VILNIAUS UNIVERSITETAS

JONAS ŠIURYS

Tiesinės rekurenčiosios sekos sudarytos iš sudėtinių skaičių

Daktaro disertacijos santrauka

Fiziniai mokslai, matematika (01P)

Vilnius, 2013

Disertacija rengta 2009–2013 metais Vilniaus universitete.

Mokslinis vadovas:
prof. habil. dr. Artūras Dubickas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)
Konsultantas:
doc. dr. Paulius Drungilas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Disertacija ginama Vilniaus universiteto Matematikos mokslo krypties taryboje:

Pirmininkas:

prof. dr. Gediminas Stepanauskas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Nariai:

prof. habil. dr. Antanas Laurinčikas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

prof. habil. dr. Eugenijus Manstavičius (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

prof. dr. Aleksandras Krylovas (Mykolo Romerio universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

doc. dr. Renata Macaitienė (Šiaulių universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Oponentai:

prof. dr. Ramūnas Garunkštis (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

prof. dr. Darius Šiaučiūnas (Šiaulių universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Disertacija bus ginama viešame Matemetikos mokslo krypties tarybos posėdyje 2013 m. spalio mėn. 4 d. 14 val. Matematikos ir informatikos fakulteto 102 auditorijoje.
Adresas: Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius, Lietuva.
Disertacijos santrauka išsiuntinėta 2013 m. rugsėjo 2 d..
Disertaciją galima peržiūrėti Vilniaus universiteto bibliotekoje.

VILNIUS UNIVERSITY

JONAS ŠIURYS

Linear recurrence sequences of composite numbers

Summary of doctoral dissertation

Physical sciences, mathematics (01P)

Vilnius, 2013

The scientific work was carried out in 2009–2013 at Vilnius University.

Scientific supervisor:
prof. habil. dr. Artūras Dubickas (Vilnius University, physical sciences, mathematics – 01P)
Scientific adviser:
doc. dr. Paulius Drungilas (Vilnius University, physical sciences, mathematics – 01P)

The dissertation is to be defended at the Council of Mathematics of Vilnius University:

Chairman:

prof. dr. Gediminas Stepanauskas (Vilnius University, physical sciences, mathematics – 01P)

Members:

prof. habil. dr. Antanas Laurinčikas (Vilnius University, physical sciences, mathematics – 01P)

prof. habil. dr. Eugenijus Manstavičius (Vilnius University, physical sciences, mathematics – 01P)

prof. dr. Aleksandras Krylovas (Mykolas Romeris University, physical sciences, mathematics – 01P)

doc. dr. Renata Macaitienė (Šiauliai University, physical sciences, mathematics – 01P)

Opponents:

prof. dr. Ramūnas Garunkštis (Vilnius University, physical sciences, mathematics – 01P)

prof. dr. Darius Šiaučiūnas (Šiauliai University, physical sciences, mathematics – 01P)

The dissertation will be defended at the public meeting of the Council of Mathematics on October 4, 2013 at 2pm in Faculty of Mathematics and Informatics, lecture room 102.
Address: Naugarduko st. 24, LT-03225 Vilnius, Lithuania.
The summary of the dissertation was distributed on 2 September, 2013.
The dissertation is available at the library of Vilnius University.

Disertacinio darbo aprašymas

1 Tyrimo objektas

Tiesinė rekurenčioji seka $\{x_n\}$, $n = 0, 1, \ldots$, yra apibrėžiama rekurenčiuoju sąryšiu

$$x_n = a_{d-1}x_{n-1} + a_{d-2}x_{n-2} + \cdots + a_0 x_{n-d}, \quad n \geqslant d,$$

ir pradiniais nariais $x_0, x_1, \ldots, x_{d-1}$. Čia $a_0, a_1, \ldots, a_{d-1}$ yra fiksuoti sveikieji skaičiai, o d – natūralusis skaičius. Jei $a_0 \neq 0$, tai sekos $\{x_n\}$, $n = 0, 1, \ldots$ *eilė* yra lygi skaičiui d. Pradiniai nariai $x_0, x_1, \ldots, x_{d-1}$ gali būti pasirenkami laisvai.

Sudėtiniais skaičiais vadinsime natūraliuosius skaičius, kurie nėra pirminiai ir nelygūs 1.

Disertacijos tyrimo objektas yra tiesinės rekurenčiosios sekos $\{x_n\}$, $n = 0, 1, \ldots$, kurių kiekvienas narys $|x_n|$ yra sudėtinis skaičius.

2 Darbo struktūra ir apimtis

Disertaciją sudaro šeši skyriai ir literatūros sąrašas. Įvade supažindinama su disertacijos tyrimo objektais, nagrinėjamais uždaviniais ir gautais rezultatais. Literatūros apžvalgoje aptariami žinomi rezultatai ir susiję uždaviniai. Kituose trijuose skyriuose formuluojami gauti moksliniai rezultatai, pateikiami detalūs jų matematiniai įrodymai. Paskutiniame skyriuje suformuluojamos išvados. Darbo apimtis 68p.

3 Pagrindiniai uždaviniai

Disertacijoje buvo keliami tokie uždaviniai:

1. **Antros eilės rekurenčiosios sekos.** Trečiajame disertacijos skyriuje nagrinėjamos sekos apibrėžtos antros eilės rekurenčiuoju sąryšiu $x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2}$, $n = 2, 3, \ldots$. Ar su visais sveikaisiais skaičiais a ir b egzistuoja tokie tarpusavyje pirminiai sveikieji skaičiai x_0 ir x_1, kad $|x_n|$ būtų sudėtinis skaičius su visais $n = 0, 1, 2, \ldots$?

2. **Tribonačio tipo sekos.** Ketvirtajame disertacijos skyriuje nagrinėjamas atskiras trečios eilės rekurenčiųjų sekų atvejis, t. y. sekos apibrėžtos rekurenčiuoju sąryšiu $x_n = x_{n-1} + x_{n-2} + x_{n-3}$, $n = 3, 4, 5, \ldots$. Ar egzistuoja tokie tarpusavyje pirminiai pradiniai nariai x_0, x_1, x_2, kad kiekvienas sekos $\{x_n\}$ narys yra sudėtinis skaičius? Uždavinio motyvacija kyla iš Graham'o rezultato. Jis įrodė, kad egzistuoja Fibonačio tipo seka, t. y. seka, apibrėžta rekurenčiuoju sąryšiu $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, $n = 2, 3, 4, \ldots$, sudaryta iš sudėtinių skaičių.

3. **Aukštesnių eilių rekurenčiosios sekos.** Penktasis disertacijos skyrius yra skirtas apibendrinti ir išplėsti tribonačio tipo sekoms gautus rezultatus. Disertacijoje tyrinėjama su kuriais k egzistuoja tokie tarpusavyje pirminiai pradiniai nariai x_0, x_1, $\ldots$, x_{k-1}, kad seka, apibrėžta rekurenčiuoju sąryšiu $x_n = x_{n-1} + x_{n-2} + \cdots + x_{n-k}$, $n = k, k+1, k+2, \ldots$, yra sudaryta tik iš sudėtinių skaičių. Nurodyta begalinė tokių k seka.

4 Tyrimų metodika

Tiriant tiesines rekurenčiąsias sekas, dažnai naudojama visus sveikuosius skaičius *dengianti liekanų sistema* (covering system). Pirmasis tokią sistemą panaudojo Erdős'as 1950 m. Dengianti liekanų sistema yra baigtinė aibė liekanų klasių, kurių sąjunga dengia visus sveikuosius skaičius, t. y. kiekvienas sveikasis skaičius n priklauso bent vienai liekanų klasei.

Nagrinėjant tiesinę rekurenčiąją seką $\{x_n\}$ sudarytą iš sudėtinių skaičių siekiama rasti dengiančiąją liekanų sistemą su šiomis savybėmis:

- kiekvienas sveikasis skaičius priklauso bent vienai liekanų klasei;
- jei m priklauso liekanų klasei R, tada x_m dalijasi iš pirminio skaičiaus p_R, kuris priklauso tik nuo liekanų klasės R, bet ne nuo m.

Naudojant dengiančiąją liekanų sistemą tiesinėms rekurenčiosioms sekoms tirti, dažnai prireikia kompiuterinių skaičiavimų. Pirmiausia mes sugeneruojame dengiančiąją liekanų sistemą, tenkinančią tam tikras savybes. Tai nėra lengva užduotis, ypač kai liekanų klasių yra daug. Antra užduotis yra išspręsti lyginių sistemą naudojant kinų liekanų teoremą. Sprendiniai dažnai būna milžiniški skaičiai. Šie algoritmai yra įgyvendinti naudojant formalių skaičiavimų sistemą PARI/GP.

Nagrinėjant antros eilės rekurenčiąsias sekas naudosimės *dalių sekų* savybėmis, kai kuriais kūnų teorijos faktais, bei Dirichlet teorema apie pirminius skaičius aritmetinėje progresijoje.

5 Moksliniai rezultatai

5.1 Antros eilės tiesinės rekurenčiosios sekos sudarytos iš sudėtinių skaičių

Pilnai išnagrinėtos antros eilės tiesinės rekurenčiosos sekos.

1 teorema. *Tegu a ir b yra sveikieji skaičiai, o seka $\{x_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ tenkina rekurentųjį sąryšį $x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2}$, $n = 2, 3, 4, \ldots$, su kažkokiais pradiniais nariais x_0 ir x_1. Tarkime, kad $b \neq 0$ ir $(a, b) \neq (-2, -1)$, $(2, -1)$. Tada egzistuoja tokie du tarpusavyje pirminiai sveikieji skaičiai x_0, x_1, kad $|x_n|$ yra sudėtinis skaičius su visais $n = 0, 1, 2, \ldots$.*

Pagal apibrėžimą $b \neq 0$, nes mes nagrinėjame antros eilės rekurenčiąsias sekas. Jei $(a, b) = (-2, -1)$ arba $(a, b) = (2, -1)$, tai su bet kuriais tarpusavyje pirminiais pradiniais nariais x_0 ir x_1 seka $\{|x_n|\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, turi be galo daug pirminių narių.

Kai kuriais specialiais atvejais, kur netiko bendra įrodymo schema, sekos pradiniai nariai buvo suskaičiuoti kompiuterio pagalba:

- $(a, b) = (-1, 1)$, $(x_0, x_1) = (71020044435, 106276436867)$;
- $(a, b) = (-3, -1)$, $(x_0, x_1) = (35, 3294)$;
- $(a, b) = (3, -1)$, $(x_0, x_1) = (35, 3399)$.

5.2 Tribonačio tipo seka sudaryta iš sudėtinių skaičių

Išnagrinėta tribonačio tipo seka, t. y. seka $\{x_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, tenkinanti rekurentųjį sąryšį $x_n = x_{n-1} + x_{n-2} + x_{n-3}$, $n = 3, 4, 5, \ldots$. Įrodyta, kad egzistuoja tokie pradiniai nariai x_0, x_1, x_2, tenkinantys sąlygą $\gcd(x_0, x_1, x_2) = 1$, kad seka $\{x_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ yra sudaryta tik iš sudėtinių skaičių.

2 teorema. *Jei tribonačio tipo sekos $\{x_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ pradiniai nariai yra*

$$x_0 = 99202581681909167232,$$
$$x_1 = 67600144946390082339,$$
$$x_2 = 139344212815127987596,$$

tada $\mathrm{DBD}(x_0, x_1, x_2) = 1$ ir seka $\{x_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ yra sudaryta tik iš sudėtinių skaičių.

Šios sekos kiekvienas narys turi bent vieną pirminį daliklį iš aibės:

$$\{2, 7, 11, 17, 19, 29, 79, 107, 1151, 1621, 8819\}.$$

5.3 Aukštesnių eilių tiesinės rekurenčiosios sekos sudarytos iš sudėtinių skaičių

Išplėsti tribonačio tipo sekoms gauti rezultatai. Kiekvienam k galima apibrėžti sveikųjų skaičių seką $\{x_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ tenkinančią rekurentųjį sąryšį $x_n = x_{n-1} + x_{n-2} + \cdots + x_{n-k}$. Šią seką žymėsime $S_k(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1})$, nes pradiniai nariai $x_0, x_1, \ldots,$ x_{k-1} ją vienareikšmiškai apibrėžia.

3 teorema. *Kiekvienam* $k = 4, 5, \ldots 10$ *ir kiekvienam teigiamam skaičiui* $k \equiv 79 \pmod{120}$ *egzistuoja tokie pradiniai nariai* $(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1})$*, tenkinantys sąlygą* $\mathrm{DBD}(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}) = 1$*, kad seka* $S_k(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1})$ *yra sudaryta tik iš sudėtinių skaičių.*

Kiekvienam $k = 4, 5, \ldots, 10$ sukonstruoti sekų pavyzdžiai.

- $k = 4$

$$\begin{aligned}\{x_n\} = S_4(&696534119799721660344134525554908219959 8,\\ &1095818857032445229758833972872033211223 3,\\ &333850659604315669623350799678490885410 2,\\ &1179435040087850502875107838652070149940 0).\end{aligned}$$

- $k = 5$

$$\{x_n\} = S_5(1670030, 2329659, 907322, 2009158, 580558).$$

- $k = 6$

$$\begin{aligned}\{x_n\} = S_6(&1464682565944196990816164562 0, 1752832365495902948250716786 6,\\ &3489097029635795458288273756 4, 2687333814502106204477357861 3,\\ &5155023153418342591003349920 5, 4262844915599976019742260155 6).\end{aligned}$$

- $k = 7$

$$\{x_n\} = S_7(49540, 32691, 13932, 18650, 9962, 31004, 21990).$$

- $k=8$

$$\{x_n\} = S_8(45401808216635955486 72, 46980788627273312337 61, \\ 61551037975894065620 86, 63722830451034530089 50, \\ 22798260853249471505 46, 19970116230841081657 56, \\ 25580829254880232019 96, 15745290204660716415 36).$$

- $k=9$

$$\{x_n\} = S_9(56233156963124, 2686035354591, 59483968596828, \\ 9266206975260, 5763383142928, 2968317519550, \\ 56580150371822, 38270799500006, 16687306893378).$$

- $k=10$

$$\{x_n\} = S_{10}(2757357, 684913, 197119, 5440883, 4628571, \\ 6208094, 871487, 2421952, 1064430, 5329024).$$

Pažymėkime

$$\{x_n^{(0)}\} = S_{79}(121,782,145,902,289,710,264,493,865,693,731,560,66,697,195, \\ 407,34,310,484,663,325,803,306,205,121,357,230,902,884,30,264, \\ 408,695,693,476,50,66,867,535,407,544,395,484,323,580,803,221, \\ 35,121,102,655,902,119,370,264,918,780,693,136,305,66,782,365, \\ 407,289,820,484,493,920,803,731,120,121,697,910,902,34,200,264).$$

Jei $k=79+120t$, $t=0,1,2,\ldots$, tada seka

$$S_{120t+79}(x_0^{(0)}, x_1^{(0)}, \ldots, x_{120t+78}^{(0)})$$

sudaryta tik iš sudėtinių skaičių. Čia $x_0^{(0)}, x_1^{(0)}, \ldots, x_{120t+78}^{(0)}$ yra sekos $\{x_n^{(0)}\}$ nariai.

Nesunku pastebėti, kad taip sukonstruotos sekos kiekvienas narys dalijasi iš 5, 11 arba 17.

Remiantis empiriniais skaičiavimais iškelta hipotezė:

1 hipotezė. *Tarkime $k \geqslant 2$ yra fiksuotas sveikasis skaičius. Tada egzistuoja tokie sveikieji skaičiai $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$, kad seka $S_k(a_0, a_1, \ldots, a_{k-1})$ yra sudaryta tik iš sudėtinių skaičių.*

Iš aukščiau paminėtų rezultatų išplaukia, kad hipotezė teisinga su be galo daug skirtingų k.

6 Rezultatų aprobavimas

Disertacijos rezultatai buvo pristatyti šiose tarptautinėse konferencijose:

- *27th Journées Arithmétiques*, Vilnius, 2011, birželio 27 – liepos 1 dienomis;
- *Fifteenth International Conference on Fibonacci Numbers and Their Applications*, Eger, Vengrija, 2012, birželio 25 – 30 dienomis.

Rezultatai buvo pristatyti ir aprobuoti Vilnius universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto Tikimybių teorijos ir skaičių teorijos katedros moksliniame seminare 2013 m. gegužės 5 d.

7 Rezultatų naujumas ir vertė

Disertacijoje gauti rezultatai yra nauji. Kai kurie teiginiai buvo žinomi ir anksčiau, tačiau disertacijoje pateikti įrodymai yra originalūs. Kompiuterinių skaičiavimų pagalba gaunamos konkrečios sekos tenkinančios nurodytas sąlygas.

Nors lieka neatsakytų klausimų, tikimės, kad gauti rezultatai bus naudingi tolesniems tyrinėjimams.

8 Publikacijos

8.1 Pagrindinės publikacijos

Daktaro disertacijos rezultatai paskelbti trijuose moksliniuose straipsniuose, kurie yra išspausdinti periodiniuose recenzuojamuose užsienio žurnaluose.

1. A. Dubickas, A. Novikas, and J. Šiurys, *A binary linear recurrence sequence of composite numbers*, Journal of Number Theory **130** (2010), 1737–1749.

2. J. Šiurys, *A tribonacci-like sequence of composite numbers*, Fibonacci Quarterly **49** (2011), no. 4, 298–302.

3. J. Šiurys, *A linear recurrence sequence of composite numbers*, LMS Journal of Computation and Mathematics **15** (2012), 360–373.

8.2 Konferencijų pranešimų tezės

1. A. Novikas, and J. Šiurys, *A binary linear recurrence sequence of composite numbers*, 27th Journées Arithmétiques, June 27 – July 1, 2011, Vilnius, Lithuania: programme and abstract book. Vilnius, Vilniaus universitetas, 2011. Prieiga internetu http://atlas-conferences.com/cgi-bin/abstract/cbbv-22.

2. J. Šiurys, *A linear recurrence sequence of composite numbers*, Fifteenth International Conference on Fibonacci Numbers and Their Applications, June 25 – 30, 2012, Eger, Hungary: abstract book.

9 Summary

The main objects studied in this thesis are linear recurrence sequences of composite numbers. The linear recurrence sequence $\{x_n\}$, $n = 0, 1, \dots$ is defined by the linear recurrence equation

$$x_n = a_{d-1}x_{n-1} + a_{d-2}x_{n-2} + \dots + a_0 x_{n-d}, \quad n \geqslant d,$$

where $a_{d-1}, a_{d-2}, \dots, a_0$ are some constants and d is a positive integer.

- We have studied the second order (binary) linear recurrence sequences. Let $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$, where $b \neq 0$ and $(a,b) \neq (\pm 2, -1)$. We have proved that then there exist two positive relatively prime composite integers x_0, x_1 such that the sequence given by $x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2}$, $n = 2, 3, \dots$, consists of composite terms only, i.e., $|x_n|$ is a composite integer for each $n \in \mathbb{N}$. In the proof of this result we have used certain covering systems, divisibility sequences and, for some special pairs $(a, \pm 1)$, computer calculations. It extended the result of Graham who proved this theorem in the special case of the Fibonacci-like sequence, where $(a,b) = (1,1)$.

- We have found three positive integers x_0, x_1, x_2 satisfying $\gcd(x_0, x_1, x_2) = 1$ such that the sequence $\{x_n\}$, $n = 0, 1, \dots$ given by $x_n = x_{n-1} + x_{n-2} + x_{n-3}$ for $n \geqslant 3$ consists of composite numbers only. The initial values are $x_0 = 99202581681909167232$, $x_1 = 67600144946390082339$, $x_2 = 139344212815127987596$. This is also a natural extension of a similar result of Graham for the Fibonacci-like sequence.

- We have investigated the k-step Fibonacci-like sequence i.e., the sequence of integers $\{x_n\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, satisfying the following relation

  $$x_n = \sum_{i=1}^{k} x_{n-i}$$

  for $n = k,\ k+1,\ k+2 \dots$. We have proved that for each positive integer k in the range $2 \leqslant k \leqslant 10$ and for each positive integer $k \equiv 79 \pmod{120}$ there is a k-step Fibonacci-like sequence of composite numbers and some examples of such sequences are given.

In order to establish the results on binary linear recurrence sequence, we have used the properties of *divisibility sequences*, some elements of the field theory, also Dirichlet's theorem on prime numbers in arithmetic progression.

We have used *covering systems* to construct higher order linear recurrence sequences of composite numbers.

The investigation of recurrence sequences using covering system requires computer algorithms. These algorithms were implemented using a computer algebra system PARI/GP.

We hope that the results of this thesis will be useful for further research.

Literatūra

[1] G. Alkauskas and A. Dubickas, *Prime and composite numbers as integer parts of powers*, Acta Math. Hungar. **105** (2004), 249 – 256.

[2] R.C. Baker and G. Harman, *Primes of the form* $[c^p]$, Math. Zeitschrift **221** (1996), 73 – 81.

[3] Y. Bilu, G. Hanrot, P.M. Voutier, and M. Mignotte, *Existence of primitive divisors of Lucas and Lehmer numbers*, J. Reine Angew. Math. **539** (2001), 75–122.

[4] Y.G. Chen, *On integers of the form* $2^n \pm p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), 1613 – 1616.

[5] Y.G. Chen, R. Feng, and N. Templier, *Fermat numbers and integers of the form* $a^k + a^l + p^a$, Acta Arith. **135** (2008), 51–61.

[6] S.L.G. Choi, *Covering the set of integers by congruence classes of distinct moduli*, Math. Comp. **25** (1971), 885–895.

[7] F. Cohen and J.L. Selfridge, *Not every number is the sum or difference of two prime powers*, Math. Comp. **29** (1975), 79 – 81.

[8] R. Crocker, *On the sum of the prime and two powers of two*, Pacific J. Math. **36** (1971), 103 – 107.

[9] A. Dubickas and A. Novikas, *Integer parts of powers of rational numbers*, Math. Zeitschrift **251** (2005), 635–648.

[10] A. Dubickas, A. Novikas, and J. Šiurys, *A binary linear recurrence sequence of composite numbers*, J. Number Theory **130** (2010), 1737–1749.

[11] P. Erdős, *On integers of the form* $2^k + p$ *and some related problems*, Summa Brasil. Math. **36** (1950), 113–123.

[12] I. Flores, *Direct calculation of k-generalized Fibonacci numbers*, Fibonacci Quart. **5** (1967), 259–266.

[13] W. Forman and H. N. Shapiro, *An arithmetic property of certain rational powers*, Comm. Pure Appl. Math. (1967), 561 – 573.

[14] GREAT INTERNET MERSENNE PRIME SEARCH (GIMPS), `http://mersenne.org/`.

[15] R.L. GRAHAM, *A Fibonacci-like sequence of composite numbers*, Math. Mag. **37** (1964), 322–324.

[16] R. GUY, *Unsolved problems in number theory*, Springer, New York, 2004.

[17] M. HALL, *Divisibility sequences of third order*, Am. J. Math. **58** (1936), 577–584.

[18] A.S. IZOTOV, *Second-order linear recurrences of composite numbers*, Fibonacci Quart. **40** (2001), no. 3, 266 – 268.

[19] J. KLAŠKA, *A search for Tribonacci-Wieferich primes*, Acta Math. Univ. Ostrav. **16** (2008), 15–20.

[20] D.E. KNUTH, *A Fibonacci-like sequence of composite numbers*, Math. Mag. **63** (1990), 21–25.

[21] H.W. LENSTRA, *Primality testing*, Studieweek Getaltheorie en Computers, Amsterdam, Sept. 1-5 1980.

[22] F. LUCA AND P. STĂNICĂ, *Fibonacci numbers that are not sums of two prime powers*, Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005), 1887 – 1890.

[23] E. MANSTAVIČIUS, *Analizinė ir tikimybinė kombinatorika*, TEV, Vilnius, 2007.

[24] J.W. NICOL, *A Fibonacci-like sequence of composite numbers*, Electron. J. Comb. **6** (1999), no. #R44, 6p.

[25] T.D. NOE AND J.V. POST, *Primes in Fibonacci n-step and Lucas n-step sequences*, J. Integer Seq. **8** (2005), no. Art. 05.4.4, 12p.

[26] A. NOVIKAS, *Composite numbers in the sequences of integers*, Ph.D. thesis, Vilnius University, 2012.

[27] THE SEVENTEEN OR BUST, `http://www.seventeenorbust.com/stats/`.

[28] PROTH SEARCH PAGE, `http://www.prothsearch.net/sierp.html`.

[29] H. PAN AND W. ZHANG, *On the integers of the form $p^2+b^2+2^n$ and $b_1^2+b_2^2+2^{n^2}$*, Math. Comp. **80** (2011), 1849 – 1864.

[30] J.C. Parnami and T.N. Shorey, *Subsequences of binary recursive sequences*, Acta Arith. **40** (1982), 193–196.

[31] C. Pomerance, *Recent developments in primality testing*, Math. Intelligencer **3** (1981), no. 3, 97 – 105.

[32] N.P. Romanoff, *Über einige sätze der additiven zahlentheorie*, Math. Ann. **57** (1934), 668 – 678.

[33] W. Sierpiński, *Sur un problème concernant les nombres* $k \cdot 2^n + 1$, Elem. Math. **15** (1960), 73–74.

[34] J. Šiurys, *A tribonacci-like sequence of composite numbers*, Fibonacci Quart. **49** (2011), no. 4, 298–302.

[35] L. Somer, *Second-order linear recurrences of composite numbers*, Fibonacci Quart. **44** (2006), no. 4, 358–361.

[36] Z.W. Sun, *On integers not of the form* $\pm p^a \pm q^b$, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), 997–1002.

[37] The PARI Group, *PARI/GP, version* 2.5.3, 2012, Available online at `http://pari.math.u-bordeaux.fr/`.

[38] M. Vsemirnov, *A new Fibonacci-like sequence of composite numbers*, J. Integer Seq. **7** (2004), no. Art. 04.3.7, 3 p.

[39] M.E. Waddill, *Some properties of a generalized Fibonacci sequence modulo* m, Fibonacci Quart. **16** (1978), 344–353.

[40] S.S. Wagstaff, *Divisors of Mersenne numbers*, Math. Comp. **40** (1983), 385–397.

[41] H.S. Wilf, *Letters to the editor*, Math. Mag. **63** (1990), 284.

[42] K.J. Wu and Z.W. Sun, *Covers of the integers with odd moduli and their applications to the forms* $x^m - 2^n$ *and* $x^2 - F_{3n}/2$, Math. Comp. **78** (2009), no. 267, 1853 – 1866.

[43] S.Y. Yan, *Number theory for computing*, 2nd ed., Springer, Berlin, 2002.

10 Trumpos žinios apie autorių

Gimimo data ir vieta:

1984 m. gruodžio 13 d., Šilalės raj.

Išsilavinimas ir kvalifikacija:

1991 – 2000 m. Rietavo katalikiška vidurinė mokykla.

2000 – 2003 m. KTU Gimanazija.

2003 – 2007 m. Matematikos bakalauras, Vilniaus universitetas.

2007 – 2009 m. Matematikos magistras, Vilniaus universitetas.

2009 – 2013 m. Matematikos doktorantūra, Vilniaus universitetas.

Darbo patirtis:

2012 – 2013 m. tikimybių teorijos ir skaičių teorijos katedros asistentas, Vilniaus universitetas.