VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS METODIKOS KATEDRA

Jurgita Zenevičiūtė

IŠPLĖSTINĖS FORMOS LOŠIMAI

Magistro baigiamasis darbas

Vadovas
doc. dr. Antanas Apynis

Leidžiu ginti: ______________________
(Vadovo parašas)

VILNIUS 2010

Turinys

Įvadas

„Didelius ar mažus pasirinkimus tenka daryti kiekvieną minutę. Tokia gyvenimo ironija – mes keliaujame tik į vieną pusę. Negalime sugrįžti, negalime lyginti, bandydami vieną kelią po kito. Todėl gyvenime tenka pasikliauti tik išmintimi.” (Deng Ming-Dao „365 Dao”)

Lošimus galima užrašyti išplėstine forma (pavaizduojant lošimo medžiu), kuri daugeliu atvejų palengvina problemos analizę.

Darbo tema – išplėstinės formos lošimai.

Pagrindinis darbo tikslas apžvelgti išplėstinės formos lošimus, jų taikymą. Tikslui įvykdyti buvo suformuluoti tokie uždaviniai:

1) Išanalizuoti sąvokas, iliustruojant pavyzdžiais.
2) Išnagrinėti išplėstinės formos lošimų Nešo pusiausvyrą.
3) Išanalizuoti žaidimus, remiantis išplėstinės formos lošimais.
4) Pateikti išplėstinės formos lošimų taikymo ekonomikoje pavyzdžių.

Darbą sudaro 5 skyriai: lošimo samprata, išplėstinės formos lošimai, Nešo pusiausvyra, išplėstinės formos lošimų pavyzdžiai, taikymo uždaviniai. Pateikiami du priedai.

Pirmajame skyriuje supažindinama su lošimo samprata, pagrindinėmis jo sąvokomis, lošimų klasifikacija. Antrajame skyriuje pateikiama pagrindinės sąvokos, susijusios su lošimo medžiu ir išplėstinės formos lošimais. Trečiajame skyriuje apibrėžiama, kas yra Nešo pusiausvyra ir kaip ji randama išplėstinės formos lošimuose. Ketvirtajame skyriuje analizuojami žaidimai „Kryžiukai – nuliukai“, „Mini šaškės“ ir „Akmuo, žirklės, popierius“ išplėstinės formos lošimų požiūriu. Penktajame skyriuje supažindinama su išplėstinės formos lošimų taikymais ekonomikoje.

Rašydama darbą rėmiausi lietuvių ir užsienio autorių (J. Bergin, M. J. Osborne, H. Peters, K. Vrieze, C. Montet, D. Serra, E. Vilko) parašytomis knygomis, taip pat naudojausi interneto svetainėse publikuojamais straipsniais šia tema.

1. Lošimo samprata

Konfliktai ir kompromisai, konkurencija ir kooperacija, grasinimai ir papirkinėjimas ... Yra daug žodžių, apibūdinančių žmonių tarpusavio santykius, susiklostančius racionalioje veikloje. Siekdami savo tikslų, žmonės, dažnai net negalvodami apie tai, savo veiksmais padeda arba trukdo kitiems pasiekti jų tikslus.

Tokiais atvejais įprasta daug ką supaprastinti ir vietoj pačių reiškinių nagrinėti jų modelius. Žmonių racionalios sąveikos matematiniai modeliai vadinami lošimais.

Lošime reikia apibrėžti, kas jame dalyvauja, ką kiekvienas dalyvis gali daryti ir ko jis siekia. Lošimo dalyvis vadinamas lošėju. Lošėjas gali būti asmuo, ūkinė, politinė ar kokia organizacija, valstybė. Lošėjams priskiriama vieningi tikslai ir sugebėjimai jų laikytis. Lošėjų aibę žymėsime $N = \{1,2,...,n\}$.

Ką lošėjas gali veikti lošime, apibrėžia jo alternatyvų aibė, kuri vadinama strategijų aibe. Lošėjo i strategijų aibę žymėsime X_i, o jos elementus, vadinamus strategijomis – x_i. Strategijomis yra vadinami galimi lošėjo veiksmai. Kokią strategiją pasirinkti, priklauso nuo dviejų dalykų: kaip strategija veikia lošimo eigą, arba kokios bus lošimo baigmės, naudojant tą strategiją, ir kaip lošėjas tas baigmes vertina. Pažymėkime $S = \{s\}$ visų galimų lošimo baigmių aibę. Kiekvienam lošėjui i ir jo strategijai x_i pažymėsime $S(x_i)$ aibę tų baigmių, kurios yra galimos, kai lošėjas i naudoja strategiją x_i. Strategija x_i negarantuoja konkrečiai nė vienos baigmės iš $S(x_i)$. Ji garantuoja, kad lošimo baigmė nebus iš aibės $S \setminus S(x_i)$. Baigmė priklauso ir nuo kitų lošėjų strategijų. Naudingumo funkcija $f_i(s)$ vadinama i – ojo lošėjo išlošio funkcija.

Lošėjų grupė, kuri bendrai renkasi strategiją ir turi bendrus tikslus vadinama koalicija. Koaliciją žymėsime K $(K \subset N)$, koalicijų aibę - $\mathcal{K}$; koalicija gali susidėti ir iš vieno lošėjo. Koalicijos K išlošio funkciją žymėsime $f_K(s)$.

Lošimas yra rinkinys

$$\Gamma = \left\langle \mathcal{K}, S, \{X_K\}_{K\in\mathcal{K}}, \{S(x_K)\}_{x_K\in X_K, K\in\mathcal{K}}, \{f_i\}_{i\in N} \right\rangle; \quad (2.1)$$

čia

$\mathcal{K}$ - leistinoji koalicijų aibė,

S – lošimo baigmių aibė,

X_K - koalicijos K strategijų aibė,

$S(x_K) \subset S$ - galimų lošimo baigmių aibė, kai koalicija K naudoja strategiją x_K,

$f_K(s)$ - koalicijos K išlošio funkcija.

Kiekvienas lošėjas žino lošimo taisykles (žino visą (2.1) rinkinį). Koalicijos sudaromos prieš lošimą arba lošiant. Kiekviena koalicija $K \in$ gali susidaryti, bet negali susidaryti kartu dvi susikertančios koalicijos, t. y. tokios, kurios turi bendrų lošėjų. Koalicija pasirenka tik vieną strategiją.

Lošimas laikomas baigtu, kai lošėjai susiskirsto į koalicijas ir kiekviena koalicija pasirenka strategiją. Koalicine struktūra vadinamas bet kuris aibės N skaidinys, t. y. sistema P nesusikertančių aibės N poaibių, kurių sąjunga yra visa aibė N. Pora (P, x_p) vadinama lošimo realizacija (čia P - koalicinė struktūra, o $x_p = (x_K)_{K \in}$). Lošimas yra pasibaigęs, kai žinoma jo realizacija. Kiekvieną realizaciją atitinka tam tikra baigmių aibė:

$$S(x_p) = \bigcap_{K \in} S(x_K).$$

Lošimas bus visiškai apibrėžtas, kai kiekvienai koalicinei struktūrai P ir kiekvienam strategijų rinkiniui x_P lošimo baigmė bus vienintelė, t. y. jei aibė $S(x_p)$ susidės iš vieno elemento. Priešingu atveju ne viskas priklausys nuo lošėjų; kitaip sakant, pašaliniai veiksniai turės įtakos lošimo baigčiai.

Lošėjai ir koalicijos neturi jokių kitų interesų, tik išlošti. Lošėjai skiriasi vienas nuo kito tik tiek, kiek skiriasi jų strategijos ir išlošiai, o lošimo baigmės – kaip jas vertina lošėjai.

Lošėjų su priešingais interesais lošimas vadinamas antagonistiniu lošimu. Kai kiekvienas lošėjas gali naudoti tik baigtinį strategijų skaičių, tai lošimas vadinamas baigtiniu. Baigtinis antagonistinis lošimas vadinamas matriciniu. Lošimas, kuriame nėra koalicijų, vadinamas nekoaliciniu. Jei lošime susidaro viena koalicija, tai lošimas vadinamas nestrateginiu. Nestrateginių lošimų rūšis yra kooperatinis lošimas (ieškoma bendro išlošio dalybų). Pagal strategijas lošimai skirstomi į normaliosios formos ir išplėstinės formos lošimus.

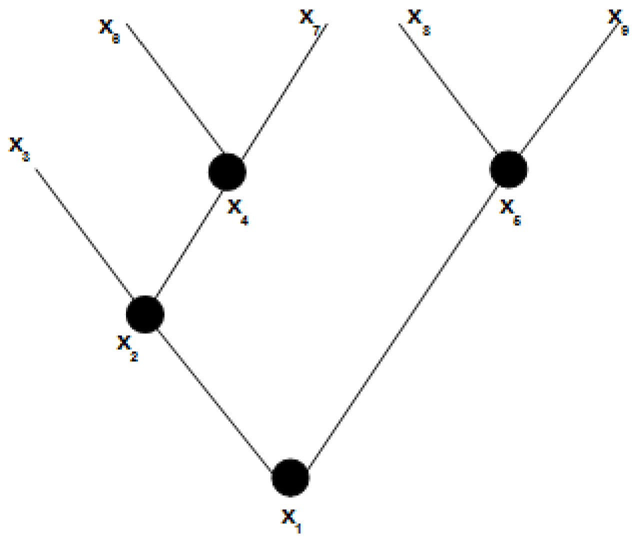
Taikomąją lošimų teorijos reikšmę lemia jos svarba ekonomikai ir kitiems socialiniams mokslams. Lošimų teorija naudojamasi karo, tedchnikos, sporto srityse.

2. Išplėstinės formos lošimai

Išplėstinės formos lošimai dažniausia vaizduojami lošimo medžiais. Jungusis grafas, neturintis ciklų yra vadinamas medžiu. Jei grafas yra medis, tai bet kurias dvi jo viršūnes jungia tik vienas kelias. Ir atvirkščiai, grafas, kurio bet kurias dvi viršūnes jungia tik vienas kelias, yra medis. Visos medžio briaunos yra tiltai. Ir atvirkščiai, jungusis grafas, kurio visos briaunos – tiltai, yra medis. N viršūnių medis turi $N -$ briauną. Jungusis N viršūnių ir $N -$ briaunos grafas yra medis.

Lošimo medis yra baigtinis grafas be kilpų, turintis pradinę viršūnę (šaknį). Baigtinį grafą sudaro baigtinės viršūnių $X = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ ir briaunų aibės. Briauna yra dviejų skirtingų viršūnių (x_i, x_j), čia $x_i \neq x_j$ porų. Lošimo medis turi N viršūnių ir $N-1$ briauną. Lošimo medis turi pradinę viršūnę (arba šaknį). Keliu yra vadinama briaunų seka $((x_1, x_2), (x_2, x_3), \ldots, (x_{T-1}, x_T))$. Viršūnės skirstomos į tarpines (sprendimų) ir galines lošimo medžio viršūnes. Galinės viršūnės sudaro galinių viršūnių aibę T. Galinė viršūnė, tai yra tokia viršūnė, kai egzistuoja kelias $((x_0, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{t-1}, x_t))$ ir ji yra galinė.

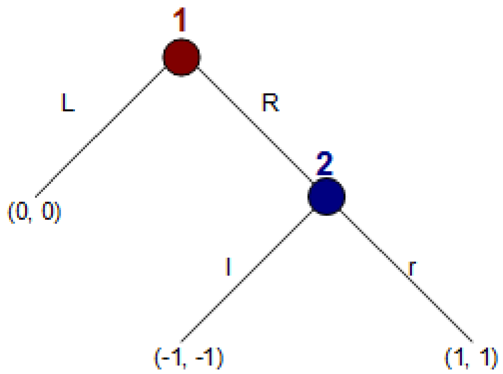
Panagrinėsime lošimo medį, pavaizduotą 2.1 paveiksle.



2.1 pav. Lošimo medis

Viršūnių aibė yra $X = \{x_1, \ldots, x_9\}$; lošimo medį sudaro 8 briaunos (x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_4, x_6), (x_4, x_7), (x_1, x_5), (x_5, x_6), (x_5, x_9). Taigi, šį lošimo medį sudaro 9 viršūnės ir 8 briaunos (galioja savybė, jog lošimo medis turi N viršūnių ir $N-1$ briauną). Pradinė viršūnė, arba šaknis, yra x_1. Galinės viršūnės yra x_3, x_6, x_7, x_8 ir x_9. Tarpinės viršūnės yra x_2, x_4 ir x_5.

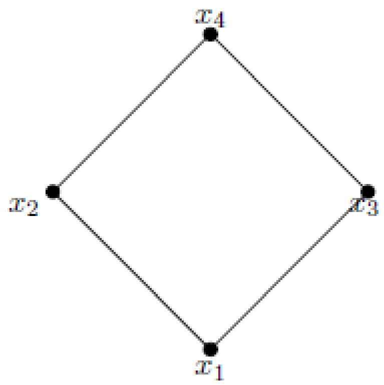
Nagrinėkime kitą lošimo medį, pavaizduotą 2.2 paveiksle. Medžio galinės viršūnės nusako lošėjų išlošius, kairysis skaičius nusako pirmojo lošėjo išlošį, o dešinysis – antrojo lošėjo.



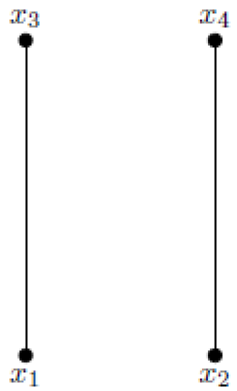
2.2 pav. Lošimo medis

Matome, kad lošėjų aibę N sudaro du lošėjai ($N = \{1,2\}$). Jeigu pirmasis lošėjas pasirenka strategiją L, tai lošimas baigiamas ir abu lošėjai nieko negauna (gauna po 0). Jeigu pirmasis lošėjas pasirenka strategiją R, tai antrasis lošėjas turi pasirinkti strategiją l arba r. Jeigu antrasis lošėjas pasirenka strategiją l, tai abu lošėjai pralaimi po 1 (gauna po -1), o jeigu r, tai abu išlošia po 1.

Medžiai, pavaizduoti 2.3 ir 2.4 paveiksluose nėra lošimo medžiai, nes lošimo medis turi turėti pradinę viršūnę ir negali turėti kilpų.



2.3 pav. Nėra lošimo medis



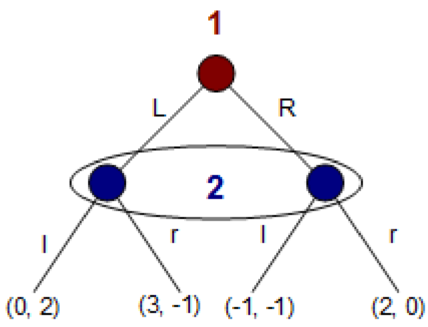
2.4 pav. Nėra lošimo medis

Iš kiekvienos viršūnės iki pradinės viršūnės egzistuoja vienintelis kelias. Baigtinėje viršūnių aibėje X galima apibrėžti pirmtako funkciją p :

$$X \to X \cup \{\varnothing\}.$$

Tai funkcija, kuri nusako prieš ją esančią viršūnę. Pavyzdžiui, pagal 2.1 paveikslą, $p(x_2) = x_1$, $p(x_3) = x_2$, $p(x_7) = x_4$ ir t. t. Lošimo medis turi tik vieną pradinę viršūnę x_0. Viršūnė $x_0 \in X$ turi būti tokia, kad $p(x_0) = \varnothing$. Viršūnė x_t yra galinė viršūnė, jei nėra kitos viršūnės $y \in X$ su kuria $p(y) = x_t$.

Viršūnės, kuriose atliekami tam tikri sprendimai, yra vadinamos sprendimų (arba tarpinėmis) viršūnėmis. Iš viršūnės išeinančios atkarpos yra vadinamos alternatyvomis. Darydamas ėjimą, lošėjas patenka į sprendimų aibę. Tos sprendimų aibės yra vadinamos informacinėmis aibėmis. Viršūnės x informacinę aibę žymėsime $H(x)$. Nagrinėkime lošimą, pavaizduotą 2.5 paveiksle.



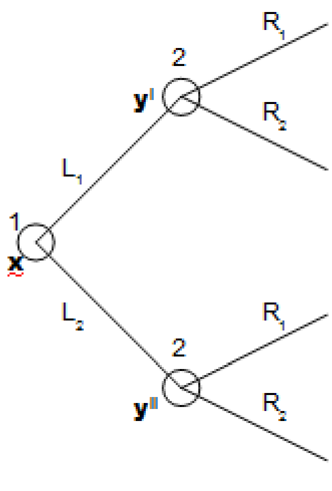
2.5 pav. Lošimo medis

Pirmasis lošėjas turi pasirinkti L ar R. Tada antrasis lošėjas, nežinodamas, kokį pasirinkimą atliko pirmasis lošėjas, pasirenka l ar r. Antrasis lošėjas turi pasirinkti, nežinodamas priešininko pasirinkimo. Todėl antrojo lošėjo sprendimų viršūnės yra sujungiamos į vieną informacinę aibę. Viršūnės, priklausančios tai pačiai informacinei aibei yra sujungiamos neištisine linija arba apvedamos elipse.

Alternatyvas, pasiekiamas viršūnėje x, žymėsime $C(x)$. Jei x yra galinė viršūnė, tai $C(x) = \varnothing$. Jeigu dvi viršūnės x ir x' yra toje pačioje informacinėje aibėje, t. y. $H(x) = H(x')$, ir alternatyvos yra pasiekiamos viršūnėse x ir x', tai $C(x) = C(x')$.

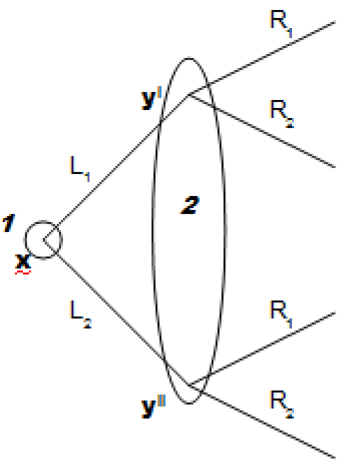
Lošime informacija apibrėžia, ką lošėjai žino pasirinkdami alternatyvas. Išplėstinės formos lošimas yra lošimas su visiška informacija, jei kiekvienoje informacijos aibėje yra tik viena viršūnė. Kitais atvejais yra dalinės informacijos lošimas. Pateiksime lošimų medžių pavyzdžius su skirtingomis informacijos aibėmis.

Lošimu su visiškąja informacija yra vadinama toks lošimas, kurio kiekvienoje informacijos aibėje yra tik viena viršūnė (žr. 2.6 pav.). Informacijos aibės paprastai apibrėžiamos elipsėmis.



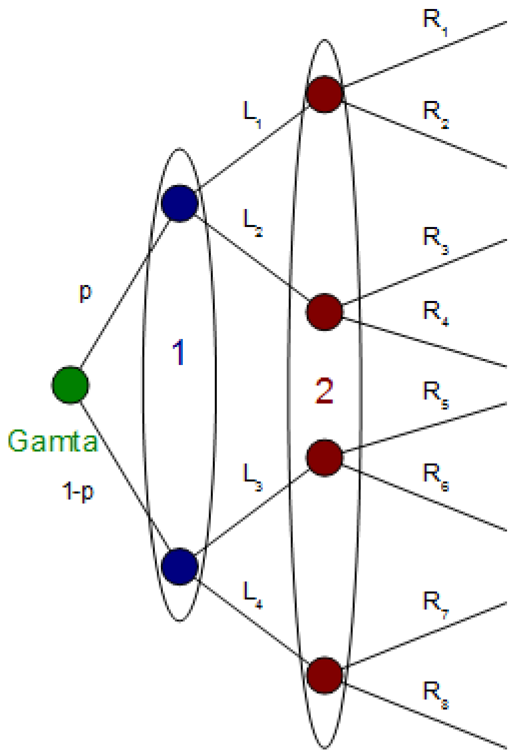
2.6 pav. Lošimas su visiška informacijos aibe

Lošimu su daline informacija vadinamas toks lošimas, kuris nėra su visiška informacijos lošimas. Pavyzdžiui, 2.7 paveiksle pateiktas lošimas yra dalinės informacijos, nes antrojo lošėjo informacijos aibėje yra dvi viršūnės.



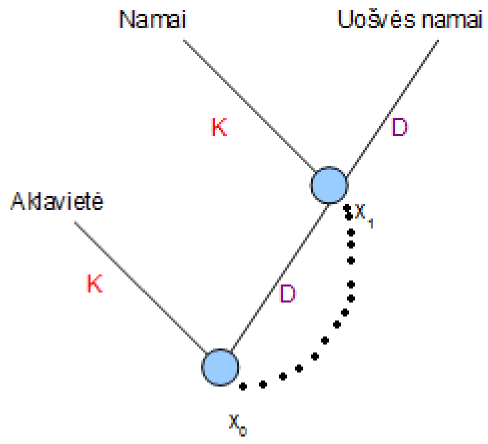
2.7 pav. Lošimas su daline informacijos aibe

Lošimas, kurio medis pavaizduotas 2.8 paveiksle taip pat yra dalinės informacijos lošimas, nes pirmojo lošėjo informacijos aibėje yra dvi viršūnės, o antrojo lošėjo informacijos aibėje yra keturios viršūnės. Šiame lošime „gamta“ atlieka veiksmus su tikimybėmis p arba $1-p$.



2. 8 pav. Dalinės informacijos lošimas su atsitiktiniu lošėju „gamta“.

Lošėjai nevisada atsimena, kokius veiksmus atliko praeityje. Panagrinėkime 2.9 paveikslą.



2.9 pav. „Užmaršus vairuotojas“

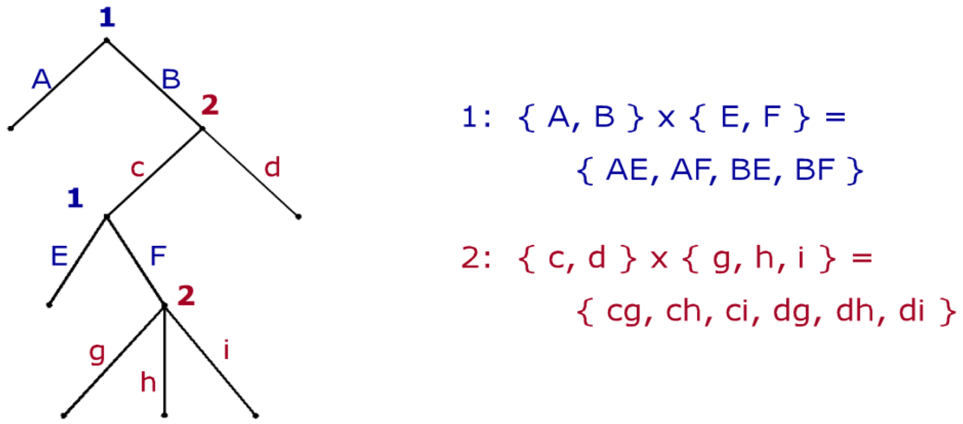
Šis lošimo medis vaizduoja "užmaršų vairuotoją". Vairuotojas važiuoja namo po vakarėlio. Jis pasiekia pirmąją sankryžą, kurioje turi pasirinkti kur pasukti – į kairę ar į dešinę. Jei jis pasuka į kairę, tai privažiuoja aklavietę; jei jis pasuka į dešinę, tai pasiekia kitą sankryžą. Kai pasiekia kitą sankryžą, tai neblaivus vairuotojas negali prisiminti, ar jau pravažiavo per vieną sankryžą ar ne. Taip pat turi pasirinkti pasukti į kairę ar į dešinę. Jeigu pasuka į kairę, tai pasiekia namus, jeigu į dešinę, tai pasiekia savo uošvės namus. Kai privažiuoja antrąją sankryžą, tai neprisimena, į kurią pusę buvo pasukęs. Viršūnės x_0 ir x_1 yra toje pačioje informacijos aibėje, t. y. $H(x_0) = H(x_1)$. Jei dvi viršūnės yra toje pačioje informacijos aibėje, tai nė viena negali būti kitos pirmtaku.

Lošimu su tobula atmintimi yra vadinamas toks lošimas, kuriame kiekvienas lošėjas atsimena jam reikalingą informaciją. Lošėjas turi tobulą atmintį, jei jis atsimena kokius veiksmus atliko praeityje. Jeigu lošėjas turi tik vieną informacinę aibę, tai turi tobulą atmintį. Jeigu lošimas turi tobulą atmintį, tai niekada du lošėjai nelošia toje pačioje informacijos aibėje tuo pačiu metu.

Išplėstinės formos lošimas apibrėžia lošėjus, kiekvieno lošėjo veiksmus ir galimybes (alternatyvas).

Lošimo strategija siejama su kiekviena lošėjo informacine aibe ir priimtais sprendimais joje. Strategija yra planas arba taisyklė, nurodanti lošėjui, kurią alternatyvą konkrečioje informacinėje aibėje jis turi pasirinkti. Kitaip tariant, strategijos yra galimi lošėjo veiksmai. Lošimo medžio šakos atitinka strategijas.

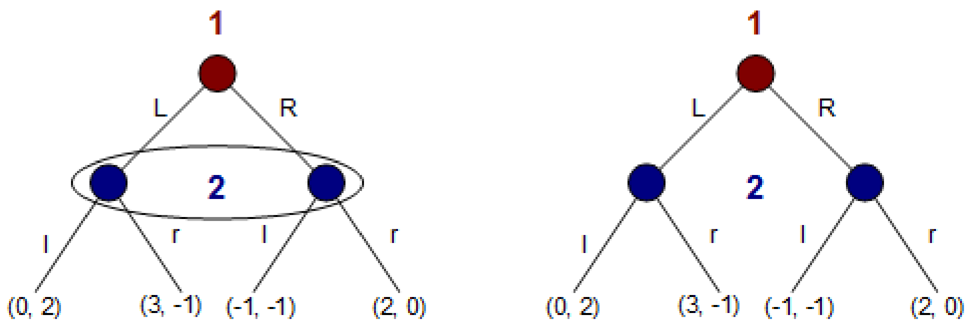
Lošėjo strategijų aibė yra alternatyvų Dekarto sandauga. Panagrinėsime strategijas, pateiktas 2.10 paveiksle.



2. 10 pav. Lošimo strategijų aibės

Pirmojo lošėjo strategijos AE, AF, BE, BF sudaro strategijų aibę $S_1 = \{AE, AF, BE, BF\}$. Pirmasis lošėjas turi keturias strategijas. Antrojo lošėjo strategijos cg, ch, ci, dg, dh, di sudaro strategijų aibę $S_2 = \{cg, ch, ci, dg, dh, di\}$. Antrasis lošėjas turi šešias strategijas.

Nagrinėkime strategijas, pavaizduotas 2. 11 paveiksle.



2.11 pav. Dalinės ir visiškos informacijos lošimo medžiai

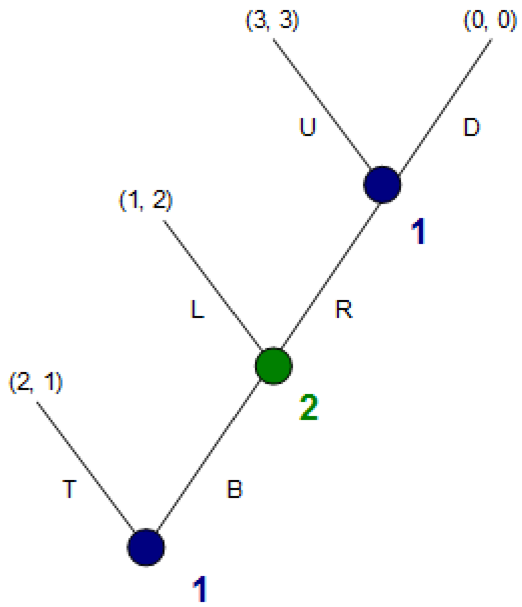
Jame pateikti du lošimo medžiai. Pirmasis lošimo medis turi dalinę informaciją (antrojo lošėjo informacijos aibėje yra dvi viršūnės), o antrasis – visišką informaciją. Nagrinėsime pirmąjį lošimo medį. Pirmasis lošėjas turi dvi strategijas: L ir R. Antrasis lošėjas turi taip pat dvi strategijas: l ir r. Nagrinėjame antrojo lošimo medžio strategijas. Pirmasis lošėjas turi dvi strategijas: L arba R. Antrasis lošėjas turi keturias strategijas: (l, r), (l, l), (r, l), ir (r, r), nes šio lošėjo strategijų aibė yra alternatyvų poros.

Strategijos skirstomos į grynąsias strategijas, mišriąsias strategijas ir elgesio strategijas.

Grynąja strategija yra vadinama strategija, kuri pasirenkama su tikimybe, lygia 1. Mišriąja strategija yra vadinama strategija, kurią lošėjas renkasi atsitiktinai.

Nepaisant išplėstinės formos medžių įvairovės mes visada galime pereiti iš išplėstinės formos lošimo į teoriškai paprastesnę formą, normalinę lošimo formą. Normalinė lošimo forma apibrėžia lošėjus, strategijas ir išlošius.

Jeigu žinome lošimo strategijas, tai galime rasti jo normalinę forma. Panagrinėsime lošimo medį, pavaizduotą 2.12 paveiksle.



2.12 pav. Dviejų asmenų lošimo medis

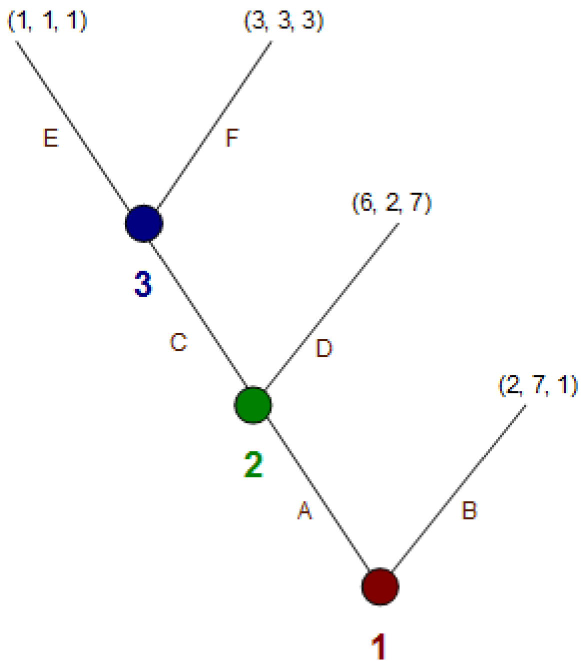
Lošėjų aibę N sudaro du lošėjai. Apibrėšime kiekvieno lošėjo strategijas. Pirmasis lošėjas turi keturias strategijas. Jo strategijų aibė $S_1 = \{T, B\} \times \{U, D\} = \{TU, TD, BU, BD\}$. Antrasis lošėjas turi dvi strategijas L ir R. Jo strategijų aibė yra $S_2 = \{L, R\}$. Šį lošimą užrašysime normaline lošimo forma. Pirmojo lošėjo strategijas užrašome eilute, o antrojo lošėjo stulpeliu. Gauname tokią lošimo normalinę formą (žr. 2.1 lent.):

		Antrasis lošėjas	
		L	R
Pirmasis lošėjas	TU	(2, 1)	(2, 1)
	TD	(2, 1)	(2, 1)
	BU	(1, 2)	(3, 3)
	BD	(1, 2)	(0, 0)

2.1 lent. Lošimo normalinė forma

Jeigu pirmasis lošėjas pasirinks T, tai niekada nebus pasiekiama antroji informacijos aibė. TU ir TD yra skirtingos strategijos pirmajam lošėjui. Dvi skirtingos strategijos yra ekvivalenčios, kai priveda prie to pačio rezultato. Strategijos TU ir TD yra ekvivalenčios pirmajam lošėjui (jo išlošis yra lygus 2).

Nagrinėsime trijų asmenų išplėstinės formos lošimą (žr. 2.13 pav.).



2.13 pav. Trijų asmenų lošimo medis

Lošėjų aibę N sudaro trys lošėjai. Turime trejetą (N; S; u), kur N - lošėjų aibė, S - strategijų aibė ir u - išlošiai. Pirmojo lošėjo strategijų aibė yra $S_1 = \{A, B\}$. Antrojo lošėjo strategijų aibė yra $S_2 = \{C, D\}$. Trečiojo lošėjo strategijų aibė yra $S_3 = \{E, F\}$. Šio lošimo stretegijų aibė:

$$S = \{(A,C,E),(A,C,F),(A,D,E),(A,D,F),(B,C,E),(B,C,F),(B,D,E),(B,D,F)\}.$$

Kiekvieno lošėjo išlošius pavaizduojame išlošių matrica (žr. 2. 2 lent.):

S	A,C,E	A,C,F	A,D,E	A,D,F	B,C,E	B,C,F	B,D,E	B,D,F
u_1	1	3	6	6	2	2	2	2
u_2	1	3	2	2	7	7	7	7
u_3	1	3	7	7	1	1	1	1

2.2 lent. Lošėjų išlošių matrica

2.3 lentelėje pavaizduojame trijų asmenų lošimo normalinę formą. Trečiasis lošėjas renkasi matricą.

Trečiasis lošėjas E

		Antrasis lošėjas	
		C	D
Pirma	A	(1,1,1)	(6,2,7)

Trečiasis lošėjas F

		Antrasis lošėjas	
		C	D
Pirma	A	(3,3,3)	(6,2,7)

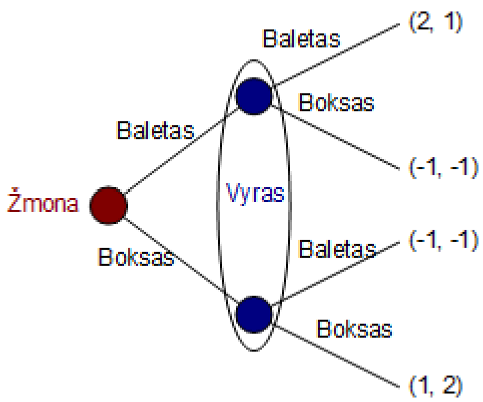
sis lošėjas	*B*	(2,7,1)	(2,7,1)	sis lošėja s	*B*	(2,7,1)	(2,7,1)

2.3 lent. Trijų lošėjų lošimo normalinė forma

3. Nešo pusiausvyra

Strategijų pora vadinama Nešo pusiausvyra, jeigu pirmojo lošėjo pasirinkimas yra optimalus atsižvelgiant į antrojo lošėjo pasirinkimą, o antrojo lošėjo pasirinkimas yra optimalus atsižvelgiant į pirmojo lošėjo pasirinkimą.

Panagrinėkime pavyzdį. Vyras ir žmona tariasi, kaip praleisti laisvalaikį. Svarstomos dvi galimybės: eiti į bokso varžybas arba eiti į baletą. Paprastai vyras labiau vertina boksą, negu baletą, o žmona – atvirkščiai. Jeigu jie sutartų eiti į boksą, tai vyras situaciją įvertintų 2, o žmona 1. Jeigu į baletą – vyras įvertintų 1, o žmona 2. Nesutarimo atveju abu praranda pramogą ir abu tai vertina – 1 (žr. 3.1 pav.).



3. 1 pav. Šeimos konflikto lošimo medis

Žmona turi dvi strategijas, vyras taip pat turi dvi strategijas. Šį konfliktą atitinkanti normalinė forma (žr. 3.1 lent.):

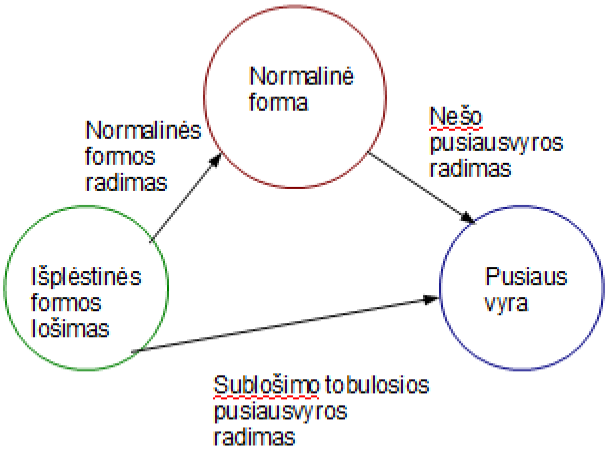
		Vyras	
		Baletas	*Boksas*
Žmona	*Baletas*	(2, 1)	(-1, -1)
	Boksas	(-1, -1)	(1, 2)

3. 1 lent. Šeimos konflikto normalinė forma

Pusiausvyros situacijos būtų (2, 1) ir (1, 2). Tai grynųjų strategijų pusiausvyra. Pirmoji situacija geresenė žmonai, o antroji geresnė vyrui.

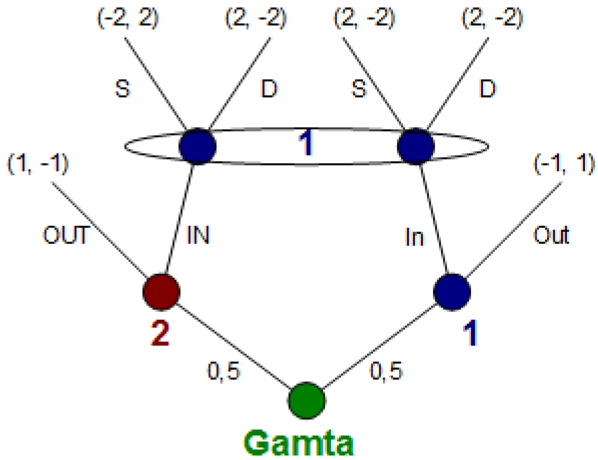
Nešo pusiausvyra randama iš normalinės formos ir sublošimo. Iškyla problema, kad du skirtingi išplėstinės formos lošimai gali turėti tą pačią normalinę formą.

Nešo pusiausvyros radimą iliustruoja 3.2 paveikslas.



3.2 pav. Nešo pusiausvyros radimas

Nagrinėsime išplėstinės formos lošimą, pavaizduotą 3.3 paveiksle.



3.3 pav. Išplėstinės formos lošimo medis

Šiame lošime antrojo lošėjo strategija yra $S_2 = \{IN, OUT\}$. Pirmojo lošėjo strategijų aibė yra $S_1 = \{(In,S),(In,D),(Out,S),(Out,D)\}$. Atsitiktinis „gamtos“ ėjimas atliekamas su tikimybėmis lygiomis $\frac{1}{2}$.

Apskaičiuosime išlošius.

- Jei pirmasis lošėjas lošia strategija (In,S) ir antrasis lošia strategija IN, tai laukiami išlošiai $\frac{1}{2}\cdot(-2,2)+\frac{1}{2}\cdot(2,-2)=(0,0)$.

- Jei pirmasis lošėjas lošia strategiją (In,S) ir antrasis lošia strategiją OUT, tai laukiami išlošiai $\frac{1}{2}\cdot(1,-1)+\frac{1}{2}\cdot(2,-2)=\left(1\frac{1}{2},-1\frac{1}{2}\right)$.
- Jei pirmasis lošėjas lošia strategiją (In,D) ir antrasis lošia strategiją IN, tai laukiami išlošiai $\frac{1}{2}\cdot(2,-2)+\frac{1}{2}\cdot(-2,2)=(0,0)$.
- Jei pirmasis lošėjas lošia strategiją (In,D) ir antrasis lošia strategiją OUT, tai laukiami išlošiai $\frac{1}{2}\cdot(1,-1)+\frac{1}{2}\cdot(-2,2)=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.
- Jei pirmasis lošėjas lošia strategiją (Out,S) ir antrasis lošia strategiją IN, tai laukiami išlošiai $\frac{1}{2}\cdot(-2,2)+\frac{1}{2}\cdot(-1,1)=\left(-1\frac{1}{2},1\frac{1}{2}\right)$.
- Jei pirmasis lošėjas lošia strategiją (Out,S) ir antrasis lošia strategiją OUT, tai laukiami išlošiai $\frac{1}{2}\cdot(1,-1)+\frac{1}{2}\cdot(-1,1)=(0,0)$.
- Jei pirmasis lošėjas lošia strategiją (Out,D) ir antrasis lošia strategiją IN, tai laukiami išlošiai $\frac{1}{2}\cdot(2,-2)+\frac{1}{2}\cdot(-1,1)=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$.
- Jei pirmasis lošėjas lošia strategiją (Out,D) ir antrasis lošia strategiją OUT, tai laukiami išlošiai $\frac{1}{2}\cdot(1,-1)+\frac{1}{2}\cdot(-1,1)=(0,0)$.

Išlošius pavaizduojame normaline forma 3.2 lentelėje.

		Antrasis lošėjas	
		IN	OUT
Pirmasis lošėjas	In, S	$(0,0)$	$\left(1\frac{1}{2},-1\frac{1}{2}\right)$
	In, D	$(0,0)$	$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$
	Out, S	$\left(-1\frac{1}{2},1\frac{1}{2}\right)$	$(0,0)$
	Out, D	$\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$	$(0,0)$

3. 2 lent. Lošimo normalinė forma

Rasime šio lošimo Nešo pusiausvyras. Pirmajam lošėjui strategijos (In, D) ir (Out, S) yra griežtai dominuojančios, pavyzdžiui, strategija $\left(\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}\right)$. Įsitikinsime tai. Kai pirmasis lošėjas lošia (In, D) strategija ir antrasis lošėjas mišriąja strategija $(y, 1-y)$, kai $0 \le y \le 1$. Pirmojo lošėjo išlošis nuo (In, D) yra lygus $0 \cdot y + \left(-\frac{1}{2}\right)(1-y) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} y$. Kai pirmojo lošėjo mišrioji strategija yra $\left(\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}\right)$, tai jo išlošis (kai pasirenka šią strategiją) yra $\frac{1}{2} \cdot \left(0 \cdot y + \frac{1}{2} \cdot (1-y)\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot y + 1 \cdot (1-y)\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} y$. Todėl $\frac{3}{4} - \frac{1}{2} y - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} y\right) = \frac{5}{4} - y \ge 0$ visiems $0 \le y \le 1$. Strategija $\left(\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}\right)$ duoda didesnį išlošį negu (In, D), neatsižvelgiant į antrojo lošėjo veiksmus. Strategija (OUT, S) taip pat daro griežtą įtaką pirmajam lošėjui. Pirmasis lošėjas niekada neloš strategijomis (In, D) ir (Out, S). Lošimą galima sumažinti (3.3 lentelė).

Antrasis lošėjas

Pirmasis lošėjas

	IN	OUT
In, S	$(0, 0)$	$\left(1\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2}\right)$
Out, D	$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$	$(0, 0)$

3. 3 lent. Lošimo normalinė forma

Šiame lošime nėra grynųjų strategijų pusiausvyrų. Tikrinsime mišriųjų strategijų pusiausvyras. Tarkime, kad pirmasis lošėjas lošia strategija (In, S) su tikimybe x ir (Out, D) su tikimybe $1-x$. Antrasis lošėjas lošia strategija IN su tikimybe y ir OUT su tikimybe $1-y$. Kai antrasis lošėjas renkasi tarp IN ir OUT, tai x randame iš lygybės $0 \cdot x + \left(-\frac{1}{2}\right)(1-x) = \left(-1\frac{1}{2}\right) x + 0 \cdot (1-x) \Rightarrow x = \frac{1}{4}$. Kai pirmasis lošėjas 1 renkasi tarp (In, S) ir (Out, D), tai y randame iš lygybės $0 \cdot y + 1\frac{1}{2} \cdot (1-y) = \frac{1}{2} \cdot y + 0 \cdot (1-y) \Rightarrow y = \frac{3}{4}$.

Vienintelė Nešo pusiausvyra lošime yra $\left\{\left(\frac{1}{4}, 0, 0, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)\right\}$.

<u>Apibrėžimas</u>. Sublošimas išplėstinės formos lošime Γ yra viršūnė medyje Γ ir visos iš jos sekančios viršūnės su medžio struktūra, nedalijančios informacijos aibės.

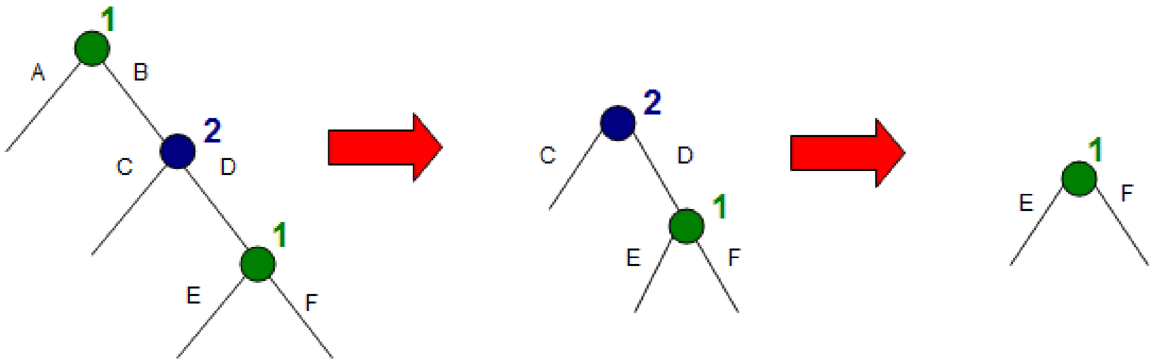
Pastebėkime, kad po šio apibrėžimo , Γ yra Γ sublošimas.

Sublošimas yra lošimo poaibis, kai:

Pradžia yra su pradine viršūne (šaknimi).

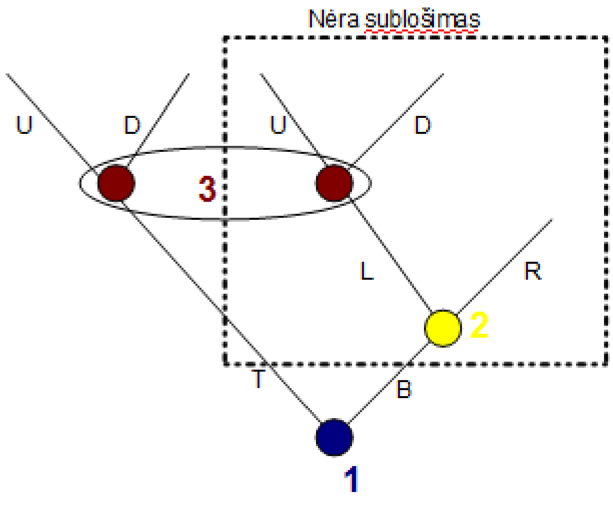
Visos informacijos aibės turi pradinę viršūnę.

Pažymime, kad visas lošimas yra taip pat sublošimas. 3.4 paveiksle pateikiamas lošimo medžio skaidymas į sublošimus. Galime išskirti tris sublošimus (iš jų vienas sutampa su pačiu medžiu).



3.4 Lošimo skaidymas į sublošimus

Sublošimas niekada neskelia informacijos aibių. Kitas pavyzdys išplėstinės formos lošimas pavaizduotas 3.5 paveiksle. Lošimas, prasidedantis nuo antrojo lošėjo šaknies nėra sublošimas, nes skelia trečiojo lošėjo informacijos aibę.



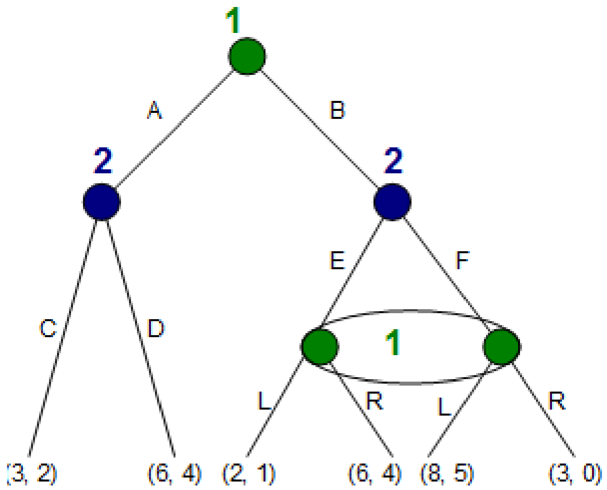
3.5 Lošimo medis

Sublošimo tobuloji pusiausvyra yra tiesiogiai susijusi su išplėstine lošimo forma.

Apibrėžimas. Sublošimo tobuloji pusiausvyra yra toks strategijų rinkinys , nusakantis kiekvieno sublošimo pusiausvyrą.

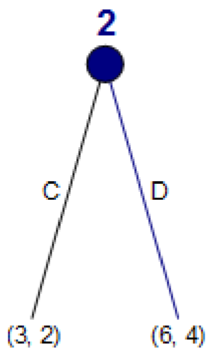
<u>Apibrėžimas</u>. Sublošimo tobuloji pusiausvyra išplėstinės formos lošime Γ su pilna atmintimi yra toks elgesio strategijų rinkinys $(b_1, b_2, ..., b_N)$, kad kiekviename sublošime Γ' iš Γ, $(b'_1, b'_2, ..., b'_N)$ yra Nešo pusiausvyra Γ', čia b'_n yra b_n, apribotas Γ'.

Panagrinėkime lošimo medį, pavaizduotą 3.6 paveiksle.



3.6 pav. Lošimo medis

Šis išplėstinės formos lošimas turi 3 sublošimus. Vienas iš jų yra pats lošimo medis, nes bet koks lošimo medis kartu yra ir sublošimas. Antrasis sublošimas prasideda nuo A, o trečiasis nuo B. Panagrinėkime sublošimą, pavaizduotą 3.8 paveiksle.



3. 8 pav. Sublošimas

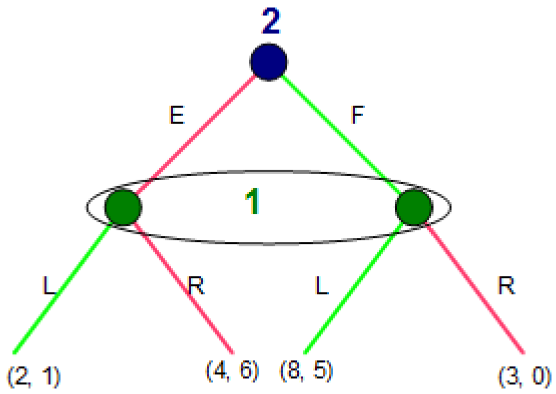
3.4 lentelėje pateikiamo sublošimo normalinė forma.

C	*D*
(3, 2)	(6, 4)

3. 4 lent. Sublošimo normalinė forma

Rasime šio sublošimo Nešo pusiausvyrą. Pirmajam lošėjui naudingiau rinktis D (išlošis 6), negu C (išlošis 3), antrajam lošėjui yra naudingiau rinktis D (išlošis 4) negu C (išlošis 2). Pusiausvyra nuspalvinta mėlynai.

Nagrinėsime sublošimą, pateiktą 3.9 paveiksle.



3. 9 pav.

3.5 lentelėje pateikiama šio sublošimo normalinė forma

	E	*F*
L	(2, 1)	(8, 5)
R	(4, 6)	(3, 0)

3.5 lent. Sublošimo normalinė forma

Šis sublošimas turi dvi Nešo pusiausvyras: (R, E), kuri nuspalvinta raudonai ir (L, F), kuri nuspalvinta žaliai.

Pirmojo lošėjo galimos strategijos AL, AR, BL, BR.

Antrojo lošėjo visos galimos strategijos:

C(A)E(B) C, jei pirmasis lošėjas pasirinko A ir E, jei pirmasis lošėjas lošia B.

D(A)F(B) D, jei pirmasis lošėjas pasirinko A ir F, jei pirmasis lošėjas pasirinko B.

C(A)F(B) C, jei pirmasis lošėjas pasirinko A ir F, jei pirmasis lošėjas pasirinko B.

D(A)E(B) D, jei pirmasis lošėjas pasirinko A ir F, jei pirmasis lošėjas pasirinko B.

Pateiksime šio lošimo normalinę formą (žr. 3.6 lent.).

	C(A)E(B)	*D(A)F(B)*	*C(A)F(B)*	*D(A)E(B)*
AL	(3, 2)	(6, 4)	(3, 2)	(6, 4)
AR	(3, 2)	(6, 4)	(3, 2)	(6, 4)
BL	(2, 1)	(8, 5)	(8, 5)	(2, 1)
BR	(4, 6)	(3, 0)	(3, 0)	(4, 6)

3.6 lent. Lošimo normalinė forma

Šis lošimas turi penkias Nešo pusiausvyras, dvi iš jų sublošimo tobulosios pusiausvyros. Pusiausvyra (BR, C(A)E(B)) yra Nešo pusiausvyra, nes jeigu pirmasis lošėjas pasirenka strategiją BR, tai antrasis žaidėjas pasirenka C(A)E(B), o antrajo lošėjo strategijai C(A)E(B) geriausia pirmojo lošėjo strategija yra BR.

Pusiausvyra (AL, D(A)E(B)) yra Nešo pusiausvyra, nes pirmojo lošėjo strategijai AL geriausia antrojo lošėjo strategija yra C(A)E(B), o antrojo lošėjo strategijai C(A)E(B) geriausia pirmojo lošėjo strategija yra AL.

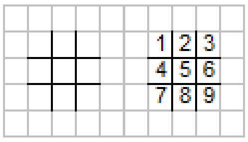
Pusiausvyra (BL, C(A)F(B)) yra Nešo pusiausvyra, nes pirmojo lošėjo strategijai BL geriausia antrojo lošėjo strategija yra C(A)F(B), o antrojo lošėjo strategijai C(A)F(B) geriausia pirmojo lošėjo strategija BL.

Pusiausvyros (AR, D(A)E(B)) ir (BL, D(A)F(B)) yra sublošimo tobulosios pusiausvyros.

4. Išplėstinės formos lošimų pavyzdžiai

4.1 Žaidimas „Kryžiukai – nuliukai“

„Kryžiukai – nuliukai“ – dviems žaidėjams skirtas žaidimas. Lape nubraižoma 9 langelių × lentelė (žr. 4.1.1 pav.)



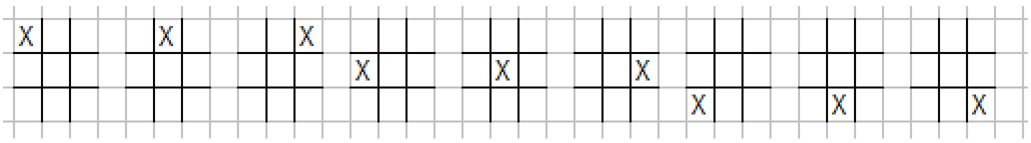
4. 1.1 pav. Žaidimo pradinė lentelė

Vienas žaidėjas lentelės langelius žymi X (kryžiukais), kitas – O (nuliukais). Tai tik sutartiniai ženklai, kuriuos galima pakeisti norimais. Kiekvienas žaidėjas pasirinktą langelį pažymi savo ženklu. Laimi tas, kuris pirmas užpildo pilną eilutę, stulpelį ar įstrižainę savo ženklais. Žaidimą galima laimėti, pralaimėti arba sužaisti lygiosiomis.

Pirmasis žaidėjas atlikdamas pirmą veiksmą turi 9 , antrą veiksmą 7, trečią veiksmą 5, ketvirtą veiksmą 3, penktą veiksmą 1 galimybes. Antrasis žaidėjas atlikdamas pirmą veiksmą turi 8, antrąjį veiksmą 6, trečiąją veiksmą 4, ketvirtąjį veiksmą 2 galimybes. Pirmasis žaidėjas atlieka 5 veiksmus, antrasis – 4 veiksmus. Gali būti atlikta mažiau veiksmų, jei kuris nors žaidėjas laimi.

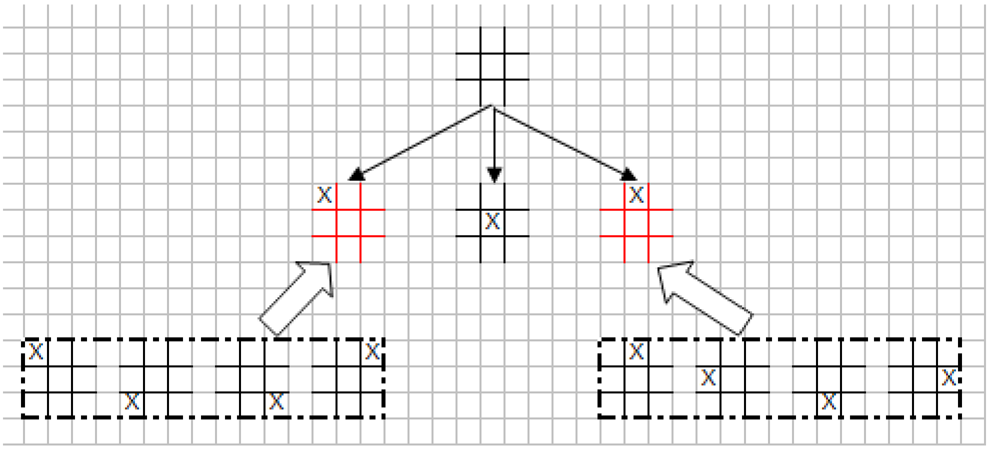
4.1.1 teiginys. Nepriklausomai nuo pirmojo žaidėjo veiksmų, antrasis žaidėjas gali pasiekti lygiąsias. Kitaip sakant, pirmasis žaidėjas negali pasiekti pergalės, kai antrasis žaidėjas nedaro klaidų.

Įrodymas. Pirmajį veiksmą atlieka pirmasis žaidėjas. Tam atlikti jis turi 9 galimybes (žr. 4.1.2 pav.).



4.1.2 pav. Pirmojo žaidėjo ėjimo galimybės

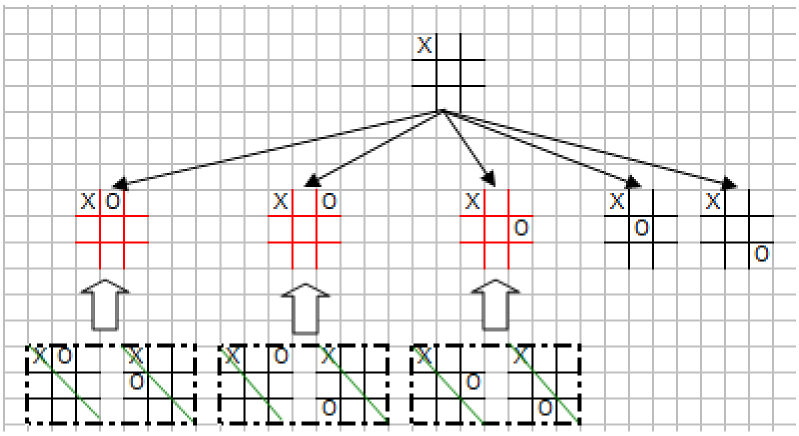
Pakanka nagrinėti tik tris galimybes, pavaizduotas 4.1.3 paveiksle.



4.1.3 pav. Pirmojo žaidėjo veiksmai

Pirmasis žaidėjas turi tris strategijas. Pirmąjį ėjimą atlieka atlieka antrasis žaidėjas. Jis turi 5 galimybes tai padaryti. Taigi, antrasis žaidėjas turi 15 strategijų. Nagrinėjimą supaprastiname.

Nagrinėkime atvejį, kai pirmasis žaidėjas pažymi 1 – ąjį langelį (žr. 4.1.4 pav.).



4.1.4 pav. Antrojo žaidėjo atsakas, kai pirmasis žaidėjas pažymi 1 – ąjį langelį

Įrodysime, kad antrasis žaidėjas visada gali pasiekti pergalę. Antrajam žaidėjui dar sunku nuspręsti, kur atlikti ėjimą. Kitą ėjimą atlieka pirmasis žaidėjas. Tam padaryti jis turi 7 galimybes.

Keliai, kai pirmasis žaidėjas pažymi pirmąjį langelį ir sužaidžiama lygiosiomis (pirmojo žaidėjo veiksmai pabraukti):

$S_1 = \{1,2,\underline{9},5,\underline{8},7,\underline{3},6,\underline{4}\}$,

$S_2 = \{1,3,\underline{5},9,\underline{6},4,\underline{7},2,\underline{8}\}$,

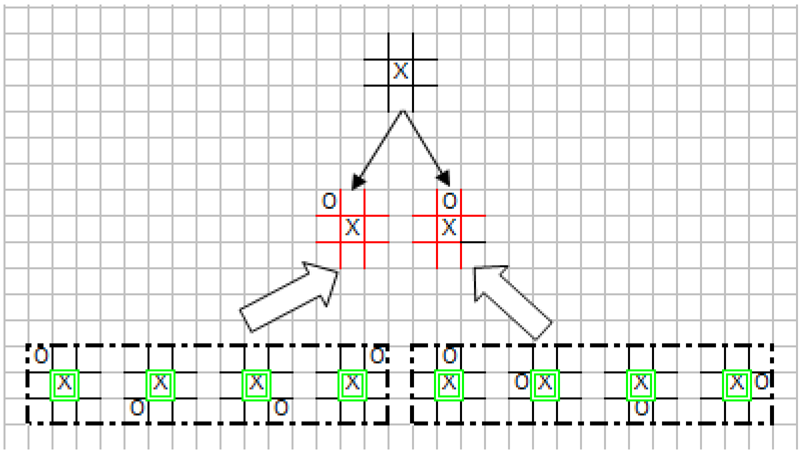
$S_3 = \{1,6,\underline{5},9,\underline{3},7,\underline{8},2,\underline{4}\}$,

$S_4 = \{1,5,\underline{9},2,\underline{8},7,\underline{3},6,\underline{4}\}$,

$S_5 = \{1,9,\underline{2},3,6,7,\underline{8},5,\underline{4}\}$.

Parodėme, kad, jeigu pirmasis žaidėjas pažymi 1 – ąjį langelį, tai antrasis žaidėjas nedarydamas klaidų gali pasiekti pergalę.

Nagrinėkime, kai pirmasis žaidėjas pažymi 5 – ąjį langelį. Tada antrasis žaidėjas turi 8 galimybes parašyti savo ženklą. Nagrinėjimą supaprastiname (žr. 4.1.5 pav.).



4.1.5 pav. Nagrinėjamos situacijos, kai pirmasis žaidėjas pažymi 5 – ąjį langelį

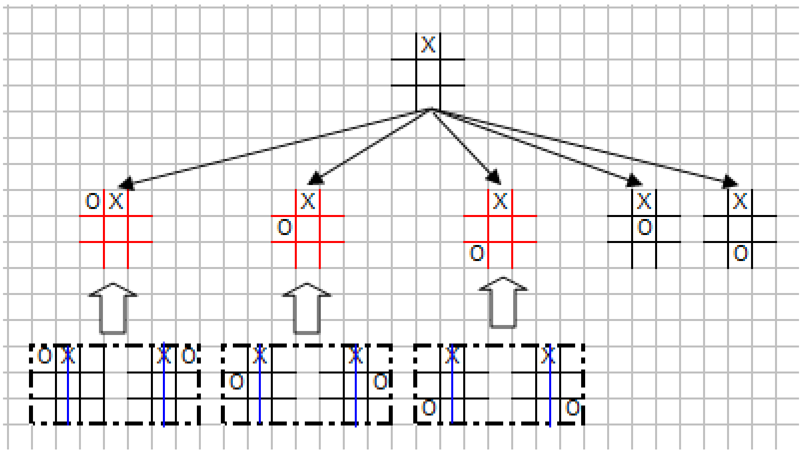
Belieka išnagrinėti atvejus, kai pirmasis pažymi 5 – ąjį langelį, o antrasis 1 – ąjį arba 2 – antrąjį langelį.

Keliai, vedantys prie lygiųjų (pirmojo žaidėjo veiksmai pabraukti):

$S_1 = \{\underline{5},1,\underline{6},4,\underline{7},3,\underline{2},8,\underline{9}\}$

$S_2 = \{\underline{5},2,\underline{3},6,\underline{9},1,\underline{3},7,\underline{8}\}$.

Nagrinėkime, kai pirmasis žaidėjas pažymi 2 – ąjį langelį. Tada atlikti ėjimą antrasis žaidėjas turi aštuonias galimybes. Nagrinėjimą supaprastiname (žr. 4.1.6 pav.).



4.1.6 pav. Nagrinėjamos situacijos, kai pirmasis žaidėjas pažymi 5 – ąjį langelį

Keliai, vedantys prie lygiųjų (pirmojo žaidėjo veiksmai pabraukti):

$S_1 = \{\underline{2},1,\underline{5},8,\underline{7},3,\underline{6},4,\underline{9}\}$

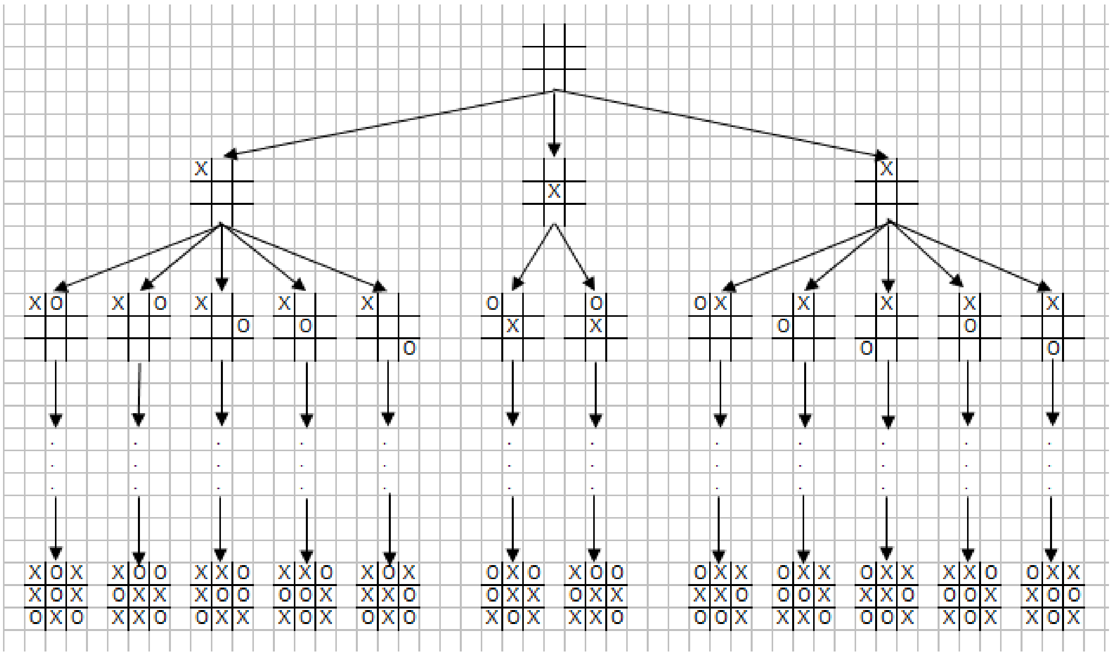
$S_2 = \{\underline{2},4,\underline{6},3,\underline{7},8,\underline{5},9,\underline{1}\}$

$S_3 = \{\underline{2},7,\underline{3},1,\underline{4},8,\underline{9},6,\underline{5}\}$

$S_4 = \{\underline{2},5,\underline{3},1,\underline{9},6,\underline{4},7,\underline{8}\}$

$S_5 = \{2,8,\underline{1},3,\underline{9},5,\underline{7},4,\underline{6}\}$

Parodėme, kad antrasis žaidėjas atsakydamas visada gali pasiekti lygiąsias. Taigi, 4.1.7 paveiksle pavaizduotas žaidimo medis.



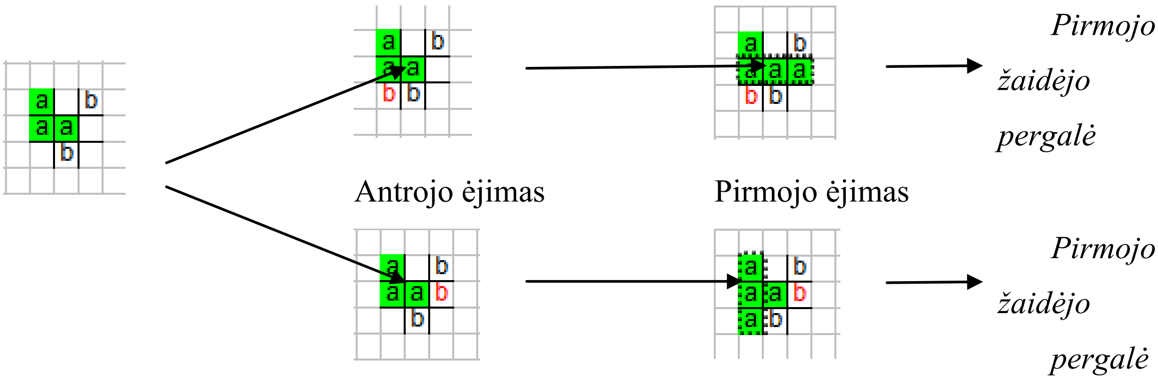
4.1.7 pav. Žaidimo medis

Pateiksime patarimus žaidžiantiesiems. Patarimai:

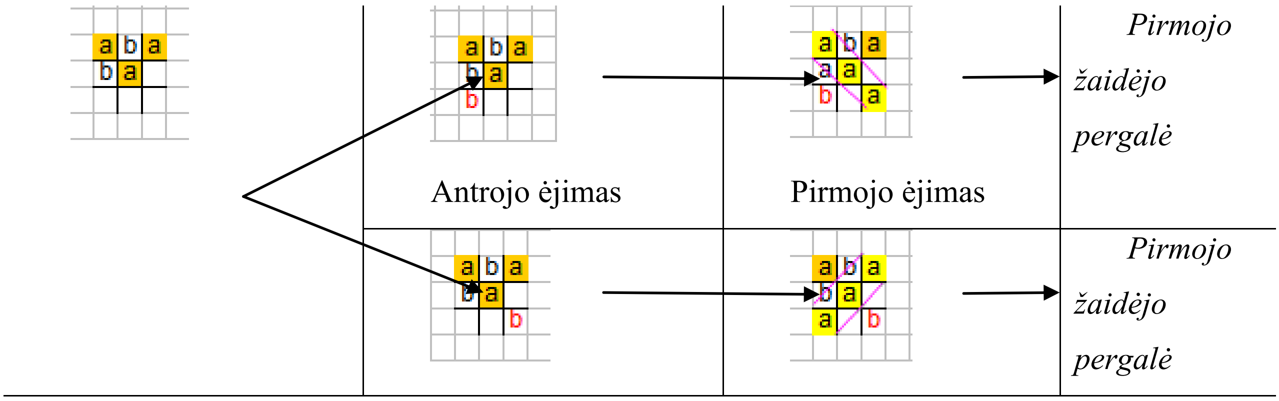
Jeigu priešininkas turi eilutėje, stulpelyje arba įstrižainėje du savo ženklus, tai reikia užblokuoti galimybę sudaryti eilutę, stulpelį ar įstrižainę.

Neleisti priešininkui sudaryti tokių situacijų (pirmojo žaidėjo ėjimi žymimi raide a, o antrojo žymimi b):

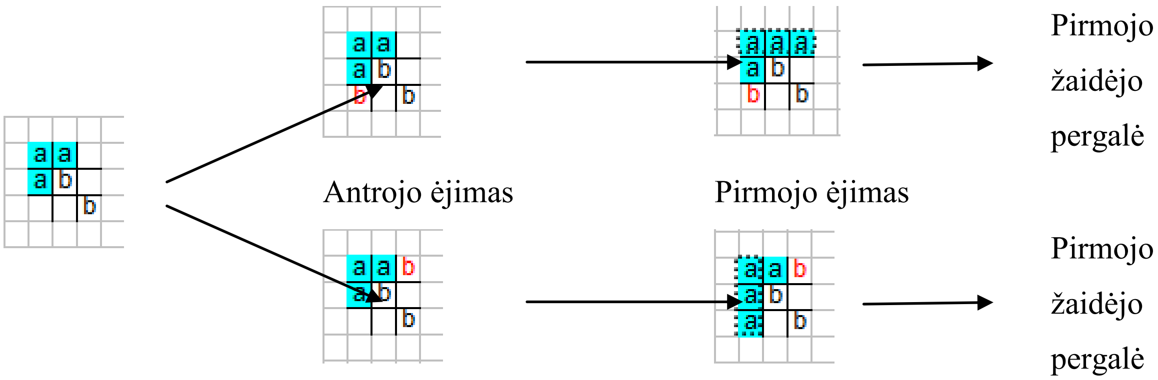
a)



b)



c)

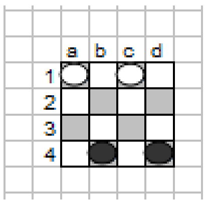


4.2 Žaidimas „Mini šaškės“

Žaidimo medis pateikiamas 1 – ajame priede.

Šaškės – abstrakčios strategijos ir taktikos stalo žaidimas, skirtas žaisti dviem žaidėjams. Paprastosios šaškės žaidžiamos ant 8x8 langelių šachmatų lentos su 24-iomis šaškėmis (12 baltų ir 12 juodų).

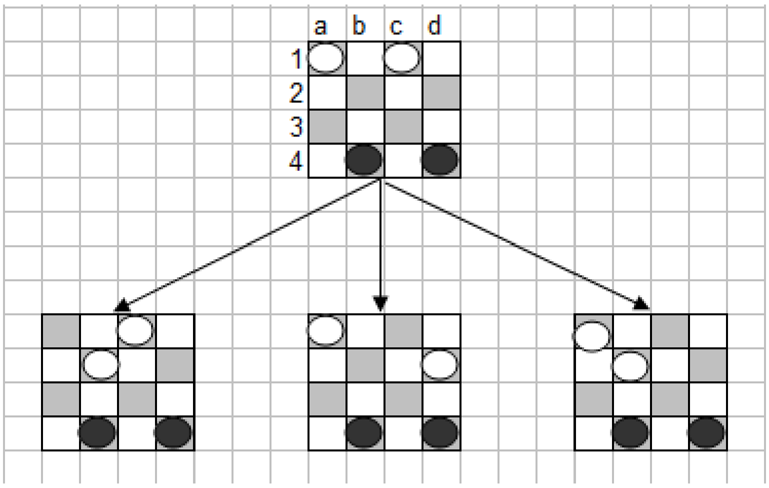
Nagrinėsime „Mini šaškių“ žaidimą. Kiekvienas žaidėjas turi po dvi šaškes. Šaškių išdėstymas ir lenta yra pavaizduoti 4.2.1 paveiksle.



4.2.1 pav. Šaškių išdėstymas lentoje

Žaidėjų tikslas šaškėse – nukirsti visas priešininko šaškes arba sudaryti tokią situaciją, kad priešininkui nebeliktų ėjimų. Šaškės žaidžiamos paeiliui, po vieną ėjimą ant juodos spalvos langelių. Žaidimą pradeda baltosios ir einama tik įstrižai, po vieną langelį (taip vaikšto paprastos šaškės, nevirtusios damomis). Priešininko šaškė nukertama peršokant per ją, kirtimas yra privalomas ir gali būti atliktas tik pirmyn. Vieno ėjimo metu gali būti atlikti keli kirtimai, jeigu peršokus šaškę atsiduriama langelyje šalia kitos kertamos šaškės. Iki galinės linijos („Karalių eilės“) nuėjusi šaškė pavirsta dama (šaškė apverčiama), kuriai suteikiamos papildomos galios – ji gali vaikščioti daugiau negu po vieną langelį iki pat lentos kraštų tiek prieš kirtimą, tiek po jo. Šaškė pavirsti dama gali ir kirtimo metu, jeigu viename iš kirtimo etapų ji atsiduria ant galinės linijos.

Pirmąjį ėjimą atlieka baltosios šaškės. 4.2.2 paveiksle pavaizduoti galimi trys baltųjų ėjimai: iš a1 į b2, iš c1 į b2 ir iš c1 į d2.

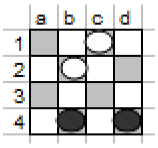


4.2.2 pav. Baltųjų pirmasis ėjimas

Suformuluosime teiginius ir juos įrodysime.

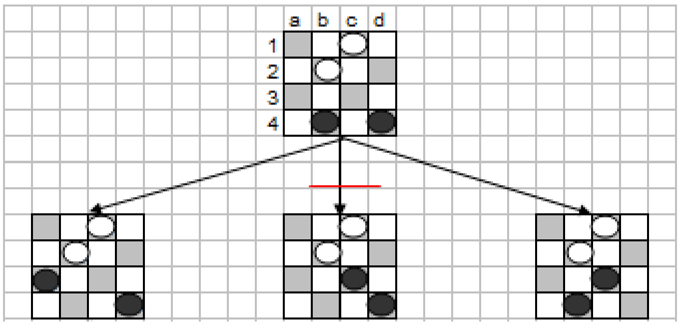
1 teiginys. Jeigu žaidimą pradeda baltosios ėjimu iš a1 į b2, tai juodosios gali pasiekti pergalę.

Įrodymas. Baltosios žaidimą pradeda ėjimu iš a1 į b2, tada turime tokią situaciją (3 pav.).



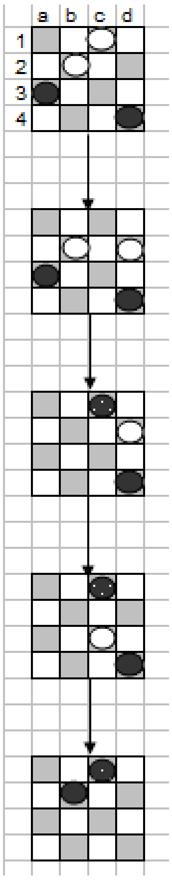
4.2.3 pav. Baltųjų ėjimas iš a1 į b2

Kitą ėjimą atlieka juodosios. Tam atlikti yra trys galimybes: iš b4 į a3, iš b4 į c3, iš d4 į c3 (žr. 4.2.4 pav.).



4.2.4 pav. Juodųjų ėjimas, kai baltosios atliko ėjimą iš a1 į b2

Juodųjų ėjimai iš b4 į a3 ir iš b4 į c3 yra joms laimingi. Kiekvienas žaidėjas siekia laimėti, todėl pasirinkimą iš d4 į c3 atmetame. Nagrinėsime trumpiausią kelią iki juodųjų pergalės (žr. 4.2.5 pav.).



4.2.5 pav.

Trumpiausias kelias iki juodųjų pergalės:

S = {(a1,b2), (b4, a3), (c1,d2), (a3, c1), (d2, c3), (d4, b2)} (baltųjų ėjimai pabraukti). Baltosios eina iš a1 į b2, juodosios – iš b4 į a3 (tokį šaškių išsidėstymą vaizduoja paveikslo viršutinė dalis). Jeigu baltosios eina iš c1 į d2, tai juodosios ėjimu iš a3 į c1 nukerta juodąją šaškę ir tampa dama. Tada baltosios turi vienintelį ėjimą iš d2 į c2. Juodosios ėjimu iš d4 į b2 nukerta baltųjų paskutinę šaškę. Laimi juodosios.

Pakanka kiekvienam žaidėjui atlikti po tris ėjimus ir žaidimas baigiamas.

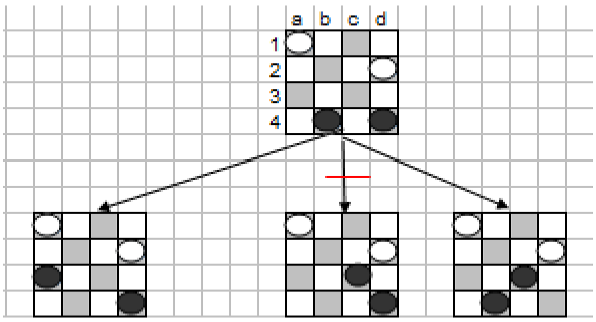
Kai baltosios eina iš iš a1 į b2, tai šie keliai atneša juodiesiems laimėjimą:

S = {(a1,b2), (b4,a3), (b2,c3), (d4,b2), (c1,d2), (b2,a1), (d2,c3), (a1,d4)}.

S = {(a1,b2), (b4,a3), (c1,d2), (a3,c1), (d2,c3), (d4,b2)}.

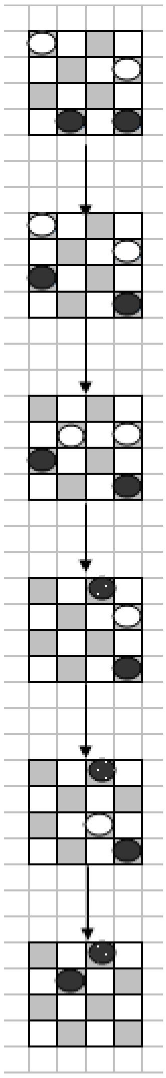
2 teiginys. Jeigu žaidimą pradeda baltosios ėjimu iš c1 į b2, tai juodosios pasiekia pergalę.

Įrodymas. Baltosios atlieka ėjimą iš c1 į b2. Tada juodosios turi tris galimybes iš b4 į a3, iš b4 į c3, iš d4 į c3 (4.2.6 pav.).



4.2.6 pav. Juodųjų ėjimas po baltųjų ėjimo iš c1 į b2

Juodųjų ėjimas iš b4 į c3, jiems yra pralošis, todėl jie šio pasirinkimo nenagrinėsime. Taigi, juodieji renkasi iš b4 į a3 arba iš d4 į c3. Nagrinėsime trumpiausią kelią (4.2.7 pav.).



4.2.7 pav. Trumpiausias kelias iki juodųjų pergalės

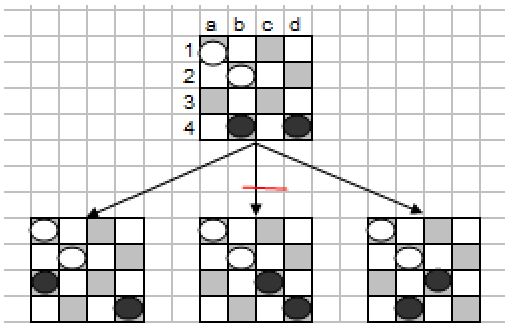
Trumpiausias kelias iki juodųjų laimėjimo toks:

S = {(c1,d2), (b4,a3), (a1,b3), (a2, c1), (d2,c3), (d4,b2)} (baltųjų ėjimai pabraukti).

Pakanka šešių ėjimų (kiekvienam žaidėjui po tris ėjimus) iki juodųjų pergalės.

3 teiginys. Jeigu žaidimą pradeda baltosios ėjimu iš c1 į d2, tai juodosios pasiekia pergalę.

Įrodymas. Juodosios atlikti ėjimui turi tris galimybes: iš b4 į a3, iš b4 į c3, iš d4 į c3 (4.2.8 pav.).



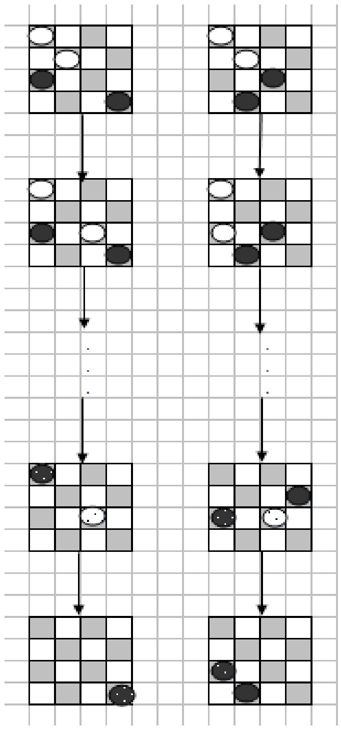
4.2.8 pav. Juodųjų ėjimai, kai baltosios atliko ėjimą c1 į d2

Ėjimas iš b4 į c3 juodosioms atneša pralaimėjimą, todėl nagrinėsime tik ėjimus iš b4 į a3 ir iš d4 į c3. Keliai, atnešantys pergalę juodosioms:

S = {(c1, b2), (b4, a3), (b2, c3), (d4, b2), (a1, c3), (a3, b2), (c3, d4), (b2, a1), (d4, c3), (a1, d4)} (baltųjų ėjimai pabraukti). Reikia atlikti 10 ėjimų, kad juodiesiems būtų pasiekta pergalė (8 pav.).

S = {(c1, b2), (d4, c3), (b2, a3), (c3, d2), (a1, b2), (d2, c1), (b2, c3), (b4, d2), (a3, b4), (c1, a3), (b4, c3), (d3, b1)} (baltųjų ėjimai pabraukti). Reikia atlikti 12 ėjimų juodųjų pergalei pasiekti.

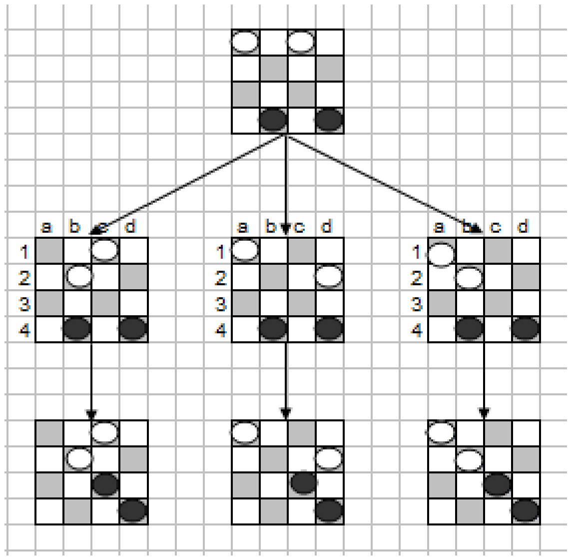
4.2.9 paveikslas vaizduoja juodosioms lemtingus kelius:



4.2.9 pav. Juodosioms lemtingi keliai

4 teiginys. Jeigu juodosios eina iš b4 į c3, tai žaidimas baigiamas lygiosiomis. Kitaip tariant, juodųjų ėjimas iš b4 į c3 nėra joms pergalė.

Įrodymas. Pirmąjį ėjimą atlieka baltosios. Turi tris galimybes (iš a1 į b2, iš c1 į b2 ir iš c1 į d2). Nagrinėsime visus baltųjų ėjimus ir juodųjų iš b4 į c3. Turime tokį lošimo medį (žr. 4.2.10 pav.):



4.2.10 pav. Lošimo medis, kai juodosios eina iš b4 į c3

Kai baltosios eina iš a1 į b2, tai turime tokį kelią:

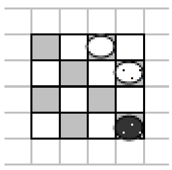
S = {(a1,b2), (b4, c3), (b3, a2), (c3, b2), (a3, b4), (b2, a1), (b4, d3), (d4, c3), (d2, b4), (a1, d4), (b4, d2)}. Šis kelias veda prie lygųjų (žr. 4.2.11 pav.).

Kai baltosios eina iš c1 į b2, tai turime tokį kelią:

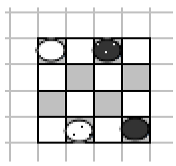
S = {(c1, b2), (b4, c3), (b3, a2), (c3, d2), (a3, b4), (d2, c1)}. Šis kelias veda prie lygųjų (žr. 4.2.12 pav.).

Kai baltosios eina iš c1 į d2, tai turime tokį kelią:

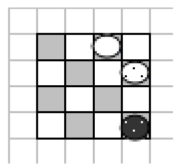
S = {(c1, d2), (b4, c3), (d2, b4), (d4, c3), (b4, d2)}. Šis kelias veda prie (žr. 4.2.13 pav.).



4.2.11 pav. Lygiosios



4.2.12 pav. Lygiosios



4.2.13 pav. Lygiosios

Išvada. Nepriklausomai nuo pirmojo žaidėjo veiksmų, laimėjimą pasiekia antrasis žaidėjas.

4.3 Žaidimas „Akmuo, žirklės, popierius“

Akmuo, žirklės, popierius – žaidimas rankoms rodant ženklus: akmuo, žirklės, popierius. Rodomi ženklai yra pavaizduoti 4.3.1 paveiksle.

akmuo žirklės popierius

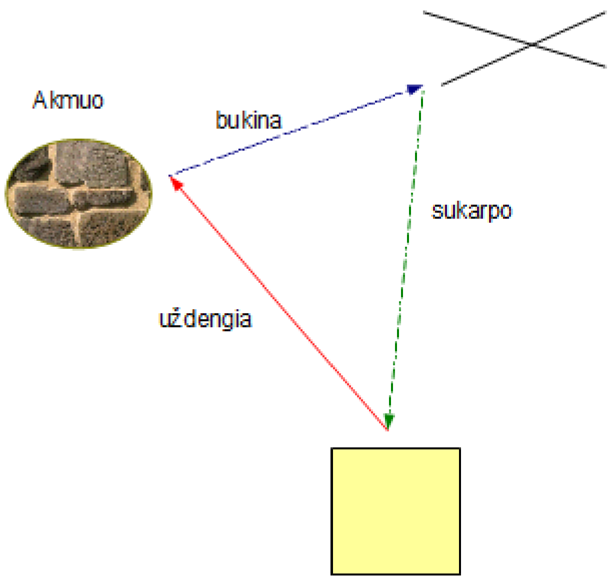
4.3.1 pav. Rankomis rodomi ženklai

Šis žaidimas dažniausia naudojamas išrinkti kokį nors asmenį.. Žaidėjai kartu skaičiuoja: „Akmuo ... žirklės ... popierius ...vienas ... du ... trys ...“ ir tuo pačiu metu mojuoja kumščiais. Sakant „trys“ kartu viena ranka parodoma iš trijų ženklų: akmuo, žirklės ar popierius. Žaidimą gali žaisti du ir daugiau dalyvių.

Laimėtojas nustatomas pagal šias taisykles:

- Akmuo laimi prieš žirkles (akmuo bukina ar laužo žirkles).
- Žirklės laimi prieš popierių (žirklės sukarpo popierių).
- Popierius laimi prieš akmenį (popierius uždengia akmenį).

Žaidimo taisykles pavaizduojame 4.3.2 paveiksle.



4.3.2 pav. Žaidimo taisyklės

Jei abu žaidėjai parodo vienodus ženklus, tai laikoma lygiosiomis.

Visas galimos situacijos vaizduojamos 4.3.1 lentelėje. Pirmojo žaidėjo pasirinkimai vaizduojami eilutėmis, o antrojo žaidėjo – stulpeliais.

Antrasis žaidėjas

<table>
<tr><td></td><td></td><td>O</td><td>><</td><td>|</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>O</td><td>=</td><td>><</td><td>|</td><td>O - akmuo</td></tr>
<tr><td>Pirmasis žaidėjas</td><td>><</td><td>O</td><td>=</td><td>><</td><td>>< - žirklės</td></tr>
<tr><td></td><td>|</td><td>|</td><td>><</td><td>=</td><td>| - popierius</td></tr>
</table>

4.3.1 lent. Galimų žaidimo situacijų rezultatai

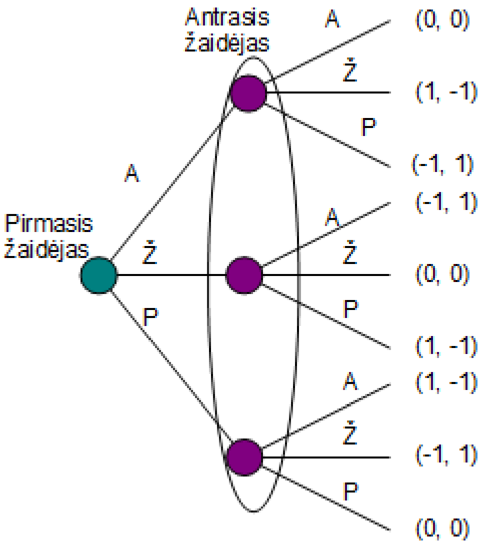
Tai nulinės sumos lošimas, kiek vienas žaidėjas laimi, tiek kitas pralaimi. Laimėtojas gauna 1, o pralaimėtojas praranda 1. Jei baigiama lygiosiomis, tai abiejų laimėjimai po 0.

4.3.2 lentelėje pateikiama žaidimo normalinė forma.

		Antrasis žaidėjas		
		Akmuo	Žirklės	Popierius
Pirmasis žaidėjas	Akmuo	(0, 0)	(1, -1)	(-1, 1)
	Žirklės	(-1, 1)	(0, 0)	(1, -1)
	Popierius	(1, -1)	(-1, 1)	(0, 0)

4.3.2 lent. Žaidimo normalinė forma

Kiekvienas žaidėjas turi po tris strategijas. 4.3.3 paveiksle pateikiamas žaidimo medis.



4.3.3 pav. Lošimo medis

Tarkime, kad žaidėjai nemato vienas kito pasirinkimo ir atlieka veiksmus. Nepriklausomas vertintojas stebi abu ir skelbia rezultatą. Pirmasis žaidėjas turi tris strategijas $S_1 = \{A, Ž, P\}$ ir antrasis žaidėjas taip pat, jo strategijų aibė – $S_2 = \{A, Ž, P\}$. Strategijų aibę $S = \{(A, A), (A, Ž), (A, P), (Ž, A), (Ž, Ž), (Ž, P), (P, A), (P, Ž), (P, P)\}$ sudaro devynios strategijas. Patyrinėkime strategijas išsamiau.

4.3.3 lentelėje pateikiamos gestų kombinacijos, užtikrinančios pirmajam žaidėjui pergalę.

Pirmojo žaidėjo veiksmas	*Antrojo žaidėjo veiksmas*	*Laimėtojas*
akmuo	žirklės	pirmasis žaidėjas
žirklės	popierius	pirmasis žaidėjas
popierius	akmuo	pirmasis žaidėjas

4.3.3 lent. Gestų kombinacijos, užtikrinančios pirmajam žaidėjui pergalę

4.3.4 lentelėje pateikiamos gestų kombinacijos, užtikrinančios antrajam žaidėjui pergalę.

Pirmojo žaidėjo veiksmas	*Antrojo žaidėjo veiksmas*	*Laimėtojas*
akmuo	popierius	antrasis žaidėjas
žirklės	akmuo	antrasis žaidėjas
popierius	žirklės	antrasis žaidėjas

4.3.4 lent. Gestų kombinacijos, užtikrinančios antrajam žaidėjui pergalę

4.3.5 lentelėje pateikiamos gestų kombinacijos, kuriomis pasiekiama lygiosios.

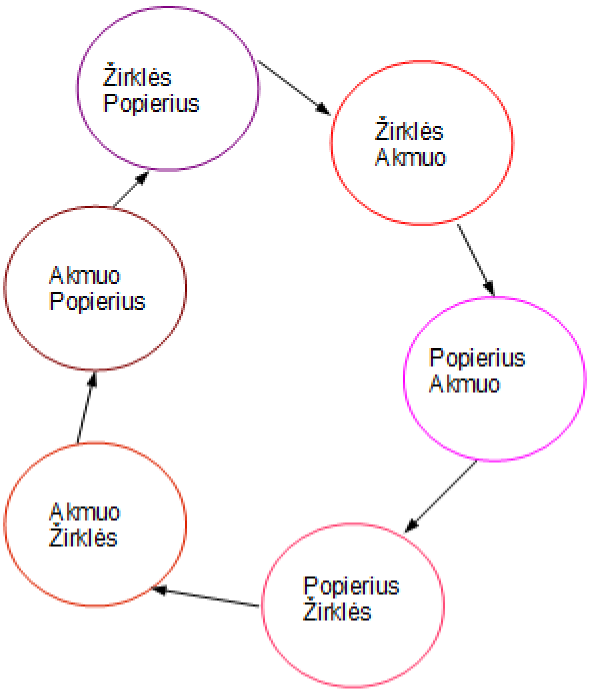
Pirmojo žaidėjo veiksmas	*Antrojo žaidėjo veiksmas*	*Laimėtojas*
akmuo	akmuo	lygiosios
žirklės	žirklės	lygiosios
popierius	popierius	lygiosios

4.3.5 lent. Gestų kombinacijos, pasiekančios lygiąsias

Žaidimą laimėti pirmajam žaidėjui yra tikimybė yra lygi $\frac{1}{3}$, antrajam žaidėjui $-\ \frac{1}{3}$ ir sužaisti lygiosiomis taip pat $\frac{1}{3}$.

Teiginys. Žaidimas „Akmuo, žirklės, popierius“ neturi grynųjų strategijų pusiausvyrų.

Įrodymas. Jei pirmasis žaidėjas pasirenka akmenį, tai antrasis žaidėjas turi pasirinkti popierių. Jei antrasis žaidėjas pasirenka popierių, tai pirmasis žaidėjas turi pasirinkti žirkles. Jei pirmasis žaidėjas pasirenka žirkles, tai antrasis žaidėjas pasirenka akmenį. Jei antrasis žaidėjas pasirenka akmenį, tai pirmasis žaidėjas turi pasirinkti popierių. Jei pirmasis žaidėjas pasirenka popierių, tai antrasis žaidėjas turi pasirinkti žirkles. Jei antrasis žaidėjas pasirenka žirkles, tai pirmasis pasirenka akmenį. Jei pirmasis pasirenka akmenį, tai antrasis pasirenka popierių. Sugrįžome į pradinę padėtį. Šis žaidimas neturi grynųjų strategijų pusiausvyros, nes nėra optimalaus pasirinkimo. 4.3.4 paveiksle pavaizduojame optimalaus pasirinkimo nebuvimą.



4.3.4 pav. Grynųjų strategijų paieška

Žaidime „Akmuo, žirklės, popierius“ žaidėjai atsitiktinai atlieka veiksmus. Jeigu žaidėjas atsitiktinai pasirenka grynąją strategiją, tai jis pasirenka mišriąją strategiją. Įrodysime su mišriosiomis strategijomis susijusį teiginį.

Teiginys. Mišrioji strategija $\left(\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right);\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\right)$ yra Nešo pusiausvyra.

Įrodymas.

Pažymėkime:

p_1 - pirmasis lošėjas renkasi akmenį

p_2 - pirmasis žaidėjas renkasi žirkles

$1 - p_1 - p_2$ - pirmasis žaidėjas renkasi popierių

q_1 - antrasis žaidėjas renkasi akmenį

q_2 - antrasis žaidėjas renkasi žirkles

$1 - q_1 - q_2$ - antrasis žaidėjas renkasi popierių

Nešo pusiausvyrą rasime iš šių lygybių:

$$p_2 - \ + p_1 + p_2 = - \ p_1 - p_2 + \ = p_1 - p_2$$

$$q_2 - \ + q_1 + q_2 = - \ q_1 - q_2 + \ = q_1 - q_2$$

Išsprendę lygtis gauname, kad

$$p_1 = p_2 = \frac{1}{3} \text{ ir } q_1 = q_2 = \frac{1}{3}.$$

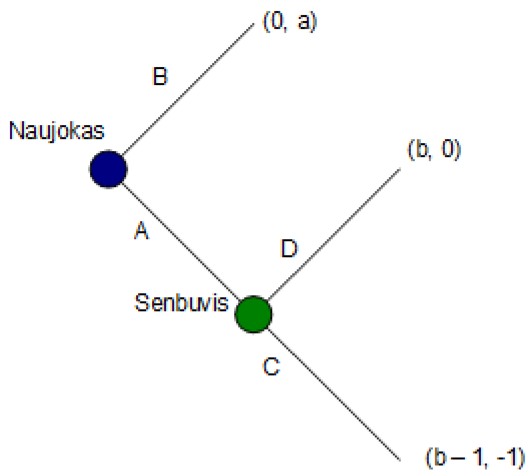
Mišriųjų strategijų pora $\left(\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right);\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\right)$ yra Nešo pusiausvyra.

5. Taikymo pavyzdžiai

5.1 Firmos atėjimas į monopolinę rinką

Teoriškai manoma, kad vienodų prekių rinkoje senbuvis prekybininkas turėtų priimti naujoką, o ne priešintis jo atėjimui. Priešinimasis naujokui pažeidžia ir patį senbuvį. Jeigu naujokas atsirado rinkoje, tai geriausias senbuvio elgesys būtų prisitaikyti prie naujų sąlygų. Tačiau realybė kitokia – senbuviai priešinasi naujokų pasirodymui rinkoje.

Nagrinėsime atvejį, kai turime išsamią informaciją (turime visą informaciją apie kiekvieno dalyvio strategijas ir galimas išlošių tikimybes). Naujokas gali eiti į rinką (strategija A) arba nįeiti į rinką (strategija B). Jeigu naujokas į rinką eina, tai senbuvis gali priešintis jo atėjimui (strategija C) arba įleisti naujoką į rinką (strategija D). Jeigu naujokas nusprendžia į rinką neateiti, tai naujokas nieko negauna, o senbuvio išlošis lygus a. Jeigu naujokas į rinką eina ir senbuvis priešinasi, tai naujoko išlošis yra $b-$, o senbuvio $-$. Tai reiškia, kad senbuvio priešinimasis naujokui pažeidžia ir jį patį. Jeigu naujokas einą į rinką ir senbuvis jį įleidžia, tai naujoko išlošis yra b, o senbuvio – 0. Tai reiškia, kad senbuvis pasiruošia naujoko įėjimui ir nieko nei nepralaimi, nei išlošia (žr. 5.1.1 pav.). Raide a žymimas senbuvio tikimybinis išlošis, o raide b žymimas naujoko tikimybinis išlošis.



5.1.1 pav. Naujoko įėjimo į monopolinę rinką lošimo medis

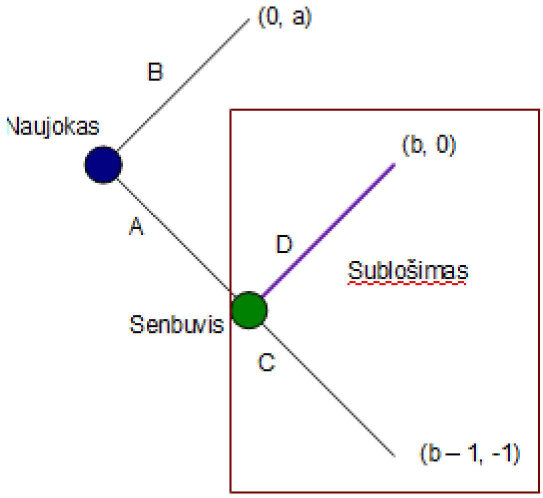
Lošimo medį atitinkanti lošimo normalinė forma tokia:

	C	D
A	$(-\ ,-\ )$	$(,0)$
B	$(,a)$	$(,a)$

5.1 lent. Naujoko įėjimo į monopolinę rinką lošimo normalinė forma

Kai $a > 0$, $b <$, tai lošimas turi dvi Nešo pusiausvyras: (B, C) ir (A, D). Jeigu naujokas eina į rinką (strategija A), tai senbuviui geriausia pasirinkti priešintis (strategija D), jeigu senbuvis priešinasi (strategija D), tai naujokui geriausia ateiti į rinką (strategija A). Taigi, strategija (A, D) yra Nešo pusiausvyra.

Lošimo medis, pateiktas 5.1.1 paveiksle, turi du sublošimus. Vienas iš jų yra pats lošimo medis, o kitas pavaizduotas 5.1.2 paveiksle.

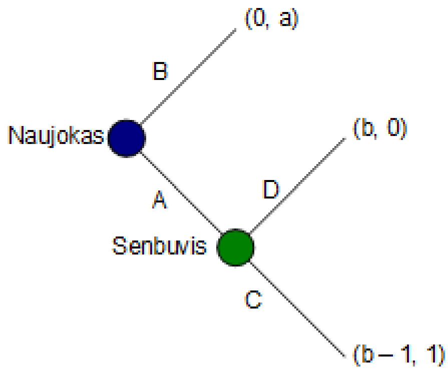


5.1.2 pav. Sublošimo medis

Pusiausvyra (A, D) yra ir sublošimo tobuloji pusiausvyra. Naujokui geriau b, negu $b -$, o senbuviui geriau nieko neišlošti, negu pralošti.

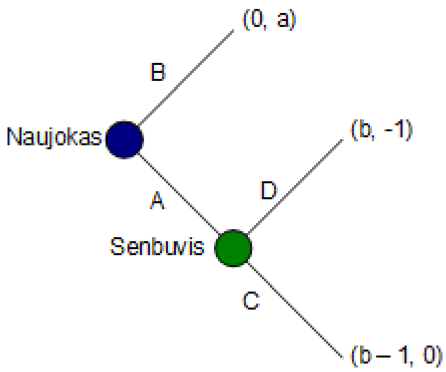
Taigi, visiškos informacijos atveju naujokas eina į rinką ir senbuvis jį įleidžia į rinką.

Senbuvis galima būti stiprus arba silpnas. Silpnu jis vadinamas tada, kai įleidžia naujoką į rinką (žr. 5.1.3 pav.).



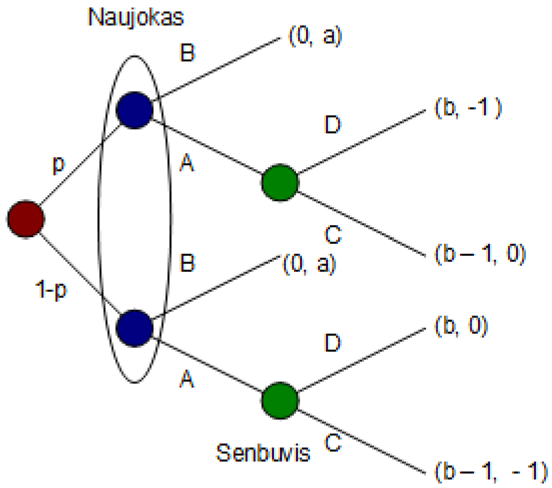
6.1.3 pav. Silpnas monopolininkas

Stipriu senbuviu vadinamas senbuvis tada, kai priešinasi naujoko atėjimui į rinką (žr. 5.1.4 pav.).



5.1.4 pav. Stiprus monopolininkas

Naujokas nežino, ar senbuvis yra stiprus, ar silpnas. Senbuvis aprašomas taip: stiprus su tikimybe p, o silpnas su $1-p$. To nežinodamas potencialus naujokas nusprendžia ateiti į rinką (strategija A) arba neateiti į rinką (strategija B). Pateikiame lošimo medį, vaizduojantį naujoko atėjimą į rinką (žr. 5.1.5 pav.). Viršutinė šaka su tikimybe p parodo stiprųjį senbuvį. Apatinė su tikimybe $1-p$ parodo silpnąjį senbuvį.



5.1.5 pav. Lošimo medis

Jei naujokas nusprendžia neiti į rinką, tai jo išlošis lygus 0. Jeigu naujokas nusprendžia eiti į rinką, tai stiprus senbuvis kovoja, o silpnas priima. Tada naujoko išlošis yra $(1-p)b+p(b-1)=b-p$. Naujokas ateina į rinką tada, kai $b-p=0$. Kai naujokas eina į rinką (strategija A), tai stiprus senbuvis priešinasi (strategija C), o silpnas priima naujoką (strategija D). Egzistuoja sublošimo tobuloji pusiausvyra. Išlošius surašysime normaline forma, kur, pavyzdžiui, strategija CD reiškia, kad stipri firma prisitaiko, o silpna firma kovoja.

Apskaičiuosime išlošius.

Išlošiai, kai pasirenkama strategija (A,DD):

$$p\cdot(b,-1)+(1-p)\cdot(b,0)=(pb,-p)+((1-p)b,0)=(b,-p).$$

Išlošiai, kai pasirenkama strategija (A, DC):

$$p \cdot (b, - \;) + (- p)(b - \;, - \;) = (pb, -p) + (b - \; - pb + p, - \; + p) = (b - (- p), - \;).$$

Išlošiai, kai pasirenkama strategija (A, CD):

$$p \cdot (b - \;, 0) + (- \;) \cdot (b, 0) = (pb - \;, 0) + (b - \; p, 0) = (b - \;, 0).$$

Išlošiai, kai pasirenkama strategija strategija (A, DD):

$$p \cdot (b - 1, 0) + (- \;) \cdot (b - 1, -1) = (pb - \;, 0) + (b - 1 - \; b + \;, -1 + \;) = (b - 1, -1 + \;).$$

Naujoko ėjimą į rinką atitinkanti normalinė forma (žr. 5.1.2 lent).

	DD	DC	CD	CC
B	$(0, a)$	$(0, a)$	$(0, a)$	$(0, a)$
A	$(b, - \;)$	$(b - (- p), \;)$	$(b - \;, 0)$	$(-1, - 1(- \;))$

5.1.2 lent. Lošimo normalinė forma

Nagrinėkime, kai $b - p > \;$. Tada (A, CD) ir (B, CC) yra Nešo pusiausvyros. Strategija (A, CD) yra Nešo pusiausvyra, nes naujoko išlošis $b - \;$ yra optimalus, o senbuviui geriau nieko neišlošti negu pralošti. Pusiausvyra (A, CD) yra ir sublošimo tobuloji pusiausvyra. Atėjimas į rinką įvyksta tada ir tada, kai $b > \;$. Silpnasis senbuvis visada prisitaiko, o stiprus visada priešinasi.

Išnagrinėkime atvejį, kai $p > \;$. Stiprus senbuvis priešinasi ir neleidžia ateiti naujokui. Senbuvio išlošis lygus a. Kitu atveju naujokas ateina į rinką.

5.2 Stackelbergo modelis

Stackelbergo lyderio modelis yra strateginis lošimas. Modelis pavadintas vokiečių ekonomisto Heinrich Freiherr von Stackelberg vardu. Buvo paskelbtas 1934 m. veikale „Rinkos struktūra ir pusiausvyra“ (Marktform und Gleichgewicht) . Kartais šis modelis vadinamas rinkos modeliu. Tai duopolijos modelis, kuriame pirmoji firma yra kiekio lyderė, pasirenkant produkcijos kiekį, o antroji – kiekio sekėja.

Nagrinėsime, kokią gamybos apimtį turi pasirinkti pirmoji firma, kad jos pelnas būtų maksimalus. Pirmosios firmos pelnas priklauso nuo to, kokią antrosios firmos reakciją ji numato. Manoma, kad pirmoji firma tikisi, jog antroji firma taip pat stengsis maksimizuoti savo pelną, atsižvelgdama į pirmosios firmos jau pasirinktą gamybos apimtį. Vadinasi, kad pirmoji firma galėtų nustatyti savo gamybos apimtį, ji turi įvertinti antrosios firmos pelno maksimizavimo problemą.

Tarkime, pirma firma nusprendžia gaminti kiekį q_1. Antroji atsako pasirinkdama kiekį q_2. Abi firmos žino, kad produkcijos kaina P rinkoje priklauso nuo bendros gamybos apimties $q_1 + q_2$. Vadinasi, $P = P(q_1 + q_2)$.

Pirmosios firmos pelnas Π_1 yra lygus pajamų ir išlaidų skirtumui, o antrosios firmos produkcijos kiekis q_2 priklauso nuo pirmosios firmos produkcijos kiekio q_1, taigi $q_2(q_1)$.

$$\Pi_1 = P(q_1 + q_2(q_1)) \cdot q_1 - C_1(q_1). \tag{5.2.1}$$

Pelno Π_1 kitimo greitį (ir pobūdį) nusako išvestinė $\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1}$. Apskaičiavę ją, gausime:

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1} = \frac{\partial P(q_1 + q_2(q_1))}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial q_2(q_1)}{\partial q_1} \cdot q_1 + P(q_1 + q_2(q_1)) - \frac{\partial C_1(q_1)}{\partial q_1}.$$

Ieškome gamybos planų q_1, kuriems esant įgyjama didžiausia Π_1 reikšmė. Sprendžiama lygtį:

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1} = \frac{\partial P(q_1 + q_2)}{\partial q_2} \cdot \left(\frac{\partial q_2(q_1)}{\partial q_1} + 1\right) q_1 + P(q_1 + q_2(q_1)) - \frac{\partial C_1(q_1)}{\partial q_1} = 0. \tag{5.2.2}$$

Antrosios firmos pelnas Π_2 yra lygus jos pajamų ir išlaidų skirtumui:

$$\Pi_2 = P(q_1 + q_2) \cdot q_2 - C_2(q_2) \tag{5.2.3}$$

Šio pelno kitimą nusako dalinė išvestinė :

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial q_2} = \frac{\partial P(q_1 + q_2)}{\partial q_2} \cdot q_2 + P(q_1 + q_2) - \frac{\partial C_2(q_2)}{\partial q_2}.$$

Ieškome taškų, kuriuose įgyjama didžiausia pelno Π_2 reikšmė. Šiuo tikslu sprendžiame lygtį

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial q_2} = \frac{\partial P(q_1 + q_2)}{\partial q_2} \cdot q_2 + P(q_1 + q_2) - \frac{\partial C_2(q_2)}{\partial q_2} = 0. \tag{5.2.4}$$

Išnagrinėkime pavyzdį, kai P yra tiesinė funkcija:

$P(q_1 + q_2) = (a - b(q_1 + q_2))$, čia a ir b yra konstantos.

Be to, tarkime, kad išlaidų funkcijos $C_1(q_1)$ ir $C_2(q_2)$ tenkina šias sąlygas:

$$\frac{\partial C_i(q_i)}{\partial q_i \cdot \partial q_j} = 0, \; j = 1,2, \; j \neq i$$

$$\frac{\partial C_i(q_i)}{\partial q_i} = 0, \; j = 1,2, \; j \neq i$$

Iš (5.2.3) gauname, antrosios firmos pelnas Π_2 :

$$\Pi_2 = (a - b(q_1 + q_2)) \cdot q_2 - C_2(q_2).$$

Ieškome taškų, kuriuose įgyjama didžiausia kiekio q_2 reikšmė. Sprendžiame lygtį:

$$\frac{\partial (a-b(q_1+q_2))}{\partial q_2}\cdot q_2 + a - b(q_1+q_2) - \frac{\partial C_2(q_2)}{\partial q_2} = 0$$

$$-bq_2 + a - b(q_1+q_2) - \frac{\partial C_2(q_2)}{\partial q_2} = 0$$

$$q_2 = \frac{a - bq_1 - \frac{\partial C_2(q_2)}{\partial q_2}}{2b} \tag{5.2.5}$$

Gauname pirmosios firmos peln1 Π_1 pagal (5.2.1):

$$\Pi_1 = (a - b(q_1 + q_2(q_1)))\cdot q_1 - C_1(q_1)$$

$$\Pi_1 = \left(a - b\left(q_1 + \frac{a - bq_1 - \frac{\partial C_2(q_2)}{\partial q_2}}{2b} \right) \right) q_1 - C_1(q_1)$$

$$\Pi_1 = \left(\frac{a - bq_1 + \frac{\partial C_2(q_2)}{\partial q_2}}{2} \right) q_1 - C_1(q_1)$$

Ieškome taškų, kuriuose įgyjama didžiausia pelno Π_1 reikšmė. Sprendžiame lygtį

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1} = \left(\frac{a - 2bq_1 + \frac{\partial C_2(q_2)}{\partial q_2}}{2} \right) - \frac{\partial C_1(q_1)}{\partial q_1} = 0$$

Gauname pirmosios firmos kiekį q_1^*

$$q_1^* = \frac{a + \frac{\partial C_2(q_2)}{\partial q_2} - 2\cdot\frac{\partial C_1(q_1)}{\partial q_1}}{2b} \tag{5.2.6}$$

Antrosios firmos kiekį randame (5.2.6) įrašę į (5.2.5)

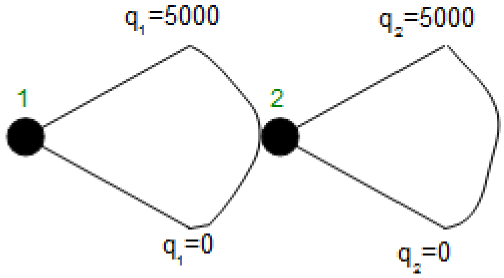
$$q_2^* = \frac{a - b\cdot\frac{a + \frac{\partial C_2(q_2)}{\partial q_2} - 2\cdot\frac{\partial C_1(q_1)}{\partial q_1}}{2b} - \frac{\partial C_2(q_2)}{\partial q_2}}{2b}$$

Pertvarkę gauname:

$$q_2^* = \frac{a - 3\cdot\frac{\partial C_2(q_2)}{\partial q_2} + 2\cdot\frac{\partial C_1(q_1)}{\partial q_1}}{4b}$$

Pora (q_1^*, q_2^*) yra Stackelbergo modelio (kai $P(q_1+q_2) = (a - b(q_1+q_2))$), pusiausvyra.

Aptarkime, kaip Stackelbergo modelis vaizduojamas lošimo medžiu. Šį lošimo medį (žr. 5.2.1 pav.) sudaro dvi viršūnės (q_1 ir q_2). Analizuokime šį medį, kai $q_1 \in [0;5000]$, $q_2 \in [0;5000]$. Analizuojame iš pabaigos į pradžią. Kiekio kitimo intervalai medyje vaizduojami lankais.



5.2.1 pav. Stackelbergo modelio lošimo medis

Turime rasti geriausią kiekvienos firmos strategijų rinkinį. Firmų strategijos susiję. Anksčiau spręsime pirmiau antrosios firmos problemas, o poto pirmosios firmos. Turime surasti antrosios firmos optimalų produkcijos kiekį.

Antroji firma pasirenka gaminti produkcijos kiekį q_2. Tada jos maksimalus pelnas $\Pi_2 = 5000 - q_1 - q_2 - c_2$.

Optimalus antrosios firmos pelnas:

$$q_2 = \frac{5000 - q_1 - c_2}{2}$$

Pirmoji firma pasirenka produkcijos kiekį q_1. Tada jos pelnas yra lygus $\Pi_1 = 5000 - q_1 - q_2 - c_1$. Randame maksimalų pirmosios firmos kiekį:

$$q_1^* = \frac{5000 - 2c_1 + c_2}{2}.$$

Kai pirmoji firma pasirenka gaminti produkcijos kiekį q_1^*, tai antroji firma pasirenka gaminti produkcijos kiekį q_2^*:

$$q_2^* = \frac{5000 + 2c_1 - 3c_2}{4}$$

Panagrinėkime, kai abiejų firmų išlaidos vienodos ($c_1 = c_2 = 1000$). Tada turime:

$$q_1^* = 2000$$

$$q_2^* = 1000.$$

Pirmoji firma gamina dvigubai daugiau produkcijos negu antroji firma.

Išvados

Išnagrinėjus lošimo sąvokas, Nešo pusiausvyrą, išanalizavus žaidimus ir išplėstinės formos lošimų taikymą ekonomikoje, buvo gautos tokios išvados:

1. Žaidimo „Kryžiukai – nuliukai“ analizėje suformuluotas ir įrodytas teiginys: „Nepriklausomai nuo pirmojo žaidėjo veiksmų, antrasis žaidėjas gali pasiekti lygiąsias“.
2. Žaidimo „Mini šaškės“ analizėje suformuluoti ir įrodyti 4 teiginiai. Iš teiginių gaunama tokia išvada, kad nepriklausomai nuo pirmojo žaidėjo veiksmų, laimėjimą pasiekia antrasis žaidėjas.
3. Žaidimas „Akmuo, žirklės, popierius“ išnagrinėtas Nešo pusiausvyros egzistavimo požiūriu Įrodyta, kad žaidimas neturi Nešo pusiausvyros grynųjų strategijų aibėje, bet mišriųjų strategijų pora $\left(\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right);\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\right)$ yra Nešo pusiausvyra.
4. Pateikti du išplėstinės formos lošimų taikymo ekonomikoje: pavyzdžiai Stackelbergo modelis ir naujoko atėjimo į monopolinę rinką modelis.

Summary

Games of Extensive Form

Jurgita Zenevičiūtė

The topic of this paper is Games of Extensive Form.

The aim of this paper is to analyse games of extensive form and their application. In order to achieve this aim, the following tasks were formulated:

1. To analyse the concepts by illustrating them with examples.
2. To study Nash equilibrium.
3. To analyse games, referring to the games of extensive form.
4. To introduce some examples of games of extensive form and their application in economics.

This paper consists of five sections, including the understanding of the games, definition of games of extensive form, Nash equilibrium, examples of games of extensive form and application tasks. There are also two appendixes included. In the first section the understanding of the games is presented as well as the main concepts of it and the classification of the games. The second section provides the reader with the information consisting of the main concepts of a game tree, in addition to definitions of games of extensive form. The third section defines Nash equilibrium and how can it be found in games of extensive form. In the next section the games *Small Crosses – Zeros, Mini Checkers and Stone-Scissors-Paper* are analysed with a view to games of extensive form. The last but not least section presents the application in economics of games of extensive form.

Literatūros sąrašas

1. R. J. Weber. Games with Incomplete Information, *Game theory: the New Palgrave,* London: W. W. Norton, 1989, p. 149–155.
2. D. M. Kreps. Nash Equilibrium, *Game theory: the New Palgrave,* London: W. W. Norton, 1989, p. 167–177.
3. H. Sonnenschein. Oligopoly and Game Theory, *Game theory: the New Palgrave,* London: W. W. Norton, 1989, p. 185–193.
4. A. Rapoport. *Two – person game theory: the essential ideas,* Ann Arbor: The University of Michigan Press, 1966, p. 13–21, 37–53.
5. C. Montet, D. Serra. *Game theory & economics,* Basingstoke: Palgrave Macmillan, 2003, p. 10–22, 63–96.
6. M. J. Osborne. *An introduction to game theory,* Oxford: Oxford University Press, 2004, p. 153–230.
7. H. Peters, K. Vrieze. *A course in Game theory,* Aachen: Verlag der Augustinus Buchhandlung, 1993, p. 2–10.
8. J. Bergin. *Microeconomic theory – a concise course,* Oxford: Oxford University Press, 2005, p. 147–178.
9. E. Vilkas. *Kas tai yra lošimų teorija,* Vilnius: Mokslas, 1976, p. 12–25.
10. A. Greenwald. Matrix Games and Nash Equilibrium, http://www.cs.brown.edu/courses/cs244/notes/ne.pdf, prisijungimo laikas: 2010-05-03
11. A. Brandenburger. Game Trees, http://pages.stern.nyu.edu/~abranden/tree-01-04-07.pdf, prisijungimo laikas: 2010-04-25
12. K. Etessami. Algorithmic Game Theory and Applications, http://www.inf.ed.ac.uk/teaching/courses/agta/lec1.pdf, prisijungimo laikas: 2010-02-20
13. T. Rosenblat. Extensive Form Game, http://www.nber.org/~rosenbla/econ311/lecture/handout265-13.pdf, prisijungimo laikas: 2010-03-19

1 priedas