)),$$

čia $\rho = \max_{1\leqslant j\leqslant m} \rho_j$, $\lambda = \max_j \lambda_j > 0$.

Literatūra

[1] П. Алекна, Однородная краевая задача Римана с бесконечным индексом логарифмического порядка для многосвязной области, ограниченной сложным контуром Дини-Липшица, LMD XXXVIII konferencijos darbai, *Specialusis Liet. Matem. Rink. priedas*, Vilnius, Technika, 59–63 (1997).

[2] П.Г. Юров, Неоднородная краевая задача Римана с бесконечным индексом логарифмического порядка $\alpha \geqslant 1$, *Материалы Всесоюзной конференции по краевым задачам*, Казань, 279–284 (1970).

[3] П. Алекна, Краевая задача Римана с плюс бесконечным индексом логарифмического порядка для сложного контура, *Liet. Matem. Rink.*, **35**(2), 133–140 (1995).

[4] P. Alekna, Inhomogene Riemannsche Randwertaufgabe mit positive unendlichen Index der Logaritmischen Ordnung $\min(\alpha, \beta) > 1$ fur einen Winkelraum, *Complex Variables*, **16**, 273–288 (1991).

The inhomogeneous Riemanian boundary – value problem with infinite index of the logarithmic order $\rho_j \geqslant 1$ for complex Dini-Lipshitz contour

P. Alekna

Special choosing entire functions, the general solution of the problem in the class of bounded and analytic functions is obtained.