ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATIKOS KATEDRA

Vaida Pocevičienė

APIBENDRINTOSIOS DALIKLIŲ FUNKCIJOS RYSO VIDURKIS

Magistro darbas

Darbo vadovas
Prof. habil. dr. Antanas Laurinčikas

Šiauliai, 2008

Turinys

1 Įvadas

Magistro darbe yra nagrinėjamos sumos, į kurias įeina aritmetinė funkcija

$$\sigma_a(m) = \sum_{d|m} d^a.$$

Ši funkcija dažnai yra vadinama apibendrintąja daliklių funkcija.

Skaičiuojant Rymano dzeta funkcijas $\zeta(s)$, $s = \sigma + it$, kvadrato vidurkį

$$\int_0^t \mid \zeta(\frac{1}{2} + \delta + it) \mid^2 dt$$

su mažu teigiamu skaičiumi δ, reikia turėti sumos

$$D_0(x, \delta) = \sum_{m \le x} \delta_{-\delta}(m)$$

asimtotinę formulę, kai $x \to \infty$. Aritmetinė funkcija $\sigma_a(m)$ yra klasikinė, todėl jos vidurkius nagrinėjo daugelis autorių. Įvairūs vidurkio pobūdžio rezultatai funkcijai $\sigma_a(m)$ yra gauti [4] straipsnyje, kuriame naudojami metodai yra labai sudėtingi.

Tegul $q > 0$, $0 < \delta < \frac{1}{2}$, o $\Gamma(s)$ yra Oilerio gama funkcija. Darbe yra nagrinėjamas Ryso vidurkis

$$D_{q-1}(x, \delta) = \frac{1}{\Gamma(q)} \sum_{m \le x} (x - m)^{q-1} \sigma_{-\delta}(m).$$

Minėtame [4] straipsnyje buvo nagrinėtas tik sveikojo q atvejis. Rezultatų formulavinui yra reikalingos Beselio funkcijos $J_\nu(z)$, $I_\nu(s)$, ${}^+J_\nu(z, \delta)$, ${}^+I_\nu(z, \delta)$. Tegul

$$\lambda_\nu(z, \delta) = \frac{1}{2}(\frac{z}{2})^{-\nu-\delta}(I_{\nu-\delta}(z) + J_{\nu-\delta}(z)) - \frac{1}{2}(\frac{z}{2})^{-\nu}({}^+I_\nu(z, \delta) -{}^+ J_\nu(z, \delta)).$$

Beselio funkcijų apibrėžimai bus pateikti 6 skyrelyje.

Pagrindinis darbo rezultatas yra ši teorema.

9.1 teorema. Tegul $x > 0$ nėra sveikasis skaičius, o $q > \frac{1}{2} + \delta$. Tuomet yra teisinga tapatybė

$$\begin{aligned} D_{q-1}(x, \delta) &= -\frac{1}{2}\zeta(\delta)\frac{x^{q-1}}{\Gamma(q)} + \frac{x^q \zeta(1+\delta)}{\Gamma(1+\delta)} + \frac{x^{q-\delta}\zeta(1-\delta)\Gamma(1-\delta)}{\Gamma(1+q-\delta)} \\ &\quad + \frac{x^q (2\pi)^{1+\delta}}{\sin(\frac{\pi\delta}{2})} \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_\delta(m) \lambda_q(4\pi\sqrt{mx}, \delta). \end{aligned}$$

Šios teromos įrodymui yra naudojamas modifikuotas A. L. Diksono (Dixon) ir W. L. Ferario (Ferrar) metodas [1].

2 Funkcija $\sigma_a(m)$

Šiame skyriuje prisiminsime funkcijos $\sigma_a(m)$ savybes.

2.1 apibrėžimas. Funkcija, kurios apibrėžimo sritis yra visų sveikųjų teigiamų skaičių aibė $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ yra vadinama aritmetine funkcija.

Simboliu (m, n) žymėsime bendrąjį didžiausiąjį skaičių m ir n daliklį.

2.2 apibrėžimas. Aritmetinė funkcija $g(m)$ yra vadinama multiplikatyviąja, jeigu:

1^0 $g(1) = 1$,

2^0 $g(m \cdot n) = g(m) \cdot g(n)$ visiems $m, n \in \mathbb{N}$, $(m, n) = 1$.

Pavyzdžiui, funkcija $g(m) = m^s$ yra multiplikatyvioji. Tegul a yra bet koks kompleksinis skaičius. Tuomet

$$\sigma_a(m) = \sum_{d|m} d^a.$$

Jei $a = 0$, tai

$$\sigma_0(m) = \sum_{d|m} 1$$

yra skaičiaus m daliklių skaičius. Jei $a = 1$, tai

$$\sigma_1(m) = \sum_{d|m} d$$

yra skaičiaus m daliklių suma.

2.3 teorema. Funkcija $\sigma_a(m)$ yra multiplikatyvi.

Įrodymas. Iš apibrėžimo aišku, kad $\sigma_a(1) = 1$. Tegul $(m, n) = 1$. Tuomet kiekvienas sandaugos $m \cdot n$ daliklis d turi pavidalą $d = d_1 \cdot d_2$. Čia d_1 yra skaičiaus m, o d_2 skaičiaus n daliklis. Todėl

$$\sigma_a(m \cdot n) = \sum_{d|m\cdot n} d^a = \sum_{d|m\cdot n} (d_1 \cdot d_2)^a = \sum_{d_1|m} d_1^a \sum_{d_2|n} d_2^a = \sigma_a(m) \cdot \sigma_a(n).$$

Multiplikatyvios funkcijos yra pilnai nusakomos jų reikšmėmis pirminių skaičių laipsniuose. Tegul $p^\alpha \parallel m$ žymi, kad $p^\alpha \mid m$, tačiau $p^{\alpha+1} f_m$. Čia p yra pirminis skaičius.

2.4 teorema. Visiems $m \in \mathbb{N}$ teisinga lygybė

$$\sigma_a(m) = \prod_{p^\alpha \parallel m} \frac{p^{(\alpha+1)a} - 1}{p^a - 1}.$$

Įrodymas. Iš funkcijos $\sigma_a(m)$ multiplikatyvumo turime, kad

$$\sigma_a(m) = \prod_{p^\alpha \parallel m} \sigma_a(p^\alpha). \tag{2.1}$$

Tačiau

$$\sigma_a(p^\alpha) = 1 + p^a + p^{2a} + ... = p^{\alpha a} = \frac{p^{(\alpha+1)a} - 1}{p^a - 1}. \tag{2.2}$$

Čia mes pasinaudojome geometrinės progresijos sumos formule. Iš (2.1) ir (2.2) išplaukia teoremos tvirtinimas.

Pavyzdžiui,

$$\sigma_3(18) = \sigma_3(2)\sigma_3(3^2) = \frac{2^6 - 1}{2^3 - 1} \cdot \frac{3^9 - 1}{3^3 - 1} = (2^3 + 1)(3^6 + 3^2 + 1) = 9 \cdot 37 = 333.$$

3 Dirichlė eilutės

Tegul $s = \sigma + it$ yra kompleksinis kintamasis, o $\{a_m\}$- kompleksinių skaičių seka. Eilutė

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s} \tag{3.1}$$

yra vadinama Dirichlė eilute. Dirichlė eilutės knvergavimo sritis yra pusplokštumė. Egzistuoja toks skičius σ_0, kad visiems s, kuriems $\sigma > \sigma_0$, (3.1) eilutė konverguoja, o visiems s, kuriems $\sigma < \sigma_0$ (3.1) eilutė diverguoja.

Skaičius σ_0 yra vadinamas Dirichlė eilutės konvergavimo abscise. Jis gali būti lygus ir $+\infty$, ir $-\infty$. Pirmuoju atveju eilutė visiems s diverguoja, o antruoju - visiems s konverguoja.

Sakome, jog (3.1) eilutė konverguoja absoliučiai, jeigu konverguoja eilutė

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mid a_m \mid}{m^{\sigma}}.$$

(3.1) eilutės absoliutaus konvergavimo sritis yra taip pat pusplokštumė. Egzistuoja toks skiačius σ_a, vadinamas (3.1) eilutės absoliutaus konvergavimo abscise, kad srityje $\sigma > \sigma_a$, (3.1) eilutė konverguoja absoliučiai. Šie ir kiti tvirtinimai apie Dirichlė eilutes yra įrodyti [3] knygelėje.

Pagrindinės teoremos įrodymui mums bus reikalingas tvirtinimas apie Dirichlė eilutės koeficientų išraišką jos suma.

3.1 lema. Tegul $c > 0$ ir $g > 0$, o eilutė

$$A(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s},$$

kai $\sigma = c$, konverguoja absoliučiai. Tuomet visiems $x > 1$, $x \notin \mathbb{N}$, teisinga lygybė

$$\frac{1}{\Gamma(g+1)} \sum_{m \leq x} a_m (x-n)^q = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{A(s)\Gamma(s)x^{s+q}}{\Gamma(s+q+1)} ds.$$

Lema yra vienas iš Perono formulės variantų.

4 Oilerio gama funkcija

Tegul $\sigma > 0$. Tuomet Oilerio gama funkcija $\Gamma(s)$ yra apibrėžiama integralu

$$\Gamma(s) = \int\limits_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx.$$

Iš šio apibrėžimo turime, jog funkcija $\Gamma(s)$ yrta analizinė pusplokštumėje $\sigma > 0$.

Funkcija $\Gamma(s)$ yra meromorfiškai pratęsiama į visą s-plokštumą. Yra teisingas toks tvirtinimas.

4.1 teorema. Funkcija $\Gamma(s)$ yra analizinė visoje s-plokštumoje, išskyrus tškus $s = -m$, $m \in \mathbb{N}_0$, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, ...\}$. Tie taškai yra funkcijos $\Gamma(s)$ paprasti poliai su reziduumais, lygiais

$$\frac{(-1)^m}{m!}.$$

Prisimename, jog funkcija, analizinė bet kurioje baigtinėje s-plokštumos srityje, yra vadinama sveikąja funkcija.

4.2 teorema. Funkcija $\frac{1}{\Gamma(s)}$ yra sveikoji funkcija.

Funkcijai $\Gamma(s)$ yra teisinga visa aibė formulių.

4.3 teorema. (Funkcinė lygtis). Su visais s teisinga lygybė

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s).$$

4.4 teorema. (Papildymo formulė). Tegul s nėra sveikasis skaičius. Tuomet

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}.$$

4.5 teorema. Su visais s teisinga formulė

$$\Gamma(s)\Gamma(s + \frac{1}{2}) = 2\sqrt{\pi} 2^{-2s} \Gamma(2s).$$

Taikymuose dažnai reikia žinoti funkcijos $\Gamma(s)$ elgesį, kai $| s | \to \infty$. Tokią informaciją teikia Stirlingo formulė.

4.6 teorema. (Stirlingo formulė). Tarkime, jog $\delta > 0$ ir

$$-\pi + \delta \leq args \leq \pi - \delta.$$

Tuomet

$$\log \Gamma(s) = (s - \frac{1}{2}) \log s - s + \log \sqrt{2\pi} + O(\frac{1}{| s |}).$$

Čia imama pagrindinė logaritmo reikšmė, o konstanta priklauso tik nuo δ.

Iš Stirlingo formulės (4.6 teorema) išplaukia tokia formulė.

4.7 teorema. Tegul $| t | \to \infty$. Tuomet tolygiai pagal σ kiekviename baigtiniame intervale

$$| \Gamma(\sigma + it) | = e^{-\frac{\pi |t|}{2}} | t |^{\sigma - \frac{1}{2}} \sqrt{\pi}(1 + o(1)).$$

Visus paminėtų tvirtinimų apie funkciją $\Gamma(s)$ įrodymus galima rasti [8] knygoje.

5 Rymano dzeta funkcija

Rymano dzeta funkcija $\zeta(s)$, $s = \sigma + it$, pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama Dirichlė eilute

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}.$$

Funkcija $\zeta(s)$ yra analiziškai pratęsiama į visą s-plokštumą, išskyrus tašką $s = 1$, kuris yra jos paprastasis polius su rezidiumu, lygiu 1.

5.1 teorema. [7]. Funkcija $\zeta(s)$ tenkina lygtį

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma(\frac{1-s}{2})\zeta(1-s).$$

Šią funkcinę lygtį galima užrasyti kitokiu pavidalu. Tegul

$$\mathcal{X}(s) = \frac{(2\pi)^s}{2\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}}.$$

Tuomet

$$\zeta(s) = \mathcal{X}(s)\zeta(1-s).$$

Funkcija $\zeta(s)$ yra aproksimuojama baigtine suma. Yra teisingas toks tvirtinimas.

5.2 teorema. [7]. Tegul $0 < \sigma_0 \leq \sigma < 2$ ir $x \geq \frac{|t|}{\tau}$. Tuomet

$$\zeta(s) = \sum_{m \leq x} \frac{1}{m^s} + \frac{x^{1-s}}{s-1} + O(x^{-\sigma}).$$

Konstanta simbolyje O priklauso tik nuo σ_0.

Atskiru atveju, kai $t = 0$ turėsime tokį įvertį.

5.3 teorema. Tegul $0 < \sigma_0 \leq \sigma < 2$. Tuomet visiems $y > 1$

$$\zeta(\sigma) = \sum_{m \le y} \frac{1}{m^\sigma} + \frac{y^{1-\sigma}}{\sigma - 1} + O(y^{-\sigma}).$$

Mums bus reikalinga sandaugos $\zeta(s)\zeta(s-a)$ išraiška.

5.4 teorema.[7]. Tegul $\sigma > max(1, Rea + 1)$. Tuomet

$$\zeta(s)\zeta(s-a) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sigma_a(m)}{m^s}.$$

Visos šio skyrelio formulės yra įrodytos [?] monografijosje.

Dabar gausime funkcijos $\sigma_{-\delta}(m)$ asimtotinę formulę.

5.5 teorema. Tegul $x > 1$ ir $\delta > 0$. Tuomet

$$\sum_{m \le x} \sigma_{-\delta}(m) = \frac{x^{1-\delta}\zeta(1-\delta)}{1-\delta} + x\zeta(1+\delta) + O(x^{\frac{1}{2}-\frac{\delta}{2}}).$$

Įrodymas. Iš funkcijos $\sigma_{-\delta}(m)$ apibrėžimo turime, kad

$$\begin{aligned} \sum_{m \le x} \sigma_{-\delta}(m) &= \sum_{mn \le x} \sum m^{-\delta} = \sum_{n \le \sqrt{x}} \sum_{m \le \sqrt{x}} m^{-\delta} \\ &+ \sum_{m \le \sqrt{x}} m^{-\delta} \sum_{\sqrt{x} < n \le x/m} 1 + \sum_{n \le \sqrt{x}} \sum_{\sqrt{x} < m \le x/m} m^{-\delta} \stackrel{def}{=} S_1 + S_2 + S_3. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Tegul $[u]$ yra skaičiaus u sveikoji dalis. Tuomet turime, kad

$$S_1 = [\sqrt{x}] \sum_{m \le \sqrt{x}} m^{-\delta}$$

ir

$$S_2 = \sum_{m \le \sqrt{x}} m^{-\delta} \big([\frac{x}{m}] - [\sqrt{x}] \big).$$

Vadinasi iš 5.3 teoremos gauname, kad

$$S_1 + S_2 = \sum_{m \le \sqrt{x}} m^{-\delta}\Big[\frac{x}{m}\Big] = x \sum_{m \le \sqrt{x}} \frac{1}{m^{1+\delta}} + B \sum_{m \le \sqrt{x}} m^{-\delta} \tag{5.2}$$
$$= x\Big(\zeta(1+\delta) - \frac{(-\sqrt{x})^{-\delta}}{\delta} + Bx^{-\frac{1}{2}-\frac{\delta}{2}}\Big) + Bx^{\frac{1}{2}-\frac{\delta}{2}}.$$

Kadangi su kuria nors teigiama konstanta A

$$\sum_{m \le x} m^{-\delta} = \frac{x^{1-\delta}}{1-\delta} + A + O(x^{-\delta}),$$

tai vėl iš 5.3 teoremos randame, kad

$$S_3 = \sum_{n \le \sqrt{x}} \Big(\Big(\frac{x}{n}\Big)^{1-\delta} \frac{1}{1-\delta} - (\sqrt{x})^{1-\delta} \frac{1}{1-\delta} + Bx^{-\delta} n^{\delta} + Bx^{-\frac{\delta}{2}}\Big)$$
$$= \frac{x^{1-\delta}}{1-\delta}\zeta(1-\delta) + \frac{x^{1-\frac{\delta}{2}}}{\delta} + Bx^{\frac{1}{2}-\frac{\delta}{2}}.$$

Iš čia ir (5.1), (5.2) gauname teoremos tvitinimą.

Svarbų vaidmenį funkcijos $\zeta(s)$ teorijoje vaidina šios funkcijos įverčiai, kai $|\, t \,| \to \infty$. Žinoma Lindeliofo (Lindelöf) hipotezė tvirtina, kad su kiekvienu $\varepsilon > 0$

$$\zeta\Big(\frac{1}{2} + it\Big) = O_{\varepsilon}\big(|\, t \,|^{\varepsilon}\big),$$

$|\, t \,| \ge t_0 > 0$. Mes naudosimės tokiais žinomais įverčiais.

5.6 teorema.[7]. Tegul $|\, t \,| \ge t_0 > 0$. Tuomet

$$\zeta(\sigma + it) = \begin{cases} O(|\, t \,|^{\frac{1}{2}+b} \log |\, t \,|), & kai\ -b \le \sigma \le 0, \\ O(|\, t \,|^{\frac{1}{2}} \log |\, t \,|), & kai\ \ 0 < \sigma \le 1, \\ O(\log |\, t \,|), & kai\ \ \sigma > 1. \end{cases}$$

6 Beselio funkcijos

Beselio funkcijos $J_\nu(z)$, $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$ yra apibrėžiamos tokiomis formulėmis

$$J_\nu(z) = (\frac{z}{2})^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(1-)^m(\frac{z}{2})^{2m}}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+\nu+1)},$$

$$I_\nu(z) = (\frac{z}{2})^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\frac{z}{2})^{2m}}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+\nu+1)}$$

ir

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin \nu\pi}.$$

Magistro darbe mes naudosime dar tokias funkcijas, susijusias su Beselio funkcijomis:

$$^{+}J_\nu(z,\delta) = (\frac{z}{2})^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(1-)^m(\frac{z}{2})^{2m}}{\Gamma(m+1+\delta)\Gamma(m+\nu+1)},$$

$$^{+}I_\nu(z,\delta) = (\frac{z}{2})^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\frac{z}{2})^{2m}}{\Gamma(m+1+\delta)\Gamma(m+\nu+1)},$$

$$\lambda_\nu(z,\delta) = \frac{1}{2}(\frac{z}{2})^{-\nu-\delta}(I_{\nu-\delta}(z) + J_{\nu-\delta}(z)) - \frac{1}{2}(\frac{z}{2})^{-\nu}(^{+}I_\nu(z,\delta) -^{+} J_\nu(z,\delta)).$$

Čia indeksas ν gali būti bet koks kompleksinis skaičius.

Dar apibrėšime Beselio funkciją $Y_m(z)$:

$$Y_m(z) = \frac{1}{\pi}(\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial \nu} - (-1)^m \frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial \nu})|_{\nu=m} .$$

Beselio funkcijoms galioja tokie įverčiai.

6.1 teorema. Tegul $z \to \infty$. Tuomet

$$J_\nu(z) = \frac{C_1(\nu)}{\sqrt{z}}\cos(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}) + O(z^{-\frac{3}{2}}),$$

$$J_{-\nu}(z) = \frac{C_2(\nu)}{\sqrt{z}} \cos(z + \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}) + O(z^{-\frac{3}{2}})$$

ir

$$Y_\nu(z) = \frac{C_3(\nu)}{\sqrt{z}} \sin(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}) + O(z^{-\frac{3}{2}}).$$

Čia $C_1(\nu)$, $C_2(\nu)$ ir $C_3(\nu)$ yra funkcijos, apibrėžtos visoms z ir ν reikšmėms, o konstantos simbolyje O nepriklauso nuo ν bet kurioje baigrtinėje ν-plokštumos srityje.

6.2 teorema. Teisingos lygybės

$$J'_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) - \frac{\nu}{2}(\frac{x}{2})^{-1} J_\nu(z),$$

$$I'_\nu(z) = I_{\nu-1}(z) - \frac{\nu}{2}(\frac{x}{2})^{-1} J_\nu(z).$$

Beselio funkcijų teorija yra plačiai išdėstyta [8] monografijoje.

7 Atvejis q>3-δ

Šiame skyrelyje įrodysime pagrindinę teoremą, kai $q > 3 - \delta$. Įrodymą pradėsime tokia lema. Tegul

$$f_q(s) = \frac{x^{s+q-1}}{\Gamma(s+\delta)\Gamma(s+q)\cos\frac{\pi s}{2}\cos\frac{\pi(s+1)}{2}},$$

$\delta < c < \frac{1}{2}$ ir

$$J_q = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-c-i\infty}^{-c+i\infty} f_q(s)ds. \tag{7.1}$$

7.1 lema. Tarkime, jog $q > 3 - \delta$ ir $x > 0$. Tuomet

$$J_q = \frac{2x^q}{\pi\sin\frac{\pi\delta}{2}}\lambda_q(2\sqrt{x}, \delta).$$

Įrodymas. Kadangi $\cos\frac{\pi s}{2} = 0$, kai $x = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}_0$, ir

$$\cos\frac{\pi(s+\delta)}{2} = 0,$$

kai $s = 2k + l - \delta$, $l \in \mathbb{N}_0$, tai funkcija $f_q(s)$ turi paprastus polius taškuose

$$s = 2k + 1, \ \ k \in \mathbb{N}_0$$

ir

$$s = 2l + 1 - \delta, \ \ l \in \mathbb{N}_0.$$

Tegul $L_1 = \{s \in D : \sigma = -c, \mid t \mid \leq R\}$ ir $L_2 = \{s \in D : s = -c + Re^{i\varphi}, \mid \varphi \mid \leq \frac{\pi}{2}\}$. Kadangi

$$\cos s = \frac{e^{is} + e^{-is}}{2},$$

tai iš 4.7 teoremos išplaukia, kad

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_2} f_q(s)ds = 0.$$

Todėl

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-c-i\infty}^{-c+i\infty} f_q(s)ds = - \int\limits_{L_1\cup L_2} f_q(s)ds.$$

Tegul $z = s-(2k+1) \to 0$. Tada pastebime, jog

$$\cos\frac{\pi s}{2} = \cos(\frac{(2k+1)\pi}{2} + \frac{\pi z}{2}) = (1)^{k-1}\sin\frac{\pi z}{2} = (-1)^{k-1}(1+o(1)),$$

ir panašiai, kai $\omega = s-(2l+1-\delta) \to 0$, tada

$$\cos\frac{\pi(s+\delta)}{2} = (-1)^{k-1}\frac{\pi\omega}{2}(1+o(1)).$$

Todėl, pritaikę reziduumų teoremą, iš (7.1) gauname, kad

$$\begin{aligned} J_q &= -\sum_{k=0}^{\infty} Res_{s=2k+1} f_q(s) - \sum_{k=0}^{\infty} Res_{s=2k+1-\delta} f_q(s) \\ &= -(-1)^k \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+q}}{\Gamma(2k+1+\delta)\Gamma(2k+q+1)\cos\frac{(2k+1+\delta)\pi}{2}} \\ &\quad -(-1)^k \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+q-\delta}}{\Gamma(2k+1)\Gamma(2k+q+1-\delta)\cos\frac{2k+1-\delta}{2}}. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Tačiau

$$\cos\frac{\pi(2k+1+\delta)}{2} = (-1)^{k-1}\frac{\sin\pi\delta}{2}$$

ir

$$\cos\frac{\pi(2k+1-\delta)}{2} = (-1)^{k}\frac{\sin\pi\delta}{2}.$$

Iš čia ir (7.2) turime, kad

$$
\begin{aligned}
J_g &= -\frac{2}{\pi \sin \frac{\pi\delta}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+\delta}}{\Gamma(2k+1+\delta)\Gamma(2k+q+1)} \\
&\quad + \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi\delta}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+q-\delta}}{\Gamma(2k+1)\Gamma(2k+q+1-\delta)}.
\end{aligned} \tag{7.3}
$$

Tačiau iš Beselio funkcijų $J_\nu(z)$, $I_\nu(z)$ ir jų modifikicijų ${}^+J_\nu(z)$, ${}^+I_q(z)$ apibrėžimų matome, kad

$$
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{x})^{4k-2\delta}}{\Gamma(2k+1+\delta)\Gamma(2k+q-\delta)} = \frac{1}{2}(\sqrt{x})^{-q-\delta}(J_{q-\delta}(2\sqrt{x}) + I_{q-\delta}(2\sqrt{x}))
$$

ir

$$
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{x})^{4q}}{\Gamma(2k+1+\delta)\Gamma(2k+q+1)} = \frac{1}{2}(\sqrt{x})^{-q-\delta}({}^+J_q(2\sqrt{x}) +^+ I_q(2\sqrt{x})).
$$

Iš čia ir (7.3) išplaukia lemos tvirtinimas.

7.2 lema. Tarkime, kad $q > 3 - \delta$. Tuomet yra teisingas 9.1 teoremos tvirtinimas.

Įrodymas. Remdamiesi 5.4 ir 4.8 teoremomis, galime parašyti, kad visiems $c > 1$

$$
D_{q-1}(x,\delta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\zeta(s)\zeta(s+\delta)\Gamma(s)x^{s+q-1}ds}{\Gamma(s+q)}. \tag{7.4}
$$

Tegul $\delta < b < \frac{1}{2}$. Tuomet iš 4.7 teoremos išplaukia įvertis

$$
\Gamma(s)\Gamma^{-1}(s+q) = B \mid t \mid^{-q}, \tag{7.5}
$$

kuris yra teisingas pakankamai dideliems $\mid t \mid$ juostoje $-b \leq \sigma \leq c$. Įvertis (7.5) kartu su 5.6 teorema leidžia įvertinti pointegralinę funkciją iš (7.4) formulės integrale gauname, kad su bet kuriuo $\varepsilon > 0$ pakankamai dideliems $\mid t \mid$ juostoje $b \leq \sigma \leq c$ yra teisingas įvertis

$$\frac{\zeta(s)\zeta(s+\delta)\Gamma(s)x^{s+q-1}}{\Gamma(s+q)} = O(|\ t\ |^{-1-\varepsilon}). \tag{7.6}$$

Kadangi funkcija $\zeta(s)$ taške $s=\varepsilon$ turi polių, o funkcija $\delta(s)$ taške $s=0$ turi polių, tai minėta funkcija taškuose $s=0$, $s=1$ ir $s=1-\delta$ turi polius. Todėl, pritaikę reziduumų teoremą, galime parašyti, kad

$$\begin{aligned} D_{q-1}(x,\delta) &= -\frac{x^{q-1}\zeta(\delta)}{2\Gamma(q)} + \frac{x^q\zeta(1+\delta)}{\Gamma(1+\delta)} + \frac{x^{q-\delta}\zeta(1-\delta)\Gamma(1-\delta)}{\Gamma(1+q-\delta)} \\ &+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-b-i\infty}^{-b+i\infty}\zeta(s)\zeta(s+\delta)\frac{\Gamma(s)x^{s+q-1}}{\Gamma(s+q)}ds. \end{aligned} \tag{7.7}$$

Iš 5.1 teoremos išplaukia, kai

$$\zeta(s) = \frac{(2\pi)^s}{2\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}}\zeta(1-s) = \mathcal{X}(s)\zeta(1-s).$$

Tai kartu su 5.4 teorema, kai $\sigma=-b$, duoda formulę

$$\zeta(s)\zeta(s+\delta) = \frac{(4\pi^2)^s(2\pi)^\delta}{4\Gamma(s)\Gamma(s+\delta)\cos\frac{\pi(s+\delta)}{2}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sigma_\delta(m)}{m^{1-s}}.$$

Iš čia, (7.6) ir 7.1 lemos gauname lemos tvirtinimą.

8 Atvejis q>$\frac{3}{2}+\delta$

Pradėsime nuo funkcijos $\lambda_q(z,\delta)$ asimtotikos.

8.1 lema. Tegul $z \to \infty$. Tuomet

$$\begin{aligned}\lambda_q(z,\delta) &= z^{-q-\delta-\frac{1}{2}}\sin\frac{\pi\delta}{2}(A_1(q,\delta)\cos(z-\frac{\pi(q-\delta)}{2}-\frac{\pi}{4})\\ &+A_2(q,\delta)\cos(z+\frac{\pi(q-\delta)}{2}-\frac{\pi}{4})+A_3(q,\delta)\sin(z-\frac{\pi(q-\delta)}{2}-\frac{\pi}{4}))\\ &+Bz^{-q-\delta-\frac{3}{2}}\sin\frac{\pi\delta}{2}+Bz^{-4}\sin\frac{\pi\delta}{2}.\end{aligned}$$

Čia dydžiai $A_j(q,\delta)$, $j=1,2,3$, yra apibrėžti visiems z ir q, o konstanta, įeinanti į O nepriklauso nuo q bet kurioje baigtinėje q-plokštumos dalyje.

Įrodymas. Tegul n yra didelis sveikas teigiamas skaičius ir

$$I(z) \overset{def}{=} -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-n+\frac{1}{2}-i\infty}^{-n+\frac{1}{2}+i\infty}\frac{(z/2)^{2s}ds}{\Gamma(s+1+\delta)\Gamma(s+q+1)\sin\pi s\sin\pi(s+\delta)}.$$

Iš funkcijų $\Gamma(s)$ ir $\sin s$ savybių turime, kad pointegralinė funkcija turi polius taškuose

$$s=k, \qquad k=0,1,2,...,$$

$$s=k-\delta, k=0,1,2,...,$$

$$s=-k,\begin{cases}k=1,2,...,n-1, jei\ \ q\in\mathbb{Z},\\ k=1,2,...,q, jei\ \ q\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

Iš čia, reziduumų teoremos ir 4.7 teoremos turime, kad

$$\begin{aligned}I(z) &= \frac{1}{\pi\sin\pi\delta}\Bigg((\frac{z}{2})^{-q}+I_q(z,\delta)-(\frac{z}{2})^{-q-\delta}I_{q-\delta}(z)\\ &+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(z/2)^{-2k}}{\Gamma(-k+1+\delta)\Gamma(-k+q+1)}\Bigg). \qquad (8.1)\end{aligned}$$

Iš kitos pusės, tiesiogiai iš $I_q(z)$ apibrėžimo, kai $z\to\infty$, gauname įvertį

$$I(z) = Bz^{-2n}.$$

Iš čia, (8.1) ir 4.4 teoremos randame, kad

$$\begin{aligned}(\frac{z}{2})^{-q} + I_q(z,\delta) - (\frac{z}{2})^{-q-\delta} I_{q-\delta}(z) &= \frac{\sin\pi\delta}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(z/2)^{-2k}(-1)^k\Gamma(k-\delta)}{\Gamma(-k+q+1)} \\ &\quad + Bz^{-2n}\sin\pi\delta. \qquad (8.2)\end{aligned}$$

Jei q yra sveikas teigiamas skaičius, tai (8.2) formulė yra tiksli

$$\begin{aligned}&\sum_{k=q}^{\infty}\frac{(z/2)^{2k-2q}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-q+1+\delta)} - (\frac{z}{2})^{-q-\delta} I_{q-\delta}(z) \\ &= (\frac{z}{2})^{-q-\delta} I_{-q+\delta}(z) - (\frac{z}{2})^{-q-\delta} I_{q-\delta}(z) - (\frac{z}{2})^{-2q}\sum_{k=0}^{q-1}\frac{(z/2)^{2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-q+1-\delta)}.\end{aligned}$$

Atskiru atveju, jei $q = 1$, tai

$$\begin{aligned}(\frac{z}{2})^{-1} + I_1(z,\delta) - (\frac{z}{2})^{-1-\delta} I_{1-\delta}(z) &= (\frac{z}{2})^{-1-\delta}(I_{-1+\delta}(z) - I_{1-\delta}(z)) - (\frac{z}{2})^{-2}\frac{1}{\Gamma(\delta)} \\ &= \frac{2}{\pi}\sin\pi\delta K_{1-\delta}(z)(\frac{z}{2})^{-1-\delta} \\ &\quad -(\frac{z}{2})^{-2}\frac{1}{\Gamma(\delta)}. \qquad (8.3)\end{aligned}$$

Toliau nagrinėsime integralą

$$J(z) \stackrel{def}{=} -\frac{1}{2\pi i}\int_{-n+\frac{1}{2}-i\infty}^{-n+\frac{1}{2}+i\infty}\frac{(z/2)^{2s-2}ds}{\Gamma(s+\delta)\Gamma(q+s)\sin(\pi+s)\sin\pi s\sin\pi(s+\delta)}.$$

Iš pradžių tegul skaičiai q ir $q-\delta$ nėra sveiki. Tuomet integralas $J(s)$ yra lygus pointegralinės funkcijos reziduumų taškuose

$$s = k, \quad k = 1, 2, ...,$$

$$s = k - \delta, \ \ k = 1, 2, ...,$$

$$s = k - q, \ \ k = 1, 2, ...,$$

$$s = -k, \ \ k = 0, 1, ..., n - 1$$

sumai. Todėl analogiškai integralo $I(z)$ atveju randame, kad

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{\pi \sin \pi q \sin \pi\delta}(\frac{z}{2})^{-q} + J_q(z,\delta) + \frac{1}{\pi \sin \pi\delta \sin \pi(q-\delta)}(\frac{z}{1})^{-q-\delta} J_{q-\delta}(z) \\
&-\frac{1}{\pi \sin \pi q \sin \pi(q-\delta)}(\frac{z}{2})^{-q-\delta} J_{-q-\delta}(z) \\
&+\frac{1}{\pi \sin \pi\delta \sin \pi q}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(z/2)^{2k-2}(-1)^k}{\Gamma(-k+\delta)\Gamma(-k+q)} = Bz^{-2n-2}.
\end{aligned}
$$

Iš čia išplaukia, kad

$$
\begin{aligned}
&(\frac{z}{2})^{-q} + J_q(z,\delta) - (\frac{z}{2})^{-q-\delta} J_{q-\delta}(z) \\
&= (\frac{\sin \pi q}{\sin \pi(q-\delta)} - 1)(\frac{z}{2})^{-q-\delta} J_{q-\delta}(z) - \frac{\sin \pi\delta}{\sin \pi(q-\delta)}(\frac{z}{2})^{-q-\delta} J_{-q-\delta}(z) \\
&+\frac{\sin \pi\delta}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{(z/2)^{-2k}\Gamma(k-\delta)}{\Gamma(-k+q+1)} + \frac{B \sin \pi\delta \mid \sin \pi q \mid}{z^{2n+2}}. \qquad (8.4)
\end{aligned}
$$

Aišku, jog (8.4) formulė lieka teisinga ir kai q yra sveikas skaičius. Tuomet nėra liekamojo nario.

Jeigu $q - \delta$ yra sveikas skaičius, tai, naudodami Beselio funkcijos $Y_m(z)$ apibrėžimą, (8.4) lygybę galime užrašyti taip:

$$
\begin{aligned}
&(\frac{z}{2})^{-q} + J(z,\delta) - (\frac{z}{2})^{-q-\delta} J_{q-\delta}(z) \\
&= (\frac{z}{2})^{-q-\delta}(\cos \pi\delta - 1) J_{q-\delta}(z) + (\frac{z}{2})^{-q-\delta} Y_{q-\delta}(z) \\
&+\frac{\sin \pi\delta}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{(z/2)^{-2k}\Gamma(k-\delta)}{\Gamma(-k+q+1)} + \frac{B \sin \pi\delta \mid \sin \pi q \mid}{z^{2n+2}}. \qquad (8.5)
\end{aligned}
$$

Pasinaudoję 6.1 teoremos įverčiu, iš (8.5) ir (8.2) gauname lemos tvirtinimą.

8.2 lema. Tarkime, kad $q > \frac{3}{2} + \delta$. Tuomet yra teisingas 9.1 teoremos tvirtinimas.

Įrodymas. Kai $q > \frac{3}{2} + \delta$, iš 8.1 lemos turime, kad eilutė, įeinanti į $D_{q-1}(x, \delta)$ išraišką 9.1 teoremoje, konverguoja absoliučiai ir tolygiai atžvilgiu x kiekviename uždarame intervale, kuriam nepriklauso 0. Be to, fiksuotam x konvergavimas yra tolygus q atžvilgiu, kai $Req \geq \frac{3}{2}+\delta+\varepsilon$ su kiekvienu $\varepsilon > 0$. Todėl 9.1 teoremos lygybės abi pusės yra analizinės funkcijos pusplokštumėje $Req > \frac{3}{2} + \delta$. Taigi, lemos tvirtinimas išplaukia iš 7.2 lemos ir analizinio pratęsimo.

9 Pagrindinė teorema

Šiame skyriuje pilnai įrodysime 9.1 teoremą.

9.1 teorema. Tegul $x > 0$ nėra sveikasis skaičius, o $q > \frac{1}{2} + \delta$. Tuomet yra teisinga tapatybė

$$\begin{aligned} D_{q-1}(x,\delta) &= -\frac{1}{2}\zeta(\delta)\frac{x^{q-1}}{\Gamma(q)} + \frac{x^q\zeta(1+\delta)}{\Gamma(1+\delta)} + \frac{x^{q-\delta}\zeta(1-\delta)\Gamma(1-\delta)}{\Gamma(1+q-\delta)} \\ &\quad + \frac{x^q(2\pi)^{1+\delta}}{\sin(\frac{\pi\delta}{2})}\sum_{m=1}^{\infty}\sigma_\delta(m)\lambda_q(4\pi\sqrt{mx},\delta). \end{aligned}$$

9.1 teoremos įrodymui mums dar reikės funkcijos $\lambda_q(z,\delta)$ išreiškimų.

9.2 lema. Teisinga lygybė

$$\lambda'_\nu(z,\delta)\nu(\frac{z}{2})^{-1}\lambda_\nu(z,\delta) + (\frac{z}{2})^{-1}\lambda_{\nu-1}(z,\delta).$$

Įrodymas. Iš 6.2 teoremos ir funkcijų ${}^+J_\nu(z,\delta)$ ir $T_\nu(z,\delta)$ apibrėžimo randame, kad

$$^+J'_\nu(z,\delta) =^+ J_{\nu-1}(z,\delta) - \frac{\nu}{2}\big(\frac{x}{2}\big)^{-1+}J_\nu(z,\delta), \tag{9.1}$$

$$^+I'_\nu(z,\delta) =^+ I_{\nu-1}(z,\delta) - \frac{\nu}{2}\big(\frac{x}{2}\big)^{-1+}I_\nu(z,\delta). \tag{9.2}$$

Todėl lemos tvirtinimas yra 6.2 teoremos ir (9.1), (9.2) lygybių išvada.

9.3 lema. Teisinga lygybė

$$\lambda''_\nu(z,\delta) = (\frac{\nu}{2}+\nu^2)(\frac{z}{2})^{-2}\lambda_\nu(z,\delta) + (\frac{1}{2}-2\nu)(\frac{z}{2})^{-2}\lambda_{\nu-1}(z,\delta) + (\frac{z}{2})^{-2}\lambda_{\nu-2}(z,\delta).$$

Įrodymas. Lemos tvirtinimas gaunamas diferencijuojant 7.2 lemos lygybę.

9.1 teoremos įrodymas. Tegul

$$r_0(x) = \triangle_{-\delta}(x)$$

$$r_1(x) = \int\limits_0^x r_0(t)dt = \sum_{m\leq x}(x-m)\sigma^{-\delta}(m) - \frac{x^2}{2}\zeta(1+\delta) - \frac{x^{2-\delta}\zeta(1-\delta)}{(r-\delta)(1-\delta)} + \frac{x}{2}\zeta(\delta).$$

Imame sveikus teigiamus skaičius M ir N, $M < N$, ir funkciją $f(x)$, kuri intervale $[M, N]$ turi tolydžią antrą išvestinę. Tuomet

$$\begin{aligned}
\sum_{m=M+1}^{N} f(m)\sigma_{-\delta}(m) &= \int\limits_M^M f(t)dD_0(t,\delta) \\
&= \int\limits_M^N f(t)dr_0(t) + \int\limits_M^M f(t)(\zeta(1+\delta) + t^{-\delta}\zeta(1-\delta))dt \\
&= f(t)r_0(t)\mid_M^N - f'(t)r_1(t)\mid_M^N + \int\limits_M^N f''(t)r_1(t)dt \\
&\quad + \int\limits_M^N f(t)(\zeta(1+\delta) + t^{-\delta}\zeta(1-\delta))dt. \qquad (9.3)
\end{aligned}$$

Kadangi $0 < \delta < \frac{1}{2}$, tai iš 5.5 teoremos išplaukia įvertis

$$r_0(x) = O(x^{\frac{1}{2}-\frac{\delta}{2}}), \ \ x \to \infty. \qquad (9.4)$$

Pritaikę 8.2 lemą su $q = 2$ ir 8.1 lemą, gauname įvertį

$$r_1(x) = O(x^{\frac{3}{4}-\frac{\delta}{2}}), \ \ x \to \infty. \qquad (9.5)$$

Dabar tegul $f(t) = t^{\delta}\lambda_q(4\pi\sqrt{xt}, \sigma)$. Tada iš (9.4) ir (9.5) įverčių ir 9.2 ir 8.1 lemų pakankamai dideliems M ir $x \in [x_0, X_0]$, $x_0 > 0$ ir X_0 yra fiksuoti skaičiai, randame įverčius

$$(f(t)r_0(t) - f'(t)r_1(t)) \mid_M^N = BM^{-\frac{q}{2}+\frac{1}{4}} \sin \frac{\pi\delta}{2}, \tag{9.6}$$

ir

$$\int\limits_M^N f(t)(\zeta(1+\delta) + t^{-\delta}\zeta(1-\delta))dt = BM^{-\frac{q}{2}+\frac{\delta}{2}+\frac{1}{4}}. \tag{9.7}$$

Iš 8.2 lemos išplaukia, kad

$$r_1(t) = \frac{t^2(2\pi)^{1+\delta}}{\sin \frac{\pi\delta}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_b(m)\lambda_2(4\pi\sqrt{mt}, \delta).$$

Lema 8.1 parodo, jog pastaroji eilutė konverguoja absoliučiai ir tolygiai atžvilgiu t, $t \in [M, N]$. Todėl

$$\int\limits_M^N r_1(t)f''(t)dt = \frac{(2\pi)^{1+b}}{\sin \frac{\pi\delta}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_b(m) \int\limits_M^N t^2\lambda_2(4\pi\sqrt{mt}, \delta)dt \tag{9.8}$$

Iš 9.2, 9.3 ir 8.1 lemų randame, kad

$$\begin{aligned} f''(t) \quad &= \quad x^{-\frac{q}{2}-\frac{\delta}{2}+\frac{3}{4}} t^{-\frac{q}{2}+\frac{\delta}{2}-\frac{5}{4}} \sin \frac{\pi\delta}{2} (C_1(t,x,q,\delta) \times \cos(4\pi\sqrt{tx} - \frac{\pi(q-2-\delta)}{2} - \frac{\pi}{4}) \\ &+C_2(t,x,q,\delta)\cos(4\pi\sqrt{tx} + \frac{\pi(q-2-\delta)}{2} - \frac{\pi}{4}) \\ &+C_3(t,x,q,\delta)\sin(4\pi\sqrt{tx} - \frac{\pi(q-2-\delta)}{2} - \frac{\pi}{4}) \\ &+Bx^{-\frac{q}{2}-\frac{\delta}{2}+\frac{1}{4}} t^{-\frac{q}{2}+\frac{\delta}{2}-\frac{7}{4}} \sin \frac{\pi\delta}{2} + Bx^{-2}t^{\delta-4} \sin \frac{\pi\delta}{2}. \end{aligned}$$

Čia dydžiai $C_j(t,x,q,\delta)$, $j = 1,2,3$, yra aprėžti visiems t, x ir q, o konstanta simbolyje O nepriklauso nuo q kiekvienoje baigtinėje q-plokštumos dalyje. Kadangi x nėra sveikas, o $0 < \delta < \frac{1}{2}$, iš (9.3), (9.6)-(9.8) bei 8.1 lemos išplaukia, kad visiems $q > \frac{1}{2} + \delta$ eilutė

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sigma_\delta(m)\lambda)q(4\pi\sqrt{mx}, \delta)$$

konverguoja tolygiai atžvilgiu $x \in [x_0, X_0]$. Be to, fiksuotam x konvergavimas yra tolygus atžvilgiu q bet kurioje baigtinėje pusplokštumėje $Req \geq \frac{1}{2}+\delta+\varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Iš čia, 8.2 lemos ir analizinio pratęsimo gauname teoremos tvitinimą.

10 Išvados

Tegul

$$\sigma_{-\delta}(m) = \sum_{d|m} d^{-\delta},$$

$\Gamma(s)$ yra Oilerio funkcija, $q > 0$, $0 < \delta < \frac{1}{2}$ ir

$$D_{q-1}(x,\delta) = \frac{1}{\Gamma(q)} \sum_{m \le x} (x-m)^{q-1} \sigma_{-\delta}(m)$$

yra aritmetinės funkcijos $\sigma_{-\delta}(m)$ Ryso vidurkis. Darbe nustatyta, kad vidurkiui $D_{q-1}(x,\delta)$ yra teisinga formulė

$$\begin{aligned} D_{q-1}(x,\delta) &= -\frac{1}{2}\zeta(\delta)\frac{x^{q-1}}{\Gamma(q)} + \frac{x^q \zeta(1+\delta)}{\Gamma(1+\delta)} + \frac{x^{q-\delta}\zeta(1-\delta)\Gamma(1-\delta)}{\Gamma(1+q-\delta)} \\ &\quad + \frac{x^q (2\pi)^{1+\delta}}{\sin(\frac{\pi\delta}{2})} \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_\delta(m) \lambda_q(4\pi\sqrt{mx}, \delta). \end{aligned}$$

Čia $\zeta(s)$ yra Rymano dzeta funkcija, o $\lambda_q(z,\delta)$ yra Beselio funkcijų $I_\nu(z)$, $J_{\nu-\delta}(z)$ ir modifikuotų Beselio funkcijų ${}^+I_\nu(z)$, ${}^+J_{\nu-\delta}(z)$ kombinacija:

$$\lambda_\nu(z,\delta) = \frac{1}{2}(\frac{z}{2})^{-\nu-\delta}(I_{\nu-\delta}(z) + J_{\nu-\delta}(z)) - \frac{1}{2}(\frac{z}{2})^{-\nu}({}^+I_\nu(z,\delta) -{}^+ J_\nu(z,\delta)).$$

11 Literatūra

1. A. L. Dixon and W. L. Ferrar, Lattice-point sumation formulae, Quart. J. Math. (Oxford), 2, 31-54 (1931).

2. A. Ivič, The Riemann Zeta-Function, John Wiley & Sons, New York (1985).

3. A. Laurinčikas, R. Macaitienė, Įvadas į Dirichlė eilučių teoriją, Šiaulių universiteto leidykla, 2008.

4. A. Oppenheim, Some identities in the theory of numbers, Proc. London Math. Soc., 26,(2),295-350 (1927).

5. K. Prachar, Primzahlverteilung, Springer-Verlag, Berlin-Gttingen-Heidelberg (1957).

6. E. K. Tičmarš, Teorija dzeta funkcij Rymana, Moskva, Nauka, 1953.

7. E. K. Tičmarš, Teorija funkcij, Moskva, Nauka, 1980.

8. G. N. Watson, A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge Univerity Press, Cambridge (1944).

12 Summary

The Riesz mean of the generalized divisor function

$$\sigma_{-\delta}(m) = \sum_{d|m} d^{-\delta},$$

denote the generalized divisor function, $\Gamma(s)$ be the Euler gamma - function, $q > 0$, $0 < \delta < \frac{1}{2}$, and let

$$D_{q-1}(x,\delta) = \frac{1}{\Gamma(q)} \sum_{m \le x} (x-m)^{q-1} \sigma_{-\delta}(m)$$

be the Riesz mean of the function $\sigma_{-\delta}(m)$. It is obtained put for $D_{q-1}(x,\delta)$ the formula

$$\begin{aligned} D_{q-1}(x,\delta) &= -\frac{1}{2}\zeta(\delta)\frac{x^{q-1}}{\Gamma(q)} + \frac{x^q\zeta(1+\delta)}{\Gamma(1+\delta)} + \frac{x^{q-\delta}\zeta(1-\delta)\Gamma(1-\delta)}{\Gamma(1+q-\delta)} \\ &\quad + \frac{x^q(2\pi)^{1+\delta}}{\sin(\frac{\pi\delta}{2})} \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_\delta(m)\lambda_q(4\pi\sqrt{mx},\delta). \end{aligned}$$

is true. Here $\zeta(s)$ is the Rieman zeta - function, while $\lambda_q(z,\delta)$ is a combination of the Bessel functions $I_\nu(z)$, $J_{\nu-\delta}(z)$ and the modified Bessel functions $^+I_\nu(z)$, $^+J_{\nu-\delta}(z)$:

$$\lambda_\nu(z,\delta) = \frac{1}{2}(\frac{z}{2})^{-\nu-\delta}(I_{\nu-\delta}(z) + J_{\nu-\delta}(z)) - \frac{1}{2}(\frac{z}{2})^{-\nu}(^+I_\nu(z,\delta) -^+ J_\nu(z,\delta)).$$