ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

MATEMATIKOS KATEDRA

Vaida Jonušaitė
matematikos specialybės
neakivaizdinio skyriaus
II kurso magistrantė

Jungtinė ribinė teorema parabolinių formų dzeta funkcijoms

Magistro darbas

Magistro darbo vadovas
prof. A.Laurinčikas

Šiauliai
2008

Turinys

1. Įvadas

Tegul $SL(2,\mathbb{Z})$ yra pilnoji modulinė grupė, o $F(z)$ yra svorio κ parabolinė forma grupės $SL(2,\mathbb{R})$ atžvilgiu. Papildomai reikalaujame, jog $F(z)$ būtų visų Heckės operatorių normuota tikrinė funkcija. Tuomet funkcijos skleidinys Furjė eilute turi pavidalą

$$F(z) = \sum_{m=1}^{\infty} c(m)\mathrm{e}^{2\pi imz}, \quad c(1) = 1.$$

Su forma $F(z)$ yra susiejama Dirichlė eilutė

$$\varphi(s,F) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c(m)}{m^s}, \quad s = \sigma + it,$$

o jos suma $\varphi(s,F)$ yra vadinama parabolinės formos dzeta funkcija. Pastaroji eilutė absoliučiai konverguoja pusplokštumėje $\sigma > \frac{k+1}{2}$. Be to, funkcija $\varphi(s,F)$ yra analiziškai pratęsiama į visą s- plokštumą, t. y. ji yra sveikoji funkcija. Funkcija $\varphi(s,F)$ tenkina funkcinę lygtį

$$(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\varphi(s,F) = (-1)^{\frac{\kappa}{2}}(2\pi)^{s-\kappa}\Gamma(\kappa - s)\varphi(\kappa - s, F).$$

Čia, kaip įprasta, $\Gamma(s)$ yra Oilerio gama funkcija. Kompleksinės plokštumos $\mathbb{C}$ dalis $\{s \in\mathbb{C}\colon \frac{\kappa-1}{2} \le \sigma \le \frac{\kappa+1}{2}\}$ yra vadinama funkcijos $\varphi(s,F)$ kritine juosta, o tiesė $\sigma = \frac{\kappa}{2}$ - kritine tiese. Pusplokštumėje $\sigma > \frac{\kappa+1}{2}$ funkcija $\varphi(s,F)$ gali būti užrašyta Oilerio sandauga pagal pirminius skaičius p:

$$\varphi(s,F) = \prod_p \left(1 - \frac{\alpha(p)}{p^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\beta(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

Čia $\alpha(p)$ ir $\beta(p)$ yra kompleksiniai skaičiai, tenkinantys lygybę

$$c(p) = \alpha(p) + \beta(p).$$

Straipsnyje [3] buvo įrodyta ribinė teorema funkcijai $\varphi(s,F)$. Jos formulavimui yra reikalinga viena topologinė struktūra. Tegul $\gamma = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$ yra vienetinis apskritimas kompleksinėje plokštumoje, o

$$\Omega = \prod_p \gamma_p,$$

kur $\gamma_p = \gamma$ visiems pirminiams p, yra Dekarto sandauga pagal visus pirminius skaičius. Pagal Tichonovo teoremą begaliniamatis toras su sandaugos topologija ir pataškinės daugybos operacija yra kompaktinė topologinė Abelio grupė. Simboliu $\mathcal{B}(S)$ žymėsime erdvės S Borelio aibių klasę. Tuomet erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ galima apibrėžti tikimybinį Haro matą m_H. Gauname tikimybinę erdvę $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$.

Tegul $\omega(p)$ yra elemento $\omega \in \Omega$ projekcija į koordinatinę erdvę γ_p. Tuomet $\omega(p)$ yra kompleksinis atsitiktinis dydis, apibrėžtas tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Kai $\sigma > \frac{k}{2}$, tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$ apibrėžiame kompleksinį atsitiktinį dydį

$$\varphi(\sigma, \omega, F) = \prod_p \left(1 - \frac{\alpha(p)\omega(p)}{p^\sigma}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\beta(p)\omega(p)}{p^\sigma}\right)^{-1},$$

ir tegul P_φ yra jo skirstinys, tai yra P_φ yra tikimybinis matas, nusakomas formule

$$P_\varphi(A) = m_H(\omega \in \Omega : \varphi(\sigma, \omega, F) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}).$$

Simboliu $meas(A)$ žymime mačios aibės $A \subset \mathbb{R}$ Lebego matą. Be to, kai $T > 0$,

$$\nu_T(\dots) = \frac{1}{T} meas\{t \in [0, T], \dots\}.$$

Čia vietoje daugtaškio yra rašoma sąlyga, kurią tenkina t. Darbe [3] buvo nagrinėjamas tikimybinio mato

$$\nu_T(\varphi(\sigma + it, F) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}), \tag{1}$$

silpnasis konvergavimas, kai $T \to 0$, ir įrodyta tokia teorema.

1.1 teorema. *Tarkime, jog $\sigma > \frac{\kappa}{2}$. Tuomet tikimybinis matas (1), kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į matą P_φ.*

Magistro darbo tikslas yra gauti 1.1 teoremos jungtinį variantą, t.y. įrodyti ribinę teoremą parabolinių formų rinkinio dzeta funkcijoms.

Tegul kiekvienam $j = 1, ..., r, \quad r > 1, \quad F_j(z)$ yra svorio κ normuota tikrinė parabolinė forma

$$F_j(z) = \sum_{m=1}^{\infty} c_j(m) c^{2\pi i m z},$$

o

$$\varphi(s, F_j) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_j(m)}{m^s} = \prod_p \left(1 - \frac{\alpha_j(p)}{p^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\beta_j(p)}{p^s}\right)^{-1},$$

$c_j(p) = \alpha_j(p) + \beta_j(p)$, yra ją atitinkanti dzeta funkcija.

Tegul $\mathbb{C}^r = \underbrace{\mathbb{C} \times ... \times \mathbb{C}}_{r}$ ir

$$P_T(A) = \nu_T((\varphi(\sigma_1 + it, F_j), ..., \varphi(\sigma_r + it, F_j)) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^r).$$

Tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$, kai $\min\limits_{1 \le j \le r} \sigma_j > \frac{\kappa}{2}$, apibrėžiame $\mathbb{C}^r$- reikšmį atsitiktinį elementą $\varphi(\sigma_1, ..., \sigma_r, \omega, F)$ formule

$$\varphi(\sigma_1, ..., \sigma_r, \omega, F_1, ..., F_r) = (\varphi(\sigma_1, \omega, F_1, ..., \varphi(\sigma_r, \omega, F_r)),$$

kur

$$\varphi(\sigma_j,\omega,F_j)=\prod_p\left(1-\frac{\alpha_j(p)\omega(p)}{p^{\sigma_j}}\right)^{-1}\left(1-\frac{\beta_j(p)\omega(p)}{p^{\sigma_j}}\right)^{-1},\quad j=1,...,r.$$

Tegul P_φ *yra atsitiktinio elemento* $\varphi(\sigma_1,...,\sigma_r,\omega,F)$ *skirstinys, t.y.*

$$P_\varphi(A)=m_H(\omega\in\Omega:\varphi(\sigma_1,...,\sigma_r,\omega,F_1,...,F_r)\in A),\quad A\in\mathcal{B}(\mathbb{C}^r).$$

Magistro darbo pagrindinis rezultatas yra tokia teorema.

6.1 teorema. *Tarkime, jog* $\min\limits_{1\le j\le r}\sigma_j>\frac{\kappa}{2}$. *Tuomet tikimybinis matas* P_T, *kai* $T\to\infty$, *silpnai konverguoja į matą* P_φ.

Šis rezultatas rodo tam tikrą dzeta funkcijų $\varphi(s,F_1),...,\varphi(s,F_r)$ *asimptotinio elgesio reguliarumą.*

2. Parabolinės formos

Tegul $\mathbb{Z}$ yra visų sveikųjų skaičių aibė, o

$$SL(2,\mathbb{Z}) = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) : a,b,c,d \in \mathbb{Z}, \quad ad - bc = 1\}.$$

Tuomet aišku, kad matricų daugybos operacijos atžvilgiu aibė $SL(2,\mathbb{R})$ yra grupė, nes:

1° Dviejų matricų su sveikais elementais sandauga vėl yra matrica, kurios elementai yra sveikieji skaičiai. Kadangi matricų sandaugos determinantas yra lygus sudauginamųjų matricų determinantų sandaugai, tai ir sandaugos determinantas yra lygus 1.

2° Vienetinis elementas yra matrica

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3° Kadangi $SL(2,\mathbb{R})$ matricų determinantas lygus vienetui, tai kiekviena tokia matrica turi atvirkštinę, kurios elementai yra sveikieji skaičiai, o determinantas taip pat lygus vienetui.

4° Asociatyvumo dėsnis matricų daugybai taip pat galioja. Grupė $SL(2,\mathbb{R})$ yra vadinama pilnąja moduline grupe. Tegul q yra sveikas teigiamas skaičius, o

$$\Gamma_0(q) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R}) : c \equiv 0 \pmod q\}.$$

Tuomet $\Gamma_0(q)$ yra grupės pogrupis. Tikrai, tegul

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \in \Gamma_0(q) \quad ir \quad \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in \Gamma_0(q), \text{t.}y. \quad c_1 \equiv 0 \pmod q \quad ir\ c_2 \equiv 0 \pmod q.$$

Tada

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2+b_1c_2 & a_1b_2+b_1d_2 \\ c_1a_2+d_1c_2 & c_1b_2+d_1d_2 \end{pmatrix} \in \Gamma_0(q),$$

nes $c_1a_2 + d_1c_2 \equiv 0 \pmod q$.

Pogrupis $\Gamma_0(q)$ yra vadinamas pilnosios modulinės grupės $SL(2,\mathbb{R})$ Heckės pogrupiu.

Tegul $\mathbb{C}$ yra kompleksinė plokštuma, o $U = \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy, \quad i = \sqrt{-1}, \quad y > 0\}$ yra viršutinė pusplokštumė kartu su ∞. Racionalieji taškai ir ∞ yra vadinami paraboliniais taškais.

Tegul dabar κ yra teigiamas lyginis skaičius, o funkcija yra analizinė pusplokštumėje U ir visoms matricoms

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$$

tenkina funkcinę lygtį

$$F\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^{\kappa}F(z). \tag{2}$$

Tuomet ji begalybėje turi Furjė skleidinį

$$F(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c(m) \mathrm{e}^{2\pi imz}.$$

Funkcija $F(z)$ yra vadinama analizine begalybėje, jei $c(m) = 0$ visiems $m < 0$, ir nykstančia begalybėje, jei $c(m) = 0$ visiems $m \leq 0$. Funkcija $F(z)$ yra analizinė ir nykstanti paraboliniuose taškuose, jei funkcija

$$(cz+d)^{-\kappa} F\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)$$

yra atitinkamai analizinė ir nykstanti begalybėje visoms matricoms

$$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL(2, \mathbb{R}).$$

Jeigu funkcija $F(z)$ yra analizinė parabolinuose taškuose, tuomet ji yra vadinama svorio κ moduline forma. Ji turi tokį Furjė skleidinį

$$F(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c(m) \mathrm{e}^{2\pi imz}.$$

Jeigu svorio κ modulinė forma $F(z)$ yra nykstanti paraboliniuose taškuose, tada ji yra vadinama svorio κ paraboline forma ir begalybėje turi tokį Furjė skleidinį

$$F(z) = \sum_{m=1}^{\infty} c(m) \mathrm{e}^{2\pi imz}.$$

Jeigu (2) lygtis galioja visoms matricoms

$$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(q),$$

tai tuomet parabolinė forma $F(z)$ yra vadinama svorio κ ir lygmens q paraboline forma. Pavyzdžiui, yra žinoma, kad

$$\Delta(z) = e^{2\pi imz} \prod_{m=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi imz})^{24} = \sum_{m=1}^{\infty} \tau(m) \mathrm{e}^{2\pi imz}$$

yra svorio 12 parabolinė forma pilnosios modulinės grupės atžvilgiu. Ji yra vadinama garsaus indų matematiko Ramanudžano (Ramanujan) paraboline forma, o aritmetinė funkcija $\tau(m)$ vadinama Ramanudžano funkcija.

Tegul $S_\kappa(\Gamma_0(q))$ yra visų svorio κ ir lygmens q parabolinių formų erdvė. Elementas $F \in S_\kappa(\Gamma_0(1))$ yra vadinamas Heckės eigenforma, jei jis yra visų Heckės operatorių

$$(F|\tau(m))(z) = m^{\kappa-1} \sum_{\substack{0<d|m \\ ad=m}} d^{-\kappa} F\left(\frac{az+b}{d}\right)$$

tikrinė funkcija su tikrinėmis reikšmėmis $c(m)$. Tuomet yra įrodoma, kad $c(m) \neq 0$, ir funkciją $F(z)$ galima normuoti, t. y.

$$F(z) = \sum_{m=1}^{\infty} c(m) \mathrm{e}^{2\pi imz}, \quad c(1) = 1,$$

yra jos Furjė skleidinys begalybėje.

Tegul $s = \sigma + it$ yra kompleksinis kintamasis. Su kiekviena normuota eigenforma yra susiejama dzeta funkcija $\varphi(s, F)$, apibrėžiama Dirichlė eilute

$$\varphi(s, F) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c(m)}{m^s}. \tag{3}$$

Tegul $d(m)$ yra daliklių funkcija, t. y.

$$\mathrm{d}(m) = \sum_{d|m} 1.$$

Tuomet P. Delinis (Deligne) įrodė, jog yra teisinga nelygybė

$$|c(m)| \leq m^{\frac{\kappa-1}{2}} d(m).$$

Iš jos išplaukia, jog (3) eilutė konverguoja absoliučiai pusplokštumėje $\sigma > \frac{\kappa+1}{2}$ ir čia apibrėžia analizinę funkciją. Be to, funkcija $\varphi(s, F)$ yra analiziškai pratęsiama į visą s - plokštumą (yra sveikoji funkcija) ir tenkina funkcinę lygtį

$$(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\varphi(s, F) = (-1)^{\frac{\kappa}{2}}(2\pi)^{s-\kappa}\Gamma(\kappa - s)\varphi(\kappa - s, F).$$

Čia, kaip visada, $\Gamma(s)$ yra Oilerio gama funkcija, srityje $\sigma > 0$ apibrėžiama formule

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x} x^{s-1} dx,$$

o kitur - analizinio pratęsimo pagalba. Ji yra meromorfinė funkcija, taškai $s = -m$, $m = 0, 1, 2, ...,$ yra jos paprastieji poliai ir

$$\operatorname*{Res}_{s=-m} \Gamma(s) = \frac{(-1)^m}{m!}.$$

Aritmetinė funkcija $c(m)$ yra multiplikatyvi, t.y. $c(1) = 1$ ir $c(m \cdot n) = c(m)c(n)$ visiems $m, n \in \mathbb{N}, \quad (m, n) = 1$. Čia $\mathbb{N} = 1, 2, \ldots$. Be to, visiems pirminiams p

$$c(p^{m+1}) = c(p)c(p^m) - p^{k-1}c(p^{m-1}).$$

Todėl srityje $\sigma > \frac{\kappa+1}{2}$ funkcija $\varphi(s, F)$ yra užrašoma Oilerio sandauga pagal pirminius skaičius:

$$\varphi(s, F) = \prod_p \left(1 - \frac{c(p)}{p^s} + \frac{1}{p^{2s-k+1}}\right)^{-1} = \prod_p \left(1 - \frac{\alpha(p)}{p^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\beta(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

Čia $c(p) = \alpha(p) + \beta(p) \quad$ ir $\quad |\alpha(p)| \le p^{\frac{k-1}{2}}, \quad |\beta(p)| \le p^{\frac{k-1}{2}}$.

Parabolinių formų teorija yra pateikta, pavyzdžiui, [2] monografijoje.

Kaip jau buvo minėta įvade, funkcija $\varphi(s, F)$ turi ribinį pasiskirstymą, jai [3] darbe buvo įrodyta tokia teorema.

2.1 teorema. *Tarkime, jog $\sigma > \frac{\kappa}{2}$. Tuomet tikimybinis matas*

$$\nu_T(\varphi(\sigma + it, F)), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į atsitiktinio elemento

$$\varphi(\sigma, \omega, F) = \prod_p \left(1 - \frac{\alpha(p)\omega(p)}{p^\sigma}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\beta(p)\omega(p)}{p^\sigma}\right)^{-1}$$

skirstinį.

3. Dirichlė eilučių teorijos elementai

Parabolinių formų dzeta funkcijos yra apibrėžiamos Dirichlė eilute. Todėl aptarsime kai kuriuos Dirichlė eilučių teorijos klausimus.

Tarkime, jog $\{\lambda_m\}$ yra griežtai didėjanti teigiamų skaičių seka, o a_m yra duoti kompleksiniai skaičiai. Tuomet eilutė

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-\lambda ms} \tag{4}$$

yra vadinama Dirichlė eilute. Skaičių teorijoje dažniausiai pasitaiko paprastosios Dirichlė eilutės

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s}, \tag{5}$$

gaunamos iš (4) eilutės, kai $\lambda_m = \log m$.

3.1 Teorema apie tolygų Dirichlė eilutės konvergavimą

3.1 teorema. *Tarkime, kad (5) Dirichlė eilutė konverguoja taške $s = s_0$, o δ yra bet koks teigiamas skaičius, mažesnis už $\frac{\pi}{2}$. Tuomet ši eilutė konverguoja tolygiai s plokštumos srityje, apibrėžtoje nelygybe*

$$|\arg(s - s_0)| \leq \frac{\pi}{2} - \delta.$$

Įrodymas. Nesunku matyti, kad pakanka išnagrinėti tik atvejį $s_0 = 0$. Tikrai, jei $a_m^{'} = a_m m^{-s_0}$, $\quad s^{'} = s - s_0$, tai

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m m^{-s_0}}{m^{s-s_0}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m^{'}}{m^{s^{'}}}.$$

Aišku, kad paskutinioji eilutė konverguoja taške $s^{'} = 0$, jei pradinė (5) eilutė konverguoja taške $s = s_0$.

Taigi tarkime, jog (5) eilutė konverguoja taške $s = 0$, t.y. konverguoja eilutė

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m. \tag{6}$$

Imkime jos liekaną

$$r_n = \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m.$$

Kadangi (6) eilutė konverguoja, tai $r_n \to 0$, kai $n \to \infty$. Tegul N ir M, $N > M$, yra du natūriniai skaičiai. Tuomet

$$\sum_{m=M}^{N} \frac{a_m}{m^s} = \sum_{m=M}^{N} \frac{r_{m-1} - r_m}{m^s} = \sum_{m=M}^{N} r_m \left(\frac{1}{(m+1)^s} - \frac{1}{m^s} \right) + \frac{r_{M-1}}{M^s} - \frac{r_N}{(N+1)^s}. \tag{7}$$

Be to, kadangi $|u^s| = u^\sigma$, tai

$$\left| \frac{1}{(m+1)^s} - \frac{1}{m^s} \right| = \left| s \int_m^{m+1} \frac{du}{u^{s+1}} \right| \leq |s| \int_m^{m+1} \frac{du}{u^{\sigma+1}} = \frac{|s|}{\sigma} \left(\frac{1}{m^\sigma} - \frac{1}{(m+1)^\sigma} \right). \tag{8}$$

Kadangi $r_n \to 0$, tai, paėmę bet kokį $\varepsilon > 0$, rasime tokį $n_0 = n_0(\varepsilon)$, kad su visais $n \geq n_0$ bus patenkinta nelygybė

$$|r_n| < \frac{\varepsilon}{2(\frac{1}{\sin\delta} + 1)} \stackrel{def}{=} \varepsilon_1. \tag{9}$$

Tarkime, kad $M > n_0$. Tuomet iš (7) lygybės bei (8) ir (9) nelygybių išplaukia, kad

$$\begin{aligned} \left| \sum_{m=M}^{N} \frac{a_m}{m^s} \right| &< \frac{\varepsilon_1 |s|}{\sigma} \sum_{m=M}^{N} \left(\frac{1}{m^\sigma} - \frac{1}{(m+1)^\sigma} \right) + \frac{\varepsilon_1}{M^\sigma} + \frac{\varepsilon_1}{(N+1)^\sigma} \\ &< \frac{\varepsilon_1 |s|}{\sigma} \left(\frac{1}{M^\sigma} - \frac{1}{(N+1)^\sigma} \right) + 2\varepsilon_1 < \frac{2\varepsilon_1 |s|}{\sigma} + 2\varepsilon_1. \end{aligned} \tag{10}$$

Iš teoremos sąlygų turime, kad $|\arg s| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$. Vadinasi, $|arctg \frac{t}{\sigma}| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$ arba $|\frac{t}{\sigma}| \leq ctg\delta$. Iš čia randame, kad

$$\frac{|s|}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\sigma^2 + t^2} = \sqrt{1 + \frac{t^2}{\sigma^2}} \leq \sqrt{1 + ctg^2\delta} = \frac{1}{sin\delta},$$

nes $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ ir todėl $sin\delta > 0$. Taigi, sugrįžę prie (10) nelygybės, gauname, kad su visais $M > n_0$

$$\left| \sum_{m=M}^{N} \frac{a_m}{m^s} \right| < 2\varepsilon_1 \left(\frac{1}{\sin\delta} + 1 \right) = \varepsilon.$$

Kadangi n_0 nepriklauso nuo s, tai iš čia ir išplaukia teoremos tvirtinimas.

3.2 teorema. *Jei Dirichlė eilutė konverguoja taške $s_0 = \sigma_0 + it_0$, tai ji konverguoja ir visuose taškuose $s = \sigma + it$, jei $\sigma > \sigma_0$.*

Įrodymas. Kadangi $\sigma - \sigma_0 > 0$, tai visada atsiras toks skaičius $\delta > 0$, kad

$$|\arg(s - s_0)| = \left| arctg \frac{t - t_0}{\sigma - \sigma_0} \right| \leq \frac{\pi}{2} - \delta.$$

Todėl teoremos tvirtinimas išplaukia iš 3.1 teoremos.

3.2 Dirichlė eilutės konvergavimo sritis

Vienas svarbiausių funkcinių eilučių teorijos uždavinių yra nustatyti jų konvergavimo sritį. Pusplokštume vadinsime visą s- plokštumą ir tuščią aibę. Šiame skyrelyje nurodysime Dirichlė eilutės konvergavimo sritį. Šiam tikslui bus reikalinga Dedekindo teorema.

3.3 teorema. *Dirichlė eilutės konvergavimo sritis yra pusplokštumė.*

Įrodymas. Padalykime visas realias σ' reikšmes į dvi klases A' ir A. Tarkime, jog klasei A' priklauso tos σ' reikšmės, su kuriomis Dirichlė eilutė konverguoja, kai $\sigma > \sigma'$, o klasei A priklauso likusios σ' reikšmės. Pagal teoremos apie tolygų Dirichlė eilutės konvergavimo išvadą, kiekvienas klasės A skaičius yra mažesnis už bet kurį klasės A' skaičių, ir kiekvienas realus skaičius patenka į vieną ir tik vieną iš aibių A ir A'. Taigi turime realių skaičių aibės pjūvį $A|A'$. Pagal Dedekindo teoremą egzistuoja realus skaičius σ_0, atliekantis šį pjūvį. Šis skaičius σ_0 yra didžiausias klasėje A, arba mažiausias klasėje A'. Aišku, kad Dirichlė eilutė konverguoja, kai $\sigma > \sigma_0$, ir diverguoja, jei $\sigma < \sigma_0$. Taigi, Dirichlė eilutės konvergavimo sritis yra pusplokštumė $\sigma > \sigma_0$.

Apibrėžimas. Skaičius σ_0 yra vadinamas Dirichlė eilutės konvergavimo abscise.

Yra Dirichlė eilučių, kurios konverguoja su visomis s reikšmėmis. Šiuo atveju sakome, jog $\sigma_0 = -\infty$. Pasitaiko taip pat eilučių, kurios diverguoja su visomis s reikšmėmis, t.y. $\sigma_0 = +\infty$.

Apie Dirichlė eilutės konvergavimą tiesėje $\sigma = \sigma_0$ nieko negalima pasakyti. Ji gali ir konverguoti, ir diverguoti. Kiekvienu konkrečiu atveju konvergavimą tiesėje $\sigma = \sigma_0$ reikia nagrinėti atskirai.

Tarkime, jog σ_0 yra (5) eilutės konvergavimo abscisė, o $f(s)$ - jos suma. Taikymuose naudinga žinoti funkcijos $f(s)$ analizines savybes. Paprasčiausias tokio tipo tvirtinimas yra ši teorema.

3.4 teorema. *Funkcija $f(s)$ yra analizinė pusplokštumėje $\sigma > \sigma_0$.*

Įrodymas. Kiekvienas (5) eilutės narys $a_m m^{-s}$ su visais s yra analizinė funkcija. Be to, bet kuris taškas $s = \sigma + it$, kuriam $\sigma \geq \sigma_0 + \varepsilon$, su pakankamai mažu skaičiumi $\delta > 0$ tenkina nelygybę

$$|\arg(s - s_0)| \leq \frac{\pi}{2} - \delta.$$

Čia $s_0 = \sigma_0 + it'$. Pagal prieš tai nagrinėto skyrelio teoremą visi tokie taškai priklauso eilutės tolygaus konvergavimo sričiai. Vadinasi, (5) eilutė konverguoja tolygiai pusplokštumėje $\sigma \geq \sigma_0 + \varepsilon$. Iš čia ir iš žinomos Vejerštraso teoremos apie tolygiai konverguojančios analizinių narių eilutės sumos analiziškumo, gauname, jog $f(s)$ yra analizinė funkcija pusplokštumėje $\sigma \geq \sigma_0 + \varepsilon$. Kadangi ε - bet koks teigiamas skaičius, tai iš čia išplaukia teoremos tvirtinimas.

Apibrėžimas. Sakome, jog (5) Dirichlė eilutė konverguoja absoliučiai, jei konverguoja eilutė

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|a_m|}{m^{\sigma}}. \tag{11}$$

3.5 teorema. *Dirichlė eilutės absoliutaus konvergavimo sritis yra pusplokštumė.*

Įrodymas. Jei (11) eilutė konverguoja su kuria nors σ reikšme σ_1, tai ji konverguoja ir su visomis reikšmėmis $\sigma > \sigma_1$, nes ji yra neneigiamų narių skaitinė eilutė ir

$$|a_m|m^{-\sigma} < |a_m|m^{-\sigma_1}.$$

Kaip ir 3.3 teoremos įrodyme, atlikę realių skaičių aibės pjūvį, gauname, kad egzistuoja toks skaičius $\overline{\sigma}_0$, kad (6) eilutė konverguoja, kai $\sigma > \overline{\sigma}_0$, ir diverguoja, kai $\sigma < \overline{\sigma}_0$. Tai reiškia, kad (5) eilutė konverguoja absoliučiai pusplokštumėje $\sigma > \overline{\sigma}_0$.

Apibrėžimas. Skaičius $\overline{\sigma}_0$ yra vadinamas Dirichlė eilutės absoliutaus konvergavimo abscise.

Pastaba. Dirichlė eilutės konvergavimo abscisė σ_0 ir absoliutaus konvergavimo abscisė $\overline{\sigma}_0$ gali būti skirtingi skaičiai. Aišku, kad $\sigma_0 \leq \overline{\sigma}_0$.

Kitas Dirichlė eilučių savybes galima rasti [5] knygelėje.

4. Silpnasis matų konvergavimas

Tegul Ω yra bet kokia netuščia aibė.

4.1 apibrėžimas. Aibės Ω poaibių sistema $\mathcal{F}$ yra vadinama σ - kūnu (Borelio kūnu), jeigu tenkina sąlygas:

1° $\Omega \in \mathcal{F}$;

2° Jei $A \in \mathcal{F}$, tai ir $A^c = \Omega \backslash A \in \mathcal{F}$;

3° Jei seka $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, tai jų sąjunga $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m \in \mathcal{F}$.

Sistemoje $\mathcal{F}$ galima apibrėžti tikimybinį matą.

4.2 apibrėžimas. Neneigiama aibės funkcija $\mathbb{P}$, apibrėžta sistemoje $(\Omega, \mathcal{F})$ ir tenkinanti sąlygas:

1° $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;

2° $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m\right) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} P(A_m)$, visiems $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, $\quad A_m \bigcap A_n \neq 0, \quad m \neq n$, yra vadinama tikimybiniu matu.

4.3 apibrėžimas. Trejetas $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ yra vadinamas tikimybine erdve.

4.4 apibrėžimas. Funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$ visoms $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, tenkinanti sąlygą $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\} \in \mathcal{F}$, yra vadinama atsitiktiniu dydžiu, apibrėžtu tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Čia $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ yra erdvės $\mathbb{R}$ Borelio aibių klasė, tai yra aibių klasė, generuota atvirų intervalų sistemos.

Tegul $\mathcal{A}$ yra kuri nors aibių sistema.

4.5 apibrėžimas. Minimalus σ - kūnas, kuriam priklauso aibių sistema $\mathcal{A}$, yra vadinama σ - kūnu, generuotu sistemos $\mathcal{A}$. Minimalus suprantamas tokia prasme. Imame visus σ - kūnus, kuriems priklauso sistema $\mathcal{A}$ ir imame jų sankirtą. Ši sankirta vėl bus σ - kūnas. Tai ir bus minimalus σ - kūnas, kuriam priklauso sistema $\mathcal{A}$.

Tegul $\mathcal{X}$ - bet kokia netuščia aibė.

4.6 apibrėžimas. Aibė $\mathcal{X}$ yra vadinama metrine erdve, jei yra apibrėžta funkcija $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$, tenkinanti sąlygas:

1° $\rho(x, y) \geq 0, \quad \rho(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$;

2° $\rho(x, y) = \rho(y, x), \quad \forall x, y \in \mathcal{X}$;

3° $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y), \quad \forall x, y, z \in \mathcal{X}$.

Funkcija $\rho(x, y)$ yra vadinama metrika (atstumu). Erdvėje $\mathbb{R}$ metriką galime apibrėžti taip:

$$\rho(x, y) = |x - y|.$$

Tegul S yra metrinė erdvė. $P_n, \quad n \in \mathbb{N}$, ir P yra tikimybiniai matai erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$. Sakome, kad P_n, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į matą P, jeigu kiekvienai $f \in C(S)$ yra teisingas sąryšis

$$\int\limits_S f dP_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \int\limits_S f dP,$$

kur $C(S)$ yra realių, aprėžtų, tolydžių funkcijų klasė erdvėje S.

Silpnasis matų konvergavimas yra žymimas $P_n \Rightarrow P$. Pastebime, kad P_n negali silpnai konverguoti į dvi skirtingas ribas (matus). Tarkime, priešingai, $P_n \Rightarrow P$ ir $P_n \Rightarrow Q$. Tai reiškia, kad kiekvienai $f \in C(S)$

$$\int\limits_S f dP_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int\limits_S f dP,$$

ir

$$\int\limits_S f dP_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int\limits_S f dQ.$$

Tačiau skaičių seka $\int\limits_S f dP_n$ gali turėti tik vieną ribą. Todėl kiekvienai $f \in C(S)$, turime

$$\int\limits_S f dP = \int\limits_S f dQ.$$

Iš čia išplaukia, jog $P = Q$ (matai sutampa).

4.1 teorema. *Tegul P_n ir P yra tikimybiniai matai erdvėje* $(S, \mathcal{B}(S))$. Tuomet šie 5 tvirtinimai yra ekvivalentūs:

1° $P_n \Rightarrow P$;

2° $\int\limits_S f dP_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int\limits_S f dP$ visoms aprėžtoms, realioms, tolygiai tolydžioms funkcijoms f erdvėje S;

3° $\lim\limits_{n\to\infty} \sup P_n(F) \leq P(F)$ visoms uždaroms aibėms F;

4° $\lim\limits_{n\to\infty} \inf P_n(G) \geq P(G)$ visoms atviroms aibėms G;

5° $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(A) = P(A)$ visoms mato P tolydumo aibėms A, t.y. $P(\partial A) = 0$, kur ∂A yra aibės A kraštas.

Teoremos įrodymas yra duotas [1] monografijoje.

4.2 teorema. *Jei $P_n \Rightarrow P$, tai $P_n h^{-1} \Rightarrow P h^{-1}$ kiekvienai realiai, mačiai funkcijai h, tenkinančiai sąlygą $P(D_h) = 0$.*

Čia D_h yra funkcijos h trūkio taškų aibė.

Tegul $\mathcal{P}$ yra tikimybinių matų šeima erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$.

Apibrėžimas. Šeima $\mathcal{P}$ yra vadinama reliatyviai kompaktiška, jei kiekvienas elementų iš šeimos $\mathcal{P}$ posekis turi savyje silpnai konverguojantį posekį. Tai reiškia, kad, jei $\{P_n\} \subset \mathcal{P}$, tai egzistuoja posekis $\{P_{n_1}\}$ ir matas Q, apibrėžtas erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$ (bet nebūtinai priklausantis šeimai $\mathcal{P}$) tokie, kad $P_{n_1} \xrightarrow[n_1 \to \infty]{} Q, \quad Q(S) = 1$.

Tarkime, jog $P_n \Rightarrow P$, tai tuomet kiekvienas posekis $P_{n_1} \Rightarrow P$. Taigi, $\{P_n\}$ yra reliatyviai kompaktiška.

Apibrėžimas. Tikimybinių matų šeima $\mathcal{P}$ erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$ yra vadinama suspausta, jeigu kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuoja kompaktiška aibė $K \subset S$, kad visiems matams $P \in \mathcal{P}$ galioja nelygybė

$$P(K) > 1 - \varepsilon.$$

Tikimybinių matų šeimos reliatyvus kompaktiškumas ir suspaustumas yra susijusios sąvokos. Tai tvirtina Prochorovo teoremos.

4.3 teorema. *(Tiesioginė). Jeigu tikimybinių matų šeima $\mathcal{P}$ erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$ yra suspausta, tai ji yra ir reliatyviai kompaktiška.*

Įrodymas. Nagrinėsime tik erdvę $S = \mathbb{R}^k$. Tegul $\{P_n\}$ yra šeimos $\mathcal{P}$ seka. Apibrėžiame atitinkamas pasiskirstymo funkcijas

$$F_n(x) = P_n\{y : y \le x\}, \quad x \in \mathbb{R}^k,$$

kur

$x = (x_1, \ldots, x_k)$,
$y = (y_1, \ldots, y_k)$;
$x \le y, \quad x_i \le y_i, \quad i = 1, \ldots, k.$

Pagal Helio teoremą: (Tegul $\{F_n\}$ yra pasiskirstymo funkcijų seka erdvėje $\mathbb{R}^k$. Tuomet egzistuoja posekis $\{F_{n_1}\}$ ir funkcija F, kuri yra tolydi iš viršaus ($k = 1$, iš dešinės), $0 \le F(x) \le 1$ ir nemažėjanti, bet nebūtinai $F(x) \to 1, \quad x \to \infty$ (nebūtinai $F(x)$ yra pasiskirstymo funkcija), kad $\lim\limits_{n_1 \to \infty} F_{n_1}(x) = F(x)$ visuose $F(x)$ tolydumo taškuose) gauname, kad seka $\{F_n\}$ turi posekį $\{F_{n_1}\}$, kuris konverguoja $\lim\limits_{n_1 \to \infty} F_{n_1}(x) = F(x)$, visuose $F(x)$ tolydumo taškuose. Čia $F(x)$ tolydi iš viršaus, nemažėjanti, bet nebūtinai pasiskirstymo funkcija.

Iš bendro tikimybių teorijos kurso žinoma, kad egzistuoja toks matas μ intervale $(a, b]$, kuris išsireiškia funkcijos $F(x)$ reikšmių tiesine kombinacija. Tegul $h_i = b_i - a_i, \quad a = (a_1, \ldots, a_k), \quad b = (b_1, \ldots, b_k)$. Tuomet

$$\begin{aligned}
\mu(a, b] &= F(a_1 + h_1, \ldots, a_k + h_k) - F(a_1, a_2 + h_2, \ldots, a_k + h_k) - \\
&- F(a_1 + h_1, a_2, a_3 + h_3, \ldots, a_k + h_k) + \ldots + \\
&+ F(a_1, a_2, a_3 + h_3, \ldots, a_k + h_k) + \ldots + (-1)^k F(a_1, a_2, \ldots, a_k). \qquad (12)
\end{aligned}$$

Jei įrodysime, kad $\mu(\mathbb{R}^k) = 1$, tai tuomet iš (12) išplauks, kad $P_{n_1} \Rightarrow \mu$.

Tegul $\varepsilon > 0$ yra duotas. Tuomet galima rasti erdvės $\mathbb{R}^k$ kompaktišką aibę K, kad visiems n_1 galiotų nelygybė

$$P_{n_1}(K) > 1 - \varepsilon.$$

Taip galime padaryti, nes šeima $\mathcal{P}$ yra suspausta. Dabar parenkame vektorius a ir b taip, kad $K \subset (a, b]$, ir kad visos 2^k to intervalo (stačiakampio) viršūnių būtų funkcijos $F(x)$ tolydumo taškai. Taip padaryti galima, nes tik baigtinis arba skaitus $(k-1)$ - mačių hiperplokštumų skaičius turi teigiamą matą. Kadangi pagal apibrėžimą $P_{n_1}(a, b]$ yra funkcijos $F_{n_2}(x)$ skirtumai, kaip ir (12) formulėje, tai turime, kad

$$P_{n_1}(a, b] \to \mu(a, b], \tag{13}$$

nes

$$F_{n_1}(a_1 + h_1, a_2 + h_2, \ldots, a_k + h_k) - F_{n_1}(a_1, a_2 + h_2, \ldots, a_k + h_k) - \ldots -$$

$$-F_{n_1}(a_1 + h_1, \ldots, a_{k-1} + h_{k-1}, a_k) + F_{n_1}(a_1, a_2, a_3 + h_3, \ldots, a_k + h_k) + \ldots +$$

$$+F_{n_1}(a_1 + h_1, \ldots, a_{k-2} + h_{k-2}, a_{k-1}, a_k) + \ldots + (-1)^k F_{n_1}(a_1, \ldots, a_k)$$

$$\xrightarrow[n_1 \to \infty]{} F(a_1 + h_1, a_2 + h_2, \ldots, a_k + h_k) - F(a_1, a_2 + h_2, \ldots, a_k + h_k) - \ldots -$$

$$-F(a_1 + h_1, \ldots, a_{k-1} + h_{k-1}, a_k) + F(a_1, a_2, a_3 + h_3, \ldots, a_k + h_k) + \ldots +$$

$$+F(a_1 + h_1, \ldots, a_{k-2} + h_{k-2}, a_{k-1}, a_k) + \ldots + (-1)^k F(a_1, \ldots, a_k).$$

Iš intervalo $(a, b]$ parinkimo turime, kad

$$P_{n_1}(a, b] \geq P_{n_1}(K) > 1 - \varepsilon.$$

Iš čia ir (13) gauname, kad $\mu(a, b] \geq 1 - \varepsilon$. Kadangi $\varepsilon > 0$ bet koks, tai

$$\mu(\mathbb{R}^k) = 1.$$

Tai reiškia, kad $P_{n_1} \Rightarrow \mu$, tai yra, kad šeima $\mathcal{P}$ yra reliatyviai kompaktiška. Tolesni šios teoremos įrodymo etapai yra tokie:

1° Atvejis $S = \mathbb{R}^\infty$.

2° Atvejis, kai erdvė S yra σ - kompaktiška, tai yra, ji yra skaiti kompaktiškų aibių sąjunga.

3° Bendras atvejis. ($\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\infty \to S - \sigma$ - kompaktiška $\to$ Bendras atvejis)

Mūsų atveju pakanka $\mathbb{R}^k$, nes topologija erdvėje $\mathbb{C}^r$ yra tokia pat, kaip ir erdvėje $\mathbb{R}^{2r}$.

4.4 teorema. *(Atvirkštinė teorema). Tegul erdvė S yra separabili ir pilna, o tikimybinių matų šeima $\mathcal{P}$ erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$ yra reliatyviai kompaktiška. Tuomet šeima $\mathcal{P}$ yra suspausta.*

Įrodymas. Tarkime, kad kiekvienas $\varepsilon > 0$ ir $\delta > 0$ egzistuoja baigtinė δ - rutulių aibė $A_1, \ldots, A_n$, kad

$$P\left(\bigcup_{i\leq n} A_i\right) > 1-\varepsilon \quad visiems \quad P \in \mathcal{P}.$$

Duotam $\varepsilon > 0$ ir bet kuriam $k \in \mathbb{N}$ parenkame $\frac{1}{k}$ - rutulius $A_{k_1}, A_{k_2}, \ldots, A_{k_n}$ taip, kad visiems $P \in \mathcal{P}$ būtų teisinga nelygybė

$$P\left(\bigcup_{i\leq n_k} A_{k_i}\right) > 1-\frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Čia $\frac{1}{k}$ yra rutulio spindulys. Imame aibę

$$\bigcap_{k\geq 1}\bigcup_{i\leq n_k} A_{k_i}. \tag{14}$$

Šios aibės uždarinys

$$\overline{\bigcap_{k\geq 1}\bigcup_{i\leq n_k} A_{k_i}}$$

yra pilnai aprėžta aibė, nes ją padengia baigtinis $\frac{1}{k}$ - rutulių skaičius.

Panaudosime teoremą: jei erdvė pilna, o aibė pilnai aprėžta, tai jos uždarinys yra kompaktiška aibė. Iš čia išplaukia, jog aibė

$$K = \overline{\bigcap_{k\geq 1}\bigcup_{i\leq n_k} A_{k_i}}$$

yra kompaktiška erdvėje S. Vertiname

$$\begin{aligned} P(S\setminus K) &= P\left(S\setminus\overline{\bigcap_{k\geq 1}\bigcup_{i\leq n_k} A_i}\right) \leq P\left(S\setminus\bigcap_{k\geq 1}\bigcup_{i\leq n_k} A_i\right) \leq P\left(\bigcup_{k\geq 1}\left(S\setminus\bigcup_{i\leq n_k} A_{k_i}\right)\right) \\ &\leq \sum_{k\geq 1} P\left(S\setminus\bigcup_{i\leq n_k} A_{k_i}\right) = \varepsilon\sum_{k\geq 1}\frac{1}{2^k} = \varepsilon\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \varepsilon \end{aligned}$$

visiems P iš $\mathcal{P}$. Iš čia gauname, kad $P(K) > 1-\varepsilon$ visiems P iš $\mathcal{P}$, tai yra, šeima $\mathcal{P}$ yra suspausta.

Parodysime, kad, jei prielaida apie rutulių egzistavimą negalioja, tai šeima $\mathcal{P}$ negali būti reliatyviai kompaktiška. Tarkime, kad egzistuoja $\varepsilon > 0$ ir $\delta > 0$, kad kiekvieno δ - rutulių aibė $A_1, \ldots, A_n$ tenkina sąlygą

$$P\left(\bigcup_{i\leq n} A_i\right) \leq 1-\varepsilon$$

kuriam nors $P \in \mathcal{P}$. Kadangi erdvė S yra separabili, tai ji yra atvirų δ - rutulių $A_1, A_2, \dots$ sąjunga. Tegul $B_n = \bigcup\limits_{i \le n} A_i$. Matą $P_n \in \mathcal{P}$ parenkame taip, kad galiotų nelygybė:

$$P_n(B_n) \le 1 - \varepsilon. \tag{15}$$

Tegul $\{P_{n_1}\} \in \mathcal{P}$ toks, kad $P_{n_1} \Rightarrow Q$. Kadangi aibė B_m yra atvira (kaip baigtinė atvirų rutulių sąjunga), tai pagal 4.1 teoremos (4°) turime, kad kiekvienam $m \in \mathbb{N}$

$$Q(B_m) \le \liminf_{n_1 \to \infty} P_{n_1}(B_m). \tag{16}$$

Tačiau pakankamai dideliems n_1, galioja sąryšis $B_m \subset B_{n_1}$. Iš čia ir (16) nelygybės turime, kad

$$Q(B_m) \le \liminf_{n_1 \to \infty} P_{n_1}(B_{n_1}) \le 1 - \varepsilon.$$

Tačiau taip negali būti, nes B_m yra didėjanti seka į erdvę S, o $Q(S) = 1$. Prieštaravimas rodo, jog prielaida klaidinga. Teorema įrodyta.

5. Prochorovo teorijos panaudojimas

Pirmiausia įrodysime, kad tikimybinių matų šeima $\{P_T : T > 0\}$ yra

$$P_T(A) = \nu_T((\varphi(\sigma_1 + it, F), ..., \varphi(\sigma_r + it, F)) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^r),$$

kai $\min\limits_{i \le j \le r} \sigma_j > \frac{\kappa}{2}$, yra reliatyviai kompaktiška.

5.1 lema. *Tikimybinių matų šeima $\{P_T : T > 0\}$ yra reliatyviai kompaktiška.*
Įrodymas. Kiekvienam $j = 1, \dots, r$ apibrėžiame tikimybinį matą

$$P_{jT}(A) = \nu_T(\varphi(\sigma_j + it, F_j) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^r).$$

Pagal 2.1 teoremą tikimybinis matas P_{jT}, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į atsitiktinio elemento

$$\varphi(\sigma_j, \omega, F_j) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_j(m)\omega(m)}{m^{\sigma_j}}$$

skirstinį, $j = 1, \dots, r$. Iš čia išplaukia, kad tikimybinių matų šeima $\{\mathcal{P}_{jT}\}$ yra reliatyviai kompaktiška, $j = 1, \dots, r$. Tačiau erdvė $\mathbb{C}$ yra pilna separabili metrinė erdvė. Todėl iš čia ir 4.4 teoremos gauname, kad šeima $\{P_{jT}\}$ yra suspausta, $j = 1, \dots, r$. Tegul ε yra bet koks teigiamas skaičius. Tuomet pagal suspaustumo apibrėžimą egzistuoja tokia kompaktiška aibė $K_j \subset \mathbb{C}$, kad visiems $T > 0$ galioja nelygybė

$$P_{jT}(\mathbb{C}_j \setminus K_j) < \frac{\varepsilon}{r}, \quad j = 1, \dots, r. \tag{17}$$

Kurioje nors tikimybinėje erdvėje $(\tilde{\Omega}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ apibrėžiame atsitiktinį dydį θ_T, turintį skirstinį

$$\mathbb{P}(\eta_T \in A) = \frac{1}{T}\int_0^T I_A(t)dt, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Čia I_A yra aibės A indikatorius, t.y.

$$I_A(t) = \begin{cases} 1, jei & t \in A, \\ 0, jei & t \notin A. \end{cases}$$

Naudodami atsitiktinį dydį θ_T, apibrėžiame $\mathbb{C}$ - reikšmius atsitiktinius elementus $\varphi_{jT}(\sigma_j)$ formule

$$\varphi_{jT}(\sigma_j) = \varphi(\sigma_j + i\theta_T), \quad j = 1, \dots, r,$$

ir tegul

$$\varphi_T(\sigma_1, \dots, \sigma_r) = (\varphi_{1T}(\sigma_1), \dots, \varphi_{rT}(\sigma_r)),$$

$$\min_{1\leq j\leq r} \sigma_j > \frac{\kappa_j}{2}.$$

Tuomet $\varphi_T(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ yra $\mathbb{C}^r$ - reikšmis atsitiktinis elementas, apibrėžtas tikimybinėje erdvėje $(\tilde{\Omega}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Be to, iš (17) nelygybės ir atsitiktinio dydžio θ_T apibrėžimo turime, kad

$$\mathbb{P}(\varphi_{jT}(\sigma_j) \in \mathbb{C}_j \setminus K_j) < \frac{\varepsilon}{r}, \quad j = 1, \dots, r. \tag{18}$$

Dabar tegul $K = K_1 \times \ldots \times K_r$. Kadangi aibės $K_1, \dots, K_r$ yra kompaktiškos erdvėje $\mathbb{C}$, tai aibė K yra kompaktiška erdvėje $\mathbb{C}^r$. Be to, iš (18) nelygybės gauname, kad visiems $T > 0$ galioja

$$\begin{aligned} P_T(\mathbb{C}^r \setminus K) &= \mathbb{P}(\varphi_T(\sigma_1, \dots, \sigma_r) \in \mathbb{C}^r \setminus K) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^n (\varphi_{jT}(\sigma_j) \in \mathbb{C}_j \setminus K_j)\right) \\ &\leq \sum_{j=1}^r \mathbb{P}(\varphi_{jT}(\sigma_j) \in \mathbb{C}_j \setminus K_j) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Pastaroji nelygybė reiškia, kad tikimybinių matų šeima $\{P_T : T > 0\}$ yra suspausta. Taigi, pagal 4.3 teoremą ji yra reliatyviai kompaktiška. Lema įrodyta.

Dabar tegul $\sigma_j^{'} > \frac{\kappa_j}{2}$, ir apibrėžiame $\hat{\sigma}_j = \frac{\kappa_j}{2} - \sigma_j^{'} < 0, \quad j = 1, \dots, r$. Be to, tegul $u_j, \quad j = 1, \dots, r$, yra bet kokie kompleksiniai skaičiai, ir, kai $\sigma > \max\limits_{1\leq j\leq r} \hat{\sigma}_j$, apibrėžiame

$$\xi(s) = \sum_{j=1}^r u_j \varphi(s + \sigma_j^{'}, F_j)$$

ir

$$\xi(s, \omega) = \sum_{j=1}^r u_j \varphi(s + \sigma_j^{'}, \omega, F_j).$$

Simboliu $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ žymėsime konvergavimą pagal pasiskirstymą.

5.2 lema. *Tarkime, kad* $\sigma > \max\limits_{1\le j\le r} \hat{\sigma}_j$. *Tuomet*

$$\xi(\sigma + i\theta_T) \underset{T\to\infty}{\xrightarrow{\mathcal{D}}} \xi(\sigma, \omega).$$

Įrodymas. Tegul $\sigma > \max\limits_{1\le j\le r} \hat{\sigma}_j + \frac{1}{2}$. Tuomet $\sigma + \sigma_j' > \max\limits_{1\le j\le r}(\frac{\kappa_j}{2} - \sigma_j') + \sigma_j' + \frac{1}{2} > \frac{\kappa_j}{2} + \frac{1}{2}$. Tačiau funkcija $\varphi(s, F_j)$, kai $\sigma > \frac{\kappa_j}{2} + \frac{1}{2}$, yra užrašoma absoliučiai konverguojančia Dirichlė eilute

$$\varphi(s, F_j) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g(m)}{m^s}, \quad j = 1, \dots, r.$$

Vadinasi, kai $\sigma > \max\limits_{1\le j\le r} \hat{\sigma}_j + \frac{1}{2}$,

$$\xi(s) = \sum_{j=1}^{r} u_j \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_j(m)}{m^{s+\sigma_j'}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} \sum_{j=1}^{r} u_j \frac{c_j(m)}{m^{\sigma_j'}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{m^s},$$

kur

$$b_m = \sum_{j=1}^{r} u_j \frac{c_j(m)}{m^{\sigma_j'}}.$$

Pastaroji lygybė rodo, jog srityje $\sigma > \max\limits_{1\le j\le r} \hat{\sigma}_j + \frac{1}{2}$ funkcija $\xi(s)$ yra užrašoma absoliučiai konverguojančia Dirichlė eilute. Kadangi srityje $\sigma > \frac{\kappa_j}{2}$ funkcija $\varphi(s, F_j)$ yra baigtinės eilės ir galioja įvertis [3]

$$\int_0^T \left|\varphi(\sigma + it, F_j)\right|^2 dt = O(T), \quad T \to \infty, \quad j = 1, \dots, r,$$

tai pakartoję 2.1 teoremos įrodymą, gauname, kad srityje $\sigma > \max\limits_{1\le j\le r} \hat{\sigma}_j$ matas,

$$\nu_T(\xi(\sigma + it) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į atsitiktinio elemento

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m \omega(m)}{m^\sigma} = \sum_{j=1}^{r} u_j \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_j(m)}{m^{\sigma+\sigma_j'}} = \sum_{j=1}^{r} u_j \varphi(\sigma + \sigma_j', \omega, F) = \xi(\sigma, \omega)$$

pasiskirstymą. Pastarasis tvirtinimas yra ekvivalentus lemos tvirtinimui, t.y. turime, kad

$$\xi(\sigma + i\theta_T) \underset{T\to\infty}{\xrightarrow{\mathcal{D}}} \xi(\sigma, \omega).$$

6. Pagrindinė teorema

Šiame skyrelyje pateiksime pagrindinį darbo rezultatą.

6.1 teorema. *Tarkime, jog* $\min\limits_{1\le j\le r} \sigma_j > \frac{\kappa}{2}$. *Tuomet tikimybinis matas* P_T, *kai* $T \to \infty$, *silpnai konverguoja į matą* P_φ.

Šis rezultatas rodo tam tikrą dzeta funkcijų $\varphi(s, F_1), ..., \varphi(s, F_r)$ asimptotinio elgesio reguliarumą.

Įrodymas. Pagal 5.1 lemą, tikimybinių matų šeima $\{P_T : T > 0\}$ yra reliatyviai kompaktiška. Todėl egzistuoja toks posekis $\{P_{T_k}\} \subset \{P_T\}$, kad P_{T_k}, kai $k \to \infty$, silpnai konverguoja į kurį nors matą $\hat{P}$ erdvėje $(\mathbb{C}^r, \mathcal{B}(\mathbb{C}^r))$. Vadinasi, egzistuoja toks $\mathbb{C}^r$ - reikšmis atsitiktinis elementas, tarkime,

$$\hat{\varphi} = \hat{\varphi}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r) = (\hat{\varphi}_1(\sigma_1), \ldots, \hat{\varphi}_r(\sigma_r)),$$

apibrėžtas kurioje nors tikimybinėje erdvėje ir turintis pasiskirstymą $\hat{P}$. Iš čia, prisiminę atsitiktinio elemento φ_T apibrėžimą, turime, kad

$$\varphi_{T_k} \xrightarrow[k\to\infty]{\mathcal{D}} \hat{\varphi}. \tag{19}$$

Funkciją $u : \mathbb{C}^r \to \mathbb{C}$ apibrėžiame formule

$$u(z_1, \ldots, z_r) = \sum_{j=1}^{r} u_j z_j, \quad z_j \in \mathbb{C}, \quad j = 1, \ldots, r.$$

Kadangi funkcija u yra tiesinė, ji yra tolydi. Tegul $\sigma_j = \sigma + \sigma_j^{'}$ su $\sigma > \max\limits_{1\le j\le r} \hat{\sigma}_j$ ir $\sigma_j^{'} > \frac{\kappa_j}{2}$. Tuomet turime, kad $\sigma_j > \frac{\kappa_j}{2}$. Iš (19), funkcijos u tolydumo ir 4.2 teoremos gauname, kad

$$u(\varphi_{T_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{\mathcal{D}} u(\hat{\varphi}).$$

Čia

$$u(\varphi_{T_k}) = \sum_{j=1}^{r} u_j \varphi_{jT_k}(\sigma + \sigma_j^{'}, F_j).$$

Iš čia ir funkcijos $\xi(s)$ apibrėžimo išplaukia, jog

$$\xi(\sigma + i\theta_{T_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{\mathcal{D}} u(\hat{\varphi}). \tag{20}$$

Tačiau pagal 5.2 lemą

$$\xi(\sigma + i\theta_{T_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{\mathcal{D}} \xi(\sigma, \omega).$$

Todėl iš (20) sąryšio gauname, kad

$$\xi(\sigma, \omega) \stackrel{\mathcal{D}}{=} u(\hat{\varphi}). \tag{21}$$

Čia $X \stackrel{\mathcal{D}}{=} Y$ reiškia, jog atsitiktiniai elementai X ir Y turi tą patį skirstinį. Dabar (21) sąryšyje imame $\sigma = 0$. Tai yra galima, kadangi $\hat{\sigma}_j < 0, \quad j = 1, \ldots, r$, ir $\max\limits_{1 \le j \le r} \hat{\sigma}_j < 0$. Kadangi

$$\xi(\sigma, \omega) = \sum_{j=1}^{r} u_j \varphi(\sigma + \sigma_j^{'}, F_j)$$

ir

$$u(\hat{\varphi}) = \sum_{j=1}^{r} u_j \hat{\varphi}_j(\sigma + \sigma_j^{'}),$$

tai su $\sigma = 0$ gauname, kad

$$\sum_{j=1}^{r} u_j \varphi(\sigma_j^{'}, F_j) \stackrel{\mathcal{D}}{=} \sum_{j=1}^{r} u_j \hat{\varphi}_j(\sigma_j^{'}) \tag{22}$$

bet kokiems kompleksiniams skaičiams $u_j, \quad j = 1, \ldots, r$. Yra žinoma [1], kad erdvės $\mathbb{R}^{2r}$ dalių šeima, generuota visų hiperplokštumų, sudaro matus apibrėžiančią klasę. Iš čia išplaukia, jog ši šeima taip pat sudaro apibrėžiančią klasę ir erdvėje $\mathbb{C}^r$. Ši pastaba kartu su (22) sąryšiu parodo, kad $\mathbb{C}^r$ - reikšmiai atsitiktiniai elementai $(\varphi(\sigma_1^{'}, F_1), \ldots, \varphi(\sigma_r^{'}, F_r))$ ir $(\varphi_1(\sigma_1^{'}), \ldots, \varphi_r(\sigma_r^{'}))$ turi tą patį pasiskirstymą. Pagal apibrėžimą, $\sigma_j^{'} > \frac{\kappa_j}{2}, \quad j = 1, \ldots, r$. Taigi, turime, kad

$$\varphi \stackrel{\mathcal{D}}{=} \hat{\varphi}.$$

Vadinasi, pagal (19)

$$\varphi_{T_k} \xrightarrow[k \to \infty]{\mathcal{D}} \varphi,$$

arba, kitais žodžiais tariant, tikimybinis matas P_{T_k}, kai $k \to \infty$, silpnai konverguoja į atsitiktinio elemento φ skirstinį. Kadangi tikimybinių matų šeima $\{P_T\}$ yra reliatyviai kompaktiška ir atsitiktinis elementas φ nepriklauso nuo posekio parinkimo, tai turime, kad matas P_T, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į atsitiktinio elemento φ skirstinį. Teorema pilnai įrodyta.

Išvados

Tegul

$$F_j(z)=\sum_{m=1}^{\infty}c_j(m)\mathrm{e}^{2\pi imz},\quad j=1,\dots,r,$$

yra svorio κ normuotų tikrinių parabolinių formų rinkinys, o

$$\varphi(s,F_j)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{c_j(m)}{m^s},\quad j=1,\dots,r,$$

yra atitinkamų dzeta funkcijų rinkinys. Magistro darbe nustatyta, kad dzeta funkcijos $\varphi(s,F_1),\dots,\varphi(s,F_r)$ turi jungtinį ribinį pasiskirstymą kompleksinėje plokštumoje. Tai reiškia, kad tikimybinis matas

$$\frac{1}{T}meas\{t\in[0,T]:(\varphi(\sigma_1+it,F_1),...,\varphi(\sigma_r+it,F_r))\in A\},\quad A\in\mathcal{B}(\mathbb{C}^r),$$

kai $\min\limits_{1\le j\le r}\sigma_j>\frac{\kappa}{2}$ ir $T\to\infty$, silpnai konverguoja į kurį nors tikimybinį matą erdvėje $(\mathbb{C}^r,\mathcal{B}(\mathbb{C}^r))$. Čia $meas\{A\}$ yra mačios aibės $A\subset\mathbb{R}$ Lebego matas, $\mathbb{C}$ yra kompleksinė plokštuma, $\mathbb{C}^r=\underbrace{\mathbb{C}\times...\times\mathbb{C}}_{r}$, o $\mathcal{B}(\mathbb{C}^r)$ yra erdvės $\mathbb{C}^r$ Borelio aibių klasė.

Galima nurodyti ir ribinio mato pavidalą. Jis yra atsitiktinio elemento

$$\left(\prod_p\left(1-\frac{\alpha_1(p)\omega(p)}{p^{\sigma_1}}\right)^{-1}\left(1-\frac{\beta_1(p)\omega(p)}{p^{\sigma_1}}\right)^{-1},\dots,\quad\prod_p\left(1-\frac{\alpha_r(p)\omega(p)}{p^{\sigma_r}}\right)^{-1}\left(1-\frac{\beta_r(p)\omega(p)}{p^{\sigma_r}}\right)^{-1}\right)$$

skirstinys. Čia $\alpha_j(p)+\beta_j(p)=c_j(p),\quad j=1,\dots,r,\quad$ o $\omega(p)$ kiekvienam pirminiam p yra toro

$$\prod_p\gamma_p,$$

kur $\gamma_p=\{s\in\mathbb{C}:|s|=1\}$ visiems p, elemento ω projekcija į koordinatinę erdvę γ_p.

Summary

A joint limit theorem for zeta functions of cusp forms

Let

$$F_j(z) = \sum_{m=1}^{\infty} c_j(m) \mathrm{e}^{2\pi i m z}, \quad j = 1, \ldots, r,$$

be a collection of normalized eigenforms of weight κ, and

$$\varphi(s, F_j) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_j(m)}{m^s}, \quad j = 1, \ldots, r,$$

be a collection of corresponding zeta - functions. We prove a joint limit theorem for the functions $\varphi(s, F_1), \ldots, \varphi(s, F_r)$ on the complex plane. Denote by $meas\{A\}$ the Lebesgue measure of a measurable set $A \subset \mathbb{R}$, let $\mathbb{C}$ be the complex plane, $\mathbb{C}^r = \underbrace{\mathbb{C} \times ... \times \mathbb{C}}_{r}$, and let $\mathcal{B}(\mathbb{C}^r)$ stand for the class of Borel sets of the space $\mathbb{C}^r$. Then we prove that the probability measure, for $\min\limits_{1 \le j \le r} \sigma_j > \frac{\kappa}{2}$,

$$\frac{1}{T} meas\{t \in [0, T] : (\varphi(\sigma_1 + it, F_1), ..., \varphi(\sigma_r + it, F_r)) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^r),$$

converges weakly to some probability measure on $(\mathbb{C}^r, \mathcal{B}(\mathbb{C}^r))$ as $T \to \infty$.

Also, we indicate the explicit form of the limit measure in the above theorem. It coincides with the distribution of the random element

$$\left(\prod_p \left(1 - \frac{\alpha_1(p)\omega(p)}{p^{\sigma_1}}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\beta_1(p)\omega(p)}{p^{\sigma_1}}\right)^{-1}, \ldots, \quad \prod_p \left(1 - \frac{\alpha_r(p)\omega(p)}{p^{\sigma_r}}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\beta_r(p)\omega(p)}{p^{\sigma_r}}\right)^{-1} \right).$$

Here $\alpha_j(p) + \beta_j(p) = c_j(p), \quad j = 1, \ldots, r,$ and $\omega(p)$, for each prime p, is the projection of an element ω of the torus

$$\prod_p \gamma_p,$$

where $\gamma_p = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$ for all primes p.

Literatūra

1. P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, John Wiley, New York, 1968.

2. H. Iwaniec, *Topics in Classical Automorphic Forms*, Amer. Mafh. Soc., Providence, 1997.

3. A. Kačėnas, A. Laurinčikas, On Dirichlet series related to certain cusp forms, *Lith. Math. J.* **38**(1), 64–76 (1998).

4. A. Laurinčikas, *Rymano dzeta funkcijos teorijos pagrindai.* Vilniaus universiteto leidykla (1992), 3–11.

5. A. Laurinčikas, R. Macaitienė, *Įvadas į Dirichlė eilučių teoriją*. Šiaulių universiteto leidykla (2008).