VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATIKOS METODIKOS KATEDRA

Laura Šlenderytė

# SOCIALINĖS GEROVĖS MATEMATINIAI MODELIAI

Magistro baigiamasis darbas

Vadovas
doc. Antanas Apynis

VILNIUS    2006

ĮVADAS ........ 3
1. **MATEMATINIO MODELIAVIMO UŽDAVINIAI** ........ 6
**1.1 Matematinis modeliavimas** ........ 6
**1.2. Pradinės sąvokos ir kriterijai** ........ 7
**2. SOCIALINĖS GEROVĖS MATEMATINIAI MODELIAI** ........ 10
**2.1. Gyvenamojo rajono modelis** ........ 10
**2.2 Namų ūkio optimizavimas** ........ 12
**2.3 Konkurencinė pusiausvyra ir socialinė gerovė** ........ 17
**2.4. Susisiekimas** ........ 21
**2.4.1.Žemė, skirta keliams** ........ 21
**2.4.2 Susisiekimo kainos priklausomybė nuo atstumo** ........ 23
**2.4.3.Susisiekimo kainos priklausomybė nuo eismo intensyvumo** ........ 23
**3.TAIKYMO UŽDAVINIAI** ........ 26
**3.1. Modelio pritaikymas Vilniaus apylinkėms** ........ 26
**3.2. Rekreacinės zonos planavimas** ........ 32
**3.3. Mokyklos biudžeto planavimas** ........ 37
IŠVADOS ........ 41
LITERATŪRA ........ 42
1 PRIEDAS.
2 PRIEDAS.

# ĮVADAS

Pagrindinis šio darbo tikslas yra išnagrinėti matematinių modelių sudarymo principus, nagrinėjant konkretų modelio pavyzdį, bei pritaikyti jį realiame gyvenime (aišku, nagrinėjamas situacijas supaprastinus ir formalizavus). Nagrinėjama tik teorinė matematinio modelio dalis (t.y. modelis nealgoritmuojamas), nesigilinama į jo realizavimą.

Pagrindinė pasirinkto modelio sprendžiama problema yra gyvenamosios vietos pasirinkimo mieste optimalumo tyrimas, priklausomai nuo kasmetinių pajamų bei transporto (susisiekimo) tame mieste problema. Iš esmės tai miesto apgyvendinimo tipo modelis, kuriame nagrinėjama ir atskirų šeimų gerovė (laikantis ekonominės pusiausvyros sąlygų), ir viso miesto gyventojų optimali gerovė. Visą šią problemą galima įvardinti socialinės gerovės matematiniu uždaviniu.

Ši problema besikeičiančioje visuomenėje yra gana aktuali, visų pirma dėl nuolat vykstančio Lietuvoje verslo centralizavimo. Ir statistika, ir įvairūs ekonominiai tyrimai rodo, kad dauguma įmonių, išsidėsčiusių visoje Lietuvoje, savo administracijas įkuria Vilniuje, tokį žingsnį vertindamos kaip savo veiklos koordinavimo ir valdymo palengvinimą. Kartu su šiuo procesu vyksta ir darbo vietų centralizavimas.

Be to, modeliavimas ir veiklos organizavimas darosi vis svarbesnis švietime. Tad modeliavimą galima pritaikyti ir nagrinėjant šiuolaikinę švietimo sistemą. Vis dažniau mokykla yra suvokiama kaip atskiras ūkinis subjektas, tvarkantis savo finansus, planuojantis bei racionaliai organizuojantis savo veiklą.

Baigiamojo darbo pirmoje dalyje nagrinėjama pagrindinio socialinės gerovės modelio struktūra. Matematiškai apibrėžiami kintamieji dydžiai, sudaroma tikslo funkcija, formuluojamas uždavinys. Kaip ir kiekviename optimizavimo uždavinyje, yra atsižvelgiama į svarbiausius apribojimus. Šiame modelyje pagrindiniu apribojimu tampa kasmetinės atskirų ūkinių subjektų pajamos. Prisilaikant šių apribojimų, sudaroma kiekvienos šeimynos biudžetinė (išlaidų ir pajamų) lygtis, nagrinėjami pagrindiniai faktoriai, nusakantys šeimos gerovę.

Darbe nagrinėjami ir sprendžiami tokie klausimai:

- Kur geriau gyventi (su konkrečiomis pajamomis)- arčiau centrinio verslo rajono ar toliau (kai gyvenamasis būstas nuomojamas, o ne perkamas)?
- Kaip optimaliai paskirstyti savo pajamas tarp kasdieninių išlaidų ir mokesčio už gyvenamąjį plotą?
- Kas įtakoja susisiekimo kainą? Kaip apibrėžti eismo intensyvumo įtaką jai?

Aptariama, ką matematiškai reiškia išlaikyti pusiausvyrą tarp gyventojų; kaip suvokiama atskiros šeimos gerovė ir kuo ji skiriasi nuo socialinės gerovės, t.y., suminės visam miestui gerovės. Teorinis modelis nagrinėjimas taikant Cobbo- Duglaso naudingumo funkciją.

Antroje darbo dalyje nagrinėjami trys konkretūs modelio uždaviniai. Pirmasis- gyvenamosios vietos Vilniaus rajone planavimas. Modelyje visas Vilniaus miestas laikomas centriniu verslo rajonu. Išvedama gyvenamosios vietos nuomos kainos pokytis (atitinkamai nuomos kainos funkcija), priklausantis nuo vietovės atstumo iki Vilniaus. Nagrinėjamas 30 kilometrų spindulio apskritimo plotas atskaitos tašku laikant Vilniaus miesto centrą.

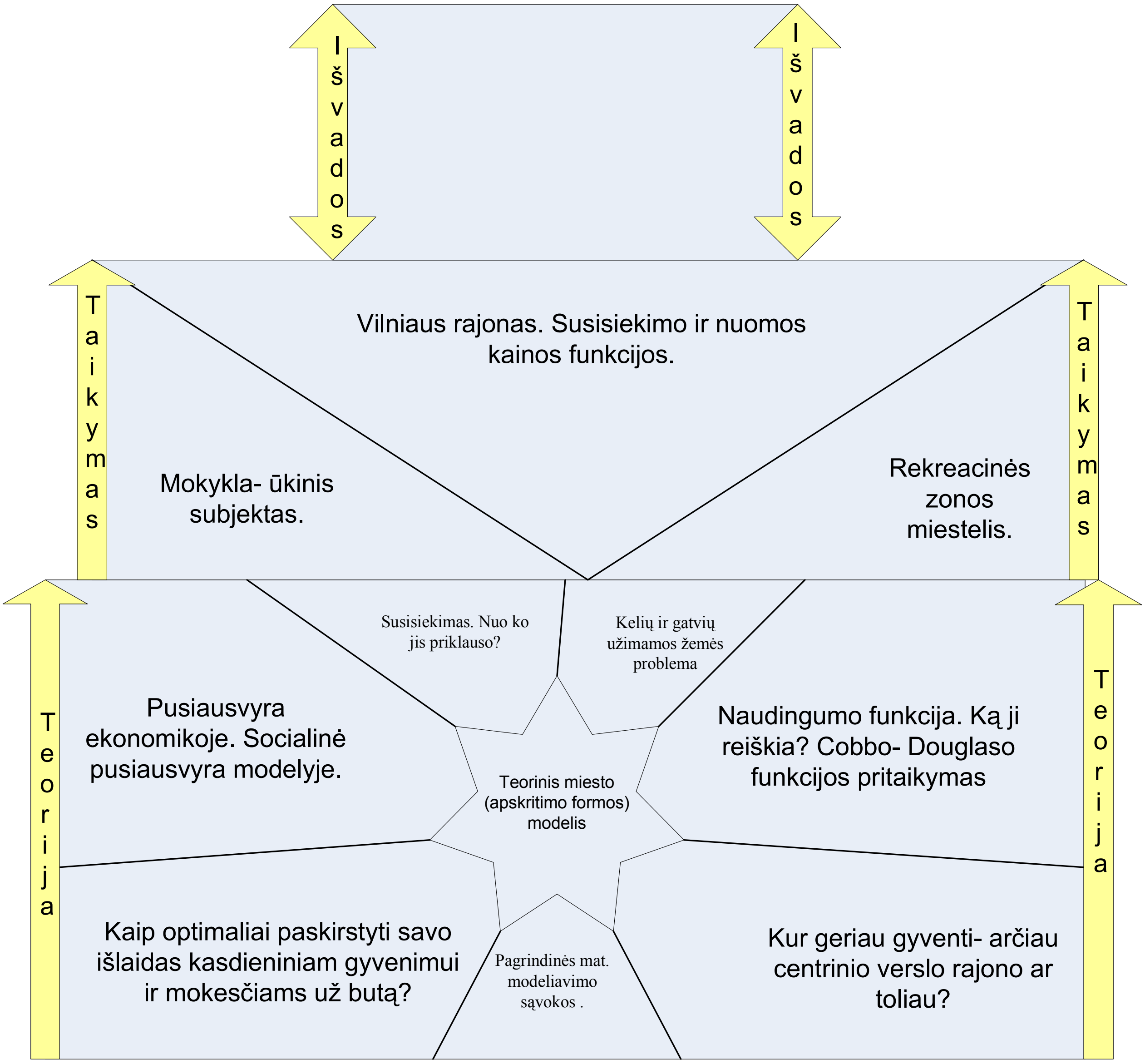
Be gyvenamos vietos nuomos kainos, sudaroma ir transporto išlaidų iki darbo vietos Vilniuje funkcija, išskiriant ją į kelis galimus atvejus, priklausomai nuo pasirinkto transporto rūšies (viešojo ar privataus). Nagrinėjant šį uždavinį, palyginami ir keli konkretūs atvejai (tai yra, išskiriami atskiri atvejai kelių tipų šeimų pagal pajamas (pvz., minimali ar vidutinė alga), arba pagal dirbančių šeimoje skaičių (pvz.: vienas ar du- visų pirma tai keičia šeimynos transporto priemonės pasirinkimą) ir išanalizuojamos jų galimybės gyventi skirtingose vietose Vilniaus miesto atžvilgiu.

Kitas uždavinys- mokyklos biudžeto planavimas. Laikant, kad mokykla turi savo pajamas (atskirai plačiau nagrinėjamas „mokinio krepšelis“ kaip pagrindinis dabartinis mokyklų finansavimo būdas), analizuojama problema, kaip optimaliai paskirstyti lėšas tarp pedagogų atlyginimams skiriamų pinigų, ir išlaidų, skirtų bibliotekai, mokymo priemonių įsigyjimui, ar kitoms reikalingoms buitinėms mokyklos reikmėms. Tikrinama, ar pasirinktos naudingumo funkcijos leidžia realiai nagrinėti šitą problemą.

Trečia modelio taikymo dalis- rekreacinės zonos planavimas. Pagrindine jo savybe laikoma, kad beveik visas miestelio gyvenamasis plotas priklauso savininkams, negyvenantiems tame mieste. Kitaip šį uždavinį galima suprasti, kaip investuotojų įtaką ir vietiniams gyventojams, ir vystomai miesto žemės ekonomikai. Pagrindine problema tampa socialiai teisingas dotacijų išskirstymas, nuo kurio priklauso vietinių gyventojų pajamos.

Sudarant modelius remtasi įvairiais statistiniais duomenimis iš oficialių ir laisvai prieinamų interneto puslapių (Švietimo ir mokslo ministerijos, Kelių departamento informacinių bei skelbimų portalų). Kuriant interpretaciją Vilniaus rajonui nuomos kainų duomenys surinkti iš įvairių Lietuvos dienraščių ir reklamos internetinių puslapių skelbimų.

Magistrinio darbo struktūrą galima apibrėžti tokia schema:


Išvados
Išvados
Vilniaus rajonas. Susisiekimo ir nuomos kainos funkcijos.
Taikymas
Taikymas
Mokykla- ūkinis subjektas.
Rekreacinės zonos miestelis.
Teorija
Teorija
Susisiekimas. Nuo ko jis priklauso?
Kelių ir gatvių užimamos žemės problema
Pusiausvyra ekonomikoje. Socialinė pusiausvyra modelyje.
Naudingumo funkcija. Ką ji reiškia? Cobbo- Douglaso funkcijos pritaikymas
Teorinis miesto (apskritimo formos) modelis
Kaip optimaliai paskirstyti savo išlaidas kasdieniniam gyvenimui ir mokesčiams už butą?
Pagrindinės mat. modeliavimo sąvokos .
Kur geriau gyventi- arčiau centrinio verslo rajono ar toliau?

# 1. MATEMATINIO MODELIAVIMO UŽDAVINIAI

## 1.1 Matematinis modeliavimas

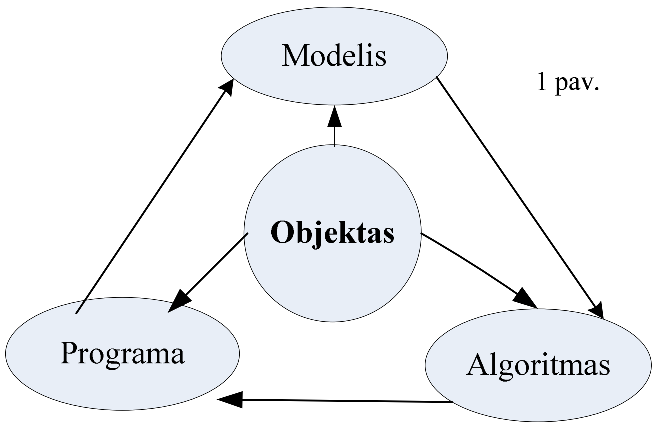
Planavimas yra viena iš keturių pagrindinių vadybos funkcijų. Su planavimu nuolat susiduriame savo kasdieninėje veikloje- planuojame darbus, pirkinius, atostogas, profesinę karjerą ir kt. Kasdieniniame gyvenime dažnai planuojame paviršutiniškai, neapibrėžtai, paprastai vien mintyse. Matematinis modeliavimas, arba planavimas, yra konkrečiai apibrėžta funkcija su aiškiai nustatytomis taisyklėmis ir principais. Kiekvieną kartą modeliuojant numatomos skirtingos užduotys, priemonės ir metodai šioms užduotims atlikti. Bet pirmiausia reikia suformuluoti pagrindinį tikslą, pavyzdžiui, valdymo, prognozavimo ir pan. Vėliau nagrinėjamos problemos apibrėžiamos matematiškai (vartojant tokias sąvokas, kaip tikslo funkcija, gerovės lygis, resursai, optimalus variantas ir pan.). Tai sudaro galimybę ekonomines ir kitas problemas spręsti pasitelkiant optimizavimo, diferiancialinio skaičiavimo, matematinės analizės ir kitus metodus.

Apskritai matematinis modeliavimas (neskaitant statistikos ir finansų matematikos) yra viena aktyviausiai plėtojamų matematikos mokslo taikymo krypčių pasaulyje.

Matematiniame modeliavime galima išskirti tris pagrindinius žingsnius:

- modelis;
- algoritmas;
- programa.

Šį procesą galima pavaizduoti tokia schema-triada (1 pav.):



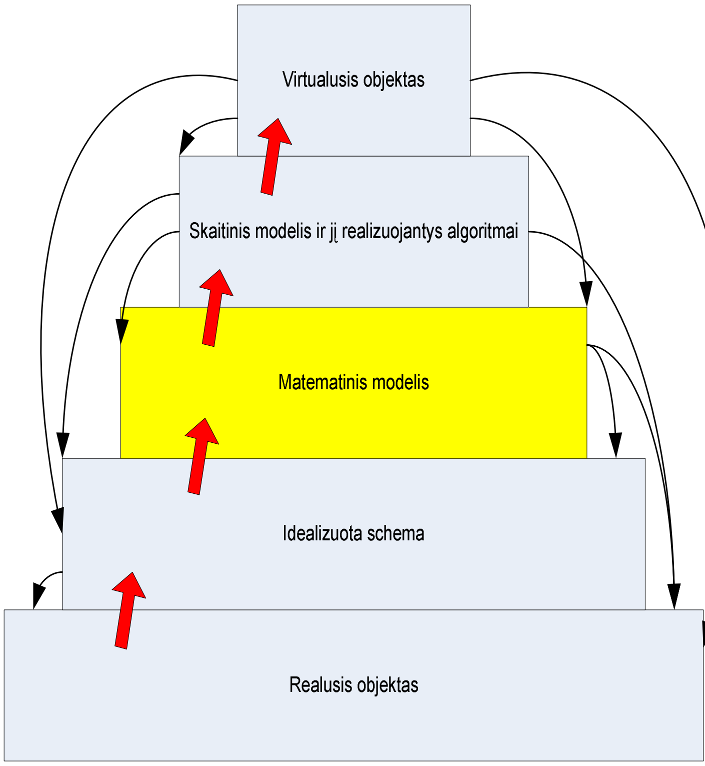
1 pav.

Pagal šią triadą modeliavimo procesą galima apibūdinti taip:

1. Modelis yra konstruojamas atsižvelgiant į esmines objekto savybes arba į tas, kurios įtakoja situaciją. Tos savybės išreiškiamos formuojant matematinėmis formulėmis. Čia pat tiriamas sudarytasis modelis teoriniais metodais.
2. Kuriamas uždavinio (problemos) sprendimo algoritmas. Modelis pertvarkomas taip, kad būtų galima taikyti skaitinius sprendimo metodus, logines operacijas. Konstruojami algoritmai neturėtų iškreipti modelio, taigi ir objekto svarbiausių savybių.
3. Sudaroma algoritmo realizavimo kompiuterinė programa. Svarbi problema modeliuojant- sukurtosios „triados“ adekvatumas objektui. Tiriant adekvatumą

sudarytoji triada turėtų būti testuojama (ir išbandoma), o procesą turėtų lydėti triados tobulinimas.

Matematinio modeliavimo procesą galima aiškinti ir kitaip (žr. 2 pav.). Pagal antrame paveiksle pavaizduotą schemą pradedama nuo realaus objekto, kuris pakeičiamas tam tikra idealizuota jo schema. Paskui sudaromas jo matematinis modelis, kuris realizuojamas algoritmais ir kiekvieną kartą tikrinamas. Iš kiekvieno lygio galima (o daug kartų taip ir būna) grįžti prie žemesnių lygių. Vyksta nuoseklus rezultatų analizavimas; nepasitvirtinus modelio hipotezėms- atliekamas naujas tyrimas.




2 pav.

## 1.2. Pradinės sąvokos ir kriterijai

Apibrėšime pagrindines sąvokas, kurios dažnai sutinkamos nagrinėjant matematinio modeliavimo uždavinius.

**1.2.1 *apibrėžimas.* Tarkime, kad X yra alternatyvų aibė, kurioje apibrėžtas preferencijos sąryšis $\succ$. Funkcija $U : X \to R$ yra vadinama naudingumo funkcija, jeigu kiekvienai alternatyvų porai $x, y \in X$**

$u(x) \geq u(y)$ **tada ir tik tada, kai** $x \succ y$ **arba** $x \sim y$.

Dažniausiai ekonominės veiklos dalyvių interesai būtent ir apibūdinami naudingumo funkcija. Pavyzdžiui, gamintojui rūpi gauti kuo didesnį pelną, vartotojui- pasiekti, kad pasirinktas prekių rinkinys būtų naudingiausias, pirkėjui- kuo pigiau nusipirkti rūpimą daiktų rinkinį ir pn. Paprastai naudingumo funkcija nagrinėjama tam tikrų galimybių ribose. Šios galimybės matematiškai apibrėžiamos lygtimis, nelygybėmis, įvairiomis tiesioginėmis sąlygomis.

Taigi įvedus naudingumo funkciją, matematinis uždavinys formuojamas taip: leistinoje aibėje rasti tokį kintamųjų rinkinį, su kuriuo naudingumo funkcija įgyja optimalią (didžiausią arba mažiausią) reikšmę.

**1.2.2 *apibrėžimas.* Naudingumo funkcija** $U = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta}$ **,** $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$ **yra vadinama Kobo ir Duglaso naudingumo funkcija; čia A>0, K>0, L>0.**

Gamybos uždaviniuose K- dažniausiai reiškia kapitalo sąnaudas, o L- darbo sąnaudas. Tačiau bendru atveju kintamieji K ir L gali turėti ir kitas prasmes; dydis A yra tam tikras parametras.

Kiekvienas laipsnio rodiklis yra mažesnis už vienetą, ir nustatyta, kad jei $\alpha + \beta = 1$, tai funkcija rodo pastovų gamybos (ar kito ekonominio proceso) kitimo efektą. Ši funkcija pasižymi įgaubtumo ir monotoniško didėjimo savybėmis.

**1.2.3 *apibrėžimas.* Pusiausvyra reiškia tokią rinkos būseną, išreikštą prekių kainomis (čia prekėmis laikomas bet koks ekonominis veiksnys) ir jų kiekiais, kad prekių paklausa yra lygi jų pasiūlai, o visi rinkos dalyviai realizuoja savo tikslus.**

Paprastai neoklasikinėje ekonomikoje laikoma, kad visuomenės vystymosi pasėkmė yra ekonominės rinkos pusiausvyra, realizuojama individualių jos narių racionaliu elgesiu esant ribotai pasirinkimo laisvei. Ekonominės veiklos pagrindas yra prekių vartojimas ir gamyba.Ir gamyba, ir vartojimas gali būti suvokiami labai įvairiai. Pavyzdžiui, nekilnojamo turto nuomavimas taip pat yra ekonominė veikla. Prekės kaina (gali būti ir nuomos mokestis) yra tas rodiklis, kuris nusako prekių stygiaus laipsnį (akivaizdu, ten, kur didesnė pasiūla, kainos mažesnės ir atvirkščiai). Šio rodiklio- kainos- susidarymo mechanizmas ir grindžiamas vadinamąja ekonomine pusiausvyra. Bendroji ekonominė pusiausvyra paaiškina tokį kainos susidarymo mechanizmą rinkoje, kuriam esant optimaliai paskirstomi ištekliai tarp rinkos dalyvių. Bendrosios ekonominės pusiausvyros teorijos pradininkais apie 1950 metais tapo K. Arrow ir G. Debreu. Pirmą kartą ir išsamiai šią teoriją išdėstė Debreu savo knygoje „Verslo teorija“. Šią teoriją apibūdina trys pagrindinės prielaidos:

- ta pati gėrybė skirtingose vietose laikoma skirtingomis prekėmis;
- ta pati gėrybė skirtingais laiko momentais laikoma skirtingomis prekėmis;
- prekių gamyba ir vartojimas ateityje tiksliai numatomas dabar.

**1.2.4 *apibrėžimas* . Ekonominis pakeičiamumas- tai galimybė vieną objektą naudoti vietoje kito objekto.**

Pavyzdžiui, kapitalo K trūkumą galima kompensuoti darbu L ir atvirkščiai.

Pakeičiamumą tada rodytų funkcija K=K(L) arba L=L(K).

Ribinis pakeičiamumas yra suprantamas kaip pakeičiamumo kitimo greitis ir išreiškiamas išvestine funkcija; pavyzdžiui, $K' = \frac{dK(L)}{dL}$ (kai nagrinėjamas kapitalo ir darbo pakeičiamumas).

# 2. SOCIALINĖS GEROVĖS MATEMATINIAI MODELIAI

## 2.1. Gyvenamojo rajono modelis

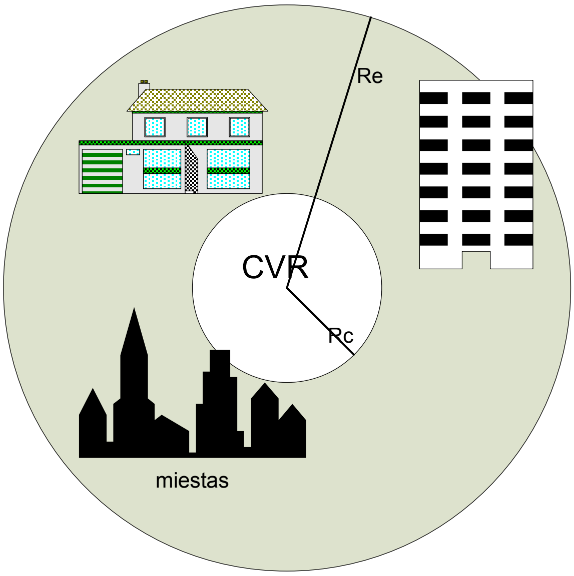
Nagrinėjant bet kokį ekonominį procesą, pradžioje būtina apibrėžti išteklius, nes jie tampa veiksniais. Skiriamos trys pagrindinių veiksnių grupės: žemė, darbas, kapitalas (žmogaus darbu sukurtos gamybos priemonės, t.y., fizinis kapitalas, vartojimo reikmenys).

Analizuojant bet kokią su žeme susijusią ekonominę veiklą, žemė tampa vienu svarbiausiu tos veiklos elemetu - ji dalijama, skaičiuojami mokesčiai pagal turimą plotą , jos atžvilgiu daromi pasirinkimai, maksimizuojama atskirų žmonių (ar šeimynų) gerovė.

Ekonominiuose modeliuose žemė paprastai klasifikuojama pagal jos paskirtį. Pavyzdžiui taip:

1) žemė, skirta miestų ekonomikai vystyti (verslo vystymo, laisvos ekonominės sritys ir pan.);
2) žmonių apgyvendinimui skirta žemė ( į ją įtraukiami ir plotai, skirti gatvėms, parkams, poilsio vietoms ir t.t.);
3) žemė, skirta miškininkystei ir žemės ūkiui vystyti.

Aprašomame modelyje yra nagrinėjamas žmonių apgyvendinimas mieste. Modelio pagrindą sudaro formalizuotas , taisyklingos apskritimo formos miestas, su centriniu (taip pat apskritimo formos) verslo rajonu (toliau pavadinimą trumpinsime CVR). Centrinį verslo rajoną supa žiedo formos gyvenamųjų namų rajonas su savo gatvių tinklu. Miestą juosia regionas, skirtas žemės ūkiui ir miškams (žr. pav.).




Apibrėžkime pagrindinius žymėjimus ir dydžius, apibūdinančius įsivaizduojamą miestą. Tegu

- $\mathbf{R_c}$- centrinio verslo rajono spindulys (sutartiniais ilgio vienetais);
- $\mathbf{R_e}$- viso miesto spindulys (iki išorinės miesto ribos);
- $\mathbf{N_0}$- šeimų, gyvenančių mieste, skaičius; čia šeima suprantama kaip ūkinis vienetas, turintis ar nuomuojantis tam tikrą gyvenamąjį plotą.

Kiekvieną miesto vietą galima apibūdinti atstumu nuo CVR. Modeliuodami turėsime mintyje, kad vienos šeimos gyvenamoji vieta nuo kitos gali skirtis tik atstumu iki CVR; jį žymėsime **X.** Jei šis atstumas vienodas (gyvenami namai yra žiede, kurio spindulys X ), laikysime, kad visos gyvenamosios vietos (prioriteto atžvilgiu vėliau įvardintos kaip naudingumas) yra lygiavertės.

Apibrėžkime rodiklius, apibūdinančius kiekvieną mieste gyvenančią šeimą:

- **Y-** kasmetinės šeimos pajamos (didžiąją jų dalį sudaro už darbą mokamas atlyginimas, o atskirais atvejais ir dotacijos);
- **s-** šeimos gyvenamasis plotas (kvadratiniais ploto vienetais);
- **r(X)-** žemės arba buto nuomos kaina (už kvadratinį ploto vienetą (natūralu, kad ji nėra visame mieste vienoda (konstanta), o priklauso nuo gyvenamosios vietos atstumo iki CVR);
- **c-** konkrečios šeimos suvartojamų prekių kiekis (į jį iš esmės įtraukiama ir išlaidos maistui, drabužiams, ūkinėms prekėms, ir išlaidos pramogoms bei poilsiui);
- **p-** kaina už suvartojamų prekių tam tikrą kiekio vienetą;
- **t(X)-** šeimos kasmetinės išlaidos transportui į darbą ir iš darbo. (Visos kitos susisiekimo išlaidos priskiriamos prie išlaidų, skirtų kasdieniniam gyvenimui, t.y., įtraukiama į dydį c).

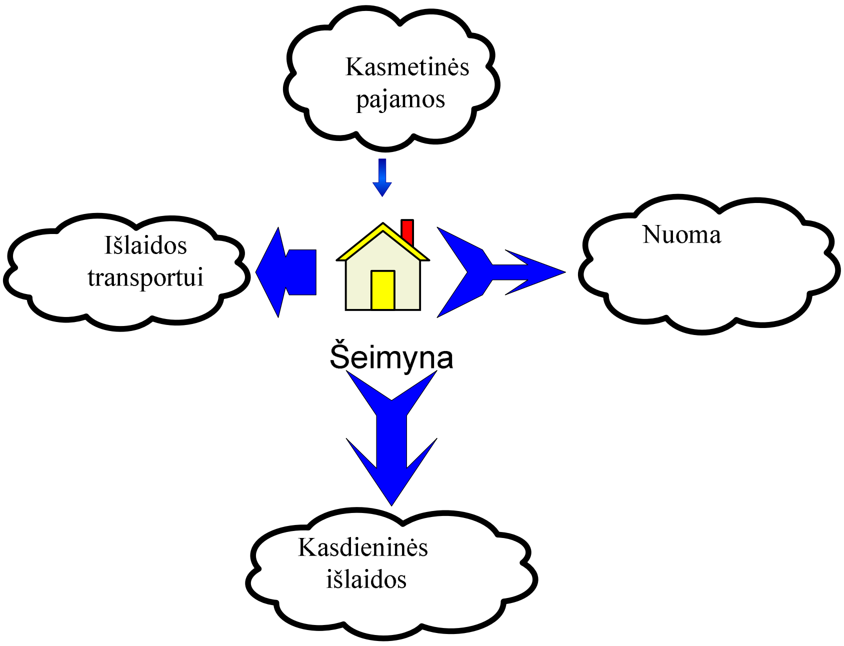
Turime mintyje, kad miesto gatvių tinklas yra žiedų formos, tačiau ši prielaida neturės didelės reikšmės tolesnėje modelio vystyme. Laikome, kad centriniame verslo rajone susisiekimas yra nemokamas, t.y., galioja sąlyga $t(X \le R_c) = 0$.

Modeliuodami šeimos gerovę, jos išlaidas suskaidysime į tris dėmenis- išlaidas vartojamoms prekėms (jos lygios pc), išlaidas žemės (arba buto) nuomai (jos lygios $r(X)\cdot s$ ) ir išlaidas transportui (jos lygios t(X)). Tada gausime tokią pagrindinę biudžetinę lygtį, apibrėžiančią šeimos išlaidas:

$$\boldsymbol{pc + r(X)s + t(X) = Y} \qquad (1)$$

Taigi kiekviena šeima savo visas kasmetines pajamas išleidžia mokesčiams už gyvenamąjį plotą, suvartojamoms prekėms įsigyti ir transportui. Taupymui šeima pinigų neatideda. Tačiau tai nėra esminis dalykas, nes taupymo atveju gautume tą pačią biudžetinę lygtį, tik su mažesne dydžio Y reikšme.

Toliau analizuosime, kaip optimaliai pasirinkti išlaidas mokesčiams už gyvenamąją vietą ir išlaidas suvartojamoms prekėms, kad šeima turėtų didžiausią naudą. Tad iš esmės reikia spręsti optimizavimo uždavinį su konkrečia kiekvienos šeimos gerovę nusakančia **naudingumo funkcija U**.




Kadangi gaunant konkrečią kasmetinę algą Y (o tai ir yra pagrindinis sąlyginis apribojimas) ir gyvenant fiksuotoje vietoje X, mokesčiai už gyvenamąją vietą priklauso nuo ploto s, o, apibrėžus konkrečią kainą p, išlaidos prekėms priklauso nuo pasirenkamo jų kiekio c, tai ir šeimos palankiausia finansinė situacija ieškoma optimizuojant naudingumo funkciją s ir c atžvilgiu. Natūralu ekonomiškai efektyviu procesu laikyti tą procesą, kai užsibrėžtas tikslas pasiekiamas mažiausiomis to proceso sąnaudomis.

## 2.2 Namų ūkio optimizavimas

Kaip minėta, kiekvienos šeimos gerovė nusakoma naudingumo funkcija U. Atmetus tokius kriterijus kaip geografiniai vaizdai ir kaimynystės įvairovė, iš anksto sunku pasakyti, kur geriau gyventi: arti CVR, ar toliau nuo jo.

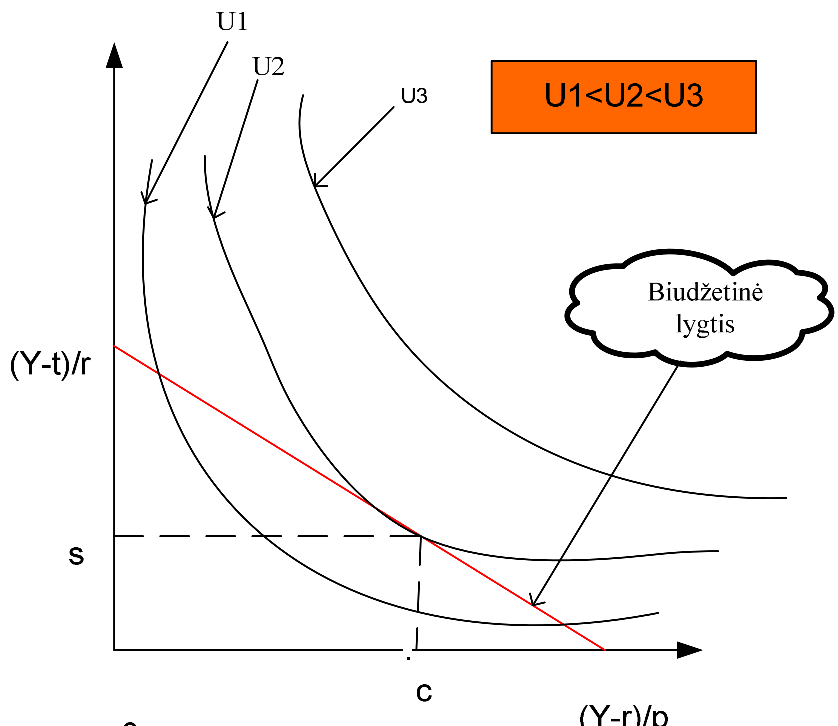
Kad galėtume toliau analizuoti nagrinėjamą problemą, būtina priimti prielaidą, kad šeimos naudingumo funkcija gyvenant konkrečiame mieste jau yra žinoma. Išnagrinėkime kai kurias jos savybes.

Modelyje naudingumo funkcijai **U(c, s)** priskiriamas tam tikras realiųjų skaičių plokštumos taškas (c; s), atspindintis kiekvienos šeimynos pasirinkimą ir prioritetus.

Konkretus taškas (c; s) šioje plokštumoje nusako tam tikrą kombinaciją c(suvartojamų prekių kiekį) ir s (gyvenamąjį plotą). Ši kombinacija vadinama **paklausos tašku .**

Skaitinė U(c, s) vertė nusako simbolinį šeimynos gerovės lygį. Kai $U = const.$ , visos šeimos, net su skirtingom (c; s) kombinacijom, pasieks lygiavertę gerovę. Taigi naudingumo funkcijos lygio lygties U=const grafikas bus kreivė, jungianti taškus, kuriuose ekonominio proceso veiksnių deriniai yra skirtingi, bet pasiekiamas tas pats naudingumas. Be to, tolstant nuo taško (0; 0), didėja vartotojo naudingumas.

Plokštumoje nagrinėjama sąlyga atitiks vadinamąją lygio kreivę (t.y. šeimynų naudingumas yra vienodas visuose jos taškuose (c, s) ) (žr. 3 pav.).



3 pav.

Panagrinėsime kelias jos savybes.

1 savybė. $\boxed{\frac{\partial U}{\partial c} > 0 \ \ ir \ \ \frac{\partial U}{\partial s} > 0}$

Šiuos sąryšius galima suvokti kaip sąlygas, kad didinant vieną iš mums rūpimų dydžių (c arba s), gerovės lygis didės, t.y., didinant vieno ekonominio proceso veiksnio sąnaudas, kai kito veiksnio sąnaudos yra **pastovios**, nauda didėja, ir galima pasiekti ribinius atvejus.

2 savybė. $\boxed{U_{cc} < 0 \ \ ir \ \ U_{ss} < 0}$.

Šiuos sąryšius suvokiame kaip sąlygą, kad jei didės tik vienas iš elementų (s arba c), tai ši gerovė iš esmės bus kompensuojama kito elemento trūkumu; todėl naudingumo didėjimas gali tik sulėtėti.

Kadangi lygio kreivė tenkina sąlygą $U = const$ , tai

$$\boxed{dU = U_c' dc + U_s' ds = 0} \qquad (2)$$

čia $U_z = \frac{\partial U}{\partial z}$. Abi lygybės puses padaliję iš $U_c' ds$ , gausime

$$\boxed{\frac{dc}{ds} = -\frac{U_s}{U_c} < 0,} \qquad (3)$$

nes pagal 1 savybę $U_s>0$ ir $U_c>0$.

Santykį $\frac{U_s}{U_c}$ toliau vadinsime **ribiniu pakeičiamumu.**

Iš (3) matome, kad lygio kreivės yra visoje apibrėžimo srityje iškilos (ir ši kreivės savybė yra invariantinė visų monotoninių transformacijų atžvilgiu).

Dabar suformuluosime optimizavimo uždavinį. Turint atitinkamą šeimynos naudingumo funkciją U(c; s), metinę algą Y ir visą transporto kainą per metus t(X), kiekviena šeima nori pasirinkti tokius c ir s (kurie, aišku, tenkina (1) lygtį ir yra ne neigiami), kad U(c; s) būtų maksimali, t.y.:

$$\boxed{\max_{\{c;s\}}\{U(c;s) \mid \Gamma(c,s) \equiv Y - t(X) - r(X)s - pc = 0,\ c \geq 0,\ s \geq 0\}} \qquad (4)$$

Čia Γ(c, s)=0 žymėsime biudžetinę lygtį atitinkančią tiesę.

Pirmiausia uždavinį panagrinėkime geometriškai (žr. 3 pav.). Turint r(X), t(X), p ir Y skaitines reikšmes, galima rasti tokią lygio kreivę U=const., kurios liestinė bus konkreti biudžeto lygtis. Lietimosi tašką pažymėsime $(\bar{c},\ \bar{s})$. Taške $(\bar{c},\ \bar{s})$ U įgis maksimumą . Tad ieškomas būtent tas taškas, kuriame tiesė Γ=0 yra kreivės U=const. liestinė.

Iš brėžinio galime matyti, kad bet kuri kita lygio kreivė su mažesniu ar didesniu naudingumo lygiu kirs biudžetinę lygtį atitinkančią tiesę dviejuose taškuose.

Kita vertus, tikslesnį sprendinį galima rasti analiziniu būdu. Pagal būtiną ekstremumo sąlygą taške $(\bar{c},\ \bar{s})$ yra tenkinama sąlyga $d\mathrm{U}(\bar{c};\bar{s}) = 0,\ kai\ \Gamma(\bar{c};\bar{s}) = 0$.

Vienas iš sprendimo būdų yra iš lygties Γ(c; s)=0 išreikšti c per s, t.y., $c = \frac{Y - t(X) - r(X)s}{p}$ ir, pasinaudojus šia išraiška, eliminuoti c iš U (c; s), paliekant ją su vienu kintamuoju.

Taip pat turime sąryšį $d\,\Gamma(\bar{c},\ \bar{s})=0$ ir sąlyga $d\overline{U} = 0$.

Ekstremumo ieškosime pasinaudodami Lagranžo daugiklio metodu. Turėsime

$$d\overline{U} + \lambda d\overline{\Gamma} = 0$$

arba

$$(\overline{U}_c + \lambda\overline{\Gamma}_c)dc + (\overline{U}_s + \lambda\overline{\Gamma}_s)ds = 0,$$

čia žymime $\overline{f} \equiv f\left(\overline{c};\overline{s}\right)$.

Lagranžo daugiklį λ pasirinkime taip, kad būtų tenkinama sąlyga $\overline{U}_c + \lambda\overline{\Gamma}_c = 0$.

Kadangi $\overline{\Gamma}_c = \left(Y - t(X) - r(X)s - pc\right)'_c = -p$, tai

$\boxed{\overline{U}_c = -\lambda\overline{\Gamma}_c = \lambda p}$. (5)

Analogiškai gausime $\overline{U}_s + \lambda\overline{\Gamma}_s = \overline{U}_s - \lambda r = 0$, t.y.

$\boxed{\overline{U}_s = \lambda r(x)}$ (6)

(Pastarąją lygybę gauname irgi apskaičiavę atitinkamą išvestinę:

$\overline{\Gamma}_s = \left(Y - t(X) - r(X)s - pc\right)'_s = -r(x)$).

Toliau nagrinėjant uždavinį, sprendžiamos (5), (6) ir (1) lygybės, kurių pagalba $\overline{c}$ ir $\overline{s}$ išreiškiamos dydžiais r, p ir įvedamu pažymėjimu I= Y-t (uždavinio sprendimo pradžioje padarėme prielaidą, kad jų skaitinės reikšmės yra žinomos). Iš šių skaičiavimų galima rasti ir atitinkamą duotoms sąlygoms gerovės lygį, kurį pažymėsime $\overline{U} = U\left(\overline{c};\overline{s}\right) = V\left(I, r, p\right)$.

Tad anksčiau apibrėžtas ribinis pakeičiamumas bus toks:

$$\boxed{\frac{\overline{U}_s}{\overline{U}_c} = \frac{r}{p}} \qquad (7)$$

Praktiškai ieškant ekstremumo taško šiame uždavinyje, dažniausiai ir bus naudojama gautas ribinio pakeičiamumo santykis.

<u>2.2.1 pavyzdys: </u> *Iliustruoti gautus rezultatus galima panagrinėjus konkrečią naudingumo funkciją. Imkime Kobo ir Duglaso naudingumo funkciją, dažnai naudojamą žemės ekonominiuose ir miesto gyvenamųjų rajonų modeliuose. Šiuo atveju ji apibrėžiama kaip*

$$\boxed{U(c;s) = U_o s^{\sigma} c^{1-\sigma}} \qquad (8)$$

*Kur 0<σ<1 ir U()- yra monotoninė ir griežtai įgaubta funkcija.*

*Tad pasirinktu atveju ieškokime optimalaus taško naudodamiesi ką tik išnagrinėtu planu. Pirmiausia randame dalines išvestines:*

$$U_c = (1-\sigma)s^{\sigma}c^{1-\sigma}$$

$$U_s = \sigma \cdot s^{\sigma-1}c^{1-\sigma}$$

*Iš ribinio pakeičiamumo santykio (7), galiojančio optimaliam taškui, turėsime:*

$$\frac{r}{p} = \frac{\overline{U}_s}{\overline{U}_c} = \frac{\sigma \cdot s^{\sigma-1} c^{1-\sigma}}{(1-\sigma) s^{\sigma} c^{-\sigma}} = \frac{\sigma \cdot \bar{c}}{(1-\sigma) \cdot \bar{s}}.$$

*Iš čia* $r\bar{s} = \dfrac{\sigma \cdot p\bar{c}}{1-\sigma}$.

*Prisiminę biudžetinę lygtį, taip pat išreikiame* $r\bar{s} = Y - t - p\bar{c}$.

*Sulyginę abi išraiškas ir išsprendę per c, gauname norimą ekstremumo tašką:*

$$\bar{c} = \frac{1-\sigma}{p}(Y-t).$$

*Analogiškai išreiškę* $p\bar{c}$ *ir sulyginę išraiškas gauname kitą ekstremumo sąlygą:*

$$\bar{s} = \frac{\sigma}{r}(Y-t).$$

*Tad gauti rezultatai:*

$$\boxed{\bar{c} = \frac{1-\sigma}{p}(Y-t) \qquad\qquad \bar{s} = \frac{\sigma}{r}(Y-t)} \qquad (9)$$

*Atitinkamai U reikšmė jame (arba naudingumo lygis) lygus:*

$$U(\bar{c};\bar{s}) = U[\frac{(1-\sigma)^{1-\sigma}\sigma}{p^{1-\sigma} r^{\sigma}}(Y-t)] \equiv V(Y-t(X),\ r(X),\ p).$$

*Monotoniškas funkcijos didėjimas ir įgaubtumo savybė mums užtikrina, kad gautas ekstremumo taškas iš tikrųjų yra maksimumas.*

Baigiant nagrinėti namų ūkio optimizavimą, galima pastebėti dar keletą pastabų, papildant pagrindines modelio sąlygas:

<u>2.2.1 išvada.</u> *Optimaliame taške , žemės (ar buto, namo) nuomos kaina mažėja, didėjant atstumui iki CVR.*

Šią išvadą gauname grįždami prie biudžetinės lygties (1). Išdiferencijavę ją pagal *x*, turėsime

$$-t'(X) = r'\bar{s} + r\bar{s}' + p\bar{c}'$$

Be to, iš optimalaus taško sąlygų $dU = U_c dc + U_s ds$ ir $d\overline{U} = 0$, turėsime $r\overline{s'} + p\overline{c'} = 0$.

Tada $-t'(X) = r'\bar{s}$.

Kai s>0 ir $t'(X)>0$ (pastaroji nelygybė reiškia natūralų susisiekimo kainos didėjimą, didėjant atstumui nuo namų iki darbo), tad $r'(X)<0$.

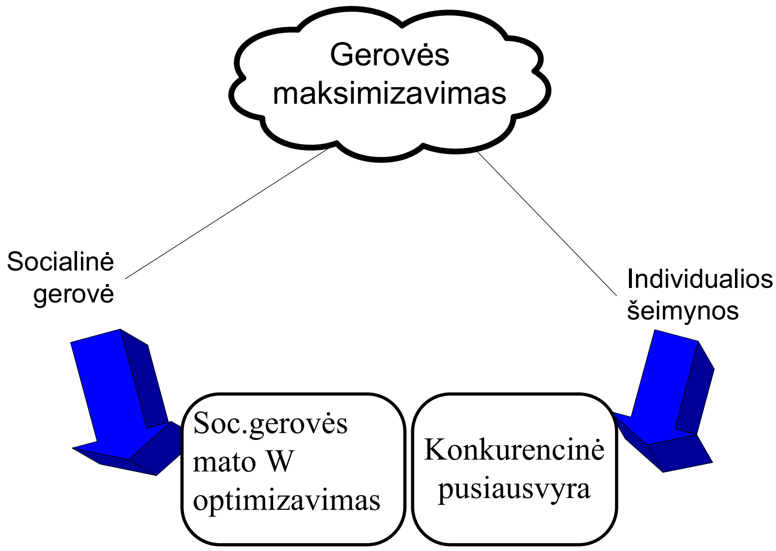
2.2.2 išvada. *Apibrėžę* $\bar{s}=s(I,r,p)$,turėsime $s_I'>0$ *ir* $s_r'<0$.

T.y., šios natūralios sąlygos reiškia didesnio gyvenamojo ploto poreikį augant pajamomis ir mažesnio ploto augant nuomos (mokesčių) kainai.

## 2.3 Konkurencinė pusiausvyra ir socialinė gerovė

Pradinės konstruojamo modelio sąlygos leidžia nagrinėti ir pusiausvyrą mieste. Ji reikalinga tam, kad mieste nevyktų nuolatinis šeimų gyvenamosios vietos keitimas. Pusiausvyrai artima problema- socialinė suminė gerovė. Iškyla klausimas, kas svarbiau: pasiekti kuo didesnį gerovės lygį kiekvienai šeimai atskirai (bet visiems vienodą), ar maksimizuoti viso miesto šeimų suminę gerovę.

Panagrinėsime kiekvieną atvejį atskirai.




Laikome, kad visos $N_0$ šeimynos mūsų modelyje turi tą patį gerovės suvokimą, mėgsta panašius dalykus, joms visoms apibrėžta ta pati naudingumo funkcija. Todėl, norint išlaikyti pusiausvyrą, reikia sukurti tokį modelį, kuriame visos šeimos turėtų pasiekti tą pačią naudingumo funkcijos vertę (priešingu atveju, mažesnę naudingumo vertę turinčios šeimos pradės kraustytis į kitas gyvenamąsias vietas, taip stengdamosi padidinti savo gerovės lygį). Apibrėžkime pagrindinę sąlygą, kad egzistuotų norima pusiausvyra tarp miesto šeimų:

***2.3.1 apibrėžimas.*** Laikysime, kad šeimynos yra konkurencinėje pusiausvyroje, jeigu galioja sąlyga:

$$\boxed{U(\bar{s};\bar{c})=V(I(X),r(X),\ p)=V(I_c,r_c,p)} \quad (10)$$

čia $I_c = I(R_c)$, o $R_c$ yra centrinio verslo rajono kraštas (riba).

Šis apibrėžimas reiškia, kad kiekvienos šeimos naudingumas turi būti lygus naudingumui šeimynos, gyvenančios prie pat centrinio verslo rajono.

(10) –ame sąryšyje antra lygybė gali būti išspręsta per

$$r(x) = \tilde{r}(I(X); r_c, I_c, p), \ kur \ \ I_c = Y - t(R_c) = Y$$

(kadangi CVR transportas yra nemokamas, tai $t(R_c)=0$)

Dydis **V(I, r, p)** kartais dar vadinamas <u>netiesiogine naudingumo funkcija</u>.

<u>2.3.1 pavyzdys:</u> *Kobo ir Duglaso funkcijai naudingumo lygis yra lygus konstantai $K_o$:*

$$K_0 = \frac{(1-\sigma)^{1-\sigma}}{p^{1-\sigma} r^{\sigma}} (Y - t)$$

*arba*

$$r^{\sigma} = K_1[Y - t(X)] = \frac{r_c^{\sigma}}{Y}[Y - t(X)],$$

*kur $K_1$ yra kita nežinoma konstanta.*

*Kad apibrėžtume likusią nežinomą konstantą $r_c$, laikykime, kad N(X) yra skaičius šeimynų, gyvenančių už apskritimo su spinduliu X.*

*Akivaizdu, kad gausime pradines sąlygas:*

*$N(R_c)=N_o$ (visos miesto šeimos gyvena už CVR ribos, t.y., šeimos negyvena CVR)*

*$N(R_e)=0$, (t.y., laikome, kad visos miesto šeimos gyvena miesto ribose).*

*Išskiriam žiedo pavidalo plotą gyvenamajame rajone su spinduliu dX (t.y,. žiedo ribos kinta nuo X iki X+dX). Tada turėsime:*

$$2\pi X dX = -\bar{s} dN$$

*Ši lygybė reiškia, kad visas žemės plotas žiede turi būti lygus gyvenamam šeimynų plotui tame žiede (laikome, kad nėra žemės kirtos gatvėms ).*

*Suintegravę turėsim:*

$$\boxed{N(X) = N_o - 2\pi \int_{R_c}^{x} \frac{z}{\bar{s}} dz}$$

*($\bar{s}(I(X), r(X), p)$ yra žinoma funkcija, priklausanti nuo atstumo X ir konstantos $r_c$)*

*Galiausiai turime sąlygą:*

$$N_0 = 2\pi \int_{R_c}^{R_e} \frac{zdz}{\bar{s}}.$$

*Kobo ir Duglaso funkcijai atitinkamai bus:*

$$\bar{s} = \frac{\sigma(Y-t)}{r} = \frac{\sigma Y}{r_c}\left(1-\frac{t}{Y}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}$$

*taigi*

$$N_o = \frac{2\pi r_c}{\sigma Y}\int_{R_c}^{R_e}\left[1-\frac{t(z)}{Y}\right]^{\frac{(1-\sigma)}{\sigma}} zdz$$

*arba*

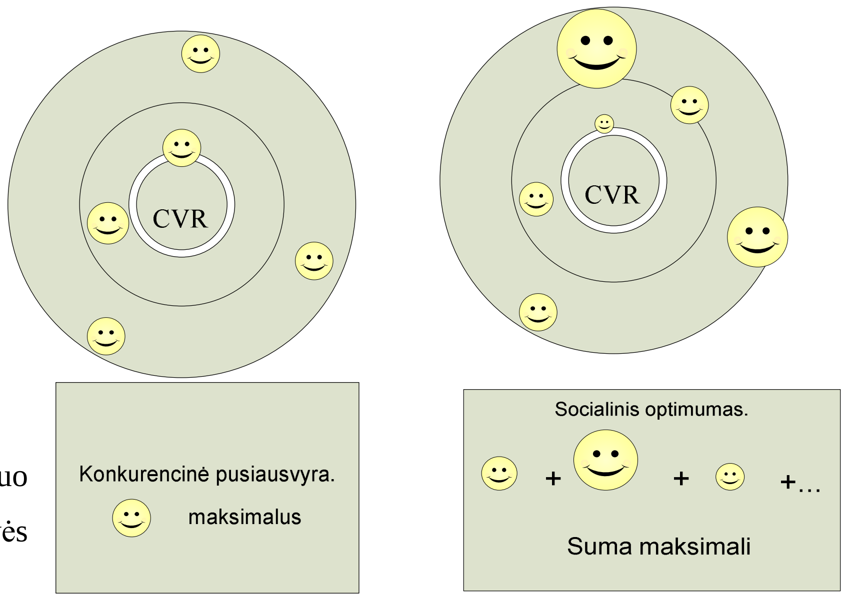
$$r_c = \frac{\sigma Y N_0}{2\pi}\left\{\int_{R_c}^{R_e}\left[1-\frac{t(z)}{Y}\right]^{\frac{(1-\sigma)}{\sigma}} zdz\right\}$$

Socialinis suminis optimalumas. Iki šiol nagrinėjamame modelyje ir jo variacijose kiekvienai šeimai buvo leista laisvai pasirinkti turimos žemės ir kasdieninių prekių kiekį, taip optimizuojant jų naudingumo funkciją. Keisdami situaciją, laikykime, kad dabar žemę ir prekes paskirstys išrinkta miesto valdžia, ir skirstys taip, kad bendra suminė $N_0$ šeimų gerovė mieste būtų pati didžiausia.

Įvedame vietovei X **šeimų tankio funkciją n(X)**, t.y.:

**2.3.2 apibrėžimas.** Tankio funkcija vadinsime n(X), kur

$$\boxed{n(X) = \frac{2\pi X}{s(X)}} \qquad (12)$$




Tada išraiška

$$dN(X) = -n(X)dX = -\frac{2\pi X}{s(X)}dX,$$

reikš populiacijos kitimą nuo vietovės su atstumu X iki vietovės X+dX.

Viso miesto šeimynų naudingumas (žymėsine W) lygus:

$$\boxed{W = \int_{R_c}^{R_e} U(c,s)n(X)dX} \quad (13)$$

Jį vadinsime **socialinės gerovės matu.**

Kad būtų pasiektas miesto socialinis optimumas, valdžia taip turėtų paskirstyti šeimoms gyvenamus plotus s, prekes c , kad W būtų maksimalus.

Tad visas optimizavimo uždavinys susideda iš trijų lygybių:

$$2\pi X = n(X)s(X) \qquad (R_c \le X \le R_e)$$

$$\int_{R_c}^{R_e} n(X)dX = N_0 \qquad (*)$$

$$C_0 = \int_{R_c}^{R_e} [n(pc+t) + 2\pi r_A X]dX \qquad (**)$$

Paskutinė sąlyga teigia, kad visi prieinami resursai (tiek alga, tiek dividentai) vienodai pasiekiami miesto šeimoms.

Sprendžiant šį uždavinį, įmanoma nustatyti būtinąsias sąlygas ekstremumo W taškui naudojantis Oilerio formos diferencialinėmis lygtimis ir nustatyti kraštines sąlygas metodu, pasinaudojant Lagrandžo daugikliu.

Tada gaunamos ekvivalenčios lygybės:

$$\frac{dN}{dX} = -\frac{2\pi X}{s(X)} \qquad N(R_c) = N_0$$

$$\frac{dC}{dX} = \frac{2\pi X}{s(X)}(pc+t) + 2\pi r_A X \qquad C(R_c) = 0$$

Su abiem kraštinėm sąlygom:

$$N(R_e) = 0 \quad ir \quad C(R_e) = C_0$$

Nagrinėjant ekonomiškai, galima pastebėti, kad šis optimizavimo kriterijus leidžia šeimas skirstyti pagal naudingumo lygį. Be to, atsižvelgiant į socialinę gerovę, kartais pavienės šeimos gerovė gali būti aukojama visuomeninei gerovei.

Atskiru atveju, kada visos šeimos pasiekia tą pačią naudą, bus $W=N_0U$ ir atskirų šeimų gerovės lygis bus lygus vidutiniam lygiui.

Be to, galima parodyti, kad jei $R_c \le X \le R_e$, tai turėsime $\frac{dU}{dX} > 0$, taigi

2.3.1 išvada. Esant socialiniam optimumui, šeimynų naudingumas didėja, proporcingai didėjant atstumui iki CVR.

Ironiška, bet iš modelio matome, neturtingesnės šeimos gyvena arčiau centro, negu turtingesnės šeimos.

## 2.4. Susisiekimas

### 2.4.1.Žemė, skirta keliams

Nagrinėdami modelį, laikėme, kad visa miesto žemė yra apgyvendinta, nesigilindami į realaus žemės dalinimą pagal paskirtį- gyvenamiesiems namams, viešiesiams pastatams (mokykloms, ligoninėms ir pn.) ir pagaliau gatvėms. Tačiau šis žemės paskirstymas yra gana svarbus faktorius formuojant miesto biudžetą. Jeigu už viešuosius pastatus žemės mokesčiai mokami nustatyta tvarka (ir mokėtojas dažniausiai būna pati savivaldybė), tai kelių mokesčius (nors visuose šiuolaikiniuose miestuose individualios transporto priemonės sudaro didžiąją dalį miesto transporto) daugiausia moka individualios įmonės ir bendrovės. Nustatant šį mokestį daugelyje pasaulio miestų didelės įtakos turi miesto žemės kiekis, skirtas gatvėms.

Įvedame naują dydį:

**b(X)-** santykis, rodantis ploname žemės žiede **(nuo X iki X+dX)** dalį, skirtą gyvenamajam plotui (t.y., namų statybai).

Buvo **n(X)-** gyventojų tankumo funkcija, tada santykis

$$2\pi X = s \cdot n(X)$$

keičiamas į

$$n(X) \cdot s = 2\pi X b(X)$$

Atsiradęs daugiklis leis apskaičiuoti tikslesnį žemės pasiskirstymą, o tuo pačiu ir gyventojų kiekį nagrinėjamame miesto žemės žiede:

$$\boxed{N_0 = \int_{R_c}^{R_e} n(X)dX = \int_{R_c}^{R_e} \frac{2\pi b(X)X}{s} dX} \quad (14)$$

Reikia atkreipti dėmesį, kad taip apskaičiuotas populiacijos dydis reiškia optimaliausią gyventojų kiekį nagrinėjamame mieste. Toks teorinis gyventojų skaičius užtikrintų gyventojų didžiausią gerovės lygį.

Tad šeimos optimumą išreikš:

$$\bar{s} = \hat{s}(I; r_{c,}\ I_c,\ \ p)$$
$$\bar{c} = \hat{c}(I;\ r_c,\ I_c,\ p)$$
$$I = Y - t(X)$$

kur $r_c$ apibrėžia nuomos vienam ploto vienetui, esančiam prie CVR, kainą, o $I_c \equiv I(R_c) = Y - t(R_c)$ Čia kaip ir anksčiau laikoma, kad susisiekimo kaina pačiame verslo rajone yra nemokama arba yra žinoma. Tuo atveju, kai $t_c = t(R_c) \neq 0$, tai laikysime, kad $(Y\text{-}t_c)$ yra kasmetinės šeimynos pajamos ir

$I(X) = Y - t = (Y - t_c) - (t - t_c)$, kur $(t\text{-}t_c)$- bus šeimynos susisiekimo kaina iki centrinio verslo rajono.

Laikome, kad žemės santykis $b(X)=b_c$ yra visur vienodas (t.y., kiekviename žiede žemės plotas, skirtas keliams, sudaro tą pačią dalį). Paprastai jeigu taip nėra, išvedamas vidutinis miesto apgyvendinamos žemės santykis $b_{vid}$.

2.4.1.1pavyzdys: *Kobo ir Duglaso funkcijai turėjome*

$$\bar{s} = \frac{Y}{(\alpha+1)r_c}\left[\frac{Y - t(X)}{Y}\right]^{-\alpha}, \qquad \sigma = \frac{1}{\alpha+1}$$

*Įtraukiant b(X) bus:*

$$r_c = \frac{\sigma N_o \cdot \dfrac{Y}{2\pi}}{\int_{R_c}^{R_e}\left(1-\dfrac{t}{Y}\right)^{\alpha} b(X)X dX}$$

$$r = r\left(1-\frac{t}{Y}\right)^{\alpha-1}$$
$$r\bar{s} = \sigma\left[Y - t(X)\right]$$
$$p\bar{c} = (1-\sigma)Y\left(1-\frac{t}{Y}\right)$$
$$U(\bar{s},\bar{c}) = \frac{U_o\sigma^{\sigma}(1-\sigma)^{1-\sigma}}{Yr_c^{\sigma}p^{1-\sigma}}$$

*Visi rezultatai apibrėžiam dviem dydžiais susisiekimo kaina t(X) ir žemės santykiu b(X).*

*Iš* $r\bar{s}$ *ir* $p\bar{c}$ *išraiškos, matome ir galimą konstantos* $\sigma$ *interpretaciją. Ja galima laikyti grynųjų pajamų (atmetus transporto išlaidas) dalį, skirtą gyvenamojo ploto nuomai. Analogiškai* $(1-\sigma)$ *reikš dalį pajamų, išleidžiamų kasdieniniam gyvenimui.*

### 2.4.2 Susisiekimo kainos priklausomybė nuo atstumo

Modeliuose, kuriuose nagrinėjama miestų plėtra, apgyvendinimas, žemės pasiskirstymas iki 7-o dešimtmečio visa gyventojų transporto kaina buvo imama tik kaip priklausomybė nuo gyvenamos vietos atstumo iki pasiekti norimo objekto, t.y., mūsų nagrinėjamu atveju iki centrinio verslo rajono. Naudojantis viešuoju transportu, kainos paprastai nustatomos iš anksto. O turint reikiamus duomenis (degalų kainą, suvartotojiškumą) galime apskaičiuoti ir susisiekimo kainą vykstant privačiu transportu. Kasmetinę kilometro kainą (priklausomą nuo atstumo) pažymėsime $\tau_d$ , o tada per metus išleidžiami transportui pinigai bus lygūs:

$$\boxed{t(X) = t_d(X) = \int_{R_c}^{X} \tau_d \, dX} \qquad (15)$$

(integralo rėžiai gaunami, darant prielaidą, kad susisiekimas CVR yra nemokamas).

Atskiru atveju, jeigu $\tau_d$ yra konstanta, turėsime

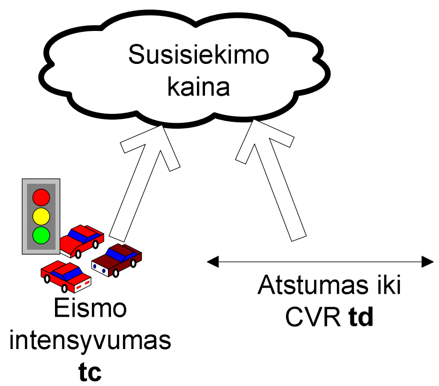
$$\boxed{t_d = \tau_d (X - R_c)} \qquad (16)$$

### 2.4.3.Susisiekimo kainos priklausomybė nuo eismo intensyvumo

Kada eismas mieste yra pakankamai aktyvus, susisiekimo kainos funkcija priklauso ne tik nuo atstumo iki CVR.

Transporto kamščiai įtakoja didesnį automobilių sunaudojamo kuro kiekį, didesnes nusidėvėjimo bei remonto išlaidas. Be to aktualus laiko bei streso ir įtampos vairuojant per transporto kamščius klausimas (tai neretai įtakoja susisiekimo priemonės pasirinkimą).

Tai tampa priežastimi, kad kiekvienos šeimynos susisiekimo (į darbą ir iš jo) kaina priklauso mažiausiai nuo dviejų parametrų- atstumo kainos **$t_d$(X)**, kuri, galime tarti, kad yra žinoma, ir kamščių „kainos“ **$t_c$(X),** kuri keičiasi priklausomai nuo transporto aktyvumo.




Taigi t(X) apibrėžiamas taip:

$$\boxed{t(X) = t_d(X) + t_c(X)} \quad (17)$$

Apibrėžkime:

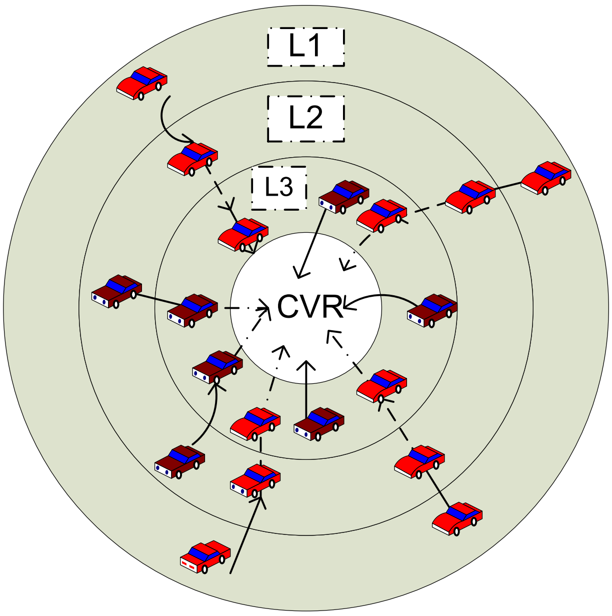
$(1-b)2\pi X$ - kelių **užimamos žemės plotas žiede** su spinduliu X;

**N(X)-** skaičius šeimynų, gyvenančių už žiedo X . Jeigu laikėme, kad visi žmonės dirba CVR, tai galime tarti, kad šis skaičius taip pat reiškia kiekį žmonių, kertančių žiedą X kiekvieną dieną, kai vyksta į darbą ir iš jo.

Tad dydis $\dfrac{<\text{šeimynų skaič., gyvenanančių nuo CVR atstumu, didesniu už } X>}{<\text{žiedo su spinduliu } X \text{ plotas}>\cdot<\text{kelių užimamo ploto mieste santykis}>}$

bus matas transporto intensyvumui taške X nusakyti.

Matematinė jo išraiška $\dfrac{N(X)}{2\pi X(1-b)}$ (18)




Galime šeimynos susisiekimo kainą nuo vietovės X iki CVR laikyti funkcija, priklausančia nuo ką tik apibrėžto dydžio. T.y.

$$\frac{dt_c}{dX} = \tau_c(X) = f\left(\frac{N(X)}{2\pi X[1-b(X)]}\right).$$

Su $\tau_d = \dfrac{dt_d}{dX}$, turėsime

$$\boxed{\frac{dt}{dX} = \tau_d(X) + \tau_c(X) = \tau_d(X) + f\left(\frac{N(X)}{2\pi X(1-b)}\right)} \quad (19)$$

Taigi kasmetinė šeimynos susisiekimo kaina priklauso ne tiek nuo funkcijos f(x), kiek nuo šeimų pasiskirstymo N(X).

Kitas N(X) ir t sąryšis išplaukia iš pagrindinės žemės apgyvendinimo lygties:

$ns = 2\pi X b(X)$

kurią galima perrašyti taip:

$$\boxed{-n \equiv \frac{dN}{dX} = -\frac{2\pi X b(X)}{s}} \quad (20)$$

Konkurencinėje pusiausvyroje turėjome

$\bar{s} = \hat{s}(I; r_{c,}\ I_c,\ \ p)$

$I = Y - t(X)$

$I_c = Y - t_c = Y$

Šiuo atveju (20) lygtis tampa

$$\boxed{\frac{dN}{dX} = -\frac{2\pi Xb}{\hat{s}(Y - t;\ r_{c,}\, p, Y)}} \quad (21)$$

Šie du pagrindiniai sąryšiai apibrėžia transporto kainą t ir N.

Pradinės sąlygos yra:

$N(R_c) = N_o$ $\qquad$ $t(R_c) = 0$ $\qquad$ $N(R_e)=0$.

# 3.TAIKYMO UŽDAVINIAI

Natūralu, kad modeliai be pritaikymo faktiškai negalėtų egzistuoti. Tad toliau pateiksime keletą šio pagrindinio teorinio modelio pritaikymų (su nedideliais paprastinimais).

Visų pirma modelį pabandysime pritaikyti Vilniaus miesto apylinkėm, labiau paanalizuodami susisiekimo klausimą bei gyvenamojo ploto nuomos kainos priklausomybę nuo atstumo iki Vilniaus. Išanalizavę keletą konkrečių pavyzdžių, pamatysime, kokiu atveju labiau apsimoka gyventi arčiau miesto, kuriuo toliau.

## 3.1. Modelio pritaikymas Vilniaus apylinkėms

Kad nenutoltume nuo modelio bendrosios struktūros, nagrinėsime ne konkrečiai Vilniaus rajoną, kaip geografinį vienetą (jis tikrai nėra taisyklingos apskritimo formos!), o tik apylinkes (nebūtinai priklausančias Vilniaus apskričiai). Konkrečiau laikysime, kad mūsų teorinį miesto modelį sudaro ne daugiau kaip 30 kilometrų spinduliu **($R_e$=30)** nuo Vilniaus centro nutolusios vietovės (gyvenvietės, kaimai, sodybos).

Patį Vilniaus miestą laikysime centriniu verslo rajonu **($R_c$=3 km.),** plačiau nenagrinėdami jo išsidėstymo atskirais rajonais (ir Antakalnį, ir Senamiestį, ir Karoliniškes laikydami vienareikšmėmis Vilniaus miesto, kaip centrinio verslo rajono, dalimis).

Tokias pradines modelio sąlygas galima realiai laikyti priimtinomis dėl kelių priežasčių. Visų pirma pastaruoju metu nuolat didėja tendencija, kad daugelis aplinkinėse gyvenvietėse gyvenančių žmonių kiekvieną dieną važinėja į darbą Vilniuje. Neretai pigesnis pragyvenimas užmiestyje (butų nuomos kainos, mokesčiai) atperka susisiekimo (transporto) kainą.

Kita priežastis, kuri leidžia taip taikyti modelį, yra pastaruoju metu Lietuvoje vykstanti verslo centralizacija. T.y., vis dažniau įmonių, išsidėsčiusių visoje Lietuvoje, tinklų administracijos ar centrai dirbtinai įkuriami Vilniuje. Tai leidžia natūralią migraciją į Vilnių, kaip į verslo centrą.

Plačiau nagrinėsime pirmąjį atvejį, kada gyventojai važiuoja dirbti į miestą. Šiuo atveju, kalbėdami apie konkurencinę pusiausvyrą, laikysime, kad pusiausvyros situacija yra tada, kada šeimynos įgyja tokį patį gerovės lygį gyvendamas prie pat Vilniaus, ir tam tikru atstumu nuo miesto (kaip ir bendrame modelyje, šį atstumą žymėsime X).

Kad modelis būtų ganėtinai išsamus, be abejo reikia panagrinėti ir keleta esminių pakeitimų ir papildymų:

- Bendrajame modelyje laikome, kad susisiekimas centriniame verslo rajone yra nemokamas, tačiau akivaizdu, kad susiekimas Vilniaus mieste toks nėra. Tad darome prielaidą, kad jis kiekvienai šeimai yra pastovus dydis, t.y., $t(X < R_c) = const$.
- Atstumas nuo didesnių gyvenviečių iki Vilniaus pateiktas atskiroje lentelėje. Jie gaunami nagrinėjant statistinius duomenis ir remiamasi Kelių direkcijos statistiniais duomenimis. Apskritai nuo bet kurios kitos vietovės atstumą tiesiog galima laikyti X, pridedant vieną kilometrą , kaip paklaidą. (2 priede pateiktame žemėlapyje mastelis 1:20000).

Susisiekimo kaina t(X) faktiškai priklauso tik nuo atstumo, t.y., galima laikyti, kad $t(X) = t_d(X)$ , nes eismo intensyvumas į Vilnių dar nėra didelis (nedideli kamščiai būna tik pagrindiniuose įvažiavimo plentuose (Grigiškėse, Lydos plente ir pn.) ir tik piko valandų metu). Tad faktorius $\tau_c(X)$ nėra reikšmingas skaičiavimams. Manoma, kad netolimoje ateityje šis dydis bus svarbesnis, ypač gyvenvietėse, esančiose arčiau Vilniaus.

Pačią funkciją t(X) laikysime tiesine ir proporcingą atstumui iki Vilniaus. Ją skirsime į du skirtingus atvejus- kai transportas yra viešasis ir kai privatus, t.y., **$t_v$ ir $t_p$.** Atitinkamai turėsime:

$$t_v(X) = \begin{cases} < darbo\ dienų\ \ skaič.\quad metuose > \cdot < 2 > \cdot 1lt,\ \ kai\ \ X \le 10\ km \\ < darbo\ dienų\ \ skaič.\quad metuose > \cdot < 2 > \cdot 2lt,\ \ kai\ \ 10 < X \le 20\ km \\ < darbo\ dienų\ \ skaič.\quad metuose > \cdot < 2 > \cdot 3lt,\ \ kai\ \ 20 < X \le 30\ km \end{cases}$$

$$t_p(X) = \frac{< darbo\ dienų\ \ skaič.\ \ metuose > \cdot < 2 > \cdot < benzino\ kaina\ \ už\ litrą >}{100} \times$$
$$\times \frac{< transporto\ \ priemonėr\ sunaudotų\ degalų\ kiekis\, šimtui\ \ kilometrų >}{1}$$

Paprastai metuose yra apie 252 darbo dienos (2006 metais jų yra 251), bet laikysime, kad jų yra 252. Daugiklis 2 abiejose išraiškose atsiranda todėl, kad transporto kaina skaičiuojama tiek už kelionę pirmyn, tiek ir atgal. Tarsime, kad transporto priemonės sunaudotų degalų kiekis šimtui kilometrų yra 7 litrai (reikia atsižvelgti į tai, kad susisiekimas faktiškai vyksta plentu). Susisiekiant viešuoju transportu, kaina apskaičiuojama remiantis dabartinėmis autobusų parko kainomis. Tad turėsime:

$$t_v(X) = \begin{cases} 252 \cdot 2 \cdot 1, & kai \;\; X \le 10 \; km \\ 252 \cdot 2 \cdot 2, & kai \;\; 10 < X \le 20 \; km \\ 252 \cdot 2 \cdot 5 & kai \;\; 20 < X \le 30 \; km \end{cases} = \begin{cases} 504, & kai \;\; X \le 10 \; km \\ 1008, & kai \;\; 10 < X \le 20 \; km \\ 2520 & kai \;\; 20 < X \le 30 \; km \end{cases}$$

$$\boxed{t_p(X) = \frac{252 \cdot 2 \cdot X \cdot 7 \cdot d}{100} = 35{,}28Xd} \qquad (22)$$

Čia **d- degalų litro kaina.**

Skaičiuojant atskirai skirtingų susisiekimo būdų kainas, galima natūraliai daryti prielaidą, kad šeimynos transporto pasirinkimas gali priklausyti nuo skaičiaus asmenų, dirbančių mieste. Akivaizdu, kad atskirais atvejais labiau apsimoka važinėti savu transportu, negu viešuoju (pvz., kada važinėja į darbą trijų asmenų šeima, gyvenanti 13 km. atstumu nuo Vilniaus).

- Toliau pildant modelį, rekia atsižvelgt į sandaugos „pc“ realią prasmę. Galbūt mus labiau domina ne atskiros c reikšmės (jas, kaip ir p reikšmes, sunku nustatyti), o visos sandaugos skaitinės reikšmės- t.y., pajamų kiekis, išleidžiamas kasdieniniam gyvenimui (maisto prekėms, drabužiams, komunikacijos mokesčiams, poilsiui, išsilavinimui). Tad suprastinant modelį, nagrinėjamą sandaugą pažymime pc=k. Tada spręsdami turėsime ieškoti optimalaus taško: (k; s). O biudžetinė lygtis atrodys taip:

$$\boxed{k + r(X)s + t(X) = Y} \qquad (23)$$

o pats optimizavimo uždavinys bus:

$$\boxed{\max_{\{k;s\}} \{U(k;s) \mid \Gamma(k;s) = Y - t(X) - r(X)s - k = 0;\;\; k \ge 0,\;\; s \ge 0\}} \quad (24)$$

- Naudingumo funkcijai taip pat imsime Kobo ir Duglaso formas, tik skaičiuosime laikydami konstantą σ lygią $\frac{1}{4}$ . Toks santykis paprastai imamas nagrinėjant miestų modelius daugelyje Šiaurės Amerikos miestų, tad išanalizuosime, kiek ši reikšmė atitinka Lietuvoje. Tad naudingumo funkcija bus:

$$\boxed{U(k;\, s) = s^{\frac{1}{4}} \cdot c^{\frac{3}{4}}} \qquad (25)$$

Ieškosime optimalaus taško pasinaudodami jau nagrinėtu bendrajame modelyje atveju:

$$U_s = \frac{1}{4} s^{-\frac{3}{4}} \cdot k^{\frac{3}{4}} \qquad\qquad U_k = \frac{3}{4} s^{\frac{1}{4}} \cdot k^{-\frac{1}{4}}, \quad o \;\; kadangi$$

$$\frac{\overline{U}_s}{\overline{U}_k} = r, \quad tai \quad r = \frac{\frac{1}{4}k}{\frac{3}{4}s} = \frac{1}{3}\frac{k}{s}.$$

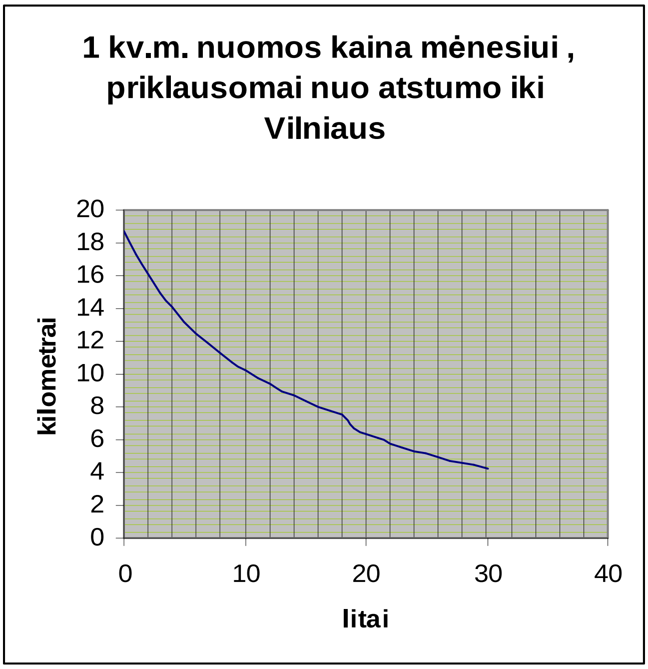
$$Iš \;\; biudžetinės \; lygties \;\; r = \frac{Y - t - k}{s}, \quad o \;\; sulyginę \; abu \;\; rezultatus \;\; gausime:$$

$\boxed{\bar{k} = \frac{3}{4}(Y - t(X))}$. Analogiškai ir $\boxed{\bar{s} = \frac{Y - t(X)}{4r(X)}}$. (26)

- Statistiškai nagrinėjant galima nustatyti ir nuomos kainą vienam kvadratiniui metrui (priklausomai nuo gyvenamosios vietos atstumo iki Vilniaus). Sugeneravus internete rastus duomenis apie kambarių ir butų nuomą galima išvesti nuomos kainos funkciją vienam mėnesiui $r_1(X)$:

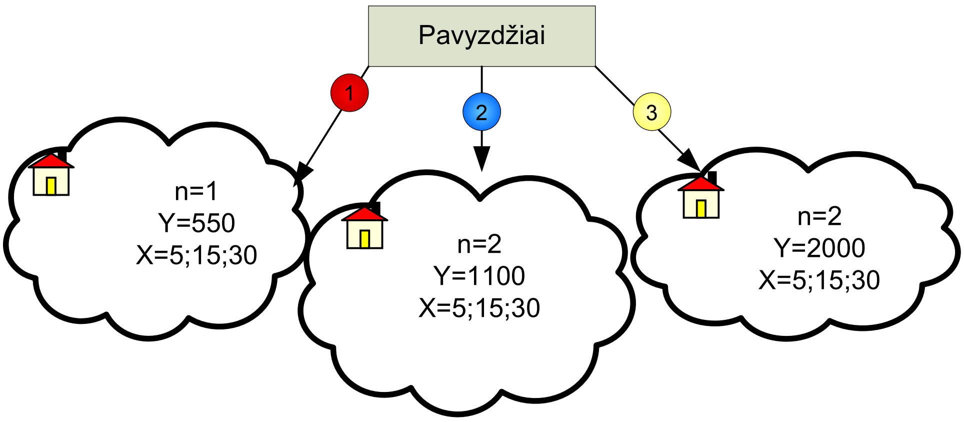
$$\boxed{r_1(X) = \begin{cases} \frac{126}{X}, & kai \;\; X \geq 18 \\ \frac{225}{X + 12}, & kai \;\; 0 \leq X \leq 18 \end{cases}} \qquad (27)$$

Šios funkcijos grafiką matote brėžinyje. Galima pastebėti, kad vieno kvadratinio metro kaina mėnesiui beveik tolydžiai mažėja tolstant nuo miesto. Esant mažesniam atstumui- mažėja greičiau, didesniam- lėčiau. Faktiškai nutolus nuo Vilniaus daugiau kaip 20 km. , gyvenvietėse nuomos kainos išsilygina.



Analogiškai per metus nuomos mokestį apskaičiuosime $r(X)=12r_1(X)$

Tad turint pagrindinius modeliui reikalingų dydžių apskaičiavimo būdus, galime panagrinėti ir kelis konkrečius pavyzdžius (su skirtingais dirbančiųjų skaičiais šeimoje, skirtingu uždarbiu ar skirtingomis gyvenamosiomis vietomis).




3.1.1 pavyzdys. Šeimyną sudaro vienas dirbantis Vilniuje narys, uždirbantis minimalią algą-550 lt. per mėnesį- ir gyvenantis

a) 5km. atstumu nuo Vilniaus

b) 15km. atstumu nuo Vilniaus

c)30km. atstumu nuo Vilniaus.

Tada $Y = 12 \cdot 550 = 6600lt$

| X | r(X) | tv(X) | tp(X) |
|---|---|---|---|
| 5 | 158,8 lt | 504 lt. | 529,2 lt. |
| 15 | 100 lt | 1008 lt. | 1587,6 lt. |
| 30 | 50,4 lt | 2520 lt. | 3175,2 lt. |

Natūralu, kad visais trim atvejais, bus pasirinktas viešasis transportas (benzino kainos ir viešojo transporto bilietų kainos imamos 2006 metų balandžio mėnesio duomenimis), tad pasinaudojus (26) formulėmis galima apskaičiuoti ir optimalų gyvenamąjį plotą bei išlaidas kasdieniniam gyvenimui:

$\bar{s}(X=5)=9{,}6$ $\bar{k}(X=5)=4831$ (mënesiui $po$ 402,5 $lt$)

$\bar{s}(X=15)=13{,}98$ $\bar{k}(X=15)=4194$ (mënesiui $po$ 350 $lt$)

$\bar{s}(X=30)=20$ $\bar{k}(X=30)=3060$ (mënesiui $po$ 255 $lt$)

Šiame pavyzdyje matome, kad vienam asmeniui, norinčiam gyventi netoli Vilniaus, yra galimybė nuomotis tik nedidelį vieną kambarį (apie 10 kv. metrų ploto), tuo tarpu gyvenanant toliau nuo Vilniaus susidaro galimybė nuomotis ir vieno kambario butą. (Situaciją gali pakeisti santykio pinigų, skirtų nuomai ir kasdieniniam pragyvenimui, santykiui pakitimas, t.y., konstantos σ kitoks
pasirinkimas ) .

3.1.2 pavyzdys. Šeimyną sudaro du dirbantys Vilniuje žmonės, uždirbantys minimalią algą- 550 lt.- per mėnesį ir gyvenantys a) 5km. atstumu nuo Vilniaus
b) 15km. atstumu nuo Vilniaus
c) 30km. atstumu nuo Vilniaus.

Tada $Y=2\cdot 12\cdot 550=13200lt$

| X | r(X) | tv(X) | tp(X) |
|---|---|---|---|
| 5 | 158,8lt | 1008lt. | 529,2lt. |
| 15 | 100 lt | 2016lt. | 1587,6lt. |
| 30 | 50,4 lt | 5040lt. | 3175,2lt. |

Natūralu, kad šiuo atveju bus pasirinktas privatus transportas, optimalus gyvenamasis plotas bei išlaidos kasdieniniam gyvenimui bus:

$\bar{s}(X=5)=20$ $\bar{k}(X=5)=9503{,}1$ (mënesiui $po$ 792 $lt$)

$\bar{s}(X=15)=29$ $\bar{k}(X=15)=8709{,}3$ (mënesiui $po$ 726 $lt$)

$\bar{s}(X=30)=49{,}7$ $\bar{k}(X=30)=7518{,}6$ (mënesiui $po$ 627 $lt$)

<u>3.1.3 pavyzdys.</u> Šeimyną sudaro du dirbantys Vilniuje žmonės, uždirbantys vidutinę algą- 1000 lt.- per mėnesį ir gyvenantys a) 5km. atstumu nuo Vilniaus

b) 15km. atstumu nuo Vilniaus

c) 30km. atstumu nuo Vilniaus.

Tada $Y = 2 \cdot 12 \cdot 1000 = 24000 lt$

| X | r(X) | tv(X) | tp(X) |
|---|---|---|---|
| 5 | 158,8lt | 1008lt. | 529,2lt. |
| 15 | 100 lt | 2016lt. | 1587,6lt. |
| 30 | 50,4 lt | 5040lt. | 3175,2lt. |

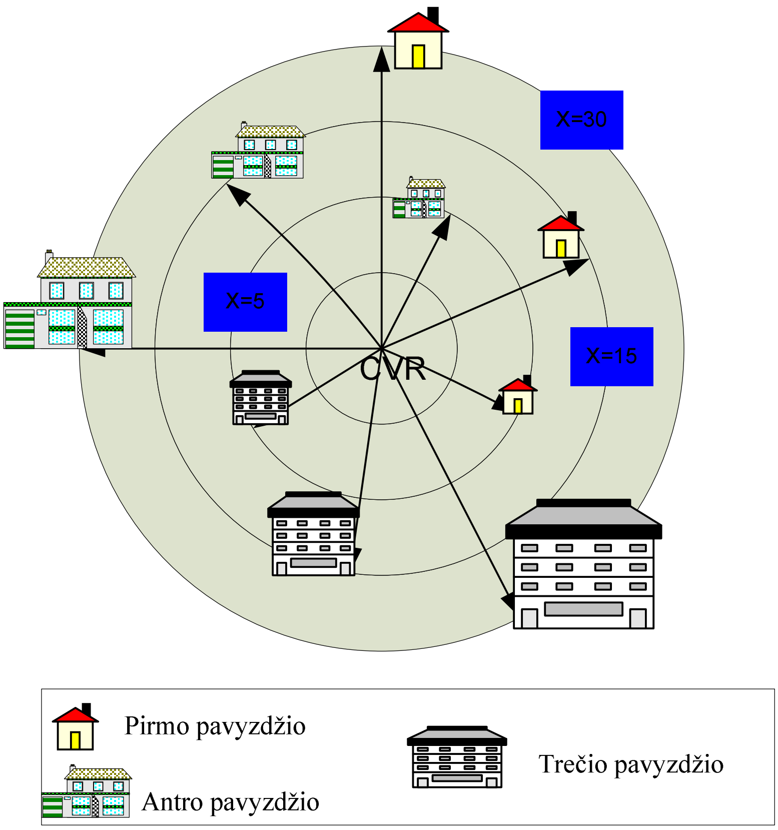
Šiuo atveju taip pat bus pasirinktas privatus transportas (juk pradinės sąlygos nesikeičia), o optimalus gyvenamasis plotas bei išlaidos kasdieniniam gyvenimui bus:

$\bar{s}(X = 5) = 36{,}9$ $\bar{k}(X = 5) = 17603$ (mënesiui $po$ 1466,9 $lt$)

$\bar{s}(X = 15) = 56$ $\bar{k}(X = 15) = 16809{,}75$ (mënesiui $po$ 1400 $lt$)

$\bar{s}(X = 30) = 103{,}3$ $\bar{k}(X = 30) = 15618{,}3$ (mënesiui $po$ 1301,5 $lt$)

Iš pastarosios analizės galima daryti išvadas, kad tokia modulio interpretacija ne visada atitinka realybę. Akivaizdu, kad esant didesniam atstumui (nagrinėjamu atveju 30 km.), santykio konstantą reiktų keisti, nes neatitinka realybės. Kita vertus galime daryti prielaidą, kad šeimynų, gyvenančių toliau nuo Vilniaus ir važinėjančių į jį dirbti, gerovės lygį gali sumažinti matematiškai neapskaičiuojamas nuovargio faktorius.



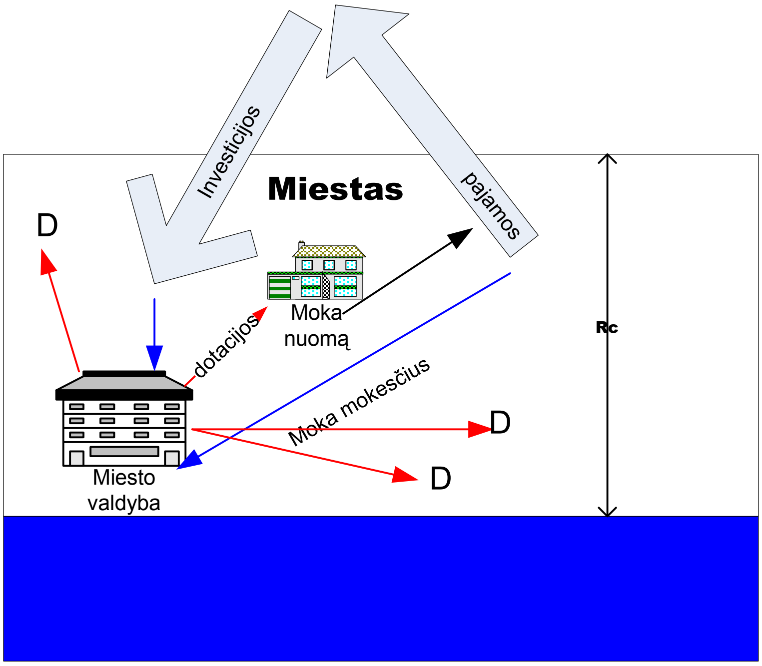

## 3.2. Rekreacinės zonos

## planavimas

Daugelyje išsivysčiusių šalių gana svarbią vietą užima turizmo, poilsio ir pramogų verslas. Ypač jis tampa aktualus, kai sprendžiami žemės mokesčių, jos nuomos, grąžinimo ar panašūs klausimai. Žinoma, kad brangiausia nekilnojama nuosavybė būtent ir yra vadinamosiose rekreacinio pobūdžio vietose, esančiose prie įvairių vandens telkinių- ežerų, tvenkinių, jūros pakrantėse. Dažnai poilsio vietos apima ir nacionalinius parkus. Tad toliau plačiau panagrinėsime, kaip keičiasi pradinis modelis, jo pagrindu laikant rekreacinį miestelį.

Pasaulyje daugumos kurortinių miestelių žemės nuosavybė nepriklauso vietiniams gyventojams- didžiąją dalį nuosavybės valdo savininkai, tik investuojantys savo pinigus į besivystantį poilsio ir turizmo verslą. Kadangi iš esmės didžioji dalis investuotojų uždirbtų pinigų išleidžiama ne tame miestelyje, o turizmo vietose kasdieninis pragyvenimas (ne tik turistams, bet ir vietiniams gyventojams) yra brangesnis, tai natūralu, kad vietinė valdžia turėtų mokėti dotacijas ar išmokas, susijusias su žemės mokesčiais (pasaulyje žinoma daug tokių nuolaidų: mokesčių sumažinimas, nemokamas viešasis transportas (kad ir kėlimasis keltu į Neringą), tačiau mes kitu pavyzdžiu nagrinėsime tik grynąsias išmokas).

Kurortiniuose miesteliuose šeimų judėjimas iš ir į miestą vyksta nuolat, ir akivaizdu, kad tai įtakoja vietinę ekonomiką. Paprastai rekreacinėse zonose žmonių judėjimas suaktyvėja sezono metu




(sezonas priklauso nuo vietovės geografinės padėties), kada dalis žmonių atvyksta dirbti, kita dalis turistauja ar poilsiauja, o tai irgi keičia padėtį darbo pasiūloje bei paklausoje, koreguoja susisiekimo kainą ar transporto išlaidas.

Galima pastebėti, kad nebe-aktuali pasidaro optimalios gyvenamosios vietos nustatymo problema. Taip yra todėl, kad didžioji dauguma kurortinių miestelių yra gana nedideli ir gyvenamoji vieta neorentuojama centro atžvilgiu. Kita vertus dažniausiai tokiuose, ypač pajūrio, miesteliuose gyvenamoji (arba prekybos vystymo) vieta yra orentuojama ne centro, o atstumo iki jūros (ežero) atžvilgiu. Modelio pagrindu laikysime du skirtingų formų miestelius- apskritimo ir stačiakampio (žr. pav). Miestelyje, kaip ir anksčiau, laikome, kad gyvena $N_0$ šeimų.

Pagrindinis veiklos šaltinis yra žemės nuoma ir teisingas mokesčių paskirstymas. Pagal veiklos pobūdį rinkos dalyviai skirstomi į investuotojus, kuriems priklauso didžioji dalis miestelio nekilnojamosios nuosavybės, ir į vietinius (arba laikinai gyvenančius) gyventojus, kurie tą nuosavybę nuomojasi.

Įvedame sąlyginę teisinę instituciją, kuri savo sudarytais reglamentais, nuostatomis ar sutartimis reguliuoja nuolat vykstančius, su žeme susijusius procesus. Pavadinkime ją sąlygine „miesto valdyba“.

Visų pirma sudarytas modelis nuo pagrindinio skiriasi tuo, kad kasmetinės kiekvienos šeimynos pajamos priklauso nuo atvykstančių ir išvykstančių žmonių srautų. T.y., jeigu jau dabar laikysime, kad šeimų skaičius yra $N_o$ (nepaisant jo kitimo skirtingais metų laikais), tai kasmetinės pajamos tampa funkcija $Y = \hat{Y}(N_0)$.

Be šių pajamų, teisinga tikėtis išmokamų dividentų (gaunamo pelno iš investuotojų ir paskirstomo gyventojams lygiomis dalimis), kurių skirstymą atlieka miesto valdyba, be kita ko ir konkurentiškai apibrėždama žemės nuomos kainos r(X) ribas. Tad dabar kiekvienos šeimynos kasmetinės pajamos yra alga+dividentai, t.y., Y+D.

Jei laikysime, kad beveik visa nuosavybė yra nuomojama, tai kasmetinė miesto valdybos pajamų dalis, skirta gyventojams, turi būti $N_0D$:

$$\int_{R_c}^{R_e} [r(X) - r_A] \cdot 2\pi X dX = N_0 D \qquad (28)$$

Čia $r_A = r(R_e)$, t.y., grynas žemės mokestis, kuris imamas į valstybės biudžetą nepriklausomai nuo žemės naudojimo paskirties. Jis lygtyje atimamas, nes šios biudžetinės pajamos neperskirstomos vietiniams gyventojams kaip kompensacijos, o lieka biudžete.

Tad kiekvienos šeimos kasmetinės pajamos per metus turėtų būti:

$$\boxed{y = Y + \frac{2\pi}{N_0} \int_{R_c}^{R_e} [r(X) - r_A] X dX} \qquad (29)$$

Ją galime perrašyti:

$$\boxed{N_0 Y = 2\pi \int_{R_c}^{R_e} \left( \frac{pc+t}{\bar{s}} + r_A \right) X dX} \qquad (29)$$

(čia pasinaudojome jau žinomais sąryšiais $y - t = pc + rs$ *ir* $N_0 = 2\pi \int_{R_c}^{R_e} \frac{zdz}{\bar{s}}$).

Šio sąryšio interpretacija akivaizdi. Jis parodo viso miestelio gaunamas pajamas per metus, t.y., gyventojų pajamas, kurios faktiškai beveik visos išleidžiamos tame pačiame miestelyje.

Jei laikytume, kad ne visa žemė priklauso ne vietiniams savininkams modelį reiktų papildyti įvedama konstanta, nusakančia, kuri dalis miesto žemės priklauso investuotojams.

Analogiškai pajūrio miestelio (stačiakampio formos) atveju turėsime:

$$\int_0^{R_e} [r(X) - r_A] \cdot l \cdot dX = N_0 D, \qquad (30)$$

kur $l$ - konstanta, reiškianti pajūrio miestelio plotį.

Tada kiti sąryšiai bus:

$$\boxed{y = Y + \frac{l}{N_0} \int_0^{R_e} [r(X) - r_A] dX} \qquad (31)$$

$$N_0 Y = l \int_{R_c}^{R_e} \left( \frac{pc+t}{\bar{s}} + r_A \right) dX \qquad (32)$$

Iš gautų lygybių matome, kad socialinės išmokos D priklauso nuo žemės nuomos kainos. Tad norint nustatyti kasmetines šeimynos pajamas, reikia žinoti ir (vidutinę) žemės nuomos kainą, mat visi sąryšiai $r = r(I(X); r_c, I_c, p)$, *kur* $I(X) = y - t(X) = Y + D - t(X)$, $N(R_c) = N_0$ turi abu nežinomus dydžius.

<u>Išvados.</u> Nagrinėjant rekeacinio tipo miestelį, nebeaktualus klausimas tampa atstumas nuo CVR, o pagrindiniu faktorium (ypač pajūrio miesteliuose) tampa nuotolis iki jūros. Be to, kadangi laikome, kad beveik visa nuosavybė priklauso savininkams, gyvenantiems ne

nagrinėjamame mieste, kone aktualiausias miesto ekonomikai pasidaro išmokų vietiniams gyventojams klausimas.

Panašią modelio analizę galime taikyti ne tik rekreacinio pobūdžio miesteliui, bet ir, pavyzdžiui, didelei universalinei parduotuvei (kuri priklauso vienam savininkui, bet daugelį joje įsikūrusių parduotuvių nuomojasi atskiri subjektai) ar prekybos ir verslo vystymo miesteliams. Juk abiejais atvejais galioja tas pats principas, kad visa nuosavybė priklauso tam tikriems investitoriams. (Atskiru atveju pagrindinis savininkas gali būti ir pati miesto valdžia. Tada būtų nagrinėjamas viešosios nuosavybės klausimas).

## 3.3. Mokyklos biudžeto planavimas

Paskutiniais praeito amžiaus metais Lietuvos švietimo reformos žodyne atsirado sąvoka „švietimo paslaugos“. Tad keičiantis laikams, ekonomikos terminai vis dažniau atsiranda diskutuojant net apie bendrąjį vidurinį išsilavinimą. Tikimasi, kad kitokia vadybos, apskaitos ir finansų skirstymo sistema švietime leis pasiekti geresnių rezultatų (tiesa, patys švietimo sistemos rezultatai gali būti suprantami skirtingai). Lietuvoje pastaruoju metu švietimo finansavimo pokyčiai siejami ne su didėjančiomis mokyklai skiriamomis lėšomis, bet su moksleivio krepšeliu. Šis terminas atėjęs iš naujos švietimo finansavimo sistemos, kartais vadinamas „pinigai paskui moksleivį“. Tai reiškia, kad mokyklos finansavimas tiesiogiai priklauso nuo moksleivių skaičiaus joje. Atsakymas į klausimą, kaip tokiu būdu švietimo kokybė kils, paprastai siejamas su racionalesniu švietimo lėšų naudojimu ir mokyklų bei klasių stambinimu.

Bendrojo lavinimo mokyklos finansuojamos iš dviejų pagrindinių šaltinių: specialios tikslinės valstybės biudžeto dotacijos, paprasčiau vadinamos „mokinio krepšeliu", ir steigėjo (kuris dažniausiai yra savivaldybė) asignavimų. Mokinio krepšelis skiriamas kiekvieno mokinio ugdymui finansuoti (2004 m. – 1703 Lt, o 2005 m.- 1802 Lt). Didžiąją krepšelio dalį sudaro pinigai mokytojų atlyginimams, taip pat vadovėliams, mokymo priemonėms, mokytojų kvalifikacijai tobulinti. O steigėjas išlaiko mokyklos pastatus ir mokyklos aptarnaujantį personalą, aprūpina mokyklą baldais ir kitu inventoriumi. Švietimo įstaigos turi teisę gauti rėmėjų – juridinių ir fizinių asmenų – paramą. Tokia parama turi būti juridiškai įteisinta ir pagrįsta savanoriškumo principu.

Plačiau panagrinėkime „mokinio krepšelį“. Krepšelis- finansų paskirstymo būdas. Jį galima suvokti kaip čekį. O šio atsiskaitymo būdas išsiskiria tuo, kad teikėjas gali kontroliuoti gavėjo vartojimo prioritetus, užtikrinti, kad lėšos būtų panaudojamos pagal iš anksto nustatytą paskirtį. Išskirtinis čekinės sistemos požymis- paslaugų, prekių, bet ne pinigų skirstymas, be to, šiuo metodu sukuriama rinka, kurioje veikia įvairūs paslaugų teikėjai ir pasirinkimo teisę turintys paslaugų vartotojai. Socialiniai ir edukologiniai krepšelio panaudojimo švietimo sistemoje tikslai paprastai aiškinami keturiais pagrindiniais švietimo finansavimo principais:

- įgyvendinama teisė tėvams pasirinkti švietimo instituciją;
- tėvai aktyviai įtraukiami į vaikų mokymąsi;
- skatinama mokyklų konkurencija;
- didesnei daliai gyventojų pasidaro prieinamos privačios mokyklos.

Be to, Lietuvoje tokio finansavimo atsiradimo viena iš priežasčių buvo ir ta, kad skirtinguose regionuose vienam moksleiviui mokyti tenkančios išlaidos iš tiesų labai skyrėsi. Pavyzdžiui, 1997 m. Klaipėdoje, Visagine, Vilniuje, Panevėžyje ir Marijampolėje vienam moksleiviui teko mažiau nei 1300 lt, o Alytaus rajone ir Neringoje- dukart daugiau.

Dabar krepšelio sudarymo principai yra tokie: pagal ugdymo planą įvertinus pamokų skaičių per savaitę, atsižvelgus į mokytojų kvalifikaciją, mokyklos ir klasės dydį, specialiuosius poreikius, skirtingoms mokyklų ir klasių grupėms nustatomas vieno moksleivio krepšelio dydis, išreikštas santykiniu koeficientu ir bazine alga. Tad pakitus bazinei algai, keisis ir moksleivio krepšelio dydis. Skirtingo tipo mokykloms skirtingas ir koeficientas (pvz., tautinių mažumų mokykloms, jeigu jos yra kaime, koeficientas didinamas 10%, o jei rajono centre- tik 5 %.).

Apskritai moksleivio krepšelio lėšos skiriamos taip: ugdymo planui (pedagogų atlyginimams ir socialiniam draudimui), pedagogų kvalifikacijos tobulinimui, vadovėliams ir vaizdinėms bei techninėms priemonėms, pedagoginei ir psichologinei pagalbai, bibliotekai ir mokyklos valdymui finansuoti.

Kitą nagrinėjamo modelio interpretaciją galime sukonstruoti taip: rajoninę mokyklą laikydami atskiru ūkiniu subjektu- t.y., šeimyna. Visų pirma galime pastebėti, kad jos kasmetinės pajamos yra sudėtinės- pajamų šaltiniai yra keli. Didžiausią dalį, aišku, sudaro aptartasis mokinio krepšelis (dabar Lietuvoje jis lygus, o nuo rajono ir vietovės- kaimo ar miesto- priklauso jo dauginamasis koeficientas). Įplaukas taip pat padidina ir dažnai pačių darbuotojų ar mokinių tėvų skiriami 2% pajamų mokesčiai, lėšos gaunamos ir iš įvairių fondų bei projektų. Apskritai toliau nagrinėdami modelį, laikysime, kad kasmetines pajamas **Y** sudarys tik mokinio krepšelis. Tokią prielaidą eilinei mokyklai galime priimti dėl kelių priežasčių. Viena pagrindinių yra ta, kad papildomos pajamos dažniausiai yra taip pat proporcingos mokinių skaičiui mokykloje ir dažniausiai jos naudojamos tam tikrai specifiškai sričiai (pvz., langų keitimui), tuo beveik neįtakojančiai kasdieninio mokyklos biudžeto.

Sudarome modelį:

Kadangi keičiant mokymo įstaigų tinklą kyla svarbus mokinių pavežėjimo klausimas. Ypač problemų atsiranda tuomet, kai moksleiviai lanko ne savo savivaldybės mokyklas. Dabar jau už jų pavežėjimą atsako mokykla. Tad dydis **t** reikš pavežėjimo išlaidas.

Pagal Lietuvos švietimo reikalavimus, formuojant mokykloje klasę, būtina, kad joje būtų ne mažiau kaip 15 mokinių (tai gana dažna problema vyresnėse kaimo vietovių klasėse) ir ne daugiau kaip 30 mokinių (dažniausiai tokio dydžio klasės formuojamos didmiesčių mokyklose). Tad toliau laikykime kad nagrinėjamoje mokykloje yra n vaikų. Tada mokyklos pajamos bus:

$\boxed{Y(n) = 1802 \cdot n + f}$ (33) , f- papildomos mokyklos pajamos (savivaldybės, kaip mokyklos steigėjos, asignacijos ir pn.).

Tokioje mokykloje iš viso galima suformuoti klasių k, kur

$$\boxed{\left[\frac{n}{15}\right] \leq k \leq \left[\frac{n}{30}\right] + 1} \qquad (34)$$

Vidutiniškai kiekviena klasė per savaitę turi 28 pamokas , vadinasi, mokykloje vidutiniškai vyksta **28k** pamokos per savaitę (mokiniams su specialiojo poreikio ugdymu pamokų koeficientai skaičiuojami kitaip, bet jų ir finansavimas kitoks, tad plačiau šio atskiro atvejo nenagrinėsime). Vidutiniškai kiekvienas pedagogas turi 25 pamokas per savaitę, tai mokykloje dirbančių pedagogų skaičius apytiksliai bus lygus m, kur $\boxed{25 \cdot m = 28 \cdot k}$, iš čia $\boxed{m = \frac{28 \cdot k}{25}}$ (35).

Sudarykime pagrindinę biudžetinė lygtį kiekvienai mokyklai:

$$\boxed{Y(n) = t + h \cdot m + r \cdot s} \qquad (36),$$

čia Y(n) išreikšta (33) sąryšiu, o **h- valandinis mokytojų atlyginimas mėnesiui**. Žymėjimų r ir s prasmės išlieka tos pačios, t.y., vienas reikš nagrinėjamos mokyklos plotą, o kitas- apytikslį mokestį už komunikacijas ir elektrą.

Darysime prielaidą, kad ir šiuo atveju mokyklos naudingumo lygį nustatyti galima naudoti Kobo ir Duglaso funkciją. Pabandysime konkrečiais atvejais apskaičiuoti, kokia turi būti konstantos σ skaitinė reikšmė, kad galėtume tirti optimalumą.

Tad pradžioje tarkime, kad dvi skirtingos mokyklos (viena maža, kur $n_{maz}$=320 mokinių, ir didelė kur $n_{did}$=1500 mokinių) jau pasiekė optimalų savo ūkinės veiklos rezultatą. Tada padarę prielaidą, kad tinka Kobo ir Duglaso funkcija $U(m;s) = U_o s^{\sigma} m^{1-\sigma}$ , mokykla turės pasiekti optimalų tašką, kai tenkinamos sąlygos: $\overline{m} = \frac{1-\sigma}{h}(Y - t)$ *ir* $\overline{s} = \frac{\sigma}{r}(Y - t)$. (37)

Bendruose skaičiavimuose turėsime $k \approx \frac{25 \cdot m}{28}$ . Tada optimaliame taške

$k \approx \frac{25 \cdot \overline{m}}{28} = \frac{25 \cdot (1-\sigma)}{28 \cdot h}(Y - t)$ , o iš (34) sąryšio pagrindinę sąlygą:

$$\boxed{\left[\frac{n}{15}\right] \leq \frac{25 \cdot (1-\sigma)}{28 \cdot h}(Y - t) \leq \left[\frac{n}{30}\right] + 1} \qquad (38)$$

Iš čia gausime ieškomos konstantos kitimo intervalus:

$$1-\frac{28\cdot h\left(\left[\frac{n}{30}\right]+1\right)}{25\cdot(Y-t)}\le\sigma\le 1-\frac{28\cdot h\cdot\left[\frac{n}{15}\right]}{25(Y-t)} \quad (39)$$

arba pasinaudojus (33) išraiška:

$$1-\frac{28\cdot h\left(\left[\frac{n}{30}\right]+1\right)}{25\cdot(1802n+f-t)}\le\sigma\le 1-\frac{28\cdot h\cdot\left[\frac{n}{15}\right]}{25(1802n+f-t)} \quad (40)$$

Kadangi realiai išlaidos mokytojams yra finansuojamos tik iš mokinio krepšelio, o mokinių pavežėjimu rūpinasi ir už jį moka savivaldybė, konstantos išraišką galima patikslinti atmetus papildomus dydžius:

$$\boxed{1-\frac{28\cdot h\left(\left[\frac{n}{30}\right]+1\right)}{25\cdot(1752n)}\le\sigma\le 1-\frac{28\cdot h\cdot\left[\frac{n}{15}\right]}{25(1752n)}} \quad (41)$$

Čia $1752=1802-50$ ,nes 50 litų yra mažiausia galima suma iš moksleivio krepšelio, skirta ne pedagogų išlaikymui, o vadovėliams ir mokymosi reikmėm.

3.3.1 pavyzdys. Laikykime, kad $h\approx 40\ lt$, o $n_{maz}$=320. Tada:

$$0{,}9991\le\sigma\le 0{,}9983$$

3.3.2 pavyzdys. Laikykime, kad $h\approx 40\ lt$, o $n_{did}$=1500. Tada:

$$0{,}9991\le\sigma\le 0{,}9983$$

Iš abiejų pavyzdžių galime padaryti išvadą, kad Kobo ir Duglaso naudingumo funkciją yra korektiška naudoti skaičiuojant mokyklos, kaip ūkinio subjekto, naudingumą, nes kokį beimtume mokyklos dydį, konstantos rėžiai yra pastovūs. Tik skirtingai galima interpretuoti pačios konstantos skaitinę reikšmę. Matome, kad ji artima vienetui, o tai reiškia, kad didžioji dalis mokinio krepšelio pinigų skiriama mokytojų išlaikymui (žinoma, tai nėra pinigai, skirti tik atlyginimams mokėti, bet ir kvalifikacijos kėlimui ir pn.), bet logiškai galima daryti išvadą, kad ši santykio σ reikšmė yra per didelė.

# IŠVADOS

Matematinis modeliavimas yra taikomosios matematikos sritis, nagrinėjanti realių situacijų formalizuotus modelius. Vieni jų būna skirti ekonominiam verslo planavimui, kiti žemės ar miestų plėtros vystymui, treti- įvairių biologinių ar kitokių gyvenimo procesų modeliavimui. Geras procesų planavimas leidžia geriau valdyti įvairias situacijas, o tai jau aktualu šiuolaikiniame gyvenime.

Baigiamajame darbe nagrinėjamas miesto, su vienu centriniu verslo rajonu, susisiekimo problema (transporto kaina ir pn.), optimalios gyvenamos vietos nustatymas, priklausomai nuo kasmetinių pajamų, šeimos pinigų paskirstymas tarp mokesčių už gyvenamą plotą ir kasdieninių išlaidų. Visi šie faktoriai apibūdina kiekvienos šeimos (socialinę) gerovę (matematiškai nusakyti šią gerovę pasirenkama Kobo ir Duglaso naudingumo funkcija).

Analizuojami keli modelio taikymai realioje situacijoje- gyvenamosios vietos rajonuose aplink Vilniaus miestą situacija, mokyklos , kaip atskiro ūkinio vieneto optimalias galimybes, bei pateikiamas modelio taikymas teoriniame rekreacinio pobūdžio miestelyje. Daroma išvada, kad modelis, su nežymiais pakeitimais, galimas pritaikyti įvairiose situcijuose. Pavyzdžiui modelį taikant Vilniaus rajone, nustatoma, kaip optimaliai skirstomos šeimos pajamos, kokie galimi gyvenamosios vietos pasirinkimai. Mokyklos atveju, apskaičiuotas laipsninės funkcijos galimas koeficientas.

The models of social welfare.

Much of our time is spent in making a living and in living itself. One essential element in these rather mundane activities is land and residential location. In this work, there are analysed household wellfare problam in monocentric, circular city consisting of a circular central business district surrounded by an annular region of roads and houses. Problam consists of household location optimum, competitive equilibrium and transport (public and private) problams. The model is iliustrated with solving three real situation – household optimum in Vilnius district, recreation zone planing and activities of scool, as economic subject, budget planing.

## LITERATŪRA


1. Frederic Y. M. Wan K. *Mathematical models and their analyzes*, NewYork: Harper Row publishes, 1989.
2. Forrester J. *Dinamika rozvitija gorada,* Maskva, 1974.
3. A. Apynis, E. Stankus. *Matematika*, Vilnius: TEV, 2001.
4. A. Apynis, *Optimizavimo metodai,* Vilnius, 1988.
5. R. Želvys, *Švietimo politika ir monitoringas,* Vilnius, 2003.
6. R. Rupšys. *Matematinis modeliavimas,* Vilnius: Akademija, 2004.
7. *Matematikos terminų žodynas,* Vilnius: Mokslo ir enciklopedijų leidykla, 1994.
8. Lietuvos Kelių departamento internetinė svetainė.
9. www.smc.lt