Lietuvos matematikos rinkinys
Lietuvos matematikų draugijos darbai, ser. B
57 t., 2016, 94–98

ISSN 0132-2818
www.mii.lt/LMR/

Galvosūkis ar matematinis uždavinys?

Juozas Juvencijus Mačys[1], Jurgis Sušinskas[2]

[1] *Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos institutas*
Akademijos g. 4, LT-08663 Vilnius
[2] *Vilniaus universitetas, Medicinos fakultetas*
Čiurlionio g. 21, LT-03101 Vilnius
E. paštas: juozas.macys@mii.vu.lt, jurgis.susinskas@mii.vu.lt

Santrauka. Straipsnyje aptariama, kuo skiriasi matematinis uždavinys, programavimo uždavinys ir galvosūkis. Pateikiamas nagrinėjamo matematinio uždavinio detalus sprendimas.

Raktiniai žodžiai: galvosūkis, sudoku, kakuro, matematinis uždavinys, programavimo uždavinys.

Prieš kurį laiką internete buvo aptariamas mūsų kolegos matematiko Dainiaus Dzindzalietos sugalvotas uždavinys (žr. [1, 2]).

Tarkime, kad $\check{S}IAU$, $LIAI$ ir $J\dot{E}GA$ *yra keturženkliai skaičiai, tenkinantys lygybę*

$$\begin{array}{r} \check{S}\ I\ A\ U \\ +\ \underline{L\ I\ A\ I} \\ J\ \dot{E}\ G\ A \end{array} \tag{1}$$

Skirtingos raidės žymi skirtingus skaitmenis, vienodos raidės žymi vienodus skaitmenis. Raskite mažiausią ir didžiausią galimą sumos $J+\dot{E}+G+A$ *reikšmę.*

Išoriškai panašių uždavinių nereta pamatyti net ir nematematinių žurnalų galvosūkių skyriuose. Tiesa, ten uždavinys dažniausiai turi vienintelį sprendinį, ir tai padeda apčiuopti atsakymą. Čia gi siūlomoji „lygtis“ turi net 136 sprendinius – juos visus „išguldyti“ galima tik kompiuteriu. Visas uždavinio įdomumas – ne rasti kokį nors sprendinį, o „didžiausią“ ir „mažiausią“ sprendinį (sprendinio „didumas“ matuojamas sumos $J+\dot{E}+G+A$ reikšme). Tada uždavinys tampa nebe galvosūkiu, o matematiniu uždaviniu. Nebekalbant apie matematišką formuluotę, – rasti mažiausią ir didžiausią sumos reikšmę – uždavinį be matematikos (ar be kompiuterio) išspręsti sunku.

Atskirti galvosūkį nuo matematinio uždavinio dažnokai neįmanoma. Tiesa, sprendžiant matematinį uždavinį reikia bent jau mokėti sudėti, atimti, dauginti, dalyti ir kitų matematikos žinių. Žinoma, visur reikia mokėti logiškai samprotauti, – matematika ir logika visada persipynusios (sakoma, kad logika – matematikos dalis, o galima sakyti ir atvirkščiai, matematika – logikos dalis). Natūralu, kartais neapsivers liežuvis klausimą, kiek nulių turi 100!, pavadinti galvosūkiu, o šaradą ar viena raide besiskiriančių žodžių eilutę pavadinti matematiniu uždaviniu.

Pavyzdžiu priminsime, kas yra žodžių eilutė.

Atspėkite 4 žodžius: pirmas žodis susijęs su linininkyste; iš jo, pakeitus vieną raidę, gaunamas antras žodis, susijęs su pienininkyste; iš antro, pakeitus vieną raidę, *gaunamas trečias žodis, susijęs su „velnianinkyste“; iš trečio, pakeitus vieną raidę, gaunamas ketvirtas žodis, susijęs su arklininkyste.*

Nenuogąstaukite – visi žodžiai puikiai kiekvienam žinomi. Linkime sėkmės!

Ir jau visai kitas reikalas, jeigu kalbame apie sudoku ar kakuro uždavinius – čia kartais reikia ir neprastos matematikos (žr. [3, 4]; beje, mūsų uždavinio sprendimas susišaukia su kakuro uždaviniais).

Nagrinėjamasis matematikos uždavinys puikiai tinka platesniam skaitytojų ratui, bet nelabai tinka mokyklai ar olimpiadai (Šiaulių olimpiadoje buvo duotas labai supaprastintas uždavinio variantas). Bėda čia, kad galima sugaišti daug laiko ir vistiek jo neišspręsti. Minėtame *Delfi* straipsnyje [1] ir straipsnio komentare [2] pademonstruota tik, kaip įsitikinti, kad didžiausia reikšmė ne didesnė už 29, o mažiausia reikšmė ne mažesnė už 11 (žinoma, pateikti ten skaičių pavyzdžiai tada įrodo, kad didžiausia sumos reikšmė yra 29, o mažiausia 11). Mūsų tikslas – parodyti, kad atitinkamus pavyzdžius rasti taip pat galima ne spėliojant, o matematiškai samprotaujant. Kad tie pavyzdžiai nepakibtų ore, pateikiame ir minėtų teiginių įrodymus. Čia mes remiamės uždavinio autoriaus sprendimu, ir pateiktasis variantas skiriasi tik kai kuriais niuansais.

Įvadinės pastabos

Prieš pradėdami spręsti, padarysime kelias pastabas. Matematikoje vartojamos „lotyniškos“ raidės, todėl spręsdami Š keičiame į S, o Ė – į E. Raidė I vartoti labai nepatogi – ji per daug panaši į „mažąją l“ ir skaitmenį 1 (panašiai raidė O beveik nevartojama dėl panašumo į nulį, tik mums čia jos neprireikė). Todėl raidę I keičiame į T. (Žinoma, tai daroma tik sprendžiant – šiaip jau sąlyga puiki: čia ir uždavinio autoriui brangūs Šiauliai, ir jaunimo mėgstamas žodelis.)

Mūsų lygtis tampa tokia:

$$\begin{array}{r} S\,T\,A\,U \\ +\ \underline{L\,T\,A\,T} \\ J\,E\,G\,A \end{array} \tag{2}$$

Iš pradžių į ją įdėmiai pasižiūrėkime. Dar nekalbant apie konkretybes, aišku, kad S, L, J nelygūs 0 – juk sąlygoje pasakyta, kad visi sąlygos skaičiai keturženkliai. Nelygus nuliui ir U – jei $U = 0$, tai būtų $T = A$, o pagal sąlygą raidžių reikšmės skiriasi. Panašiai $T \neq 0$: jei $T = 0$, tai būtų $U = A$, – prieštara. Taip pat (remiantis sudėties stulpeliu taisyklėmis) aiškūs sąryšiai $J \geqslant S + L$, $S \leqslant 8$, $J \geqslant 3$, $A = U + T$ arba $A = U + T - 10$; minėtais faktais kartais remsimės nebeperspėję.

Dabar tarkime, kad radome kokį nors (2) lygties sprendinį, pavyzdžiui,

$$\begin{array}{r} 1792 \\ +\ \underline{4797} \\ 6589 \end{array} \tag{3}$$

kuris formaliai užrašomas taip:

$$(A, E, G, L, J, S, T, U) = (9, 5, 8, 4, 6, 1, 7, 2).$$

Jeigu (3) lygybėje sukeisime vietomis 1 ir 4, turėsime dar vieną sprendinį:

$$\begin{array}{r} 4792 \\ +\ \underline{1797} \\ 6589 \end{array}$$

kuris užrašomas jau kitaip:

$$(A, E, G, L, J, S, T, U) = (9, 5, 8, 1, 6, 4, 7, 2).$$

Matome, kad kiekvienas sprendinys turi porą, o tai reiškia, kad (2) lygties sprendinių skaičius bus lyginis, didžiausių sprendinių (t. y. kai suma $J+E+G+A$ didžiausia) taip pat bus lyginis, mažiausių sprendinių skaičius lyginis. Ir dar viena svarbi pastaba: ieškodami sprendinių, laikysime (ir to kartais nebepriminsime), kad $S > L$ (priešingu atveju S ir L būtų galima sukeisti vietomis ir pervadinti į L ir S). Žinoma, suradus sprendinius, kuriuose $S > L$, reikia neužmiršti, kad jie turi „dvynius“, taigi rastąjį sprendinių skaičių reikės padvigubinti.

Didžiausia sumos reikšmė

Skaitmenys J, E, G, A yra skirtingi, todėl $J+E+G+A \leqslant 9+8+7+6 = 30$. Taigi jau žinome, kad didžiausia sumos $\Sigma = J+E+G+A$ reikšmė tikrai ne didesnė už 30. O gal ji negali būti lygi 30? Pasirodo, kad iš tikrųjų Σ visada mažesnė už 30. Įrodysime tai prieštaros metodu.

Tarkime, kad radome sprendinį, kur $\Sigma = 30$. Tada $\{J, E, G, A\} = \{6, 7, 8, 9\}$ (t. y., raidės J, E, G, A turi reikšmes $6, 7, 8, 9$ kuria nors tvarka). Vadinasi, visų kitų raidžių reikšmės ne didesnės už 5. Iš (2) sudėties trečio stulpelio matome, kad $A \geqslant 8$ (kitaip bus $G < 6$). Iš antro stulpelio $T \in \{3, 4\}$ (kitaip būtų $E < 6$).

Jeigu $A = 8$, tai $G = 6$, $U + T = 8$. Kadangi $U \neq T$, tai sumą 8 galima sudaryti tik iš dėmenų 5 ir 3. Vadinasi, $T = 3$, $U = 5$. Iš antro stulpelio $E = 2T + 1 = 7$, o raidei J liko reikšmė $J = 9$. Bet reikšmė 5 jau užimta, todėl $J = S+L \leqslant 4+3 = 7$, – prieštara.

Jeigu $A = 9$, tai $U + T = 9$. Sumą 9 dabar galima sudaryti tik iš dėmenų 5 ir 4. Vadinasi $T = 4$, $E = 9$, – prieštara (reikšmę 9 jau užėmė A).

Taigi įrodėme, kad $\Sigma \leqslant 29$. Tęskime tyrimą, – o gal ir $\Sigma = 29$ būti negali? O jeigu gali, tai dar geriau, – rasime tuos sprendinius. Todėl tarkime, kad $\Sigma = J+E+G+A = 29$. Tai reiškia, kad $\{J, E, G, A\} = \{5, 7, 8, 9\}$, o kitos raidės įgyja reikšmes iš aibės $\{0, 1, 2, 3, 4, 6\}$.

Iš (2) lygties antro stulpelio $T \in \{2, 3, 4\}$ (kitaip būtų $E < 5$). Paskutiniame stulpelyje $U + T \neq 10$, nes tada būtų $A = 0$, – prieštara. Vadinasi, $U + T \leqslant 9$, vienetas iš ketvirto stulpelio į trečią nepereina, G lyginis, todėl $G = 8$ (o J, E, A nelyginiai). Vadinasi, $A = 9 = U + T$. Bet $T \leqslant 4$, todėl $U \geqslant 5$, t. y. $U = 6$, tada $T = 3$:

$$\begin{array}{r} S396 \\ +\ \underline{L393} \\ JE89 \end{array}$$

Iš antro stulpelio $E=7$, raidei J iš aibės $\{5,7,8,9\}$ liko reikšmė $J=5$. Kadangi 3 jau užimtas, tai $S=4$, $L=1$ (arba dvyniui $S=1$, $L=4$). Gavome du sprendinius:

$$\begin{array}{r} 4396 \\ +\ \underline{1393} \\ 5789 \end{array} \quad \text{ir} \quad \begin{array}{r} 1396 \\ +\ \underline{4393} \\ 5789 \end{array} \tag{4}$$

Mažiausia sumos reikšmė

Sumos $\Sigma = J+E+G+A$ skaičiai skirtingi, todėl iš karto aišku, kad $J+E+G+A \geqslant 0+1+2+3=6$. Bet čia pat kyla mintis, kad jeigu šioje sumoje dėmenų būtų daugiau, tai ir apatinį rėžį gautume didesnį. Ir iš tikrųjų, J kartais lygi sumai $S+L$, o kartais, kai prisideda vienetas mintyje, net didesnė ir lygi $S+L+1$. Vadinasi,

$$\Sigma = J+E+G+A \geqslant S+L+E+G+A.$$

Dėmenys čia taip pat skirtingi, todėl visada $\Sigma \geqslant 0+1+2+3+4=10$, o kai $T \geqslant 5$, tai net

$$\Sigma = S+L+1+E+G+A = (S+L+E+G+A)+1 \geqslant (0+1+2+3+4)+1 = 11.$$

Pasižiūrėkime, kas atsitiks, jei $T \leqslant 4$. Dar kartą padidinkime dėmenų skaičių. Kadangi $E \geqslant T+T$, tai

$$\Sigma \geqslant S+L+T+T+G+A = (S+L+T+G+A)+T.$$

Skliaustai duoda mums mažiausiai 10, bet dar turime dėmenį T. Jau minėjome, kad $T \neq 0$ (tada būtų $U=A$), vadinasi, ir atveju $T \leqslant 4$ taip pat $\Sigma \geqslant 11$.

Sužiba viltis, kad 11 ir yra mažiausia galima Σ reikšmė. Lieka tik surasti atitinkamą sprendinį. Nagrinėkime pačią lygybę $J+E+G+A=11$. Užrašyti 11 kaip keturių skirtingų dėmenų sumą galima šešiais būdais:

$$\begin{aligned} 11 &= 0+1+2+8 = 0+1+3+7 = 0+1+4+6 \\ &= 0+2+3+6 = 0+2+4+5 = 1+2+3+5. \end{aligned}$$

Tirkime atvejį $\{J,E,G,A\} = \{1,2,3,5\}$. Nei S, nei L šiai aibei nepriklauso, jos ne nuliai, taigi $S \geqslant 4$, $L \geqslant 4$, o jų suma $J \geqslant 8$, – prieštara (J turi priklausyti aibei $\{1,2,3,5\}$).

Imkime atvejį $\{J,E,G,A\} = \{0,1,2,8\}$. Kadangi $S \geqslant 3$, $L \geqslant 3$, tai $J \geqslant 6$, o tai reiškia, kad $J=8$. Vadinasi, $S=5$, $L=3$ (kitoki dėmenys per dideli; primename, kad $S>L$):

$$\begin{array}{r} 5TAU \\ +\ \underline{3TAT} \\ 8EGA \end{array}$$

Kadangi vienetas iš antro stulpelio į pirmą nepereina, tai $T<5$, t. y. $T=3$ arba $T=4$. Bet tada $E=6$ (neįeina į aibę $\{0,1,2,8\}$, – prieštara) arba $E=8$ (8 jau užimtas, – prieštara). Sprendinių negavome.

Atėjo eilė atvejui $\{J,E,G,A\} = \{0,1,3,7\}$ (tada kitos raidės įgyja reikšmes iš aibės $\{2,4,5,6,8,9\}$). Kadangi $L \geqslant 2$, $S \geqslant 2$, tai $J \geqslant L+S \geqslant 4$, vadinasi, $J=7$.

Todėl $L = 2$ (jei $L \geqslant 4$, tai pagal mūsų susitarimą $S > 4$, ir $L + S > 8$, $J > 8$, – prieštara). Kadangi dabar $A \leqslant 3$, tai į antrą stulpelį vienetas neateina, ir E lyginis, t. y. $E = 0$. Vadinasi, $T = 5$, o $S = 4$:

$$\begin{array}{r} 45AU \\ +\ \underline{25A5} \\ 70GA \end{array}$$

Skaičiams A ir G liko reikšmės $\{1, 3\}$. Bet jeigu $A = 3$, tai iš trečio stulpelio $G \neq 1$, taigi $A = 1$, $G = 3$, o tada $U = 6$:

$$\begin{array}{r} 4516 \\ +\ \underline{2515} \\ 7031 \end{array} \tag{5}$$

Šis sprendinys (taip pat ir jo dvynys – sukeiskite 2 ir 4) įrodo, kad mažiausia galima sumos Σ reikšmė yra 11. Patikrinę likusius aibių atvejus $\{0, 1, 4, 6\}$, $\{0, 2, 3, 6\}$, $\{0, 2, 4, 5\}$, panašiai įsitikinsime, kad daugiau sprendinių (kai $\Sigma = 11$) nėra. Dėl vietos stokos to nebedarome, ir šį malonų užsiėmimą paliekame skaitytojui.

Taigi mes ne tik radome du sprendinius ((5) ir jo dvynį), įrodančius, kad mažiausia sumos $J + \dot{E} + G + A$ reikšmė yra 11, bet ir įrodėme, kad tokių sprendinių daugiau nėra. Panašiai ne tik radome du sprendinius (4), įrodančius, kad didžiausia sumos $J + \dot{E} + G + A$ reikšmė yra 29, bet ir įrodėme, kad tokių sprendinių daugiau nėra.

Literatūra

[1] R. Pukenė. *Matematiko iššūkis: ar įveiksite uždavinį, skirtą aštuntokui*. Adresas internete: http://www.delfi.lt/archive/.article.php?id=69563420.

[2] D. Dzindzalieta. *Aštuntokų uždavinio komentarai*. Rankraštis, 2016.

[3] Adresas internete: https://en.wikipedia.org/wiki/Sudoku.

[4] Adresas internete: https://en.wikipedia.org/wiki/Kakuro.

SUMMARY

A puzzle or mathematical problem?

J.J.Mačys, J.Sušinskas

In the paper it is illustrated by some examples the difference between a mathematical problem, computer problem and puzzle. It is given detailed solution of the mathematical problem considered.

Keywords: puzzle, sudoku, kakuro, mathematical problem, computer problem.