LMD mokslo darbai, III tomas, 409–413

Šredingerio lygties su stiprinimo procesu skaitinis sprendimas

Raimondas ČIEGIS (MII,VGTU), Genė KAIRYTĖ (MII), Violeta PAKALNYTĖ (MII)
el. paštas: rc@fm.vtu.lt

1. Uždavinio formulavimas

Nagrinėsime uždavinį, aprašantį signalo judėjimą šviesolaidžiu. Tokio proceso matematinis modelis yra [1]

$$i\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\mu|u|^2u+i\alpha u=0, \tag{1.1}$$

$$u(z,0)=0, \qquad u(z,T)=0, \tag{1.2}$$

$$u(0,t)=u_0(t), \qquad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{1.3}$$

čia z yra šviesolaidžio ašinė koordinatė, t yra laikas, α – energijos absorbcijos koeficientas.

Pradinė sąlyga aprašo seką binarinių signalų – solitonų

$$u_0(t)=\sum_{j=0}^{P}\frac{a_j}{\mathrm{ch}(t-8j-4)},$$

čia $\{a_j\}$ yra binarinė seka, t.y. $a_j=1$ arba $a_j=0$. Energijos nuostoliai yra kompensuojami periodiškai stiprinant signalą taškuose $\tilde{z}_k=k\Delta z$:

$$u(\tilde{z}_k,t)=\mathrm{e}^{\alpha\Delta z}u(\tilde{z}_k-0,t). \tag{1.4}$$

Pateiksime tipines šviesolaidžio ilgio ir atstumo tarp stiprintuvų normuotas reikšmes:

$$0\leqslant z\leqslant 13, \qquad \Delta z=0.04.$$

2. Baigtinių skirtumų schema

Uždavinį (1.1)–(1.4) spręsime baigtinių skirtumų metodu. Pastebėsime, kad darbe [1] buvo naudotas spektrinis algoritmas. Srityje $[0,Z]\times[0,T]$ apibrėžkime tolygų diskretųjį tinklą

$\omega_{h\tau} = \omega_h \times \omega_\tau$

$$\omega_h = \{z_j \,:\, z_j = jh, \quad j = 1, 2, \dots, M, \; z_M = Z\},$$
$$\omega_\tau = \{t_j \,:\, t_j = j\tau, \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \; t_N = T\}.$$

Diferencialinę lygtį (1.1) aproksimuokime simetrine baigtinių skirtumų schema

$$i\frac{y^{n+1} - y^n}{h} + \frac{1}{2}\left(\frac{y^{n+1} + y^n}{2}\right)_{\bar{t}t} + \mu\frac{|y^{n+1}|^2 + |y^n|^2}{2}\,\frac{y^{n+1} + y^n}{2}$$
$$+ i\alpha\frac{y^{n+1} + y^n}{2} = 0, \tag{2.1}$$
$$y_0^n = 0, \qquad y_N^n = 0, \qquad z_n \in \omega_h, \tag{2.2}$$
$$y(z_0, t_j) = u_0(t_j), \qquad t_j \in \omega_\tau, \tag{2.3}$$

čia $y_j^n = y(z_n, t_j)$ pažymėjome funkciją, apibrėžtą diskrečiojo tinklo taškuose bei pasinaudojome baigtinių skirtumų išvestinėmis

$$y_t = \frac{y_{j+1} - y_j}{\tau}, \qquad y_{\bar{t}} = \frac{y_j - y_{j-1}}{\tau}.$$

Baigtinių skirtumų lygties aproksimacijos paklaida yra $O(\tau^2 + h^2)$ eilės dydis, jei u yra pakankamai glodi funkcija.

Šiame darbe nagrinėsime stiprinimo proceso įtaką baigtinių skirtumų schemos stabilumui. Todėl tarsime, kad $\mu = 0$. Netiesinio uždavinio konvergavimo analizę galima atlikti pasinaudojus darbo [2] rezultatais. Stiprinimo sąlygą (1.4) aproksimuokime lygtimi

$$y_j^n = \left(\frac{1 + 0.5\alpha h}{1 - 0.5\alpha h}\right)^K y(z_n - 0, t_j), \tag{2.4}$$

čia $z_n = m\Delta z$ yra stiprinimo taškas, $K = \Delta z/h$. Ir šios sąlygos aproksimacijos paklaida yra $O(h^2)$ eilės dydis.

Spektriniu metodu ištirsime gautosios baigtinių skirtumų schemos sprendinio stabilumą. Nagrinėkime spektrinį skleidinį

$$y_j^n = \sum_{k=1}^{N-1} c_k^n \sin\left(\frac{\pi k t_j}{T}\right).$$

Įrašę šį skleidinį į baigtinių skirtumų lygtį (2.1) ir pasinaudoję gerai žinomomis tikrinių vektorių ir tikrinių reikšmių savybėmis [3], gausime tokią augimo daugiklio $\tilde{\rho}_k$ išraišką

$$c_k^{n+1} = \tilde{\rho}_k c_k^n, \qquad k = 1, 2, \dots, N-1,$$
$$\tilde{\rho}_k = \frac{1 - 0.5h\alpha - 0.25ih\lambda_k}{1 + 0.5h\alpha + 0.25ih\lambda_k}, \qquad 8 \leqslant \lambda_k \leqslant 4/\tau^2.$$

Kadangi teisinga nelygybė

$$|\tilde{\rho}_k|^2 = \frac{(1-0.5h\alpha)^2 + (0.25h\lambda_k)^2}{(1+0.5h\alpha)^2 + (0.25h\lambda_k)^2} < 1,$$

tai baigtinių skirtumų schema (2.1)–(2.3) yra nesąlygiškai stabili L_2 normoje.

Dabar įvertinsime stiprinimo proceso poveikį baigtinių skirtumų schemos stabilumui. Iš (2.4) lygties seka, kad uždavinio (2.1)–(2.4) augimo daugiklis ρ_k yra

$$\begin{aligned} c_k^{n+K} &= \rho_k^K c_k^n, \qquad k = 1, 2, \ldots, N-1, \\ \rho_k &= \tilde{\rho}_k \left(\frac{1+0.5\alpha h}{1-0.5\alpha h} \right). \end{aligned}$$

Atlikę elementarius skaičiavimus gauname tokią ρ_k išraišką

$$\rho_k = \frac{1 - 0.25\alpha^2 h^2 - 0.25 i h \lambda_k (1 + 0.5\alpha h)}{1 - 0.25\alpha^2 h^2 + 0.25 i h \lambda_k (1 - 0.5\alpha h)},$$

todėl visada $|\rho_k| > 1$ ir simetrinė baigtinių skirtumų schema (2.1)–(2.4) yra nestabili, kai sprendžiame uždavinį su stiprinimo procesu (1.4).

3. Modifikuota baigtinių skirtumų schema

Apibrėžiame naują nežinomą funkciją v:

$$u(z,t) = \mathrm{e}^{-\alpha(z-\tilde{z}_k)} v(z,t),$$

čia z_k yra taškas, kuriame stiprinamas signalas. Funkcija v tenkina uždavinį

$$i\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \mu \mathrm{e}^{-\alpha(z-\tilde{z}_k)} |v|^2 v = 0, \tag{3.1}$$

$$v(z,0) = 0, \qquad v(z,T) = 0, \tag{3.2}$$

$$v(\tilde{z}_k, t) = u_(\tilde{z}_k, t). \tag{3.3}$$

Nagrinėkime stiprinimo sąlygą (1.4):

$$\begin{aligned} u(\tilde{z}_{k+1}, t) &= \mathrm{e}^{\alpha h} u(\tilde{z}_{k+1} - 0, t) \\ &= \mathrm{e}^{\alpha h} \mathrm{e}^{-\alpha h} v(\tilde{z}_{k+1} - 0, t) = v(\tilde{z}_{k+1} - 0, t). \end{aligned}$$

Todėl po stiprinimo žingsnio vėl gauname pradinę sąlygą (3.3).

Modifikuojame simetrinę baigtinių skirtumų schemą (2.1) taip, kad ji aproksimuotų lygtį (3.1)

$$
\begin{aligned}
i\frac{w^{n+1}-w^n}{h} &+ \frac{1}{2}\left(\frac{w^{n+1}+w^n}{2}\right)_{\bar{t}t} + \mu e^{-2\alpha(z_{n+0.5}-\tilde{z}_k)} \\
&\times \frac{|w^{n+1}|^2+|w^n|^2}{2}\,\frac{w^{n+1}+w^n}{2} = 0.
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

Uždavinio (1.1)–(1.4) sprendinio artinį apskaičiuojame pagal formulę

$$
\begin{aligned}
&y_j^n = e^{-\alpha(z_n-\tilde{z}_k)} w_j^n, \qquad \text{jei} \quad z_n < \tilde{z}_{k+1}, \\
&y_j^n = w_j^n, \qquad \text{jei} \quad z_n = \tilde{z}_{k+1}.
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

Tokios baigtinių skirtumų schemos sprendinio augimo daugiklis ρ_k yra

$$
\rho_k = \frac{1-0.25ih\lambda_k}{1+0.25ih\lambda_k},
$$

todėl modifikuotos baigtinių skirtumų schemos (3.4), (3.5) sprendinys yra nesąlygiškai stabilus L_2 normoje.

4. Išskaidymo metodas

Skaičiuojamoje fizikoje labai populiarus išskaidymo pagal fizikinius procesus metodas. Šiuo metodu spręskime uždavinį (1.1)–(1.4), tada gauname baigtinių skirtumų schemą

$$
\begin{aligned}
i\frac{y^{n+0.5}-y^n}{h} &+ \frac{1}{2}\left(\frac{y^{n+0.5}+y^n}{2}\right)_{\bar{t}t} \\
&+ \mu\frac{|y^{n+0.5}|^2+|y^n|^2}{2}\,\frac{y^{n+0.5}+y^n}{2} = 0,
\end{aligned} \tag{4.1}
$$

$$
\frac{y^{n+1}-y^{n+0.5}}{h} + \alpha\frac{y^{n+1}+y^{n+0.5}}{2} = 0, \tag{4.2}
$$

o stiprinimo procesą vėl aproksimuojame (2.4) lygtimi. Tokios baigtinių skirtumų schemos aproksimacijos tikslumas sumine prasme yra $O(\tau+h^2)$ eilės. Jos augimo daugiklis ρ_k yra

$$
\rho_k = \frac{1-0.25ih\lambda_k}{1+0.25ih\lambda_k}\,\frac{1-0.5\alpha h}{1+0.5\alpha h}\,\frac{1+0.5\alpha h}{1-0.5\alpha h},
$$

todėl teisinga lygybė $|\rho_k| = 1$ ir išskaidymo schema yra nesąlygiškai stabili L_2 normoje. Taigi išskaidymo schemoje subalansuojami energijos praradimo ir stiprinimo procesai.

Panaudodami formalų simetrizavimo būdą, galime gauti ir $O(\tau^2+h^2)$ aproksimacijos tikslumo išskaidymo baigtinių skirtumų schemą

$$
\frac{y^{n+1/3}-y^n}{0.5h} + \alpha\frac{y^{n+1/3}+y^n}{2} = 0, \tag{4.3}
$$

$$i\frac{y^{n+2/3}-y^{n+1/3}}{h}+\frac{1}{2}\left(\frac{y^{n+2/3}+y^{n+1/3}}{2}\right)_{\bar{x}x} + \mu\frac{|y^{n+2/3}|^2+|y^{n+1/3}|^2}{2}\,\frac{y^{n+2/3}+y^{n+1/3}}{2}=0, \tag{4.4}$$

$$\frac{y^{n+1}-y^{n+2/3}}{0.5h}+\alpha\frac{y^{n+1}+y^{n+2/3}}{2}=0. \tag{4.5}$$

Jeigu vietoje (4.3) ir (4.5) lygčių naudotume tikslias lygybes, pvz. (4.3) lygtį pakeistume lygybe

$$y^{n+1/3}=\mathrm{e}^{-0.5\alpha h}y^n,$$

tai (4.3) ir (4.5) baigtinių skirtumų schemos žingsnius galima apjungti visuose vidiniuose tinklo ω_h taškuose, nesutampančiuose su stiprinimo taškais.

Literatūra

[1] G. Moebs, A multilevel method for the resolution of a stochastic weakly damped nonlinear Schrödinger equation, *Appl. Numer. Math.*, **26**(3), 353–375 (1998).

[2] R. Čiegis, Rem. Čiegis, M. Meilūnas, On one general investigation scheme of difference schemes, *Liet. matem. rink.*, **36**(3), 281–302 (1996).

[3] A.A. Samarskij, *Theory of difference schemes*, Nauka, Moscow (1988) (in Russian).

Numerical method for a Schrödinger problem with amplification process

R. Čiegis, G. Kairytė, V. Pakalnytė

In this paper we consider one Schrödinger problem which describes a signal propagation in optical fibers. The stability of symmetrical finite difference scheme is investigated in the L_2 norm. It is proved that the scheme becomes unstable if the signal is periodically amplified along the fiber. A modification of the symmetrical scheme and one splitting scheme are proposed to solve the given problem.