ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATIKOS KATEDRA

Donatas Šemiotas

DISKRETI RIBINĖ TEOREMA BENDROSIOMS DIRICHLĖ EILUTĖMS MEROMORFINIŲ FUNKCIJŲ ERDVĖJE

Magistro darbas

Darbo vadovė:
lekt. dr. R. Macaitienė

ŠIAULIAI
2008

Turinys

Įvadas

Sakykime, $s = \sigma + it$ yra kompleksinis kintamasis, $\mathbb{R}$ bei $\mathbb{C}$ yra atitinkamai realiųjų ir kompleksinių skaičių aibės. Eilutė

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-\lambda_{m^s}}, \tag{1}$$

kur $a_m \in \mathbb{C}$ ir $\lambda_m \in \mathbb{R}$, $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < ...$, $\lim\limits_{m\to\infty} \lambda_m = +\infty$, vadinama bendrąja Dirichlė (Dirichlet) eilute su koeficientais a_m ir eksponentėmis λ_m. Jeigu λ_m =log$m$, turime paprastą Dirichlė eilutę

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s}.$$

Gerai žinoma [4], jog Dirichlė eilutės konvergavimo ir absoliutaus konvergavimo sritys yra pusplokštumės. Tarkime, kad (1) eilutė absoliučiai konverguoja pusplokštumėje $\sigma > \sigma_a$, kur σ_a yra baigtinis skaičius. Tuomet (1) eilutės suma $f(s)$ yra analizinė funkcija pusplokštumėje $\sigma > \sigma_a$.

Funkcijos $f(s)$ reikšmių pasiskirstymas yra sudėtingas, todėl šių problemų sprendimui buvo pradėti taikyti tikimybiniai metodai. Funkcijoms, išreikštoms Dirichlė eilutėmis tikimybinius rezultatus patogu formuluoti ribinėmis teoremomis tikimybinių matų silpno konvergavimo prasme. Ši idėja priklauso H. Borui (H. Bohr), kuris kartu su B. Jesenu (B. Jessen) [2], [3] įrodė ribinę teoremą Rymano dzeta funkcijai. Vėliau daugelis matematikų (A. Vintneris (A. Wintner), V. Borčsenis (Borchsenius), A. Selbergas (A. Selberg), A. Gošas (A. Ghosh), P.D.T.A. Eliotas (P.D.T.A. Elliott), E. Stankus, D. Džoineris (D. Joyner), D. Hedžhalas (D. Hejhal), E. M. Nikišinas (E. M. Nikishin), B. Bagčis (B. Baghchi), K. Matsumoto, W. Švarcas (W. Schwarz), J. Štaudingas (J. Steuding), A. Laurinčikas, R. Garunkštis, R. Šleževičienė, R. Kačinskaitė, J. Ignatavičiūtė, I. Belovas (I. Belov), J. Genys, R. Macaitienė ir kt.) pratęsė ir apibendrino Boro-Jeseno rezultatus. Paprastųjų Dirichlė eilučių tikimybinių reikšmių pasiskirstymas yra išstudijuotas gana plačiai, tuo tarpu tokio pobūdžio rezultatų bendrosioms Dirichlė eilutėms nėra daug.

Reikėtų pastebėti, kad bendrųjų Dirichlė eilučių atvejis yra labiau komplikuotas, kadangi funkcijos $f(s)$ savybės artimai susijusios su seka $\{\lambda_m\}$, todėl analogų tarp bendrųjų ir paprastųjų Dirichlė eilučių sunku rasti. Tam tikrus tikimybinius rezultatus bendrosioms Dirichlė eilutėms yra pateikęs E. Nikišinas (E. M. Nikishin). Prieš dešimtmetį A. Laurinčikas gavo pirmąsias tikimybines ribines teoremas bendrosioms Dirichlė eilutėms, o vėliau gautus rezultatus išplėtojo kartu su J. Štaudingu, V. Švarcu ir J. Geniu. Tačiau minėti autoriai nagrinėjo tolydaus tipo ribines teoremas.

Darbe nagrinėsime funkcijų, apibrėžiamų bendrosiomis Dirichlė eilutėmis diskretų reikšmių pasiskirstymą. Šiose teoremose kompleksinio kintamojo menamosios dalies postūmiai įgyja reikšmes iš tam tikros aritmetinės progresijos

Tegul

$$\mu_N(...) = \frac{1}{N+1}\#\{0 \le m \le N : ...\},$$

kur taškų vietoje rašoma sąlyga tenkinanti m.

Be to, tegul γ yra vienetinis apskritimas kompleksinėje plokštumoje, t.y. $\gamma = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$, o

$$\Omega = \prod_{m=1}^{\infty} \gamma_m,$$

kur $\gamma_m = \gamma$ visiems $m \in \mathbb{N}$. Pagal Tichanovo teoremą, su sandaugos topologija ir pataškine daugyba, begaliniamatis erdvinis toras Ω yra kompaktinė topologinė Abelio grupė (įrodymą galima rasti [2]), todėl erdvėje $(\Omega,\mathcal{B}(\Omega))$ egzistuoja tikimybinis Haro matas m_H. Gauname tikimybinę erdvę $(\Omega,\mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Tegul $\omega(m)$ yra elemento $\omega \in \Omega$ projekcija į koordinatinę erdvę γ_m.

Tarkime, G yra kompleksinės plokštumos sritis. Pažymėkite $H(G)$ analizinių srityje G funkcijų erdvę su tolygaus konvergavimo ant kompaktų topologija.

Absoliutaus konvergavimo pusplokštumę pažymėkime

$$D_a = \{s \in \mathbb{C} : \sigma > \sigma_a\},$$

ir tarkime, kad funkcija $f(s)$ meromorfiškai pratęsiama į sritį $\sigma > \sigma_1$, kur $\sigma_1 < \sigma_a$, ir visi poliai šioje srityje priklauso kompaktinei aibei. Pusplokštumę $\sigma > \sigma_1$ pažymėkime

$$D = \{s \in \mathbb{C} : \sigma > \sigma_1\}.$$

Be to, tegul srityje D galioja įverčiai

$$f(\sigma + it) = O(|t|^{\alpha}), \quad |t| \ge t_0, \quad \alpha > 0, \tag{2}$$

kur t_0 – fiksuotas teigiamas skaičius ir

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |f(\sigma + it)|^2 dt = O(T), \quad T \to \infty. \tag{3}$$

Tegul $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ yra Rymano sfera ir $d(s_1, s_2)$ yra metrika apibrėžiama formulėmis

$$d(s_1, s_2) = \frac{2|s_1 - s_2|}{\sqrt{1+|s_1|^2}\sqrt{1+|s_2|^2}}, \quad d(s,\infty) = \frac{2}{\sqrt{1+|s|^2}}, \quad d(\infty,\infty) = 0,$$

kur $s, s_1, s_2 \in \mathbb{C}$. Pažymėkime $M(G)$ meromorfinių srityje G funkcijų $g : G \to (\mathbb{C}_\infty, d)$ erdvę su tolygaus konvergavimo ant kompaktų topologija. Šioje topologijoje seka $\{g_n : g_n \in M(G)\}$ konverguoja į funkciją $g \in M(G)$, jeigu

$$d(g_n(s), g(s)) \to 0, \quad n \to \infty,$$

tolygiai kompaktiškuose srities G poaibiuose.

2004 m. R. Macaitienė kartu su A. Larinčiku įrodė diskrečias ribines teoremas bendrosioms Dirichlė eilutėms meromorfinių funkcinų erdvėje [3]. Rezultatus pateiksime A ir B teoremose.

A teorema (A. Laurinčikas, R. Macaitienė, 2004). *Tegul $h > 0$ ir funkcija $f(s)$ tenkina* (2) *ir* (3) *sąlygas. Tuomet erdvėje $(H(D), \mathcal{B}(H(D)))$ egzistuoja tikimybinis matas P toks, kad matas*

$$P_N(A) = \mu_N(f(s + imh) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(M(D)),$$

kai $N \to \infty$, silpnai konverguoja į P.

Šioje teoremoje pateiktas tik ribinio mato egzistavimas, tačiau taikymamas svarbu žinoti ribinio mato pavidalą. Ribinio mato išreikštinės formos užrašymas yra pakankamai sudėtingas procesas.

Apibrėžkime funkciją

$$f(s, \omega) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \omega(m) e^{-\lambda_m s}, \quad s \in D. \tag{4}$$

A. Laurinčikas, V. Švarcas ir J. Štaudingas bendrame darbe [5] įrodė, jog jei λ_m tenkina papildomą sąlygą.

$$\lambda_m \geq c(\log m)^{\delta}, \tag{5}$$

kur c ir δ yra teigiamos konstantos, tuomet $f(s, \omega)$ yra $H(D)$-reikšmis atsitiktinis elementas tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$.

Pažymėkime P_f atsitiktinio elemento $f(s, \omega)$ skirstinį, t.y.

$$P_f(A) = m_H(\omega \in \Omega : f(s, \omega) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(M(D)).$$

B teoremoje pateikiama ribinio mato P išraiška.

B teorema (A. Laurinčikas, R. Macaitienė, 2004). *Tegul* $\exp\{\frac{2\pi}{h}\}$ *yra racionalusis skaičius. Tarkime, kad $\{\lambda_m\}$ yra algebrinių skaičių tiesiškai nepriklausomų virš racionaliųjų skaičių kūno seka, tenkinanti* (4) *sąlygą. Be to, tegul funkcija $f(s)$ tenkina* (2) *ir* (3) *sąlygas. Tuomet tikimybinis matas P_N, kai $N \to \infty$, silpnai konverguoja į P_f.*

<u>Darbo tikslas</u> yra praplėsti sekos λ_m pasirinkimą B teoremoje, t.y. pakeisti (5) sąlygą eilutės

$$\sum_{m=1}^{\infty} |a_m|^2 e^{-2\lambda_m \sigma} \log^2 m \tag{6}$$

konvergavimu ir įrodyti diskrečią ribinę teoremą bendrųjų Dirichlė eilučių poklasiui meromorfinių funkcijų erdvėje.

Pagrindinė teorema. *Tegul* $\exp\{\frac{2\pi}{h}\}$ *yra racionalusis skaičius. Tarkime, kad* $\{\lambda_m\}$ *yra algebrinių skaičių tiesiškai nepriklausomų virš racionaliųjų skaičių kūno seka, tenkinanti* (6) *sąlygą. Be to, tegul funkcija* $f(s)$ *tenkina* (2) *ir* (3) *sąlygas. Tuomet tikimybinis matas* P_N*, kai* $N \to \infty$*, silpnai konverguoja į* P_f*.*

Kad darbas būtų lengviau skaitomas pirmajame skyriuje pateikiami analizės, tikimybių bei ergodinės teorijos sąvokos bei tvirtinimai, kurie bus naudojamai teoremų formulavimuose bei įrodymuose.

Antrajame skyriuje įrodoma diskreti ribinė teorema tikimybinių matų silpnojo konvergavimo prasme bendrosioms Dirichlė eilutėms meromorfinių funkcijų erdvėje.

Trečiajame skyriuje įrodoma diskreti ribinė teorema su pagerinta sąlyga bendrųjų Dirichlė eilučių poklasiui meromorfinių funkcijų erdvėje.

Darbo pabaigoje pateikiamos išvados, santrauka anglų kalba, literatūros sąrašas bei žymėjimai.

1 Pagrindiniai apibrėžimai ir sąvokos

1.1 Matematinės analizės ir tikimybių teorijos sąvokos

1.1.1 apibrėžimas. *Funkciją* $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *vadinama tolydžiąja funkcija taške* $z_0 \in E$ *(*E *yra kokia nors kompleksinės plokštumos taškų aibė,* $z_0 = x_0 + iy_0$*), jei* $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0$*, kad*

$$|f(z) - f_0(z)| < \varepsilon, \quad \text{kai } |z - z_0| < \delta.$$

Tolydžios funkcijos riba taške lygi funkcijos reikšmei tame taške, t.y.

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0).$$

1.1.2 apibrėžimas. *Tarkime, jog* $S_k(z) = f_1(z) + f_2(z) + ... + f_k(z), \quad k = 1, 2, ...$ *Funkcijų eilutė konverguoja aibėje* D*, jei kiekviename šios aibės taške* z *jos dalinių sumų seka* $\{S_n(z)\}$ *konverguoja į funkciją* $S(z)$*, t.y. jei kiekvieną* $z \in D$ *reikšmę ir bet kokį teigiamą skaičių* ε *atitinka toks numeris* $N = N(z, \varepsilon)$*, kad*

$$|S_n(z) - S(z)| < \varepsilon, \quad \text{kai } n > N.$$

Čia D *konvergavimo sritis.*

1.1.3 apibrėžimas. *Sakoma, kad aibėje* D *funkcijų eilutė* $S_k(z) = f_1(z)+f_2(z)+...+f_k(z), \quad k = 1, 2, ...$ *tolygiai konverguoja į funkciją* $S(z)$*, jei* $\forall\varepsilon > 0$ *atitinka toks numeris* $N = N(\varepsilon)$*, kad su visais* $z \in D$

$$|S_n(z) - S(z)| = |\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z)| < \varepsilon, \quad \text{kai } n > N.$$

1.1.4 apibrėžimas. *Funkcija* f*, diferencijuojama* $\mathbb{C}$ *prasme visuose aibės* $E \subset \mathbb{C}$ *taškuose vadinama analizine aibėje* E*.*

1.1.5 apibrėžimas. *Jei funkcija* $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ *yra analizinė kompleksinėje plokštumoje, išskyrus, gal būt, jos polių taškus, tai ji vadinama meromorfine funkcija.*

1.2 Tikimybinių matų silpnas konvergavimas

1.2.1 apibrėžimas. *Tegul* Ω *yra netuščia aibė. Jos poaibių sistema* $\mathcal{F}$ *yra vadinama Borelio kūnu (*σ*-kūnu), jei*

- $\Omega \in \mathcal{F}$,
- $A^c \in \mathcal{F}$, *kai* $A \in \mathcal{F}$,
- $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m \in \mathcal{F}$, *kai* $A_m \in \mathcal{F}$, $\quad m = 1, 2, ...$

Čia A^C *yra aibės* A *papildinys.*

1.2.2 apibrėžimas. *Neneigiama aibės* $\mathcal{F}$ *funkcija* P *tenkinanti savybes*

- $P(\Omega) = 1$,
- $P(\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} P(A_m)$ *su visais* $A_m \in \mathcal{F}$ *tokiais, kad* $A_k \cap A_l = \emptyset$, $k \neq l$, *vadinama tikimybiniu matu.*

1.2.3 apibrėžimas. *Trejetas* $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ *vadinamas tikimybine erdve.*

1.2.4 apibrėžimas. *Tarkime,* $\mathcal{A}$ *yra aibių sistema. Mažiausias* σ*-kūnas, kuriam priklauso ši sistema, vadinamas aibių sistemos* A *generuotu* σ*-kūnu.*

1.2.5 apibrėžimas. *Jei* S *- metrinė erdvė, tai jos visų atvirų aibių sistemos generuotas* σ*-kūnas vadinamas erdvės* S *Borelio aibių klase ir žymimas* $\mathcal{B}(S)$.

Tikimybinių metodų taikymo idėja, nagrinėjant funkcijų, apibrėžiamų Dirichlė eilutėms, reikšmių pasiskirstymą, yra paremta tikimybinių matų silpnu konvergavimu, kuris yra vienas iš pagrindinių asimptotinių metodų.

Tegul P_n ir P tikimybiniai matai erdvėje $(S,\mathcal{B}(S))$.

1.2.6 apibrėžimas. *Matas* P_n*, kai* $n \to \infty$*, silpnai konverguoja į matą* P*, jeigu*

$$\int\limits_S f dP_n \to \int\limits_S f dP, \quad n \to \infty,$$

kiekvienai realiai, aprėžtai tolydžiai funkcijai f *iš* S.

Yra žinomi tam tikri tikimybinių matų silpno konvergavimo ekvivalentūs tvirtinimai.

1.2.1 teorema. *Tegul* P_n *ir* P *yra tikimybiniai matai erdvėje* $(S, \mathcal{B}(S))$. *Ekvivalentūs šie tvirtinimai:*

- $P_n \Rightarrow P$;
- $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(A) = P(A)$ *visoms mato* P *tolydumo aibėms;*
- $\underline{\lim}_{n\to\infty} P_n(G) \geq P(G)$ *visoms atviroms aibėms* G.

1.2.2 teorema. *$P_n \Rightarrow P$ tada ir tik tada, kai iš kiekvieno posekio $\{P_{n'}\}$ galima išskirti tokį posekį $\{P_{n''}\}$, kad $P_{n''} \Rightarrow P$.*

Teoremos įrodymą galima rasti [1].

Prokhorovo teoremos vaidina lemiamą vaidmenį tikimybinių matų silpno konvergavimo teorijoje. Jų formulavimui reikalingos tikimybinių matų reliatyvaus kompaktiškumo ir suspaustumo sąvokos.

1.2.7 apibrėžimas. *Apibrėžtų erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$ tikimybinių matų šeima $\{P\}$ vadinama reliatyviai kompaktiška, jei kiekviena elementų iš $\{P\}$ seka turi silpnai konverguojantį posekį.*

1.2.8 apibrėžimas. *Apibrėžtų erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$ tikimybinių matų šeima $\{P\}$ vadinama suspausta, jeigu $\varepsilon > 0$ egzistuoja kompaktiška aibė K, kad $P(K) > 1 - \varepsilon$ visiems P iš $\{P\}$.*

1.2.3 teorema. *Jei tikimybinių matų šeima {P} yra suspausta, tai ji yra reliatyviai kompaktiška.*

1.2.4 teorema. *Tegul S yra pilnai separabili metrinė erdvė. Jei apibrėžtų erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$ tikimybinių matų šeima {P} yra reliatyviai kompaktiška, jei ji yra ir suspausta.*

1.2.3 ir 1.2.4 teoremų įrodymus galime rasti [1].

Tegul S_1 metrinė erdvė ir $\mathcal{B}(S_1)$ yra jos Borelio aibių klasė.

1.2.9 apibrėžimas. *Funkcija $h : S \to S_1$ yra mati, jeigu $h^{-1}\mathcal{B}(S_1) \subset\mathcal{B}(S)$, t.y. pirmavaizdis $h^{-1}A \in \mathcal{B}(\mathcal{S})$ visiems $A \in\mathcal{B}(S_1)$.*

Tarkime, kad S_1 ir S_2 yra dvi metrinės erdvės. Tegul $h : S_1 \to S_2$ yra mati funkcija. Tada kiekvienas tikimybinis matas P, apibrėžtas erdvėje $(S_1,\mathcal{B}(S_1))$ indukuoja erdvėje $(S_2, B(S_2))$ vienintelį tikimybinį matą Ph^{-1}, kuris apibrėžiamas lygybe $Ph^{-1}(A) = P(h^{-1}A)$, $A \in\mathcal{B}(S_2)$.

1.2.10 apibrėžimas. *Funkcija $h : S_1 \to S_2$ yra tolydi, jei aibė $h^{-1}G_2$ yra atvira erdvėje S_1 kiekvienai atvirai aibei $G_2 \in S_2$.*

1.2.5 teorema. *Jeigu atvaizdis $h : S_1 \to S_2$ yra tolydus ir $P_n \Rightarrow P$, $n \to \infty$, tai tuomet ir $P_n h^{-1} \Rightarrow Ph^{-1}$.*

Teoremos įrodymą galima rasti [1].

1.3 Atsitiktiniai elementai

Tegul $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ yra tikimybinė erdvė ir $(S, \mathcal{B}(S))$ - metrinė erdvė su savo Borelio aibių klase.

1.3.1 apibrėžimas. *Tegul $X : \Omega \to S$. Jei $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\} \in \mathcal{F}$ visoms $A \in \mathcal{B}(\mathcal{S})$, tada X vadinamas S-reikšmiu atsitiktiniu elementu, apibrėžtu erdvėje $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$.*

Pvz.: jeigu $S = \mathbb{R}$ sakome, kad X yra atsitiktinis dydis.

1.3.2 apibrėžimas. *S-reikšmio atsitiktinio elemento X skirstiniu vadinamas apibrėžtas erdvėje $(S, \mathcal{B}(\mathcal{S}))$ tikimybinis matas P toks, kad*

$$P(A) = \mathbb{P}(X^{-1}A) = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}$$

visoms aibėms $A \in \mathcal{B}(S)$.

1.3.3 apibrėžimas. *Atsitiktinių elementų seka $\{X_n\}$, kai $n \to \infty$, konverguoja pagal skirstinį į atsitiktinį elementą X žymima ($X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$), jei elementų X_n skirstiniai silpnai konverguoja į elemento X skirstinį.*

Tegul ρ yra metrika erdvėje S, X_n ir Y_n yra S-reikšmiai atsitiktiniai elementai apibrėžti erdvėje $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, ir tegul erdvėje S yra separabili.

1.3.1 teorema. *Tarkime, kad $X_{kn} \xrightarrow{\mathcal{D}} X_k$, kai $n \to \infty$, kiekvienam k ir taip pat $X_k \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, kai $k \to \infty$. Jeigu kiekvienam $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{k\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \mathbb{P}\{\rho(X_{kn}, Y_n) \geq \varepsilon\} = 0$$

tai $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X, \quad n \to \infty$.

1.3.2 teorema. *Tegul X_n ir Y_n yra S-reikšmiai atsitiktiniai elementai, apibrėžti erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ir tegul erdvė S yra separabili. Jei $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X, \quad n \to \infty$, ir kiekvienam $\varepsilon > 0$*

$$\mathbb{P}(\rho(X_n, Y_n) \geq \varepsilon) \to 0, \quad n \to \infty,$$

tai $Y_n \to X, \quad n \to \infty$.

1.3.4 apibrėžimas. *Atsitiktinio elemento X vidurkis EX apibrėžiamas*

$$EX = \int\limits_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}$$

jeigu egzistuoja integralas Bohnerio prasme.

1.3.5 apibrėžimas. *Atsitiktiniai elementai X ir Y vadinami ortogonaliais, jei $E(XY) =$* 0.

1.3.3 teorema. *Tarkime, atsitiktiniai elementai $X_1, X_2, ...$ yra ortogonalūs ir*

$$\sum_{m=1}^{\infty} E|X_m|^2 \mathtt{ln}^2 m < \infty.$$

Tada eilutė

$$\sum_{m=1}^{\infty} X_m$$

konverguoja beveik visur.

1.4 Tikimybinio mato Furje transformacija

1.4.1 apibrėžimas. *Tikimybinio mato Q Furje transformacija $g(k_1, ..., k_m)$ matas Q apibrėžiama lygybe*

$$g(k_1, ..., k_m) = \int\limits_{\gamma^m} x_1^{k_1} ... x_m^{k_m} dQ,$$

kur $k_j \in \mathbb{Z}, \quad x_j \in \gamma, \quad j = 1, ..., m.$

1.4.1 teorema. *Tegul $\{Q_n\}$ yra tikimybinių matų apibrėžtų erdvėje $(\gamma^m, B(\gamma^m))$ seka ir tegul $\{g_n(k_1, ..., k_m)\}$ yra atitinkamų Furje transformacijų seka. Tarkime, kad kiekvienai sveikųjų skaičių aibei $(k_1, ..., k_m)$ egzistuoja riba*

$$g(k_1, ..., k_m) = \lim_{n \to \infty} g_n(k_1, ..., k_m).$$

Tuomet erdvėje $(\gamma^m, B(\gamma^m))$ egzistuoja tikimybinis matas Q, toks kad $Q_n \Rightarrow Q$. Be to, $g(k_1, ..., k_m)$ yra mato Q Furje transformacija.

Teoremos įrodymą galima rasti [6].

1.5 Haro matas

1.5.1 apibrėžimas. *Tegul aibėje G yra apibrėžta grupės bei topologinė struktūra. Aibė G vadinama topologine grupe, jeigu funkcija $h : G \times G \to G$, apibrėžiama lygybe $h(x, y) = xy^{-1}$ yra tolydi.*

1.5.2 apibrėžimas. *Topologinė grupė vadinama kompaktiška, jeigu jos topologija yra kompaktiška.*

1.5.3 apibrėžimas. *Borelio matas P, apibrėžtas kompaktiškoje topologinėje grupėje G vadinamas invariantiniu, jeigu $P(A) = P(xA) = P(Ax)$, visiems $A \in \mathcal{B}(G)$ ir $x \in G$. Čia xA ir Ax ir atitinkamai žymi aibes $\{xy : y \in A\}$ ir $\{yx : y \in A\}$.*

1.5.4 apibrėžimas. *Invariantinis Borelio matas, apibrėžtas kompaktiškoje topologinėje grupėje, vadinama Haro (Haar) matu.*

1.5.1 teorema. *Kiekvienoje kompaktiškoje topologinėje grupėje egzistuoja vienintelis tikimybinis Haro matas.*

Teoremos įrodyma galima rasti [2].

1.6 Ergotinės teorijos elementai

1.6.1 apibrėžimas. *Tegul $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ yra tikimybinė erdvė, o $\mathcal{T}$ yra parametrų aibė. Baigtinė reali funkcija $X(\tau, \omega), \tau \in \mathcal{T}$, $\omega \in \Omega$, yra atsitiktinis procesas, jeigu kiekvienam fiksuotam $\tau \in \mathcal{T}$, $X(\tau, \cdot)$ yra atsitiktinis dydis. Kai $\omega \in \Omega$ yra fiksuotas, tai funkcija $X(\cdot, \omega)$ vadinama atsitiktinio proceso trajektorija.*

1.6.2 apibrėžimas. *Tegul* $\tau_1, ..., \tau_n$ *yra bet kokia* τ *reikšmių aibė. Tada atsitiktinių dydžių* $X(\tau_1, \omega), ..., X(\tau_n, \omega)$ *skirstiniai*

$$\mathbb{P}(X(\tau_1, \omega) < x_1, ..., X(\tau_n, \omega) < x_n),$$

vadinami proceso $X(\tau, \omega)$ *baigtiniamačiais skirstiniais. Čia* τ_j *yra galimos* τ *reikšmės.*

Tegul Y yra visų baigtinių realių funkcijų $y(\tau)$, $\tau \in \mathcal{T}$ erdvė. Yra žinoma, kad kiekvieno atsitiktinio proceso baigtiniamačiai skirstiniai erdvėje $(Y, \mathcal{B}(Y))$ apibrėžia tikimybinį matą Q. Tada tikimybinėje erdvėje $(Y, \mathcal{B}(Y), Q)$ postūmis g_u gali būti apibrėžiama funkcija, kuri perveda $y(\tau) \in Y$ į $y(\tau + u)$. Postūmiai $g_u, u \in \mathbb{R}$, sudaro grupę.

1.6.3 apibrėžimas. *Atsitiktinis procesas* $X(\tau, \omega)$ *vadinamas griežtai stacionariuoju procesu, jei visi jo baigtiniamačiai skirstiniai yra invariantiški postūmių dydžiu* u *atžvilgiu.*

Yra žinoma, kad jeigu atsitiktinis procesas $X(\tau, \omega)$ yra griežtai stacionarus, tai postūmis g_u yra išlaikantis matą, t.y. kiekvienai aibei $A \in \mathcal{B}(Y)$ ir visiems $u \in \mathbb{R}$ yra teisinga lygybė $Q(A) = Q(A_u)$, kur $A_u = g_u(A)$.

1.6.4 apibrėžimas. *Aibė* $A \in \mathcal{B}(Y)$ *vadinama proceso* $X(\tau, \omega)$ *invariantine aibe, jeigu kiekvienam* u*, aibės* A *ir* A_u *skiriasi viena nuo kitos nulinio mato aibe, t.y.* $Q(A \Delta A_u) = 0$.

Nesunku pamatyti, kad visos invariantinės aibės formuoja σ-lauką, kuris yra $B(Y)$ sub-σ-laukas iš $\mathcal{B}(Y)$.

1.6.5 apibrėžimas. *Griežtai stacionarus procesas* $X(\tau, \omega)$ *yra ergodiškas, jei jo invariantinių aibių* σ*-kūną sudaro aibės, kurių matas* Q *lygus 0 ar 1.*

1.6.1 teorema. *Tarkime, procesas* $X(\tau, \omega)$ *yra ergodiškas,* $E|X(\tau, \omega)| < \infty$*, ir tegul trajektorijos yra integruojamos Rymano prasme bet kokiame baigtiniame intervale. Tada*

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(\tau, \omega) d\tau = EX(0, \omega).$$

Tai yra klasikinė Birkhofo-Kinčino teorema, jos įrodymą galima rasti [11].

2 Ribinė teorema bendrosioms Dirichlė eilutėms meromorfinių funkcijų erdvėje

2.1 Ribinė teorema Dirichlė polinomams

Kadangi visi funkcijos $f(s)$ poliai srityje D priklauso kompaktiškai aibei, šių polių skaičius yra baigtinis. Pažymėkime juos $s_1, ..., s_r$, ir tegul

$$f_1(s) = \prod_{j=1}^{r} \left(1 - e^{\lambda_1(s_j - s)}\right).$$

Funkcija f_1 yra Dirichlė polinomas ir $f_1(s_j) = 0$, $j = 1, ..., r$. Be to, tegul

$$f_2(s) = f_1(s) f(s).$$

Iš čia matome, jog $f_2(s)$ yra reguliari srityje D. Aibės $\mathcal{A}$ elementų skaičių pažymėkime $|\mathcal{A}|$. Tuomet $\sigma > \sigma_a$,

$$\begin{aligned}
f_2(s) &= \prod_{l=1}^{r} \left(1 - \mathrm{e}^{\lambda_1(s_j - s)}\right) \sum_{m=1}^{\infty} a_m \mathrm{e}^{-\lambda_m s} \\
&= \sum_{\mathcal{A} \subseteq \{1,...,r\}} \sum_{m=1}^{\infty} a_m \mathrm{e}^{-\lambda_1 s_j} (-1)^{|\mathcal{A}|} \mathrm{e}^{-(\lambda_m + |\mathcal{A}|\lambda_1)s} \\
&= \sum_{j=0}^{r} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mj} \mathrm{e}^{-(\lambda_m + j\lambda_1)s},
\end{aligned}$$

čia koeficientai a_{mj} tenkina sąlygą $a_{mj} = O(|a_m|)$, $m \in \mathbb{N}$, $j = 0, 1, ..., r$, o pirmoji suma yra pagal visus aibės A poaibius $\{1, ..., r\}$.

Funkcijos $f_2(s)$ apibrėžimas ir (2) bei (3) sąlygos duoda, jog pusplokštumėje $\sigma > \sigma_1$ yra teisingi įverčiai

$$f_2(s) = O(|t|^{\alpha}), \quad |t| \geq t_0, \alpha > 0, \tag{7}$$

ir

$$\int_{-T}^{T} |f_2(\sigma + it)|^2 dt = O(T), \quad T \to \infty. \tag{8}$$

Tegul S_1 ir S_2 yra dvi metrinės erdvės. Mums bus reikalingas kitas teiginys.

2.1.1 lema. *Tegul P, P_n yra tikimybiniai matai erdvėje $(S_1, \mathcal{B}(S_1))$ ir $h : S_1 \to S_2$ yra tolydi funkcija. Tuomet iš mato P_n silpno konvergavimo į P seka $P_n h^{-1}$ silpnas konvergavimas į Ph^{-1}, kai $n \to \infty$.*

Įrodymas. Lema yra atskiras 5.1 teoremos iš [1] atvejis.

Mes pradėsime nuo ribinės teoremos Dirichlė polinomui

$$p_n(s) = \sum_{j=0}^{r} \sum_{m=1}^{n} a_{mj} e^{-(\lambda_m + j\lambda_1)s}.$$

2.1.2 lema. *Tarkime, kad $\{\lambda_m\}$ yra algebrinių skaičių, tiesiškai nepriklausomų virš racionaliųjų skaičių kūno seka. Tuomet erdvėje $(H(D), \mathcal{B}(H(D)))$ egzistuoja toks tikimybinis matas P_{p_n}, kad matas*

$$P_{N,p_n}(A) = \mu_N(p_n(s + imh) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(H(D)),$$

kai $N \to \infty$ silpnai konverguoja į P_{p_n}.

Įrodymas. Tegul

$$\Omega_n = \prod_{m=1}^{n} \gamma_m,$$

kur $\gamma_m = \gamma$ su visais $m = 1, ..., n$. Apibrėžkime funkciją $u : \Omega_n \to H(D)$ formule

$$u(x_1, ..., x_n) = \sum_{j=0}^{r} \sum_{m=1}^{r} a_{mj} e^{-(\lambda_m + j\lambda_1)s} x_1^{-j} x_m^{-1}, \quad (x_1, ..., x_n) \in \Omega_n.$$

Tuomet mes turime, kad u yra tolydi funkcija ir

$$p_n(s + imh) = u(e^{i\lambda_1 mh}, ..., e^{i\lambda_n mh}). \tag{9}$$

Dabar erdvėje $(\Omega_n, \mathcal{B}(\Omega_n))$ nagrinėsime tikimybinį matą P'_N

$$P'_N(A) = \mu_N((e^{i\lambda_1 mh}, ..., e^{i\lambda_n mh}) \in A).$$

Tikimybinio mato P'_N Furje transformacija $g_N(k_1, ..., k_n), k_1, ..., k_n \in \mathbb{Z}$, pagal apibrėžimą (1.4.1 apibrėžimą) yra nusakoma formule

$$g_N(k_1, ..., k_n) = \int_{\Omega} x_1^{ik_1} ... x_n^{ik_n} dP'_N = \frac{1}{N+1} \sum_{m=0}^{N} e^{imh \sum\limits_{l=1}^{n} k_l \lambda_l}.$$

Kadangi $\{\lambda_m\}$ yra algebrinių skaičių, tiesiškai nepriklausomų virš racionaliųjų skaičių kūno, sistema ir h turi ankščiau paminėtas savybes, remdamiesi [8] gauname, kad

$$g_N(k_1, ..., k_n) = \begin{cases} 1, & \text{kai } (k_1, ..., k_n) = (0, ..., 0), \\ \frac{1}{N+1} \frac{1 - \exp\{i(N+1)h \sum\limits_{l=1}^{n} k_l \lambda_l\}}{1 - \exp\{ih \sum\limits_{l=1}^{n} k_l \lambda_l\}}, & \text{kai } (k_1, ..., k_n) \neq (0, ..., 0). \end{cases}$$

Vadinasi,

$$\lim_{N\to\infty} g_N(k_1,...,k_n) = \begin{cases} 1, & \text{kai } (k_1,...,k_n)=(0,...,0), \\ 0, & \text{kai } (k_1,...,k_n)\neq(0,...,0). \end{cases} \qquad (10)$$

Remdamiesi 1.3.19 teorema [2] gauname, kad matas P'_N silpnai konverguoja į Haro matą m_n erdvėje $(\Omega_n, \mathcal{B}(\Omega_n))$, kai $N \to \infty$. Vadinasi, funkcijos u tolydumas, (10) ir 2.1.1 lema duoda, kad tikimybinis matas P_{N,p_n}, kai $N\to\infty$ silpnai konverguoja į $P_{p_n} = m_{nH}u^{-1}$.

Dabar tegul $g(m), m \in \mathbb{N}$ yra kompleksiniai skaičiai, tokie kad $|g(m)| = 1$ su visais $m \in \mathbb{N}$. Apibrėžkime

$$p_n(s,g) = \sum_{j=0}^{r}\sum_{m=1}^{n} a_{mj} g(m) e^{-(\lambda_m + j\lambda_1)s}.$$

2.1.3 lema. *Tikimybinis matas*

$$\widetilde{P}_{N,p_n}(A) = \mu_T(p_n(s+imh,g)\in A), \quad A\in\mathcal{B}(H(D)),$$

taip pat silpnai konverguoja į $m_{nH}u^{-1}$, *kai* $N\to\infty$.

Įrodymas. Tegul θ_m $=\arg g(m), m = 0,1,...,n$ ir tegul funkcija $u_1 : \Omega_n \to \Omega_n$ apibrėžiama taip:

$$h_1(x_1,...,x_n) = (x_1e^{-i\theta_1},...,x_ne^{-i\theta_n}), \quad (x_1,...,x_n)\in\Omega_n.$$

Tuomet mes turime, kad

$$p_n(s+imh,g) = u(u_1(e^{i\lambda_1 mh},...,e^{i\lambda_n mh})).$$

Remdamiesi 2.1.2 lemos įrodymu, iš čia gauname, jog matas P_{T,p_n}, kai $N\to\infty$ silpnai konverguoja į $m_{nH}(uu_1)^{-1}$.

Kadangi Haro matas yra invariantiškas postūmių atžvilgiu, matas P_{N,p_n}, kai $N\to\infty$, silpnai konverguoja į

$$(m_{nH}u_1^{-1})u^{-1} = m_{nH}u^{-1}.$$

2.2 Aproksimavimas vidurkiu

Šioje dalyje aproksimuosime funciją $f_2(s)$, apibrėžtą 2.1. skyriaus pradžioje, absoliučiai konverguojančiomis Dirichlė eilutėms. Tegul $\sigma_2 = \sigma_\alpha - \sigma_1$. Apibrėžkime funkciją

$$l_n(s) = \frac{s}{\sigma_2}\Gamma\left(\frac{s}{\sigma_2}\right)e^{\lambda_n + j\lambda_1)s}, \quad \sigma\in[-\sigma_2,\sigma_2],$$

kur, kaip įprasta, $\Gamma(s)$ yra gama funkcija. Akivaizdu, jog, $\sigma_2 > 0$. Dabar pusplokštumėje $\sigma > \sigma_1$ apibrėžkime funkciją

$$g_n(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_2+i\infty}^{\sigma_2-i\infty} f_2(s+z)l_n(z)\frac{dz}{z}.$$

2.2.1 lema. *Funkcija $g_n(s)$ galime išskleisti eilute*

$$g_n(s) = \sum_{j=0}^{r} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mj} exp\{-e^{-(\lambda_m - \lambda_n)\sigma_2}\} e^{-(\lambda_m + j\lambda_1)s}, \tag{11}$$

kuri absoliučiai konverguoja pusplokštumėje $\sigma > \sigma_1$.

Įrodymas. Kadangi $\sigma_2 = \sigma_\alpha - \sigma_1$, iš čia seka, kad $\sigma + \sigma_2 > \sigma_\alpha$, kai $\sigma > \sigma_1$. Todėl tiems z, kurių $\mathbf{Re} z = \sigma_2$,

$$f_2(s+z) = \sum_{j=0}^{r} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mj} e^{-(\lambda_m + j\lambda_1)(s+z)}.$$

Pažymėkime

$$k_n(m) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_2 + i\infty}^{\sigma_2 - i\infty} l_n(s) e^{-(\lambda_m + j\lambda_1)s} \frac{ds}{s},$$

ir nagrinėkime eilutę

$$\sum_{j=0}^{r} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mj} k_n(m) e^{-(\lambda_m + j\lambda_1)(s+z)}. \tag{12}$$

Kadangi,

$$k_n(m) = O\left(e^{-(\lambda_m + j\lambda_1)\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} |l_n(\sigma_2 + it| dt \right) = O\left(e^{-(\lambda_m + j\lambda_1)\sigma_2} \right),$$

(12) eilutė konverguoja absoliučiai pusplokštumėje $\sigma > \sigma_\alpha - \sigma_2$, kai $\sigma > \sigma_1$. Vadinasi, mes galime sukeisti sumavimą ir integravimą funkcijos $g_n(s)$ apibrėžime. Iš čia turime, jog

$$\begin{aligned} g_n(s) &= \sum_{j=0}^{r} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mj} e^{-(\lambda_m + j\lambda_1)s} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_2 + i\infty}^{\sigma_2 - i\infty} l_n(z) e^{-(\lambda_m + j\lambda_1)z} \frac{dz}{z} \\ &= \sum_{j=0}^{r} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mj} k_n(m) e^{-(\lambda_m + j\lambda_1)s}, \end{aligned} \tag{13}$$

Pasinaudoję lygybe

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s) b^{-s} ds = e^{-b}, \quad c > 0, \quad b > 0,$$

randame, kad

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_2 - i\infty}^{\sigma_2 + i\infty} \frac{s}{\sigma_2} \Gamma\left(\frac{s}{\sigma_2}\right) e^{-(\lambda_m - \lambda_n)s} \frac{ds}{s}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma_2 - i\infty}^{\sigma_2 + i\infty} \Gamma\left(\frac{s}{\sigma_2}\right) e^{-(\lambda_m - \lambda_n)\left(-\frac{s}{\sigma_2}\right)\sigma_2} d\frac{s}{\sigma_2} = \exp\{-e^{(\lambda_m - \lambda_n)\sigma_2}\}.$$

Iš čia ir (12) lygybės išplaukia lemos tvirtinimas.

2.2.2 lema. Tegul T_0 ir $T \geq \delta > 0$ yra realieji skaičiai, $\mathcal{T}$ yra baigtinė aibė intervale $[T_0 + \frac{\delta}{2}, T_0 + T - \frac{\delta}{2}]$. Be to, tegul

$$N_\delta(x) = \sum_{t \in \mathcal{T}, |t-x| < \delta} 1,$$

o $S(x)$ yra kompleksines reikšmes įgyjanti tolydi intervale $[T_0, T + T_0]$ funkcija, turinti tolydžią išvestinę intervale $(T_0, T + T_0)$. Tuomet

$$\sum_{t \in \mathcal{T}} N_\delta^{-1}(t)|S(t)|^2 \leq \frac{1}{\delta} \int\limits_{T_0}^{T_0+T} |S(x)|^2 dx + \left(\int\limits_{T_0}^{T_0+T} |S(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{T_0}^{T_0+T} |S'(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Įrodymas. Tai yra 1.4 lema iš [9].

2.2.3 lema. *Tegul $T \to \infty$. Tuomet,*

$$\int\limits_0^T |f_2'(\sigma + it)|^2 = O(T), \quad \sigma > \sigma_1.$$

Įrodymas. Remdamiesi Koši formule, turime, jog

$$f_2'(s) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-s|=\delta} \frac{f_2(z)}{(z-s)^2} dz,$$

kur apskritimas $|z - s| = \delta$ guli pusplokštumėje $\sigma > \sigma_1$. Tuomet $\sigma' > \sigma_1$ ir aprėžtam τ, pagal (8) lygybę

$$\int\limits_0^T |f_2'(\sigma + it)|^2 dt = \int\limits_0^T \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-s|=\delta} \frac{f_2(z)}{(z-s} dz \right|^2 dt = O\left(\int\limits_0 T|f_2(\sigma' + it + i\tau)|^2 dt \right) = O(T).$$

2.2.4 lema. *Tegul K yra kompaktiškas D poaibis. Tuomet*

$$\lim_{n \to \infty} \limsup_{N \to \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{m=0}^{N} \sup_{s \in K} |f_2(s + imh) - g_n(s + imh)| = 0.$$

Įrodymas. Pakeiskime $g_n(s)$ integravimo kontūrą. Narys po integralu turi paprastą polių taške $z = 0$. Tarkime, $\sigma \in [\sigma_1 + \eta, \sigma_4], \eta > 0$, kai $s \in K$ ir pažymėkime $\sigma_3 = \sigma_1 + \frac{\eta}{2}$. Tuomet, pagal reziduumų teoremą mes randame, jog

$$g_n(s) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma_3 - \sigma - i\infty}^{\sigma_3 - \sigma + i\infty} f_2(s+z) l_n(z) \frac{dz}{z} + f_2(s). \tag{14}$$

Tegul L yra paprastas uždaras kontūras srityje D, apimantis aibę K ir tegul δ yra atstumas nuo L iki K. Tada pagal Koši formulę, kai $s \in K$, mes turime, jog

$$f_2(s+imh) - g_n(s+imh) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{f_2(z+imh) - g_n(z+imh)}{z-s} \mathrm{dz}.$$

Todėl

$$\sup_{s\in K} |f_2(s+imh) - g_n(s+imh)| \leq \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L |f_2(s+imh) - g_n(s+imh)||dz|.$$

Vadinasi, pakankamai dideliems N, mes gauname

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{N+1} \sum_{m=0}^{N} \sup_{s\in K} |f_2(s+imh) - g_n(s+imh)| \\
&= O\left(\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L |f_2(z+imh) - g_n(z+imh)||dz| \right) \\
&= O\left(\frac{1}{N} \int\limits_L |dz| \sum_{m=0}^{2N} |f_2(\mathcal{R}z+imh) - g_n(\mathcal{R}z+imh)|) + O(\frac{1}{N\delta} \right) \\
&= O\left(\frac{1}{N\delta}\right) + O\left(\frac{1}{N} \sup_{s\in L} \sum_{m=0}^{2N} |f_2(\sigma+imh) - g_n(\sigma+imh)| \right).
\end{aligned} \tag{15}$$

Iš čia ir (14) lygybės, turime, jog

$$f_2(s+imh) - g_n(s+imh) = O\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f_2(\sigma_3+imh+i\tau)||l_n(\sigma_3-\sigma+i\tau)|d\tau \right).$$

Vadinasi, paėmę $u = [\frac{|\tau|}{h}] + 1$, kur $[x]$ žymi sveikąją x dalį, mes gauname, kad

$$\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{2N} |f_2(\sigma+imh) - g_n(\sigma+imh)| = O\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |l_n(\sigma_3-\sigma+i\tau)| \frac{1}{N} \sum_{m=-u}^{2N+u} |f_2(\sigma_3+imh)|d\tau \right).$$

Pagal 2.2.2 ir 2.2.3 lemas bei (8) įvertį

$$\sum_{m=-u}^{2N+u} |f_2(\sigma+imh)|^2 \leq \frac{1}{h} \int\limits_{-uh}^{(2N+u)h} |f_2(\sigma+it)|_2 dt$$

$$+ \left(\int\limits_{-uh}^{(2N+u)h} |f_2(\sigma+it)|^2 dt \int\limits_{-uh}^{(2N+u)h} |f_2'(\sigma+it)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = O(2N+2u).$$

Be to, Koši-Švarco nelygybė duoda, jog

$$\frac{1}{N+1}\sup_{s\in L}\sum_{m=0}^{2N}|f_2(\sigma+imh)-g_n(\sigma+imh)| =$$

$$O\left(\sup_{s\in L}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|l_n(\sigma_3-\sigma+i\tau)|d\tau\left(\frac{1}{N+1}\sum_{m=-u}^{2N+u}|f_2(\sigma_3+imh)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \tag{16}$$

$$O\left(\sup_{s\in L}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|l_n(\sigma_3-\sigma+i\tau)|\frac{2N+2u}{N+1}d\tau\right) = O\left(\sup_{s\in L}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|l_n(\sigma_3-\sigma+i\tau)|(1+|\tau|)d\tau\right).$$

Skaičių δ mes galime pasirinkti tokį, kad būtų tenkinama nelygybė $\sigma_3-\sigma\leq-\frac{\eta}{4}$, $s\in L$. Šiuo atveju, pagal $l_n(s)$ apibrėžimą, mes turime, kad

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\sigma\leq-\frac{\eta}{4}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|l_n(\sigma+it)|(1+|t|)dt = 0.$$

Taigi, (15) ir (16) seka lemos tvirtinimas.

Tegul $a_h=\{e^{-i\lambda_m h}: m\in\mathbb{N}\}, h>0$. Tuomet a_h yra vienparametrinė grupė. Aibėje Ω apibrėškime transformacijų šeimą φ_h, kur $\varphi_h(\omega)=a_h\omega$, kai $\omega\in\Omega$. Taigi, turime, kad $\{\varphi_\tau:\tau\in\mathbb{R}\}$ yra mačiųjų transformacijų aibėje Ω vienparametrinė grupė.

Dabar prisiminsime ergotinės teorijos kai kuriuos pagrindinius faktus, (plačiau, žr. [11]). Tegul $\mathcal{G}$ yra kompaktiška topologinė Abelio grupė su Haro matu $m_{\mathcal{G}}$. Tegul $\{\mathcal{G}\}$ yra išmatuojamų transformacijų erdvėje $\mathcal{G}$ grupė. Aibė $A\in\mathcal{B}(\mathcal{G})$ vadinama invariantine grupės $\{\mathcal{G}_h\}$ atžvilgiu, jei visiems h, aibės A ir $A_h=\mathcal{G}_h(A)$ skiriasi viena nuo kitos nulinio mato $m_{\mathcal{G}}$ aibe, t.y. $m_{\mathcal{G}}(A\Delta A_h)=0$, kur $A\Delta A_h$ žymi aibių A ir A_h simetrinį skirtumą. Vienparametrinė grupė $\{\mathcal{G}_h\}$ vadinama ergodine jei jos invariantinių aibių σ-kūną, kurių matas $m_{\mathcal{G}}$ lygus 0 arba 1.

2.2.5 lema. *Vienparametrinė grupė φ_h yra ergodinė.*

Įrodymas. Lemos įrodymą galima rasti [6].

Tegul $s\in D$ ir

$$f_2(s,\omega)=\sum_{j=0}^{r}\sum_{m=1}^{\infty}a_m\omega^j(1)\omega(m)e^{-(\lambda_m+j\lambda_1)s}.$$

Tuomet mes turime, kad $f_2(s,\omega)$ yra dviejų $H(D)$-reikšmių atsitiktinių elementų $f_1(s,\omega)$ ir $f_2(s,\omega)$ sandauga, kur

$$f_1(s,\omega)=\prod_{j=1}^{r}(1-\omega(1)e^{\lambda_1(s_j-s)})$$

o $f(s,\omega)$ yra $H(D)$-reikšmis atsitiktinis elementas.

Atsitiktinio elemento ξ vidurkį pažymėkime $E\xi$.

2.2.6 lema. *Tegul T yra mačių ergodinių transformacijų tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, m)$ grupė. Tada $\forall g \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, m)$ ir beveik visiems $\omega \in \widehat{\Omega}$*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g(T^k\omega) = Eg.$$

Įrodymas. Ši lema yra gerai žinoma Birkhofo-Kinčino teorema (Birkhoff-Khinchine) [12].

2.2.7 lema. *Tegul $\sigma > \sigma_1$ ir $N \to \infty$. Tada beveik visiems $\omega \in \Omega$,*

$$\sum_{m=0}^{N} |f_2(\sigma + imh, \omega)|^2 = BN.$$

Įrodymas. Tegul $m \in \mathbb{N}$,

$$f_{mj}(\sigma, \omega) = a_{mj}\omega^j(1)\omega(m)e^{-(\lambda_m + j\lambda_1)\sigma}$$

o, fiksuotam j,

$$f_j(\sigma, \omega) = \sum_{m=1}^{\infty} f_{mj}(\sigma, \omega).$$

Tuomet turime, jog

$$E(f_{mj}, \overline{f_{kj}}) = a_{mj}\overline{a_{kj}}e^{-(\lambda_m + j\lambda_1)\sigma}e^{-(\lambda_k + j\lambda_1)\sigma} \int\limits_{\Omega} \omega^j(1)\omega^{-j}(1)\omega(m)\overline{\omega(k)}m_H(d\omega)$$

$$= \begin{cases} |a_{mj}|^2 e^{-2}(\lambda_m + j\lambda_1)\sigma, & m{=}k, \\ 0, & m \neq k, \end{cases}$$

nes

$$\int\limits_{\Omega} \omega(m)\overline{\omega(k)}m_H(d\omega) = \begin{cases} 1, & m{=}k, \\ 0, & m \neq k. \end{cases}$$

Be to, mes turime, kad atsitiktiniai dydžiai $f_{mj}(\sigma, \omega)$ yra poromis ortogonalūs. [5] yra įrodyta, kad kai $\sigma > \sigma_1$,

$$\sum_{m=1}^{\infty} |a_m|^2 e^{-2\lambda_m\sigma} < \infty.$$

Vadinasi,

$$E|f_j(\sigma, \omega)|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} E|f_{m,j}(\sigma, \omega)|^2 = O\left(\sum_{m=1}^{\infty} |a_m|^2 e^{-2(\lambda_m + j\lambda_1)\sigma}\right) < \infty, \quad j = 0, ..., r,$$

taigi ir,

$$E|f_2(\sigma, \omega)|^2 = \sum_{j=0}^{r} E|f_j(\sigma, \omega)|^2 < \infty. \tag{17}$$

Tuomet akivaizdu, kad

$$|f_2(\sigma, \varphi_h^m(\omega))|^2 = |f_2(\sigma, a_{mh}\omega)|^2 = |f_2(\sigma + imh, \omega)|^2. \qquad (18)$$

Atsižvelgę į (17) lygybę, bei 2.2.5 ir 2.2.6 lemas, randame, jog beveik visiems $\omega \in \Omega$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \sum_{m=0}^{N} |f_2(\sigma + imh, \omega)|^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \sum_{m=0} N|f_2(\sigma, \varphi_h^m(\omega))|^2$$

$$= E|f_2(\sigma, \omega)|^2 < \infty.$$

Iš čia turime lemos tvirtinimą.

Tegul $\omega \in \Omega$ ir

$$g_n(s, \omega) = \sum_{j=1}^{r} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mj}\omega^j(1)\omega(m)exp\{-e^{-(\lambda_m - \lambda_n)\sigma_2}\}e^{-(\lambda_m + j\lambda_1)s}.$$

Akivaizdu, jog, pastaroji eilutė konverguoja absoliučiai, kai $\sigma > \sigma_1$.

2.2.8 lema. *Tegul K yra kompaktiškas srities D poaibis. Tada beveik visiems $\omega \in \Omega$*

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \sum_{m=0}^{N} \sup_{s\in K} |f_2(s + imh, \omega) - g_n(s + imh, \omega)| = 0.$$

Įrodymas. Atsižvelgiant į 2.2.7 lemą, šios lemos įrodymas yra analogiškas 2.2.4 lemos įrodymui.

2.3 Ribinė teorema absoliučiai konverguojančioms eilutėms

Šioje dalyje mes nagrinėsime dviejų tikimybinių matų

$$P_{N,n}(A) = \mu_N(g_n(s + imh) \in A),$$

ir

$$\widehat{P_{N,n}}(A) = \mu_N(g_n(s + imh, \omega) \in A),$$

kai $N \to \infty$ silpną konvergavimą. Nagrinėjant šių matų silpną konvergavimą, mums reikės metrikos, apibrėžtos erdvėje $H(D)$ su indukuota joje topologija. Yra žinoma, žr. pavyzdžiui 1.7.1 lemą iš [2]), jog srityje D egzistuoja kompaktiškų poaibių seka $\{K_n\}$, tokia, kad $D = \cup_{n=1}^{\infty} K_n$, $K_n \subset K_{n+1}$, ir jeigu K yra kompaktiškas D poaibis, tai $K \subseteq K_n$ visiems n. Tada

$$\varrho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varrho_n(f, g)}{1 + \varrho_n(f, g)}, \quad f, g \in H(D),$$

kur

$$\varrho_n(f, g) = \sup_{s\in K_n} |f(s) - g(s)|$$

yra metrika erdvėje $H(D)$ su indukuota joje topologija.

2.3.1 lema. *Erdvėje $(H(D), \mathcal{B}(H(D)))$, egzistuoja tikimybinis matas P_n toks, kad matai $P_{N,n}$ ir $\widehat{P}_{N,n}$ kai $N \to \infty$ silpnai konverguoja į P_n.*

Įrodymas. Teigiamam sveikam skaičiui M, apibrėžkime funkcijas

$$g_{n,M}(s) = \sum_{j=0}^{r} \sum_{m=1}^{M} a_{mj} \exp\{-e^{(\lambda_m - \lambda_n)\sigma_2}\} e^{-(\lambda_m + j\lambda_1)s},$$

$$g_{n,M}(s, \omega) = \sum_{m=1}^{M} a_{mj} \omega^j(1)\omega(m) \exp\{-e^{(\lambda_m - \lambda_n)\sigma_2} e^{-(\lambda_m + j\lambda_1)s},$$

ir tegul

$$P_{N,n,M}(A) = \mu_N(g_{n,M}(s + imh) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(H(D)),$$
$$P_{N,n,M}(A) = \mu_N(g_{n,M}(s + imh, \omega) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(H(D)).$$

Pagal 2.1.2 ir 2.1.3 lemas matai $P_{N,n,M}$ ir $\widehat{P}_{N,n,M}$, kai $N \to \infty$, silpnai konverguoja į tam tikrą matą $P_{n,M}$. Panašiai kaip 5.5.2 teoremoje iš [2], gauname, kad fiksuotiems n tikimybinių matų šeima $\{P_{n,M}\}$ yra suspausta. Vadinasi, pagal Prokhorovo teoremą, (1.2.3 teorema), ji yra reliatyviai kompaktiška.

Iš $g_n(s)$ ir $g_{n,M}(s)$ apibrėžimų, turime, jog

$$\lim_{M \to \infty} g_{n,M}(s) = g_n(s),$$

ir, kadangi $g_n(s)$ eilutės konverguoja absoliučiai pusplokštumėje $\sigma > \sigma_1$, šis konvergavimas yra tolygus kompaktiškuose D poaibiuose. Vadinasi, kiekvienam $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} &\lim_{M \to \infty} \limsup_{N \to \infty} \mu_N(\varrho(g_{n,M}(s + imh), g_n(s + imh)) \geq \varepsilon) \\ &\leq \lim_{M \to \infty} \limsup_{N \to \infty} \frac{1}{(N+1)\epsilon} \sum_{m=0} N \varrho(g_{n,M}(s + imh), g_n(s + imh)) = 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Tegul θ_N atsitiktinis dydis, apibrėžtas tikimybinėje erdvėje $(\widehat{\Omega}, \mathcal{B}(\widehat{\Omega}), \mathbb{P})$, su pasiskirstymu

$$\mathbb{P}(\theta_N = mh) = \frac{1}{N+1}, \quad m = 0, 1, ..., N.$$

Pažymėkime

$$X_{N,n,M}(s) = g_{n,M}(s + i\theta_N).$$

Tuomet

$$X_{N,n,M}(s) \underset{N \to \infty}{\xrightarrow{\mathcal{D}}} X_{n,M},$$

kur $X_{n,M}$ yra $H(D)$-reikšmis atsitiktinis elementas su pasiskirstymu $P_{n,M}$, o $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ reiškia konvergavimą pagal skirstinį. Dabar tegul

$$X_{N,n}(s) = g_n(s + i\theta_N).$$

Tada pagal (19) lygybę, kiekvienam $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{M\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \mathbb{P}(\varrho(X_{N,n,M}(s), X_{N,n}(s)) \geq \varepsilon) = 0. \tag{20}$$

Kadangi šeima $\{P_{n,M}\}$ yra reliatyviai kompaktiška, egzistuoja toks posekis P_{n,M_1}, kuris silpnai konverguoja į P_n, kai $M_1 \to \infty$. Tuomet

$$X_{n,M_1} \underset{M_1\to\infty}{\overset{\mathcal{D}}{\longrightarrow}} P_n. \tag{21}$$

Žinome, jog erdvė $H(D)$ yra separabili. Todėl, remdamiesi (19) – (21) ir 1.2.4 teorema iš [2], gauname, jog

$$X_{N,n} \underset{N\to\infty}{\overset{\mathcal{D}}{\longrightarrow}} P_n. \tag{22}$$

Tai reiškia, kad egzistuoja tikimybinis matas P_n toks kad matas $P_{N,n}$ kai $N \to \infty$ silpnai konverguoja į P_n. Iš kitos, (22) rodo, kad matas P_n nepriklauso nuo posekio P_n, M_1 pasirinkimo. Iš šių faktų ir sekos $\{P_{n,M}\}$ reliatyvaus kompaktiškumo išplaukia, kad $P_{n,M}$, kai $M \to \infty$, silpnai konverguoja į matą P_n ir

$$X_{n,M} \underset{M\to\infty}{\overset{\mathcal{D}}{\longrightarrow}} P_n. \tag{23}$$

Pakartoję tuos pačius argumentus atsitiktiniams elementams

$$\widehat{X}_{N,n,M}(s,\omega) = g_{n,M}(s + i\theta, \omega),$$

$$\widehat{X}_{N,n}(s,\omega) = g_n(s + i\theta, \omega),$$

ir atsižvelgę į (23), gauname, kad matas $\widehat{P}_{N,n}$, kai $N \to \infty$, taip pat silpnai konverguoja į P_n. Lema įrodyta.

2.4 Ribinė teorema funkcijai $f_2(s)$

Šioje dalyje mes nagrinėsime tikimybinių matų

$$P_{N,f_2}(A) = \mu_N(f_2(s + imh) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(H(D)),$$

$$\widehat{P}_{N,f_2}(A) = \mu_N(f_2(s + imh, \omega) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(H(D)),$$

silpną konvergavimą.

2.4.1 Lema. *Erdvėje $(H(D), \mathcal{B}(H(D)))$ egzistuoja tikimybinis matas P toks kad matai P_{N,f_2} ir P_{N,f_2}, kai $N \to \infty$ silpnai konverguoja į P.*

Įrodymas. Įrodymo kelias yra panašus kaip ir 2.3.1 lemoje. Pagal ją matą $P_{N,n}$ ir $\widehat{P}_{N,n}$, kai $N \to \infty$, silpnai konverguoja į tą patį matą P_n. Paėmę

$$X_{N,n(s)} = g_n(s + i\theta_N),$$

gausime, kad

$$X_{N,n} \xrightarrow[N\to\infty]{\mathcal{D}} X_n, \tag{24}$$

kur X_n yra $H(D)$-reikšmis atsitiktinis elementas su pasiskirstymu P_n. Šeima $\{P_n\}$ taip pat yra reliatyviai kompaktiška. Panaudoję 2.2.4 lemą, randame, kad kiekvienam $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \mu_N(\varrho(f_2(s+imh), g_n(s+imh)) \geq \varepsilon) \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{(N+1)\varepsilon} \sum_{m=0}^{N} \varrho(f_2(s+imh), g_n(s+imh)) = 0.
\end{aligned}$$

Dabar pažymėkime

$$Y_N(s) = f_2(s+i\theta_N).$$

Tuomet turėtą sąryšį galime užrašyti tokia forma:

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \mathbb{P}(\varrho(X_{N,n}(s), Y_N(s)) \geq \varepsilon) = 0. \tag{25}$$

Iš reliatyvaus posekio $\{P_n\}$ kompaktiškumo seka, kad egzistuoja posekis $\{P_{n_1}\} \subset \{P_n\}$, kai $n_1 \to \infty$, kuris silpnai konverguoja į P, t.y.

$$X_{n_1} \xrightarrow[n_1\to\infty]{\mathcal{D}} P. \tag{26}$$

Pasinaudoję (24) – (26) ir 1.2.4 teorema iš [2], gauname, kad

$$Y_N \xrightarrow[N\to\infty]{\mathcal{D}} P.$$

Tai reiškia, kad matas P_{N,f_2}, kai $N \to \infty$ silpnai konverguoja į P. Reliatyvus kompaktiškumas ir (26) sąryšis parodo, kad

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} P. \tag{27}$$

Pakartoję anksčiau minėtus argumentus ir pasinaudoję (27) lygybe bei 2.2.8 lema gauname, kad matas P_{N,f_2}, kai $N \to \infty$, taip pat silpnai konverguoja į P.

Kitas mūsų tikslas yra identifikuoti ribinį matą 2.4.1 lemoje.

Kaip ir 2.2 skyriuje apibrėžkime

$$f_2(s,\omega) = \sum_{j=0}^{r} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mj} \omega^j(1)\omega(m) e^{-(\lambda_m + j\lambda_1)s}, \quad s \in D,$$

o P_{f_2} tegul yra atsitiktinio elemento $f_2(s,\omega)$ skirstinys.

2.4.2 lema. *Matas* P 2.4.1 *lemoje sutampa su* P_{f_2}.

Įrodymas. Tegul $A \in \mathcal{B}(H(D))$ yra mato P tolydumo aibė. Tuomet pagal 2.4.1 lemą beveik visiems $\omega \in \Omega$,

$$\lim_{N\to\infty} \mu_N(f_2(s+imh,\omega) \in A) = P(A). \tag{28}$$

Fiksuokime aibę A ir apibrėžkime atsitiktinį dydį θ erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ formule

$$\theta(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{kai } f_2(s,w) \in A, \\ 0, & \text{kai } f_2(s,w) \overline{\in} A. \end{cases}$$

Tuomet

$$E(\theta) = \int\limits_{\Omega} \theta dm_H = m_H(\omega \in \Omega : f_2(s,\omega) \in A) = P_{f_2}(A) < \infty. \tag{29}$$

Iš 2.2.5 ir 2.2.6 lemų seka, kad beveik visiems $\omega \in \Omega$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \sum_{m=0}^{N} \theta(\varphi_h^m(\omega)) = E(\theta). \tag{30}$$

Be to, iš θ ir φ_h apibrėžimų

$$\frac{1}{N+1} \sum_{m=0}^{N} \theta(\varphi_h^m(\omega)) = \mu_N(f_2(s+imh,\omega) \in A). \tag{31}$$

Iš (29) – (31) gauname, jog beveik visiems $\omega \in \Omega$

$$\lim_{N\to\infty} \mu_N(f_2(s+imh,\omega) \in A) = P_{f_2}(A).$$

Iš čia ir (28) lygybės turime, kad $P(A) = P_{f_2}(A)$ bet kuriai mato P tolydumo aibei A. Kadangi visos tolydžios aibės sudaro determinuojančią klasę, vadinasi $P(A) = P_{f_2}(A)$ visoms $A \in \mathcal{B}(H(D))$. Lema įrodyta.

2.5 Ribinė teorema funkcijai $f_1(s)$

Pirmiausia, mes pastebėsime, kad

$$f_1(s) = \prod_{j=1}^{r} (1 - e^{\lambda_1(s_j - s)}) = \sum_{m=0}^{r} b_m e^{-\lambda_1 m_s}$$

yra Dirichlė polinomas su koeficientais b_m ir rodikliais $m\lambda_1$. Apibrėžkime $H(D)$-reikšmį atsitiktinį elementą $f_1(s,\omega)$

$$f_1(s,\omega) = \prod_{j=1}^{r} (1 - \omega(1) e^{\lambda_1(s_j - s)}) = \sum_{m=0}^{r} b_m \omega^m(1) e^{-\lambda_1 m_s},$$

ir tikimybinį matą

$$P_{N,f_1}(A) = \mu_N(f_1(s+imh) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(H(D)).$$

2.5.1 lema. *Tikimybinis matas P_{N,f_1}, kai $N \to \infty$, silpnai konverguoja į atsitiktinio elemento $f_1(s,\omega)$, skirstinį P_{f_1}.*

Įrodymas. Lema įrodoma tuo pačiu būdu kaip 2.1.2 ir 2.4.2 lemos.

2.6 Dvimatė ribinė teorema

2.4 ir 2.5 skyriuose įrodėme diskrečias ribines teoremas funkcijoms $f_1(s)$ ir $f_2(s)$ erdvėje $H(D)$. Dabar mes įrodysime jungtinę ribinę teoremą šioms funkcijoms.

Tegul $H^2(D) = H(D) \times H(D)$. Pažymime P_{f_1,f_2} $H^2(D)$-reikšmio atsitiktinio elemento skirstinį

$$F(s,\omega) = (f_1(s,\omega), f_2(s,\omega)), \quad \omega \in \Omega, s \in D,$$

ir tegul

$$P_{N,f_1,f_2}(A) = \mu_N((f_1(s+imh), f_2(s+imh)) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(H^2(D)).$$

2.6.1 lema. *Tikimybinis matas P_{N,f_1,f_2}, kai $N \to \infty$, silpnai konverguoja į matą P_{f_1,f_2}.*

Lemos įrodymui mums reikės pagalbinių rezultatų.

2.6.2 lema. *Tikimybinių matų šeima $\{P_N, f_1, f_2\}$ yra reliatyviai kompaktiška.*

Įrodymas. 2.4.1 2.4.2 ir 2.4.3 lemose įrodėme, kad tikimybiniai matai P_{N,f_1} ir P_{N,f_2}, kai $N \to \infty$, silpnai konverguoja į atitinkamus matus P_{f_1} ir P_{f_2}. Be to, tikimybinių matų šeima $\{P_{N,f_j}, j = 1, 2, \}$ yra reliatyviai kompaktiška, o erdvė $H(D)$ yra pilna separabili erdvė. Vadinasi, pagal Prokhorovo teoremą šeima $\{P_{N,f_j}\}, j = 1, 2$ yra tiršta. Tuomet mes turime, kad kiekvienam $\epsilon > 0$ egzistuoja kompaktiškas poaibis $K_j \subset D$ toks, kad

$$P_{N,f_j}(H(D) \backslash K_j) < \frac{\epsilon}{2}, \quad j = 1, 2. \tag{32}$$

Tegul θ_N yra atsitiktinis dydis apibrėžtas 12 lemos įrodyme ir

$$\begin{aligned} &f_{1,N}(s) = f_1(s + i\theta_N), \\ &f_{2,N}(s) = f_2(s + i\theta_N), \\ &F_N(s) = (f_{1,N}(s), f_{2,N}(s)). \end{aligned}$$

Tada iš (32) nelygybės ir P_{N,f_j} apibrėžimo seka, kad

$$\mathbb{P}(f_{j,N} \in H(D) \backslash K_j) < \frac{\epsilon}{2}, \quad j = 1, 2. \tag{33}$$

Tegul $K = K_1 \times K_2$. Tuomet K yra erdvės $H^2(D)$ kompaktiškas poaibis. Atsižvelgę į (33) nelygybę, gauname, jog

$$\begin{aligned} P_{N,f_1,f_2}(H^2(D) \backslash K) \quad &= \mathbb{P}(F_N \in H^2(D) \backslash K) \\ &= \mathbb{P}(\bigcup_{j=1}^{2} (f_{j,N}(s) \in H(D) \backslash K_j)) \\ &\leq \sum_{j=1}^{2} \mathbb{P}(f_j, N(s) \in H(D) \backslash K_j) < \epsilon. \end{aligned} \tag{34}$$

(34) sąryšis parodo, jog šeima $\{P_{N,f_1,f_2}\}$ yra tiršta. Pagal Prokhorovo teoremą ji yra reliatyviai kompaktiška. Lema įrodyta.

Tegul $s_1, ..., s_l$ yra laisvai pasirenkami taškai srityje D ir pažymėkime $\sigma' = \min_{1\le k\le l} \mathbf{Re} s_k$. Tada $\sigma = \sigma_1 - \sigma' < 0$, ir pažymėkime

$$\widehat{D} = \{s \in \mathbb{C} : \sigma > \widehat{\sigma}\}.$$

Be to, tegul $u_{jk}, j = 1, 2, 1 \le k \le l$, yra laisvai pasirenkami kompleksiniai skaičiai. Apibrėškime funkciją $\upsilon : H^2(D) \to H(D)$ formule:

$$v(f_1, f_2) = \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{l} u_{jk} f_j(s_k + s), \quad s \in \widehat{D}, f_j \in H(D), j = 1, 2, \tag{35}$$

ir tegul

$$W_v(s) = v(f_1(s), f_2(s)).$$

2.6.3 lema. *Yra teisingas sąryšis*

$$W_v(s + i\theta_N) \underset{n\to\infty}{\xrightarrow{\mathcal{D}}} v(F(s, \omega)).$$

Įrodymas. Iš funkcijos v apibrėžimo,

$$W_v(s) = \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{l} u_{jk} f_j(s_k + s), \quad \sigma > \sigma_1$$

Pusplokštumėje $\sigma > \sigma_\alpha$ funkcijos $f_1(s)$ ir $f_2(s)$ galime užrašyti absoliučiai konverguojančiomis Dirichlė eilutėmis

$$f_1(s) = \prod_{j=1}^{r}(1 - e^{\lambda_1(s_j - s)}) = \sum_{j=0}^{r} b_j e^{-\lambda_1 j s}$$

ir

$$\begin{aligned} f_2(s) &= \prod_{j=1}^{r}(1 - e^{\lambda_1(s_j - s)}) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-\lambda_m s} \\ &= \sum_{j=0}^{r}\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,j} e^{-(\lambda_m + j\lambda_1)s}. \end{aligned}$$

Tai rodo, kad kai $s \in D$,

$$\begin{aligned} W_v(s) &= \sum_{k=1}^{l} u_{1k} f_1(s_k + s) + \sum_{k=1}^{l} u_{2k} f_2(s_k + s) \\ &= \sum_{k=1}^{l} u_{1k} \sum_{j=0}^{r} b_j e^{-\lambda_1 j(s_k+s)} + \sum_{k=1}^{l} u_{2k} \sum_{j=0}^{r}\sum_{m=1}^{\infty} a_{mj} e^{-(\lambda_m + j\lambda_1)(s_k+s)} \\ &= \sum_{j=0}^{r} \widetilde{b}_j e^{-\lambda_1 j s} + \sum_{k=1}^{l} u_{2k} \sum_{j=0}^{r}\sum_{m=1}^{\infty} \widetilde{a}_{mjk} e^{-(\lambda_m + j\lambda_1)s} = Z_1(s) + Z_2(s), \end{aligned}$$

kur

$$\widetilde{b}_j = \sum_{k=1}^{l} u_{1k}\widehat{b}_j e^{-\lambda_1 s_k}, \quad \widehat{b}_j = \begin{cases} b_j, & j \le r, \\ 0, & j > r, \end{cases}$$

ir

$$\widetilde{a}_{mjk} = \widehat{a}_{mj} e^{-(\lambda_m + j\lambda_1)s_k}, \quad \widehat{a}_{mj} = \begin{cases} a_{mj}, & j \le r, \\ 0, & \text{j>r.} \end{cases}$$

Matome, jog $Z_1(s)$ yra Dirichlė polinomas, o $Z_2(s)$ Dirichlė eilučių, tenkinančių (7) ir (8) sąlygas, tiesinė kombinacija. Kadangi funkcija $f_2(s)$ yra reguliari pusplokštumėje $\sigma > \sigma_1$, funkcija $Z_2(s)$ taip pat yra reguliari srityje D.

Kadangi aibė $\{\lambda_m\}$ yra algebrinių skaičių, tiesiškai nepriklausomų virš racionaliųjų skaičių kūno, sistema, ir λ_m tenkina (4) savybę, gauname, kad tikimybinis matas

$$\mu_N(W_v(s+imh) \in A) = \mu_N((Z_1(s+imh) + Z_2(s+imh)) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(H(D)), \tag{36}$$

kai $N \to \infty$, silpnai konverguoja į $H(\widehat{D})$-reikšmio atsitiktinio elemento skirstinį

$$W_v(s,\omega) = \sum_{j=0} r\widetilde{b}_j \omega(1) e^{-\lambda_1 j s} + \sum_{k=1}^{l} u_{2k} \sum_{j=0}^{r} \sum_{m=1}^{\infty} \widetilde{a}_{m,j,k} \omega^j(1)\omega(m) e^{-(\lambda_m + j\lambda_1)s} \tag{37}$$

Šis įrodymas yra gaunamas panašiai kaip ir funkcijai $f_2(s)$. Pirmiausia įrodoma ribinė teorema matui

$$\mu_N((Z_1(s) + \sum_{k=1}^{l} u_{2k} \sum_{j=0}^{r} \sum_{m=1}^{M} \widetilde{a}_{mjk} e^{-(\lambda_m + j\lambda_1)s}) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(H(\widehat{D})).$$

Po to pritaikomas funkcijos $W_v(s)$ aproksimavimas vidurkiui, o tuomet lieka pasinaudoti ergodinės teorijos elementais, kad gauti tikslią išreikštinę ribinio mato formą. Lieka parodyti, kad šis ribinis matas sutampa su atsitiktinio elemento, užrašyto (37) forma skirstiniu.

Be to, iš funkcijos v apibrėžimo

$$\begin{aligned} W_v(s,\omega) &= \sum_{k=1}^{l} u_{1k} \sum_{j=0}^{r} b_j \omega^j(1) e^{-\lambda_1 j(s_k+s)} + \sum_{k=1}^{l} u_{2k} \sum_{j=0}^{r} \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,j,k} \omega^j(1)\omega(m) e^{-(\lambda_m + j\lambda_1)(s_k+s)} \\ &= \sum_{j=0}^{2} \sum_{k=1}^{r} u_{jk} f_j(s_k + s, \omega) = v(f_1(s,\omega), f_2(s,\omega)). \end{aligned}$$

Taigi (36) matas, kai $N \to \infty$, silpnai konverguoja į atsitiktinio elemento $v(f_1(s,\omega), f_2(s,\omega))$ skirstinį.

2.6.1 lemos įrodymas. Pagal 2.6.2 lemą, erdvėje $(H^2(D), \mathcal{B}(H^2(D))$, egzistuoja seka $N_1 \to \infty$ tokia, kad matas P_{N,f_1,f_2}, kai $N_1 \to \infty$, silpnai konverguoja į tikimybinį matą P. Tegul

$$F_1(s) = (f_{11}(s), f_{12}(s))$$

yra $H^2(D)$-reikšmis atsitiktinis elementas su skirstiniu P. Tada pagal N_1 pasirinkimą mes turime, kad

$$F_{N_1} \underset{N_1\to\infty}{\overset{\mathcal{D}}{\to}} F_1. \tag{38}$$

Kadangi funkcija v yra tolydi, vadinasi, pagal 2.1.1 lemą turime, kad

$$v(F_{N_1}) \underset{N_1\to\infty}{\overset{\mathcal{D}}{\to}} v(F_1).$$

Iš $W_v(s)$ apibrėžimo turime, kad

$$W_v(s+i\theta_{N_1}) \underset{N_1\to\infty}{\overset{\mathcal{D}}{\to}} v(F_1). \tag{39}$$

Pažymėję $F(s) = (f_1(s), f_2(s))$, remdamiesi 2.6.3 lema gauname, jog

$$W_v(s+i\theta_{N_1}) \underset{N_1\to\infty}{\overset{\mathcal{D}}{\to}} v(F).$$

Iš čia ir iš (39) sąryšio

$$v(F) = v(F_1). \tag{40}$$

Dabar apibrėžkime funkciją $v_1 : H(\widehat{D}) \to \mathbb{C}$ formule

$$v_1(f) = f(0), \quad f \in H(D).$$

Kadangi funkcija v_1 yra mati, pasirėmę (40) gauname, jog

$$v_1(v(F)) = v_1(v(F_1)),$$

arba

$$v(F)(0) = v(F_1)(0).$$

Iš v apibrėžimo turime, jog

$$\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{l} u_{jk} f_j(s_k, \omega) = \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{l} u_{jk} f(1j)(s_k) \tag{41}$$

kur u_{jk} laisvai pasirenkami kompleksiniai skaičiai. Erdvėje $\mathbb{R}^{4n}$ hyperplokštumos generuoja determinuojančią klasę [1]. Be to jos taip pat formuoja determinuojančią klasę ir erdvėje $\mathbb{C}^{2n}$. Iš (41) lygybės matome, kad $\mathbb{C}^{2n}$-mačiai atsitiktiniai elementai $f_j(s_k, \omega)$ ir $f_{1j}(s_k)$, $j = 1, 2$, $k = 1, ..., l$, turi tą patį skirstinį.

Tegul K yra erdvės D kompaktiškas poaibis ir tegul $\varphi_1, \varphi_2 \in H(D)$. Be to, tegul kiekvienam $\epsilon > 0$,

$$G = \{(g_1, g_2) \in H^2(D) : \sup_{s\in K} |g_j(s) - \varphi_j(s)| \le \epsilon, j = 1, 2\}.$$

Pasirinkime tirštą seką $\{s_k\}$ srityje K. Be to, tegul

$$G_l = \{(g_1, g_2) \in H^2(D) : |g_j(s_k) - \varphi_j(s_k)| \leq \epsilon, j = 1, 2, k = 1, ..., l\}.$$

Tuomet iš anksčiau paminėtų atsitiktinių elementų $f_j(s_k, \omega)$ ir $f_{1j}(s_k, \omega)$ savybių turime, kad

$$m_H(\omega \in \Omega : F(s, \omega) \in G_l) = \mathbb{P}(F_1(s) \in G_l). \tag{42}$$

Kadangi seka $\{s_k\}$ yra iršta srityje K, turime, kad $G_1 \supset G_2 \supset ...$ ir $G_l \to G$, kai $l \to \infty$. Jeigu $l \to \infty$ (42) lygybėje, mes turime, jog,

$$m_H(\omega \in \Omega : F(s, \omega) \in G) = \mathbb{P}(F_1(s) \in G). \tag{43}$$

Kadangi erdvė $H^2(D)$ taip pat yra separabili, tuomet (43) lygybė duoda, jog

$$F = F_1.$$

Iš čia ir iš (38) sąryšio gauname

$$F_{N_1} \underset{N_1 \to \infty}{\overset{\mathcal{D}}{\to}} F_1. \tag{44}$$

Vadinasi, matas P_{N_1, f_1, f_2}, kai $N \to \infty$ silpnai konverguoja į atsitiktinio elemento skirstinį

$$F = (f_1(s, \omega), f_2(s, \omega)).$$

kadangi pagal 2.6.2 lemą šeima $\{P_{N_1, f_1, f_2}\}$ yra reliatyviai kompaktiška ir atsitiktinis elementas F (44) lygybėje nepriklauso nuo sekos N_1 pasirinkimo, pagal 1.1.9 teoremą iš [2] ir 2.6.2 lemos gauname lemos tvirtinimą.

2.7 B teoremos įrodymas

Apibrėškime funkciją $u : H^2(D) \to M(D)$ formule

$$u(g_1, g_2) = \frac{g_2}{g_1}, \quad g_1, g_2 \in H(D).$$

Kadangi metrika d tenkina sąlygą

$$d(g_1, g_2) = d\left(\frac{1}{g_1}, \frac{1}{g_2}\right).$$

Todėl funkcija u yra tolydi. Taigi, remdamiesi 2.1.1 ir 2.6.1 lemomis galime padaryti išvadą, kad tikimybinis matas

$$\begin{aligned} P_N &= \mu_N(f(s + imh) \in A) = P_{N, f_1, f_2} u^{-1} \\ &= \mu_N(\frac{f_2(s + imh)}{f_1(s + imh} \in A), \quad A \in \mathcal{B}(M(D)) \end{aligned}$$

kai $N \to \infty$, silpnai konverguoja į atsitiktinio elemento $\frac{f_2(s,\omega)}{f_1(s,\omega)}$ skirstinį. Kadangi,

$$\begin{aligned}
\frac{f_2(s,\omega)}{f_1(s,\omega)} &= \frac{\sum\limits_{j=0}^{r}\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{mj}\omega^j(1)\omega(m)e^{-\lambda_m+j\lambda_1)s}}{\prod\limits_{j=1}^{r}(1-\omega(1)e\lambda_1(s_j-s))} \\
&= \frac{\prod\limits_{j=1}^{r}(1-\omega(1)e^{\lambda_1(s_j-s)})\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m\omega(m)e^{-\lambda_m s}}{\prod\limits_{j=1}^{r}(1-\omega(1)e^{\lambda_1(s_j-s)})} \\
&= f(s,\omega),
\end{aligned}$$

vadinasi ribinis matas yra $m_H(\omega \in \Omega : f(s,\omega) \in A), A \in \mathcal{B}(M(D))$. Teorema įrodyta.

3 Pagrindinės teoremos įrodymas

Kaip minėjome įvade, mūsų darbo tikslas yra išplėsti sekos $\{\lambda_m\}$ pasirinkimą B teoremoje, sąlygą $\lambda_m \geq c(\log m)^\delta, \quad c, \delta > 0$, pakeičiant eilutės

$$\sum_{m=1}^{\infty} |a_m|^2 e^{-2\lambda_m \sigma} \log^2 m. \tag{45}$$

konvergavimu.

Dar kartą priminsime pagrindinę teoremą. Tegul $h > 0$.

Pagrindinė teorema. *Tegul* $\exp\{\frac{2\pi}{h}\}$ *yra racionalusis skaičius. Tarkime, kad* $\{\lambda_m\}$ *yra algebrinių skaičių tiesiškai nepriklausomų virš racionaliųjų skaičių kūno seka, tenkinanti sąlygą:*

$$\sum_{m=1}^{\infty} |a_m|^2 e^{-2\lambda_m \sigma} \log^2 m.$$

Be to, tegul funkcija $f(s)$ *tenkina* (2) *ir* (3) *sąlygas. Tuomet tikimybinis matas*

$$\mu_N(f(s + imh) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(M(D)),$$

kai $N \to \infty$*, silpnai konverguoja į atsitiktinio elemento* $f(s, \omega)$ *skirstinį*

$$m_H(\omega \in \Omega : f(s, \omega) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(M(D))$$

Įrodymas. Teorema įrodoma taip pat kaip ir B teorema, o eilutės konvergavimo sąlyga yra naudojama atsitiktinio elemento egzistavimui įrodyti.

Įrodysime, kad jei (45) eilutė konverguoja, tuomet

$$f(s, \omega) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \omega(m) e^{-\lambda_m s}, \quad s \in D, \tag{46}$$

yra $H(D)$-reikšmis atsitiktinis elementas, t.y. (46) eilutė konverguoja tolygiai kompaktiškuose srities D poaibiuose.

Pirmiausia įrodysime pagrindinį rezultatą.

3.1 lema. $f(s, \omega)$ *yra* $H(D)$*-reikšmis atsitiktinis elementas, apibrėžtas tikimybinėje erdvėje* $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$.

Šios lemos įrodymui reikalinga dar viena lema.

Tegul, kaip įprasta, $E\varphi$ yra atsitiktinio elemento φ vidurkis.

3.2 lema. *Tarkime, kad atsitiktiniai elementai $X_1, X_2, ...$ yra ortogonalūs, o*

$$\sum_{m=1}^{\infty} E|X_m|^2(\log m)^2 < \infty.$$

Tuomet eilutė

$$\sum_{m=1}^{\infty} X_m$$

konverguoja beveik visur.

Ši lema yra atskiras Rademačerio (Rademacher) teoremos atvejis, kurios įrodymą galime rasti [6].

3.1 lemos įrodymas. Pirmiausia, pasiremdami 3.2 lema, įrodysime, jog $f(\sigma, \omega) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m\omega(m)e^{-\lambda_m\sigma}$ konverguoja beveik visiems $\omega \in \Omega$ Haro mato atžvilgiu. Tegul

$$\varphi_m(\omega) = a_m\omega(m)e^{-\lambda_m\sigma}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad \sigma > \sigma_1.$$

Tuomet $\{\varphi_m\}$ yra kompleksines reikšmes įgyjančių atsitiktinių elementų seka erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$ seka. Nesunku pamatyti, kad

$$E|\varphi_m|^2 = |a_m|^2e^{-2\lambda_m\sigma}, \tag{47}$$

ir

$$\begin{aligned} E(\varphi_m\overline{\varphi}_k) &= \int\limits_{\Omega} \varphi_m(\omega)\overline{\varphi}(\omega)dm_H = a_m\overline{a}_ke^{-(\lambda_m+\lambda_k)\sigma} \int\limits_{\Omega} \omega(m)\overline{\omega(k)}dm_H \\ &= \begin{cases} 0, & \text{kai } m \neq k, \\ |a_m|^2e^{-2\lambda_m\sigma}, & \text{kai } m = k. \end{cases} \end{aligned}$$

Vadinasi, $\{\varphi_m\}$ yra poromis ortogonalių atsitiktinių elementų seka. Atsižvelgę į (45) eilutės konvergavimą bei (47) lygybę, gauname, jog

$$\sum_{m=1}^{\infty} E|\varphi_m|^2\log^2 m < \infty.$$

Tuomet, pagal 3.2 lemą, eilutė $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \varphi_m$ konverguoja beveik visur, t.y. eilutė

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m\omega(m)e^{-\lambda_m\sigma}$$

konverguoja beveik visiems $\omega \in \Omega$ Haro mato atžvilgiu.

Iš čia gerai žinomos Dirichlė eilučių savybės, pagal kurią eilutė $\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m\omega(m)e^{-\lambda_m s}$ konverguoja tolygiai kompaktiškuose srities D poaibiuose bei Vejerštraso teoremos [4] turime, jog $f(s, \omega)$ yra $H(D)$-reikšmis atsitiktinis elementas.

Toliau pagrindinė teorema įrodoma visiškai analogiškai kaip ir B teorema.

Išvados

Darbe nagrinėjamas funkcijų, apibrėžiamų bendrosiomis Dirichlė eilutėmis

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-\lambda_m s},$$

diskretus reikšmių pasiskirstymas. Įrodyta diskreti ribinė teorema bendrųjų Dirichlė eilučių poklasiui meromorfinių funkcijų erdvėje tikimybinų matų silpnojo konvergavimo prasme.

Pateikta ribinio mato išraiška, t.y. jei funkcija $f(s) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-\lambda_m s}$, bei rodikliai λ_m tenkina tam tikras sąlygas, tuomet tikimybinis matas

$$\mu_N(f(s + imh) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(M(D))$$

kai $N \to \infty$, silpnai konverguoja į tam tikro atsitiktinio elemento skirstinį.

Ribinės teoremos įrodymas paremtas A. Laurinčiko ir R. Macaitienės pateiktu teoremos įrodymu, tačiau darbe panaudota nauja sąlyga rodikliams λ_m, kurią patikrinti kur kas paparasčiau nei minėtų autorių naudojamą reikalavimą rodiklių λ_m augimui.

Įrodyta teorema gali būti pritaikyta bendrųjų Dirichlė eilučių diskrečiam universalumui tirti.

Summary

Let $\{a_m : m \in \mathbb{N}\}$ be a sequence of complex numbers, and let $\{\lambda_m : m \in \mathbb{N}\}$ be an increasing sequence of positive numbers such that $\lim\limits_{m\to\infty} \lambda_m = +\infty$. We denote by $s = \sigma + it$ a complex variable. The series

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-\lambda_m s}, \tag{1}$$

is called a general Dirichlet series. Suppose that series (1) absolutely converges for $\sigma > \sigma_a$ to the sum $f(s)$. Then the function $f(s)$ is regular in the half-plane $\sigma > \sigma_a$.

Let $N \in \mathbb{N}$, and let

$$\mu_N(...) = \frac{1}{N+1} \#\{0 \le m \le N : ...\},$$

where in place of dots a condition satisfied by m is to be written. Let $\mathcal{B}(S)$ denote the class of Borel sets of the space S. We suppose that the function $f(s)$ is meromorphically continuable to the region $\sigma > \sigma_1$, $\sigma_1 < \sigma_a$, and that all poles in this region are in a compact set. Moreover, we suppose that, for $\sigma > \sigma_1$, the estimates

$$f(s) = B|t|^{\alpha}, \quad |t| \ge t_0, \quad \alpha > 0, \tag{2}$$

and

$$\int\limits_{-T}^{T} |f(\sigma + it)|^2 dt = BT, \quad T \to \infty. \tag{3}$$

are satisfied.

Now define the infinite-dimensional torus

$$\Omega = \prod_{m=1}^{\infty} \gamma_m,$$

where $\gamma_m = \gamma = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$ for all $m \in \mathbb{N}$. With the product topology and pointwise multiplication, Ω is a compact topological Abelian group. Therefore, the probability Haar measure m_H on $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ exists, and this gives the probability space $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Let $\omega(m)$ stand for the projection of $\omega \in \Omega$ to the coordinate space γ_m. Define, for $\sigma > \sigma_1$,

$$f(\sigma, \omega) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \omega(m) e^{-\lambda_m \sigma}, \tag{4}$$

and additionally assume that the exponents λ_m satisfy

$$\lambda_m \geq c(\log m)^{\delta} \tag{5}$$

with some $c > 0$ and $\delta > 0$. Then in [5] it was proved that $f(\sigma, \omega)$ is a complex-valued random variable defined on the probability space $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Denote by P_f its distribution, i.e.,

$$P_f(A) = m_H(\omega \in \Omega : f(\sigma, \omega) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}).$$

Let $h > 0$ be fixed and such that $\exp\{\frac{2\pi}{h}\}$ is a rational number.

Theorem. [3]. *Suppose that the function $f(s)$ satisfies conditions* (2) *and* (3), *$\{\lambda_m\}$ is a sequence of algebraic numbers linearly independent over the field of rational numbers and satisfies condition* (5). *Then the measure*

$$P_N(A) = \mu_N(f(\sigma + imh) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

weakly convergences to P_f as $N \to \infty$.

The aim of this work is to extend the choice of the sequence $\{\lambda_m\}$ in presented theorem, i.e., to replace condition (5) by the convergences of series

$$\sum_{m=1}^{\infty} |a_m|^2 e^{-2\lambda_m \sigma} \log^2 m. \tag{6}$$

Proof of theorem with replaced condition (6) we obtain in the same way as with the condition (5) because the condition (5) is necessary only for the proof on the existence of the complex-valued random variable.

Literatūra

[1] P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, Wiley, New York, 1968.

[2] A. Laurinčikas, *Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function*, Kluwer, Dordrecht, 1996.

[3] A. Laurinčikas, R. Macaitienė, Discrete limit Theorems for general Dirichlet series, III, *Cent. Eur. J. Math.,* 2(3), 339-361 (2004).

[4] A. Laurinčikas, R. Macaitienė, *Įvadas į Dirichlė eilučių teoriją*, ŠU, 2008.

[5] A. Laurinčikas, W. Schwarz, J. Steuding, Limit theorems for general Dirichlet series III, Analytic and probabilitic methods in number theory. *Proceedings of the third international conference in honour of J. Kubilius, Palanga, 2001,* 137-156 (2002).

[6] M. Loeve, *Probability Theory*, Van Nostrand Company, Toronto-New York-London 1955.

[7] R. Macaitienė, *Discrete limit Theorems for general Dirichlet series Doctoral disertation*, 2006.

[8] R. Macaitienė, Discrete limit Theorems for Dirichlet polynomals. *Lith. Math. J.,* 42, 705-709 (2002).

[9] H. L. Montgomery, *Topics in multiplikative number theory*, Springer, Berlin, 1971.

[10] E.M. Nikishin, Dirichlet series with independent exponents and certain of their applications, (in Russian) *Matem.sb*, 96(1), 3-40 (1975).

[11] Y. G. Sinai, *Introduction to Efrodic Theory*, Princeton Univ. Press, 1976.

[12] A. A. Tempelman, *Ergodic Theorems on Groups*, Mokslas, Vilnius, 1986.

Žymėjimai

k, l, m, n, j - natūralieji skaičiai

α, β - teigiamos konstantos

$\mathbb{N}$ - natūraliųjų skaičių aibė

$\mathbb{Z}$ - sveikųjų skaičių aibė

$\mathbb{C}$ - kompleksinių skaičių aibė

$M(D)$ - meromorfinių srityje D funkcijų erdvė

$H(D)$ - analizinių srityje D funkcijų erdvė

$\mathcal{B}(S)$ - erdvės S Borelio aibių klasė

$s = \sigma + it$ - kompleksinis kintamasis

$Res = \sigma$ - kompleksinio kintamojo s realioji dalis

$Ims = t$ - kompleksinio kintamojo s menamoji dalis

i - menamasis vienetas $i = \sqrt{-1}$

$meas\{A\}$ - aibės A Lebego matas

$\xrightarrow{\mathcal{D}}$ - konvergavimas pagal skirstinį

EX - atsitiktinio dydžio X vidurkis

$\Gamma(s)$ - Oilerio gama funkcija (pusplokštumėje $\sigma > 0$ apibrėžiama $\Gamma(s) = \int\limits_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$ ir analiziškai pratęsiama į visą s plokštumą)