VILNIAUS UNIVERSITETAS

Julija Karaliūnaitė

REIKŠMIŲ PASISKIRSTYMO TEOREMOS PERIODINEI DZETA FUNKCIJAI

Daktaro disertacijos santrauka
Fiziniai mokslai, matematika (01P)

Vilnius, 2010

Disertacija rengta 2006–2010 metais Vilniaus Universitete.

Mokslinis vadovas:
Prof. Habil. Dr. Antanas Laurinčikas (Vilniaus Universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)

Disertacija ginama Vilniaus Universiteto matematikos mokslo krypties taryboje:

Pirmininkas:
Prof. dr. Gediminas Stepanauskas (Vilniaus Universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P).

Nariai:
Prof. habil. dr. Artūras Dubickas (Vilniaus Universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P).
Prof. habil. dr. Eugenijus Manstavičius (Vilniaus Universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P).
Doc. dr. Virginija Garbaliauskienė (Šiaulių Universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P).
Doc. dr. Jonas Genys (Šiaulių Universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P).

Oponentai:
Prof. dr. Ramūnas Garunkštis (Vilniaus Universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P).
Doc. dr. Darius Šiaučiūnas (Šiaulių Universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P).

Disertacija bus ginama viešame Matematikos mokslo krypties tarybos posėdyje 2010 m. rugsėjo 2 d., 14 val., Vilniaus Universiteto Nuotolinių studijų centre.
Adresas: Šaltinių 1A, 03225 Vilnius, Lietuva.
Disertacijos santrauka išsiuntineta 2010 m. liepos mėn. ____ d.
Su disertacija galima susipažinti Vilniaus Universiteto bibliotekoje.

VILNIUS UNIVERSITY

Julija Karaliūnaitė

VALUE DISTRIBUTION THEOREMS FOR THE PERIODIC ZETA-FUNCTION

Summary of Doctoral Dissertation
Physical sciences, mathematics (01P)

Vilnius, 2010

The dissertation was carried out in 2006–2010 at Vilnius University.

Scientific supervisor:
Prof. Habil. Dr. Antanas Laurinčikas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics - 01P)

The thesis is defended in the council of Mathematics of Vilnius University:

Chairman:
Prof. Dr. Gediminas Stepanauskas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics-01P).

Members:
Prof. habil. Dr. Artūras Dubickas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics - 01P).
Prof. habil. Dr. Eugenijus Manstavičius (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics - 01P).
Doz. Dr. Virginija Garbaliauskienė (Šiauliai University, Physical sciences, Mathematics - 01P).
Doz. Dr. Jonas Genys (Šiauliai University, Physical sciences, Mathematics - 01P).

Opponents:
Prof. Dr. Ramūnas Garunkštis (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics - 01P).
Doz. Dr. Darius Šiaučiūnas (Šiauliai University, Physical sciences, Mathematics - 01P).

The dissertation will be defended at the public meeting of the council on September 2, 2010, in Vilnius University remote Education Study Center at 2 pm.
Address: Šaltinių 1A, 03225 Vilnius, Lithuania.
The summary of dissertation was distributed on July, 2010
The dissertation is available at the Library of Vilnius University.

Mokslinė problema ir tyrimo objektas. Tyrimo objektas yra periodinė dzeta funkcija $\zeta_\lambda(s)$, $s = \sigma + it$, kuri pusplokštumėje $\sigma > 1$, apibrėžiama eilute

$$\zeta_\lambda(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \lambda m}}{m^s},$$

o moksline problema - šios funkcijos antrojo momento liekamojo nario išreikštinis pavidalas ir ribinių teoremų silpnojo asimptotinio elgesio charakterizacija tikimybinių matų konvergavimo prasme įvairiose erdvėse pagalba.

Tikslas ir uždaviniai. Darbo tikslas - surasti periodinės dzeta funkcijos $\zeta_\lambda(s)$ antrojo momento liekamojo nario išreikštinį pavidalą ir šiai funkcijai įrodyti tikimybines ribines teoremas. Darbo uždaviniai yra šie:
1. Įrodyti Atkinsono formulę funkcijai $\zeta_\lambda(s)$ kritinėje tiesėje.
2. Įrodyti Atkinsono formulę funkcijai $\zeta_\lambda(s)$ kritinėje juostoje.
3. Įrodyti ribinę teoremą su ribinio mato išreikštiniu pavidalu kompleksinėje plokštumoje funkcijai $\zeta_\lambda(s)$.
4. Įrodyti ribinę teoremą su ribinio mato išreikštiniu pavidalu analizinių funkcijų erdvėje funkcijai $\zeta_\lambda(s)$.

Aktualumas. Kompleksinio kintamojo funkcijos, kurioje nors pusplokštumėje apibrėžiamos Dirichlė eilute su koeficientais, turinčiais vieną ar kitą aritmetinę prasmę, paprastai yra vadinamos dzeta arba L funkcijomis. Jos atlieka svarbų vaidmenį analizinėje skaičių teorijoje. Tarkime, klasikinių Rymano dzeta funkcijos $\zeta(s)$ ir Dirichlė L funkcijų analizinės savybės yra glaudžiai susijusios su pirminių skaičių pasiskirstymu. Todėl nenuostabu, jog daugelis garsių matematikų nagrinėjo ir nagrinėja dzeta funkcijas. F. V. Atkinsono (Atkinson), H. Boro (Bohr), E. Bombjerio (Bombieri), B. Konrio (Conrey), S. M. Goneko (Gonek), R. Garunkšcio, G. H. Hardžio (Hardy), D. R. His-Brauno (Heath-Brown), M. Hakslio (Huxley), A. E. Ingamo (Ingham), A. Ivičiaus (Ivič), H. Ivanieco (Iwaniec), M. Jutilos (Jutila), A. A. Karacubos (Karatsuba), J. Kubiliaus, A. Laurinčiko, A. F. Lavriko (Lavrik), N. N. Levinsono (Levinson), J. V. Liniko (Linnik), J. E. Litlvudo (Littlewood), K. Macumoto (Matsumoto), H. L. Montgomerio (Montgomery), Y. Motochašio (Motohashi), A. Perelio (Perelli), P. Sarnako (Sarnak), A. Selbergo (Selberg), J. Štoidingo (Steuding), E. C. Titčmaršo (Titchmarsh), S. M. Voronino (Voronin) ir kitų darbai įtakoja dzeta funkcijų tyrimų kryptis.

Labai svarbi dzeta funkcijų teorijoje yra momentų problema. Ją paaiškinsime, remdamiesi funkcijos $\zeta(s)$ pavyzdžiu. Reikia rasti vidurkių

$$I_k(\sigma, T) =^{def} \int_0^T |\zeta(\sigma + it)|^{2k} dt, \quad \sigma \geq \frac{1}{2}, \quad k \geq 0,$$

asimptotines formules arba bent įverčius, kai $T \to \infty$. Problema ištiesų sudėtinga. Pavyzdžiui, nežiūrint didelių pastangų, momentų $I_k\left(\frac{1}{2}, T\right)$ asimptotika yra žinoma tik atvejais k=1 [4], k=2 [5] ir $k = c(\log\log T)$, $c > 0$ [10].

Dzeta funkcijų momentai turi svarbių pritaikymų, įvairiuose uždaviniuose jie pakeičia nežinomas tų funkcijų reikšmes. Pavyzdžiui, garsi Lindeliofo (Lindelof) hipotezė, tvirtinanti, jog su kiekvienu $\varepsilon > 0$ yra teisingas įvertis

$$\zeta(\frac{1}{2}+it) = \mathrm{O}_\varepsilon(t^\varepsilon), \quad t_0 > 0$$

yra ekvivalenti iverčiui

$$I_k(\frac{1}{2}, T) = \mathrm{O}(T^{1+\varepsilon}), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Atkinsono formulė duoda momento $I_1(\frac{1}{2}, T)$ asimptotinės formulės liekamojo nario išreikštinį pavidalą. Tai ne tik įdomus, bet ir turintis rimtų pritaikymų, pavyzdžiui, tiriant aukštesniuosius momentus, rezultatas.

Tikimybinės ribinės teoremos charakterizuoja dzeta funkcijų asimptotinio elgesio reguliarumą. Be to, buvo pastebėta, kad tokios teoremos yra svarbiausia dzeta funkcijų universalumo įrodymo grandis.

Periodinė dzeta funkcija $\zeta_\lambda(s)$ nėra klasikinė, ji yra funkcijos $\zeta(s)$ apibendrinimas, tačiau ji pasirodo įvairiuose analizinės skaičių teorijos uždaviniuose. Pavyzdžiui, ji įeina [13] į Hurvico (Hurvitz) ir Lercho (Lerch) dzeta funkcijų antrojo momento parametro atžvilgiu asimptotinę formulę. Iš kitos pusės, darbų, skirtų funkcijai $\zeta_\lambda(s)$, yra nedaug, aukščiau minėti autoriai daugiausia dėmesio skyrė klasikinėms dzeta funkcijoms. Disertacija prisideda prie šios spragos užpildymo.

Visa tai rodo disertacijos tematikos aktualumą.

Tyrimų metodika. Yra taikomi analiziniai ir tikimybiniai metodai. Atkinsono formulės funkcijai $\zeta_\lambda(s)$ įrodyme yra naudojami analizinio pratęsimo teorijos elementai, Dirichlė dalikli̧ų problemos liekamojo nario $\Delta(x)$ įverčiai bei Voronojaus tipo formulės. Ribinių teoremų funkcijai $\zeta_\lambda(s)$ įrodymas remiasi silpnojo tikimybinių matų konvergavimo savybėmis, yra taikomos Prochorovo teoremos.

Naujumas ir praktinė vertė. Visi disertacijos rezultatai yra nauji. Atkinsono formulė periodinei dzeta funkcijai nebuvo žinoma. Ribinės teoremos šiai funkcijai taip pat yra įrodomos pirmą kartą.

Disertacijos rezultatai yra teoriniai. Jie gali būti taikomi tolesniuose periodinės dzeta funkcijos tyrimuose, pavyzdžiui, Atkinsono formulė gali būti taikoma aukštesnių eilių momentų įverčiams gauti, o ribinės teoremos universalumui tirti.

Darbo struktūra. Disertacija yra parašyta anglų kalba. Ją sudaro įvadas, keturi skyriai, išvados, mokslinių publikacijų tema sąrašas ir žymenys. Bendra darbo apimtis 80 puslapių.

Problemos apžvalga ir pagrindiniai rezultatai. 1949 m. F. V. Atkinsonas atrado [1] nuostabią formulę Rymano dzeta funkcijos $\zeta(s)$, $s = \sigma + it$, antrajam momentui. Tegul

$$E(T) = \int_0^T |\zeta(\frac{1}{2}+it)|^2 \mathrm{d}t - T\log\frac{T}{2\pi} - (2\gamma_0 - 1)T,$$

čia γ_0 yr Oilerio konstanta. Atkinsono formulė duoda funkcijos $E(T)$ išreikštinį pavidalą elementariosiomis funkcijomis. Tarkime, jog $0 < c_1 < c_2$ yra tokios dvi fiksuotos konstantos, kad $c_1 T \le N \le c_2 T$, ir

$$N_1 = N_1(T) = \frac{T}{2\pi} + \frac{N}{2} - \sqrt{\frac{N^2}{4} + \frac{NT}{2\pi}}.$$

Be to, tegul

$$\operatorname{arsinh}(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$$

ir

$$f(T,m) = 2T\operatorname{arsinh}(\sqrt{\frac{\pi m}{2T}}) + \sqrt{2\pi m T + \pi^2 m^2} - \frac{\pi}{4}.$$

Apibrėžiame sumas

$$\Sigma_1(T) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m \le N} \frac{(-1)^m d(m)}{\sqrt{m}}$$
$$\times \left(\operatorname{arsinh}\left(\sqrt{\frac{\pi m}{2T}}\right)\right)^{-1} \left(\frac{T}{2\pi m} + \frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{4}} \cos(f(T,m))$$

ir

$$\Sigma_2(T) = -2 \sum_{m \le N_1} \frac{d(m)}{\sqrt{m}} \left(\log \frac{T}{2\pi m}\right)^{-1} \cos\left(T \log \frac{T}{2\pi m} - T + \frac{\pi}{4}\right).$$

Čia, kaip įprasta, $d(m)$ yra daliklių funkcija. Tuomet F. V. Atkinsonas įrodė, kad

$$E(T) = \Sigma_1(T) + \Sigma_2(T) + \mathrm{O}(\log^2 T).$$

Atkinsono formulės įrodymas taip pat pateikiamas ir [6] monografijoje. M. Jutila pasiūlė [7] naują Atkinsono formulės variantą su silpnesniu apribojimu $c_3 T^\delta \le N \le c_4 T^2$, $\delta > 0$, $c_3 > 0$, $c_4 > 0$, dydžiui N ir liekamuoju nariu, priklausančiu nuo N. T. Miormanas (Meurman) gavo [17] vidurkinį Atkinsono formulės variantą su liekamuoju nariu $\mathrm{O}(T^{-\frac{1}{4}} \log T)$. Y. Motachašis taip pat pasiūlė [18] naują Atkinsono formulės versiją su mažu liekanuoju nariu. m. Jutila atrado [8] naują Atkinsono formulės įrodymą, besiremiantį Laplaso transformacijomis.

T. Miormanas [16] įrodė Atkinsono formulės analogą Dirichlė L-funkcijoms $L(s,\chi)$. Miormano formulė duoda funkcijos

$$E(q,T) = \sum_{\chi (\bmod q)} \int_0^T |L(\frac{1}{2} + it, \chi)|^2 \mathrm{d}t$$
$$- \frac{\varphi^2(q)}{q} T \left(\log \frac{qT}{2\pi} + \sum_{p|q} \frac{\log p}{p-1} + 2\gamma_0 + 1\right).$$

Čia yra sumuojama pagal visus Dirichlė charakterius moduliu q, o $\varphi(q)$ yra Oilerio funkcija.

Disertacijos pirmame skyriuje yra įrodoma Atkinsono formulė funkcijai $\zeta_\lambda(s)$ kritinėje tiesėje. Primename, kad pusplokštumėje $\sigma > 1$ funkcija $\zeta_\lambda(s)$ yra apibrėžiama Dirichlė eilute

$$\zeta_\lambda(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \lambda m}}{m^s}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Nesunku matyti, kad

$$\zeta_\lambda(s) = e^{2\pi i \lambda m} L(\lambda, 1, s),$$

čia $L(\lambda, \alpha, s)$, $0 < \alpha \le 1$, yra Lercho dzeta funkcija, pusplokštumėje $\sigma > 1$ apibrėžiama eilute

$$L(\lambda, \alpha, s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \lambda m}}{(m+\alpha)^s}.$$

ir atveju $\lambda \notin \mathbb{Z}$ yra analiziškai pratęsiama į visą s plokštumą, todėl ir funkcija $\zeta_\lambda(s)$, $\lambda \notin \mathbb{Z}$, yra analiziškai pratęsiama į visą s plokštumą. Jei $\lambda \in \mathbb{Z}$, tai $\zeta_\lambda(s)$ tampa Rymano dzeta funkcija, todėl disertacijoje yra nagrinėjamas atvejis $\lambda \notin \mathbb{Z}$. Šiuo atveju dėl periodiškumo galima laikyti $0 < \lambda < 1$.

Yra žinoma [13], kad su visais $0 < \lambda \leq 1$

$$\int_0^T |\zeta_\lambda(\frac{1}{2}+it)|^2 \mathrm{d}t = T\log T + T(\gamma_0 + c(\lambda) - 1 - \log 2\pi) + \mathrm{O}(T^{\frac{1}{2}}\log T).$$

Čia konstanta $c(\lambda)$ yra apibrėžiama lygybe

$$\sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m+\alpha} = \log n + c(\alpha) + \mathrm{O}(\frac{1}{n}), \quad n \to \infty.$$

Tegul $\lambda = \frac{a}{q}$ su sveikaisiais skaičiais a ir q, $1 \leq a \leq q$, ir

$$I(q,T) = \sum_{a=1}^{q} \int_0^T |\zeta_{\frac{a}{q}}(\frac{1}{2}+it)|^2 \mathrm{d}t$$

Apibrėžiame

$$E(q,T) = I(q,T) - qT(\log\frac{qT}{2\pi} + 2\gamma_0 - 1).$$

Atkinsono formulė funkcijai $\zeta_\lambda(s)$ kritinėje tiesėje $\sigma = \frac{1}{2}$ duoda funkcijos $E(q,T)$ išreikštinį pavidalą. Tegul

$$\Sigma_1(q,T) = 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{m\leq N} (-1)^{qm} d(m)(qm)^{-\frac{1}{2}} (\operatorname{arsinh}\sqrt{\frac{\pi qm}{2T}})^{-1}$$
$$\left(\frac{T}{2\pi qm} + \frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{4}} \cos f(T,qm)$$

ir

$$\Sigma_2(q,T) = -2 \sum_{m\leq N'} d(m)(qm)^{-\frac{1}{2}} (\log\frac{qT}{2\pi m})^{-1}$$
$$\times \cos(T\log\frac{qT}{2\pi m} - T + \frac{2]pim}{q} - \frac{\pi}{4}),$$

čia

$$N' = N'(q,T,N) = q\Big(\frac{T}{2\pi} + \frac{qN}{2} - \Big(\Big(\frac{qN}{2}\Big)^2 + \frac{qNT}{2\pi}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big).$$

Disertacijos pirmojo skyriaus pagrindinis rezultatas yra ši teorema.

Teorema 1 *Tarkime, jog q yra teigiamas sveikas skaičius. Tuomet*

$$E(q,T) = q(\Sigma_1(q,T) + \Sigma_2(q,T)) + \mathrm{O}(q^{\frac{1}{2}}\log^2 T)$$
$$+ \mathrm{O}(qT^{-1}).$$

Kai $q \ll T^2\log^4 T$, tai iš 1 teoremos seka, jog

$$E(q,T) = q(\Sigma_1(q,T) + \Sigma_2(q,T)) + \mathrm{O}(q^{\frac{1}{2}}\log^2 T).$$

1 teorema leidžia įvertinti $E(q,T)$.

Išvada 1 *Tarkime, jog* $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ *yra fiksuotas skaičius, o* $T^{\varepsilon} \ll H \ll T^{\frac{1}{2}}$. *Tuomet*

$$E(q,T) \ll qH\log T + q \sup_{\frac{T}{2}\le\tau\le 2T} \Big| \sum_{m\le T^{1+\varepsilon}} (-1)^{qm} d(m)(qm)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\times \left(\text{arsinh}\sqrt{\frac{\pi qm}{2T}}\right)^{-1} \left(\frac{T}{2\pi qm}+\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{4}} \cos f(T,qm)\Big|.$$

Atkinsono formulė funkcijai $\zeta_\lambda(s)$ yra žinoma ir kritinėje juostoje $\frac{1}{2} < \sigma < 1$. Tegul

$$E_\sigma(T) = \int_0^T |\zeta(\sigma+it)|^2 \mathrm{d}t - \zeta(2\sigma)T - (2\pi)^{2\sigma-1}\frac{\zeta(2-2\sigma)}{2-2\sigma}T^{2-2\sigma},$$

$$\sigma_\alpha(n) = \sum_{d|n} d^\alpha, \quad \alpha\in\mathbb{C}, \quad m\in\mathbb{N},$$

o N ir N_1 yra tokie pat, kaip it atveju $\sigma = \frac{1}{2}$. Apibrėžiama

$$\Sigma_{1,\sigma}(T) = 2^{\sigma-1}(\frac{\pi}{T})^{\sigma-\frac{1}{2}} \sum_{m\le N} (-1)^m \sigma_{1-2\sigma}(m) m^{\sigma-1}$$
$$\times \left(\text{arsinh}\left(\sqrt{\frac{\pi m}{2T}}\right)\right)^{-1} \left(\frac{T}{2\pi m}+\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{4}}$$
$$\times \cos(2T\text{arsinh}(\sqrt{\frac{\pi m}{2T}}) + \sqrt{2\pi mT+\pi^2m^2} - \frac{\pi}{4}$$

ir

$$\Sigma_{2,\sigma}(T) = -2(\frac{2\pi}{T})^{\sigma-\frac{1}{2}} \sum_{m\le N_1} \sigma_{1-2\sigma}(m) m^{\sigma-1}$$
$$\times \left(\log\frac{T}{2\pi m}\right)^{-1} \cos\left(T\log\frac{T}{2\pi m} - T + \frac{\pi}{4}\right),$$

Tuomet buvo įrodyta [14], [15], kad fiksuotiems σ, $\frac{1}{2} < \sigma < 1$,

$$E(T) = \Sigma_{1,\sigma}(T) + \Sigma_{2,\sigma}(T)) + \mathrm{O}(\log T).$$

Darbuose [11] ir [12] buvo gautas Atkinsono formulės analogas arti kritinės tiesės.

Antrame disertacijos skyriuje yra įrodyta Atkinsono formulė funkcijai $\zeta_\lambda(s)$ kritinėje juostoje $\frac{1}{2} < \sigma < 1$. Ji duoda funkcijos

$$E_\sigma(q,T) = \sum_{a=1}^{q} \int_0^T |\zeta_{\frac{a}{q}}(\sigma+it)|^2 \mathrm{d}t - q\zeta(2\sigma)T$$
$$+ \frac{\zeta(2\sigma)\Gamma(2\sigma-1)\sin(\pi\sigma)}{1-\sigma}T^{2-2\sigma}.$$

išreikštinį pavidalą. Čia $\Gamma(s)$ yra Oilerio gama funkcija. Tegul N ir N' yra tie patys, kaip ir atveju $\sigma = \frac{1}{2}$. Apibrėžiame

$$\Sigma_{1,\sigma}(q,T) = q^{\sigma-1}2^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{T}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}-\sigma} \sum_{n\le N} (-1)^{qn}\sigma_{1-2\sigma}(n) n^{\sigma-1} (\text{arsinh}\sqrt{\frac{\pi qn}{2T}})^{-1}$$
$$\left(\frac{T}{2\pi qn}+\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{4}} \cos(2T\text{arsinh}(\sqrt{\frac{\pi qn}{2T}}) + \sqrt{2\pi qnT+\pi^2(qn)^2} - \frac{\pi}{4})$$

ir

$$\Sigma_{2,\sigma}(q,T) = -2q^{\sigma-1}\left(\frac{T}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}-\sigma}\sum_{n\le N'}\sigma_{1-2\sigma}(n)n^{\sigma-1}$$
$$\times\Big(\log\frac{qT}{2\pi n}\Big)^{-1}\cos\Big(T\log\frac{qT}{2\pi n}-T+\frac{\pi}{4}\Big),$$

Tuomet 2 skyriuje įrodytas toks tvirtinimas.

Teorema 2 *Tarkime, jog q yra teigiamas sveikas skaičius. Tuomet*

$$E_\sigma(q,T) = \Sigma_{1,\sigma}(q,T) + \Sigma_{2,\sigma}(q,T)$$
$$+ \mathrm{O}(q^{2\sigma-\frac{7}{4}}\log qT) + \mathrm{O}(q).$$

2 teoremos įrodyme atskirai yra nagrinėjami atvejai $\frac{1}{2} < \sigma < \frac{3}{4}$ ir $\frac{3}{4} \le \sigma < 1$.

Tikimybinių metodų taikymo dzeta funkcijų teorijoje idėja priklauso H. Borui. Jis kartu su B.Jesenu Rymano dzeta funkcijai įrodė teoremas, primenančias šiuolaikines ribines teoremas silpnojo tikimybinių matų konvergavimo prasme.

Tuomet jie įrodė [2], kad srityje $\sigma > 1$ egzistuoja riba $\sigma > 1$. Tarkime, jog $m_{\check{Z}}$ yra Žordano matas realiųjų skaičių tiesėje

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}m_{\check{Z}}\{t\in[0,T], \log\zeta(\sigma+it)\in R\} =^{def} W(\sigma,R),$$

čia R yra stačiakampis kompleksinėje plokštumoje su kraštinėmis, lygiagrečiomis ašims. Po dviejų metų jie šį rezultatą išplėtė [3] į pusplokštumę $\sigma > \frac{1}{2}$.

Vėliau Boro-Jeseno tyrimus tęsė A. Vintkeris (Wintcar), A. Selbergas (Selberg), A. Gošas (Gosh), P.D.T.A. Elijotas (Elliott), B. Bagčis (Bagchi), A. Laurinčikas, K. Macumotas (Matsumoto), B. Garunkštis, J. Štoidingas (Steuding), J.L. Mokleras (Mauclaire) ir kiti žymūs matematikai.

Praėjusio amžiaus viduryje buvo sukurta tikimybinių matų silpno konvergavimo teorija, tapo patogu dzeta funkcijoms tikimybinio pobūdžio rezultatus formuluoti ribinių teoremų pavidalu. Tegul $\mathcal{B}(S)$ yra erdvės S Borelio aibių klasė, o P_n, $n\in\mathbb{N}$, ir P yra tikimybiniai matai erdvėje $(S,\mathcal{B}(S))$. Primename, jog P_n, kai $n\to\infty$, silpnai konverguoja į tikimybinį matą P, jei su kiekviena realia, tolydžia, aprėžta funkcija f erdvėje S

$$\lim_{n\to\infty}\int_S f\mathrm{d}P_n = \int_S f\mathrm{d}P.$$

Tarkime, jog $\gamma = \{s\in\mathbb{C} : |s| = 1\}$ yra vienetinis apskritimas kompleksinėje plokštumoje, o

$$\Omega = \prod_p \gamma_p,$$

čia $\gamma_p = \gamma$ su visais pirminiais p. Pagal Tichonovo teoremą, begaliniamatis toras yra kompaktinė topologinė Abelio grupė. Todėl erdvėje $(\Omega,\mathcal{B}(\Omega))$ galime apibrėžti tikimybinį Haro (Haar) matą m_h. Gauname tikimybinę erdvę $(\Omega,\mathcal{B}(\Omega),m_h)$. Tegul $\omega(p)$ yra elemento $\omega\in\Omega$ projekcija į koordinatinę erdvę γ_p. Tikimybinėje erdvėje $(\Omega,\mathcal{B}(\Omega),m_h)$ apibrėžiame kompleksines reikšmes įgyjantį atsitiktinį elementą $\zeta(\sigma,\omega)$ formule

$$\zeta(\sigma,\omega) = \prod_p\left(1-\frac{\omega(p)}{p^\sigma}\right)^{-1}, \quad \sigma > \frac{1}{2}.$$

Begalinė sandauga, apibrėžianti $\zeta(\sigma,\omega)$, beveik su visais $\omega \in \Omega$ konverguoja tolygiai kompaktinėse pusplokštumės aibėse $\sigma > \frac{1}{2}$. Tegul, trumpumo dėlei,

$$\nu_T(\dots) = \frac{1}{T} meas\{t \in [0,T], \dots\}.$$

Čia $meas\{A\}$ yra aibės A Lebego matas, o vietoje daugtaškio įrašoma sąlyga, kurią tenkina t. Tuomet Boro - Jeseno rezultatų šiuolaikinis pavidalas yra toks [9]. Tarkime, jog $\sigma > \frac{1}{2}$. Tuomet

$$\nu_T(\zeta(\sigma+it) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(A),$$

kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į atsitiktinio elemento $\zeta(\sigma,\omega)$ pasiskirstymą.

Trečiame disertacijos skyriuje yra įrodoma ribinė teorema kompleksinėje plokštumoje funkcijai $\zeta_\lambda(s)$ su bet kuriuo parametru λ, $0 < \lambda < 1$. Funkciją $\omega(p)$ pratęsiame į visą aibę $\mathbb{N}$ formulės

$$\omega(m) = \prod_{p^\alpha \| m} \omega^\alpha(p), \quad m \in \mathbb{N},$$

pagalba. Čia $p^\alpha \| m$ reiškia, kad $p^\alpha | m$, bet $p^{\alpha+1} \nmid m$. Tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_h)$ apibrėžiame kompleksines reikšmes įgyjantį atsitiktinį elementą $\zeta_\lambda(\sigma,\omega)$ formule

$$\zeta_\lambda(\sigma,\omega) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i\lambda m}\omega(m)}{m^\sigma}, \quad \sigma > \frac{1}{2}.$$

Pastaroji eilutė konverguoja su beveik visais $\omega \in \Omega$. Tegul $P^{\mathbb{C}}$ yra atsitiktinio elemento $\zeta_\lambda(\sigma,\omega)$ pasiskirstymas, t.y.,

$$P^{\mathbb{C}}_{\zeta_\lambda}(A) = m_h\{\omega \in \Omega : \zeta_\lambda(\sigma,\omega) \in A\}, \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

o

$$P^{\mathbb{C}}_T(A) = \nu_T\{\zeta_\lambda(\sigma+it) \in A\}, \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}).$$

Tuomet turime tokį tvirtinimą.

Teorema 3 *Tarkime, kad $\sigma > \frac{1}{2}$. Tuomet tikimybinis matas $P^{\mathbb{C}}_T$, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į $P^{\mathbb{C}}_{\zeta_\lambda}$.*

Paskutiniame, ketvirtajame disertacijos skyriuje pateikiama ribinė teorema analizinių funkcijų erdvėje funkcijai $\zeta_\lambda(s)$. Tegul $D = \{s \in \mathbb{C} : \sigma > \frac{1}{2}\}$, o $H(D)$ yra analizinių srityje D funkcijų erdvė su tolygaus konvergavimo kompaktinėse aibėse topologija. Tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_h)$ apibrėžiame $H(D)$ - reikšmį atsitiktinį elementą

$$\zeta_\lambda(s,\omega) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i\lambda m}\omega(m)}{m^s}.$$

Pastaroji eilutė konverguoja tolygiai pusplokštumės D kompaktinėse aibėse su beveik visais $\omega \in \Omega$. Tegul $P^H_{\zeta_\lambda}$ yra atsitiktinio elemento $\zeta_\lambda(\sigma,\omega)$ pasiskirstymas, t.y.,

$$P^H_{\zeta_\lambda}(A) = m_h\{\omega \in \Omega : \zeta_\lambda(s,\omega) \in A\}, \qquad A \in \mathcal{B}(H(D)).$$

Apibrėžiame

$$P^H_T(A) = \nu_T\{\zeta_\lambda(s+i\tau) \in A\}, \qquad A \in \mathcal{B}(H(D)).$$

Čia

$$\nu_T(\dots) = \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0,T], \dots\},$$

o vietoje daugtaškio įrašoma sąlyga, kurią tenkinta τ. Svarbiausias ketvirtojo skyriaus rezultatas yra ši teorema.

Teorema 4 *Tikimybinis matas P_T^H, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į $P_{\zeta_\lambda}^H$.*

3 ir 4 teoremų įrodymas yra tradicinis, tačiau disertacijoje jis yra supaprastintas, pavyzdžiui, nėra naudojami Dirichlė polinomai.

Išvados. Disertacijoje nustatytos tokios periodinės dzeta funkcijos $\zeta_\lambda(s)$ savybės:

1. Funkcijos $\zeta_\lambda(s)$ su racionaliuoju parametru λ antrojo momento liekamajam nariui yra teisinga vidurkinė Atkinsono formulė, kritinėje tiesėje $\sigma = \frac{1}{2}$.

2. Funkcijos $\zeta_\lambda(s)$ su racionaliuoju parametru λ antrojo momento liekamajam nariui kritinėje juostoje $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ yra teisinga vidurkinė Atkinsono formulė.

3. Funkcijai $\zeta_\lambda(s)$ pusplokštumėje $\sigma > \frac{1}{2}$ galioja ribinė teorema silpnojo tikimybinių matų konvergavimo prasme kompleksinėje plokštumoje.

4. Funkcijai $\zeta_\lambda(s)$ galioja ribinė teorema silpnojo tikimybinių matų konvergavimo prasme funkcijų, analizinių pusplokštumėje $\sigma > \frac{1}{2}$, erdvėje su tolygaus konvergavimo kompaktinėse aibėse topologija.

Aprobacija. Disertacijos rezultatai buvo pristatyti 4-oje tarptautinėje konferencijoje "Analiziniai ir tikimybiniai metodai skaičių teorijoje" (Palanga, 2006), 4-oje tarptautinėje konferencijoje "Analizinė skaičių teorija ir erdvės mozaika" (Kijevas, 2008), tarptautinėje skaičių teorijos konferencijoje (Šiauliai, 2008), Lietuvos matematikų draugijos konferencijose (2007, 2008, 2009), o taip pat Vilniaus universiteto skaičių teorijos seminare.

Labai dėkoju moksliniam vadovui prof. habil. dr. Antanui Laurinčikui už paramą ir supratimą rengiant disertaciją. Esu dėkinga Vilniaus universiteto Tikimybių teorijos ir skaičių teorijos katedros kolektyvui už dalykinę ir moralinę paramą. Taip pat esu dėkinga už visokeriopą pagalbą savo mamai.

Publikacijų disertacijos tema sąrašas.

1. J. Karaliūnaitė, *A limit theorem for the funkction* $\zeta_\lambda(s)$, Fiz. ir matem. fakulteto mokslinio seminaro darbai, Šiaulių u-tas, 8, 56-62 (2005).

2. J. Karaliūnaitė, *A survey on limit theorems for the Riemann zeta-function on the complex plane*, in: Anal. Probab. Methods Theory, A. Laurinčikas and E. Manstavičius (Eds), TEV, Vilnius (2007), pp. 48-55.

3. J. Karaliūnaitė, *The Atkinson formula for the periodic zeta-function in the critical strip*, in: Voronoi's impact on modern science, Proc. 4th Intern. Conf. Anal. Number Theory and Special Tessellations, A. Laurinčikas and J. Steuding (Eds), Book 4, Vol. 1, 48-58 (2008).

4. J. Karaliūnaitė, A. Laurinčikas, *The Atkinson formula for the periodic zeta-function*, Lith. matem. J. 47 (3), 504-516 (2007).

Cituota literatūra.

1. F.V. Atkinson, *The mean-value of the Riemann zeta-function*, Acta Math., **81** (1949), 353-376.

2. H. Bohr, B. Jessen, *Uber die Wertverteilung der Riemannschen Zetafunktion*, Erste, Acta Math. **54**, 1-35 (1930).

3. H. Bohr, B. Jessen, *Uber die Wertverteilung der Riemannschen Zetafunktion*, Zweite Mitteilung, Acta Math. **58**, 1-55 (1932).

4. G. H. Hardy, J. E. Littlewood, *Contributions to the theory of the Riemann zeta-function and the theory of the distribution of primes*, Acta Math. **41**, (1918), 119-196.

5. E. Ingham, *Mean-value theorems in the theory of the Riemann zeta-function*, Proc. London Math. Soc. (2) **27** (1928), 273-300.

6. A. Ivič, *The Riemann Zeta-Function*, Wiley, New York, (1985).

7. M. Jutila, *Transformation formulae for Dirichlet polynomials*, J. Number Theory, **18**, 135-156 (1984).

8. M. Jutila, *Atkinson's formula revisited*, in: Voronoi's Impact on Modern Science, Book 1, Proc. Inst. Math. National Acad. Sc. Ukraine, Kiev (1998), **14**, 137-154.

9. J. Karaliūnaitė, *A survey on limit theorems for the Riemann zeta- function on the complex plane*, in: Anal. Prob. Methods Number Theory, A. Laurinčikas and E. Manstavičius (Eds), TEV, Vilnius (2007), 48-55.

10. A. Laurinčikas, *Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function*, Dordrecht, Kluwer (1996).

11. A. Laurinčikas, *The Atkinson formula near the critical line*, in: Analytic Probab. Methods in Number Theory, E. Manstavičius, F. Schweiger (eds.), New Trends in Probab. and Statist., **2**, VSP/TEV, (1992), 335-354.

12. A. Laurinčikas, *The Atkinson formula near the critical line II*, Liet. Matem. Rink., **33** (1993), no. 3, 302-313 (in Russian).

13. A. Laurinčikas, R. Garunkštis, *The Lerch Zeta-Function*, Kluwer, Dordrecht (2002).

14. K. Matsumoto, *The mean square of the Riemann zeta-function in the critical strip*, Japanese J. Math., **15** (1989), 1-13.

15. K. Matsumoto, T. Meurman, *The mean square of the Riemann zeta-function in the critical strip III*, Acta Math., **64** (1993), 357-382.

16. T. Meurman, *A generalization of Atkinson's formula to L-functions*, Acta Arithm., **47** (1986), 351-370.

17. T. Meurman, *On the mean square of the Riemann zeta-function*, Quart. J. Math. Oxford (2), **38** (1987), 337-343.

18. Y. Motohashi, *A note on the mean value of the zeta and L-functions. IV*, Proc. Japan Acad., **62A** (1986), 311-313.

Summary. The periodic zeta-function $\zeta_\lambda(s)$, $s = +it$, with parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ is defined, for $\sigma > 1$, by

$$\zeta_\lambda(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \lambda m}}{m^s}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

and by analytic continuation elsewhere. If $\lambda \in \mathbb{Z}$ the function $\zeta_\lambda(s)$ reduces to the Riemann zeta-function $\zeta(s)$., while, for $\lambda \notin \mathbb{Z}$, $\zeta_\lambda(s)$ is an entire function. In the latter case, one can suppose $0 < \lambda \leq 1$.

The first part of the thesis is devoted to the Atkinson type formulae with rational $\lambda = \frac{a}{q}$, $a,\ q \in \mathbb{N}$, $1 \leq a \leq q$. Let

$$E(q,T) = \sum_{a=1}^{q} \int_0^T |\zeta_{\frac{a}{q}}(\frac{1}{2} + it)|^2 \mathrm{d}t - qT(\log \frac{qT}{2\pi} + 2\gamma_0 - 1),$$

where γ_0 is the Euler constant. Then, in chapter 1, the explicit expression for $E(q,T)$ is given.

Now let $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ be fixed, and

$$\begin{aligned} E_\sigma(q,T) = \sum_{a=1}^{q} \int_0^T & |\zeta_{\frac{a}{q}}(\sigma + it)|^2 \mathrm{d}t - q\zeta(2\sigma)T \\ &+ \frac{\zeta(2\sigma-1)\Gamma(2\sigma-1)\sin(\pi\sigma)}{1-\sigma}(qT)^{2-2\sigma}, \end{aligned} \tag{1}$$

where $\Gamma(s)$ denotes the Euler gamma-function. Then, in Chapter 2, the explicit expression for $E_\sigma(q,T)$ is presented.

The second part of the thesis deals with limit theorems in the sense of weak convergence of probability measures for the function $\zeta_\lambda(s)$. In Chapter 3, the probability measure

$$\frac{1}{T} meas\{t \in [0,T], \zeta_\lambda(\sigma + it) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

where $meas\{A\}$ is the Lebesgue measure of a measurable set $A \in \mathbb{R}$, and $\mathcal{B}(\mathbb{C}$ denotes the class of Borel sets of the space S, is considered. It is proved that the above measure, for $\sigma > \frac{1}{2}$, converges weakly to the distribution of a certain explicitly given complex-valued random element as $T \to \infty$.

Chapter 4 contains a limit theorem for $\zeta_\lambda(s)$ in the space of analytic functions $H(D)$, $D = \{s \in \mathbb{C} : \sigma > \frac{1}{2}\}$. It is proved that the probability measure

$$\frac{1}{T} meas\{\tau \in [0,T], \zeta_\lambda(s + i\tau) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(H(D)),$$

converges weakly to the distribution of an explicitly given $H(D)$ -valued random element as $T \to \infty$.

Trumpos žinios apie autorę.

Gimimo data ir vieta:
1982 m. sausio 1d., Vilnius.
Išsilavinimas ir klasifikacija:
2000 m. Vilniaus Baltupių vidurinė mokykla,
2006 m. Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas,
2007-2010 m. Vilniaus universitete asistentė.

Short information about the author.

Birth date and place:
1st January, 1982, Vilnius.
Education:
2000 m. Vilnius Baltupiai secondary school,
2006 m. Vilnius university Mathematics and informatics faculty.
Working experience:
2007-2010 m. Vilnius university asistent.