VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATIKOS METODIKOS KATEDRA

Vaida Vasiliauskaitė

Farėjaus sekos

Magistro baigiamasis darbas

Vadovas
doc. Eugenijus Stankus

Turinys

Įvadas

Farėjus (John Farey) 1816 m. apibrėžė seką, kurią sudaro trupmenos tarp nulio ir vieneto, kurių vardikliai neviršija *n*. Ši seka paprastai rašoma didėjančia tvarka. Farėjaus sekos turi daug įdomių savybių.

Šiame darbe pagrindinis dėmesys skiriamas Farėjaus sekų savybėms analizuoti. Kartu atsiskleidžia vis kitokios Farėjaus sekų interpretacijos. Taip prieinama iki Minkovskio teoremos. Darbe išnagrinėti keli šios teoremos įrodymo būdai.

Apskritai matematinių objektų geometrinė interpretacija geriau padeda įsivaizduoti, suvokti juos. Pati paprasčiausia Farėjaus sekų geometrinė interpretacija – jos narių atidėjimas skaičių tiesėje. Įdomesnį būdą, vadinamą Fordo apskritimais, pateikė matematikas Fordas (Lester R. Ford) 1938 m. Į Farėjaus sekas darbe yra pažiūrėta ir pro geometrijos prizmę. Pademonstruotas Farėjaus sekų interpretavimas trikampių viršūnėmis.

Farėjaus sekų nariais gana tiksliai aproksimuojami realieji skaičiai. Darbe paliečiami ir šie klausimai. Pateikti MAPLE algoritmai, kuriais surandama konkrečios eilės Farėjaus sekai priklausanti pirmoji didesnė už įvestą realųjį skaičių trupmena, surandamas artimiausias šiam skaičiui Farėjaus sekos narys. Pateikti ir keletas kitų algoritmų – Farėjaus sekos sudarymo, jos narių skaičiaus radimo bei Fordo apskritimų piešimo.

Štaufas (Heiner Stauff) matematikas ir literatūros mokytojas, yra pasakęs, jog matematika yra graži. Šiuos jo žodžius patvirtina skyrelis „Piešimas Farėjaus sekomis“.

Visa tai galima rasti šiame darbe.

Farėjaus sekų istorija

Farėjaus sekų pavadinimas yra susijęs su John Farey, britų geologo vardu, kurio pranešimas (laiškas) buvo publikuotas *Philosophical Magazine* 1816 metais.

Farėjus numatė, kad kiekvienas narys sekoje yra kaimyninių narių atitinkamai skaitiklių ir vardiklių suma; šį teiginį įrodė Koši (Cauchy) – prancūzų matematikas savo darbe „Exercises de mathematique“ ir rezultatą priskyrė Farėjaus vardui.

Farėjus mokėsi vietinėje Woburn mokykloje iki šešiolikos metų (tuomet jis perėjo į Halifax mokyklą), Yorkshire studijavo matematiką.

Francis, penktasis Bedford kunigaikštis, 1792 m. pasikvietė Farėjų į Woburn dvarą ekonomo pareigas užimti. Šiame poste Farėjus išbuvo apie 10 m. ir tai buvo tas laikas, kuomet jis daugiausia eksperimentavo ir tyrė geologijos srityje.

1801 m. spalio mėn. tame pačiame dvare buvo įdarbintas Wiliam Smith, inžinierius ir geologas, kuris geriausiai buvo žinomas dėl savo atradimų uolienų išsilaikymo srityje (kitaip tariant, kaip laikui bėgant keičiasi uolienos, kaip jos išsilaiko ir pan.).

Farėjus taip pat labai domėjosi dirvožemiu, uolienomis, mokėsi iš W.Smith, derindamas šiuos pomėgius su savo pareigomis dvare.

Su Farėjaus vardu siejami du indėliai į mokslą:

Pirmas geologijos srityje: jis taikė išmoktas iš W.Smith žinias ir atliko tam tikrus svarbius atradimus (jis sudarė žemėlapį dirvožemio viršutinio sluoksnio tarp Londono ir Brightono).

Kitas Farėjaus nuopelnas yra jo moksliniai straipsniai. Jie yra ypač svarbūs, todėl, kad juose jis ginčijosi su svarbia figūra, W.Smith, geologijos pasaulyje, neigė teorijas ir atradimus. Tai buvo laikoma drąsiu poelgiu.

Nuo 1804 iki 1824 Farėjus parašė apie 16 mokslinių straipsnių; daugiausia jų buvo publikuota „Monthly Magazine“ ir „Philosophical Magazine“.

Vienas iš jų mums svarbus, susijęs su matematika, taip pat buvo publikuotas „Philosophical Magazine“ 1816 metais. Jis vadinosi „O*n a curious property of vulgar fractions („Keista paprastųjų trupmenų savybė“).*

Straipsnį sudaro vos kelios pastraipos: pirmojoje Farėjus kalba apie, jog tą „keistą“ trupmenų savybę pastebėjo tuomet, kai nagrinėjo „*Complete decimal quotients (dešimtainių kiekių)*“ lenteles, sudarytas Henry Goodwin. Antroje Farėjus apibrėžia eilutę (taip buvo vadinama seka), turinčią tą „keistą savybę“.

Farėjus šią seką apibrėžia taip:

fiksuotam skaičiui *n* apibrėžiamos trupmenos tarp 0 ir 1, kur kitų, žemesnių nei 1 narių, vardiklis neviršija *n*. Rašome šią seką didėjančia tvarka, pradedant nuo mažiausio. Ta „keistoji savybė" yra, jog kiekvienas sekos nario, tai yra nesuprastinamos trupmenos, skaitiklis ir vardiklis yra lygūs atitinkamai iš abiejų pusių supančių trupmenų skaitiklių ir vardiklių sumai.

O trečiajame paragrafe autorius pateikia pavyzdį, kai $n = 5$:

$$F_5 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}\right\}$$

Taigi, pažiūrėkime, kaip „veikia" toji „keista savybė":

$$\frac{2}{5} \text{ gauname } \frac{2}{5} = \frac{1+1}{3+2}; \ \frac{1}{3} = \frac{1+2}{4+5} \text{ ir t.t.}$$

Paskutiniame paragrafe jis kreipiasi į skaitytoją (manoma, jog tai buvo Koši), kuris, kaip jau buvo paminėta, ir pateikė šiam Farėjaus teiginiui įrodymą tais pačiais metais leidinyje „*Exercises de mathématiques*".

Žinoma, Farėjus nebuvo pirmasis, kuris pastebėjo šią savybę. Net 1802 m. Haros tai buvo padaręs; jis netgi paaiškino, kaip sudaryti tokią seką, kai $n = 99$ ir kaip veikia toji „keista savybė", tačiau anaiptol tai nebuvo įrodymas (kita vertus, pats Farėjus apie tai tikrai nežinojo).

Įvairiai buvo atsiliepiama apie šį Farėjaus straipsnį, tačiau jau taip lėmė istorinės aplinkybės, jog seka, su tokia „keista savybė", buvo priskirta jo vardui.

Farėjaus sekos

Apibrėžimas. Seka vadinama Farėjaus seka F_n, kurios nariai yra tarp 0 ir 1; ir vardiklis neviršija *n*. Taigi $\frac{h}{k} \in F_n$, jeigu $0 \le h \le k \le n$, kur $(h,k)=1$. O skaičiai 0 ir 1 yra įtraukti į seką F_n pavidalu $\frac{0}{1}$ ir $\frac{1}{1}$.

Pavyzdžiui,

$$F_1 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right\};$$

$$F_2 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right\};$$

$$F_3 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\right\};$$

$$F_4 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\right\}$$

$$F_5 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}\right\} \text{ ir t.t.}$$

Pagrindinės Farėjaus sekos savybės:

(1) jeigu $\frac{h}{k}$ ir $\frac{h'}{k'}$ yra gretimos Farėjaus sekos trupmenos, tuomet teisinga tokia lygybė

$$kh' - hk' = 1 \text{ ir}$$

(2) jeigu $\frac{h}{k}$, $\frac{h''}{k''}$ ir $\frac{h'}{k'}$ yra trys gretimos Farėjaus trupmenos, tuomet teisinga:

$$\frac{h''}{k''} = \frac{h+h'}{k+k'}$$

Pastaroji trupmena $\frac{h+h'}{k+k'}$ yra vadinama trupmenų $\frac{h}{k}$ ir $\frac{h'}{k'}$ **mediante**.

Kitais žodžiais tariant, mediantė reiškia, jog turint dvi trupmenas $\frac{h}{k} < \frac{h'}{k'}$, galima tarp jų įterpti trečią, nekeičiant pradinių reikšmių:

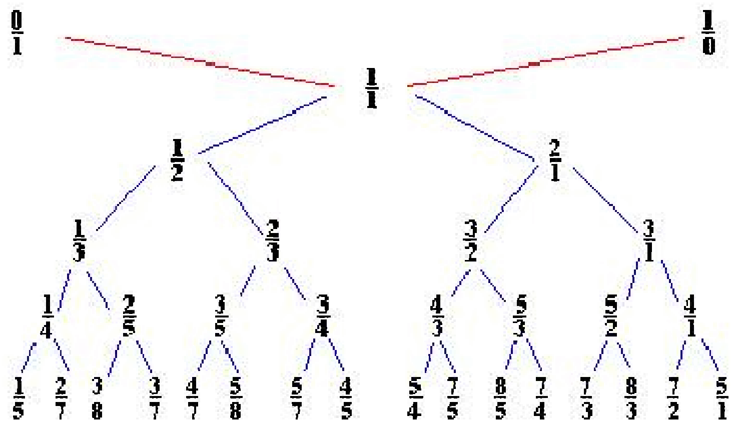
$$\frac{h}{k} < \frac{h''}{k''} < \frac{h'}{k'}.$$

Seka F_n yra užauginama iš F_{n-1}, įterpiant atitinkamą mediantę. Farėjaus sekoje pirmoji ir paskutinioji pradinės trupmenos $\frac{0}{1}$ ir $\frac{1}{1}$, taigi ne visos trupmenos čia gali būti mediantėmis, bet kiekvienas racionalus skaičius tarp 0 ir 1 galų gale auga tiksliai kaip mediantė

Pradedant nuo 0 ($\frac{0}{1}$) ir 1 ($\frac{1}{1}$), pirmiausia įterpiame $\frac{1}{2}$ (gauname F_2 seką); tada mediantės įterpiamos tarp trupmenų $\frac{0}{1}$ ir $\frac{1}{2}$ (mediantė bus lygi $\frac{1}{3}$) ir atitinkamai tarp $\frac{1}{2}$ ir $\frac{1}{1}$ (mediantė bus lygi $\frac{2}{3}$) – taigi gauname Farėjaus seką F_3 (žiūrėti pavyzdžius) ir taip toliau.

Šis procesas duoda trupmenų šeimą, kurią sudaro racionalūs skaičiai tarp 0 ir 1; ir šioje šeimoje po *n* žingsnelių yra $2^n + 1$ skaičių, kuriems galioja pirmoji ir antroji Farėjaus sekų savybės. Visos trupmenos tarp 0 ir 1 yra galų gale įterptos, bet trupmenos su tuo pačiu vardikliu nebuvo įterptos tame pačiame žingsnyje.

Taigi kaip matome piešinyje, iki trečio „aukšto“ yra 9 trupmenos, kaip tik $2^3 + 1 = 9$.



Paveiksle pavaizduotas Stern – Brocot medis (buvo atrastas nepriklausomai Moriz Stern 1858 m. ir Achille Brocot 1860 m.)

Ši duomenų struktūra rodo, kaip seka yra statoma, pradedant (=$\frac{0}{1}$) ir baigiant 1 (=$\frac{1}{1}$), imant kitas iš eilės einančias mediantes – jau žinome, kas tai yra. Taigi čia pavaizduota pati konstravimo eiga ir rezultatai. Farėjaus sekos nariai neviršija 1, tad juos reikia atsirinkti.

Nuostabi Stern – Brocot medžio savybė yra ta, jog jį sudaro visos galimos neneigiamos trupmenos, išreiškiančios žemiausius narius ir jie niekada nepasikartoja.

Priminsime, kad trupmena $\frac{m}{n}$ vadinama žemiausiuoju nariu, jeigu m ir n yra tarpusavyje pirminiai, tai yra BDD(m, n) = 1.

Farėjaus sekų pagrindinių savybių ekvivalentumo įrodymai

Farėjaus sekos savybės (1) ir (2) dažnai formuluojamos ir kaip teoremos. Pabandysime įrodyti, jog šios savybės yra ekvivalenčios. Tik prieš tai dar keletas teiginių:

Teiginys. Jeigu $\frac{h}{k}$ ir $\frac{h^{'}}{k^{'}}$ yra dvi gretimos Farėjaus sekos F_n trupmenos, tai

$$k+k^{'}>n$$

ir šių trupmenų mediantė $\frac{h+h^{'}}{k+k^{'}}$ yra intervale $\left(\frac{h}{k},\frac{h^{'}}{k^{'}}\right)$.

Be to, jei pateiktoji nelygybė yra teisinga, tik tuomet egzistuoja toks sekos narys, kurį galima įterpti tarp duotųjų trupmenų.

Teiginys. Jei $n>1$, tuomet nėra tokių dviejų. gretimų trupmenų, Farėjaus sekoje, jog turėtų tą patį vardiklį,

Jei $k>1$ ir trupmena $\frac{h^{'}}{k^{'}}$ eina po $\frac{h}{k}$ Farėjaus sekoje, tuomet $h+1\le h^{'}<k$. Ir

$$\frac{h}{k}<\frac{h}{k-1}<\frac{h+1}{k}\le\frac{h^{'}}{k}\text{ ir }\frac{h}{k-1}\text{ yra tarp }\frac{h}{k}\text{ ir }\frac{h^{'}}{k^{'}}\ F_n\text{ sekoje.}$$

Dabar parodysime, jog iš pirmos savybės išplaukia antroji ir atvirkščiai.

Taigi pradėkime nuo to, jog iš (1) $\Rightarrow$ (2) savybė:

- jei teigsime, jog (1) savybė yra teisinga, tuomet spręskime lygtis:
  $kh^{''}-hk^{''}=1$ ir $k^{''}h^{'}-h^{''}k^{'}=1$ kiekvienam $h^{''}$ ir $k^{''}$, mes gauname $h^{''}\left(kh^{'}-hk^{'}\right)=h+h^{'}$, $k^{''}\left(kh^{'}-hk^{'}\right)=k+k^{'}$, tai yra gaunama (2) lygybė;
- eikime prie (2) $\Rightarrow$ (1): tarkime, jog dabar (2) lygybė yra teisinga ir kad (1) teiginys yra teisingas F_{n-1} ir padarykime išvadą, jog tai galioja F_n sekai.

Tai būtina įrodyti, kad lygybės $kh^{''}-hk^{''}=1$ ir $k^{''}h^{'}-h^{''}k^{'}=1$ yra teisingos, kai $\frac{h^{''}}{k^{''}}$ priklauso F_n, bet ne F_{n-1}, kai $k^{'''}=n$. Šiuo atveju, iš pateiktų teiginių žinome, jog k ir $k^{'}$ yra mažesni už $k^{''}$ ir $\frac{h}{k}$, $\frac{h^{'}}{k^{'}}$ yra gretimos trupmenos F_{n-1}.

Kadangi $\frac{h^{''}}{k^{''}}=\frac{h+h^{'}}{k+k^{'}}$ yra teisinga pagal mūsų priimtą hipotezę ir $\frac{h^{''}}{k^{''}}$ yra nesuprastinama, mes turime $h+h^{'}=\lambda h^{''}$, $k+k^{'}=\lambda k^{''}$, kur λ yra bet koks sveikasis skaičius. Kai k ir $k^{'}$ yra abu mažesni už $k^{''}$, tuomet λ turi būti 1.

Be to, $h^{''} = h + h^{'}$,

$k^{''} = k + k^{'}$,

$kh^{''} - hk^{''} = kh^{'} - hk^{'} = 1$,

ir panašiai, $k^{''}h^{'} - h^{''}k^{'} = 1$.

Darbe pateikti trys šių savybių ekvivalentumo įrodymai.

Pirmasis savybių ekvivalentumo įrodymas

Padarykime prielaidą: jog (1) ir (2) savybės yra teisingos, kai n = 1 ir kai nagrinėjamosios trupmenos priklauso F_{n-1}. Reikia įrodyti, kad tada jos yra teisingos, kai priklauso F_n. Taigi remsimės matematine indukcija:

Tarkime, jog $\frac{h}{k}$ ir $\frac{h^{'}}{k^{'}}$ yra gretimos trupmenos F_{n-1}, bet nelygios $\frac{h^{''}}{k^{''}}$ Farėjaus sekoje F_n.

Tegu $kh^{''} - hk^{''} = r > 0$ ir $k^{''}h^{'} - h^{''}k^{'} = s > 0$.

Sprendžiant šias lygtis $h^{''}$ ir $k^{''}$ atžvilgiu, prisimenant, kad $kh^{'} - hk^{'} = 1$, mes gauname:

$h^{''} = sh^{'} + rh^{'}$, $k^{''} = sk + rk^{'}$, čia $(r, s) = 1$, kai $(h^{''}, k^{''})$=1.

Apibrėžkime aibę S. Ją sudaro tokios trupmenos:

$\frac{H}{K} = \frac{\mu h + \lambda h^{'}}{\mu k + \lambda k^{'}}$, kur λ, μ yra teigiami sveikieji skaičiai ir tarpusavyje pirminiai.

Taigi, ir trupmena $\frac{h^{''}}{k^{''}} \in S$. Bet kuri trupmena, esanti tarp $\frac{h}{k}$ ir $\frac{h^{'}}{k^{'}}$ ir yra mažiausias narys, todėl kad bendrasis daliklis *H* ir *K* dalinasi iš:

$$k(\mu h + \lambda h^{'}) - h(\mu k + \lambda k^{'}) = \lambda$$
$$h^{'}(\mu k + \lambda k^{'}) - k^{'}(\mu h + \lambda h^{'}) = \mu$$

Tada kiekviena trupmena, priklausanti aibei S anksčiau ar vėliau priklausys Farėjaus sekai F_n. Kai imame μ = 1, λ = 1, ši trupmena bus lygi $\frac{h^{''}}{k^{''}}$, kur $h^{''} = h + h^{'}, k^{''} = k + k^{'}$ - o tai ir įrodo antrąją savybę. Tačiau čia derėtų dar padaryti vieną pastabą: pastarosios lygybės nėra teisingos bet kurioms dviem iš eilės einančioms trupmenoms Farėjaus sekoje, bet, kaip mes parodėme, jos visada yra teisingos, kai centrinė trupmena yra tam tikros išvaizdos.

Antrasis savybių ekvivalentumo įrodymas

Šis įrodymo būdas nėra induktyvus, priešingai nei pirmasis, ir, be to, pateikia algoritmą, kaip konstruojamas sekantis narys po $\frac{h}{k}$ Farėjaus sekoje.

Kai $(h,k)=1$, lygtis $kx - hy = 1$ yra išsprendžiama sveikas skaičiais.

Priminimas:
lygtis $ax + by = n$ yra išsprendžiama sveikais skaičiais x ir y tada ir tik tada, kai d dalina n.

Jeigu x_0 ir y_0 yra sprendinys, tai $x_0 + rh$, $y_0 + rk$ taip pat yra sprendinys bet kuriam realiajam skaičiui r.

Mes taip pat galime taip parinkti r, kad:

$$nk < y_0 + rk \leq n.$$

Todėl lygties $kx - hy = 1$ sprendinys (x,y) yra toks, kad: $0 \leq n - k < y \leq n$.

Kai trupmena $\frac{x}{y}$ yra mažiausias narys ir $y \leq n$ ir, žinant, jog trupmena $\frac{x}{y}$ yra Farėjaus trupmena.

Taip pat

$$\frac{x}{y} = \frac{h}{k} + \frac{1}{ky} > \frac{h}{k},$$

trupmena $\frac{x}{y}$ eina po $\frac{h}{k}$ Farėjaus sekoje F_n, jei tai nėra $\frac{h'}{k'}$ trupmena, tuomet ji yra po $\frac{h'}{k'}$ ir

$$\frac{x}{y} - \frac{h'}{k'} = \frac{k'x - h'y}{k'y} \geq \frac{1}{k'y},$$

kol

$$\frac{h'}{k'} - \frac{h}{k} = \frac{kh' - hk'}{kk'} \geq \frac{1}{kk'}.$$

Be to,

$$\frac{x}{y} - \frac{h}{k} = \frac{kx - hy}{ky} \geq \frac{1}{k'y} + \frac{1}{kk'} = \frac{k+y}{kk'y} > \frac{n}{kk'y} \geq \frac{1}{ky},$$

taigi gavome prieštarą. Todėl $\frac{x}{y}$ turi būti lygi $\frac{h'}{k'}$ ir yra teisinga nagrinėjamoji lygybė $kh' - hk' = 1$.

Šis įrodymo būdas iš esmės pateikia algoritmą Farėjaus sekos nariui einančio po $\frac{h}{k}$ rasti.

Pabandykime panagrinėti pavyzdį:

Pavyzdys

Reikia surasti F_{13} sekoje sekantį narį po $\frac{4}{9}$.

Sudarome ir sprendžiame tokią lygtį (remiantis ką tik pateiktu įrodymu):

$$9x - 4y = 1.$$

Gautą sprendinį pažymėkime (x_0;y_0), tai yra: x_0 = 1; y_0 = 2.

Sudarome bendro pavidalo sprendinius, tai

$$\begin{cases} x = x_0 + hr = 1 + 4r, \\ y = y_0 + kr = 2 + 9r. \end{cases}$$

Pagal duotą apribojimą: $0 \leq n - k < y \leq n$, gauname, jog reikia rasti tokį r, jog y būtų tarp 13 – 9 = 4 ir 13.

Toks yra, jis r = 1.

Grįžtame į anksčiau pateiktas x ir y išraiškas, gauname, jog:

$$\begin{cases} x = 1 + 4 \cdot 1 = 5, \\ y = 2 + 9 \cdot 1 = 11. \end{cases}$$

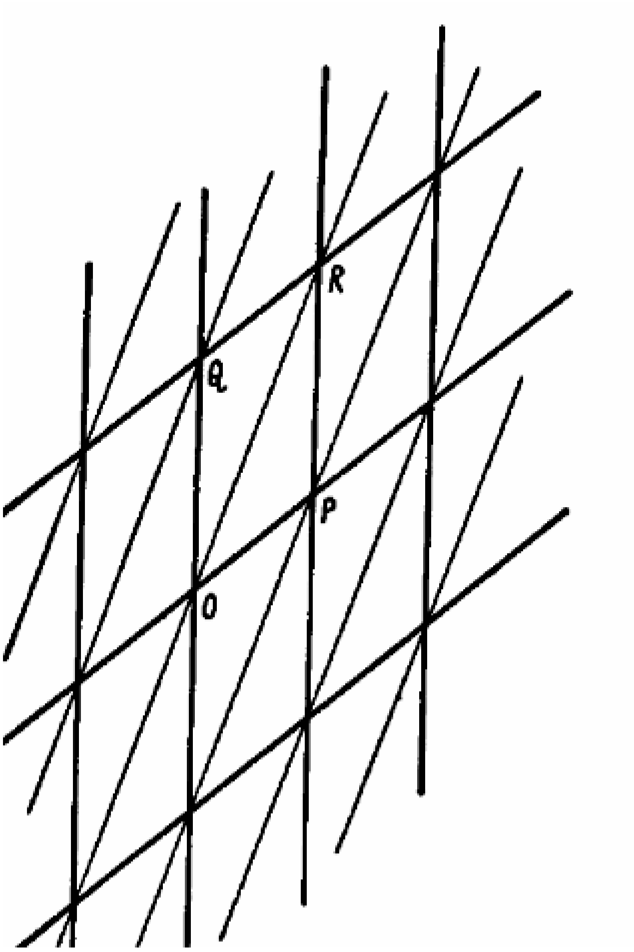
Tada ieškomoji trupmena yra $\frac{5}{11}$, kuri eina po $\frac{4}{9}$.

Grotelės

Įrodinėjant, jog lygybės $kh' - hk' = 1$ ir $\frac{h''}{k''} = \frac{h+h'}{k+k'}$ yra ekvivalenčios, trečiajame įrodyme bus reikalingos keletas geometrinių idėjų.

Imkime duotą koordinačių pradžios tašką O plokštumoje ir du kitus taškus P ir Q, nekolinearius su tašku O. Tokiu būdu mes sudarome lygiagretainį $OPQR$ taip, kad tiesių poros OP, QR ir PQ, PR yra lygiagrečios ir dalija plokštumą į be galo didelį skaičių lygių lygiagretainių. Tokia figūra bus vadinama „grotelėmis“ (angl. „lattice“).

Grotelės yra figūra sudaryta iš tiesių, o kartu apibrėžia taškų aibę; fiksuojant tik tuos taškus gaunama kitą sistemą „taškų groteles“. Dvi skirtingos grotelės gali apimti tą pačią taškų sistemą.



Grotelės, padėtos ant tiesių *OP*, *OQ* ir *OP*, *OR* apibrėžia tą pačią taškų sistemą. Tokios dvi tokios grotelės, kurios apibrėžia tą pačią taškų sistemą, vadinamos ekvivalenčiomis.

Akivaizdu, kad bet kuris iš grotelių taškų gali būti paimtas kaip koordinačių pradžia *O* ir nuo to nuo taško parinkimo priklauso grotelių savybės, nes keičiasi simetrija koordinačių pradžios atžvilgiu.

Vienas grotelių tipas yra labai svarbus, kalbant apie Ferėjaus sekų savybių įrodymą. Tai grotelės suformuotos (kai koordinačių ašys yra duotos) imant tieses, lygiagrečias koordinačių ašims ir atstumai nuo jų yra vienetiniai – tokiu būdu visa plokštuma yra padalinama į vienetinius kvadratus. Tokias groteles vadinsime „fundamentaliosiomis grotelėmis“ *L* ir taškus, ant kurių „užtemptos“ nagrinėjamosios grotelės, pažymėkime *(x,y)*. Tokią sistemą su taškais vadinsime „fundamentaliosios taškų grotelės *A*“.

Bet kokios „taškų grotelės“ gali būti apibrėžtos kaip vektorių sistema, kurių koordinatės yra $x + iy$ (tai yra ir „grotelių taškai“) arba tai gali būti ir vektorių koordinatės, pradedant nuo koordinačių pradžios. Jeigu taškų *P* ir *Q* koordinatės atitinkamai yra (x_1, y_1) ir (x_2, y_2) tuomet bet kokio kito grotelių taško *S*, esančio po tiesėmis *OP* ir *OQ* yra:

$x = m\,x_1 + n\,x_2$, $y = m\,y_1 + n\,y_2$, čia m ir n yra sveikieji skaičiai.

(atitinkamai tokiu pačiu būdu gali būti sudaryta ir z – oji koordinatė).

Keletą svarbiausių fundamentaliųjų grotelių savybių, reikalingų įrodymui, panagrinėkime: mes jau apibrėžėme transformaciją:

$$x' = ax + by,\quad y' = cx + dy; \qquad \mathbf{(3)}$$

čia a, b, c, d - duoti teigiami ar neigiami sveikieji skaičiai. Akivaizdu, kad bet kurį A tašką (x,y) gali būti transformuotas į kitą tašką (x', y'), priklausantį A.

Sprendžiant (3) x ir y atžvilgiu, gauname:

$$x = \frac{dx' - by'}{ad - bc}, \quad y = -\frac{cx' - ay'}{ad - bc} \qquad \mathbf{(4)}$$

Jeigu $A = ad - bc = \mathbf{1}$ (vienetinis elementas)**,** tada bet kuri x' ir y' duoda x ir y reikšmes, tai yra kiekvieną „grotelių“ tašką (x', y') atvaizduoja į (x,y) – į save patį.

Taigi būtina ir pakankama sąlyga, kad (3) transformacija atvaizduotų A į pačią save, yra A = **1** (vienetinis elementas).

Tarkime, kad taškai P ir Q yra grotelių taškai (a, c) ir (b, d). Tuomet lygiagretainio plotas, apibrėžtas OP ir OQ yra:

$$\delta = \pm(ad - bc) = |ad - bc|,$$

ženklas pasirenkamas toks, kad skirtumas būtų teigiamas. Taškai (x', y') išsidėstę po OP ir OQ aprašomi $x' = ax + by$ ir $y' = cx + dy$, kur x ir y – sveikieji skaičiai. Prisiminus šį teiginį, būtina ir pakankama sąlyga, jog A' ir A butų identiški (tai yra sutaptų), yra $\delta = 1$.

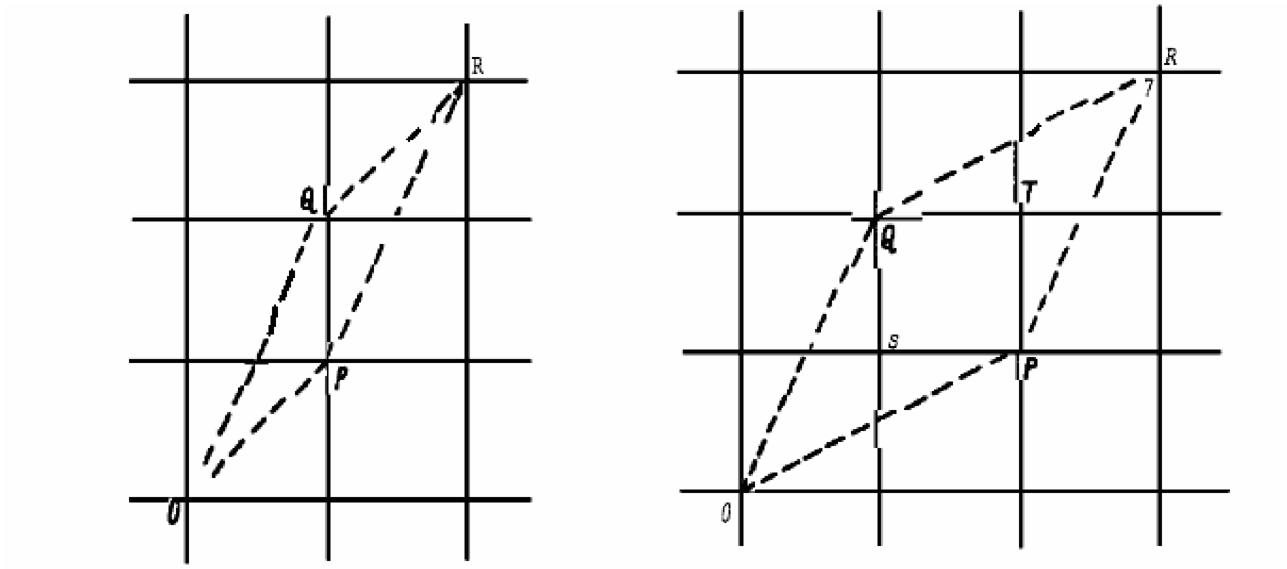
Apibrėžkime dar vieną reikalingą sąvoką:

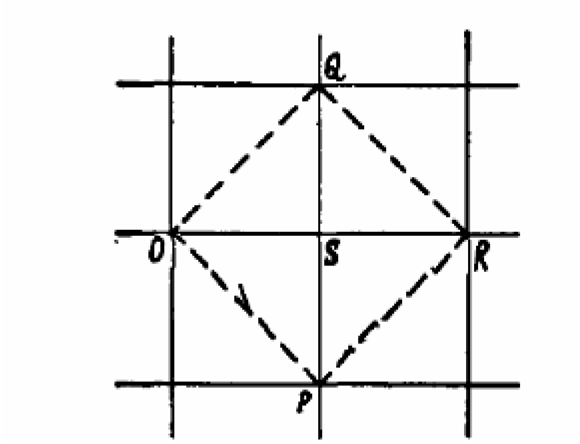
Apibrėžimas. Tašką P vadiname matomu (matomu iš koordinačių pradžios), jeigu nėra nė vieno A taško ant tiesės OP tarp O ir P.

Galima pasakyti, jeigu taškas (x, y) yra matomas, tuomet būtiną ir pakankamą sąlygą galima performuluoti: jog trupmena $\frac{x}{y}$ yra žemiausias narys, arba $(x,y) = 1$.

Tarkime, kad taškai P ir Q yra matomi taškai ir δ yra keturkampio J, apibrėžto OP ir OQ, plotas.

Tuomet jeigu $\delta = 1$, nėra nė vieno taško keturkampio J viduje; jeigu $\delta > 1$, tuomet mažiausiai vienas taškas yra keturkampio J viduje (du tokie taškai yra kiekviename keturkampio trikampyje, kurie gaunami keturkampį perkirtus PQ). Šie atvejai parodyti paveiksluose:





Trečiasis savybių ekvivalentumo įrodymas

Trupmenos $\frac{h}{k}$ yra Farėjaus sekos nariai, kur $0 \leq h \leq k \leq n$, $(h, k) = 1$. Ir tegu tai yra matomo taško (k, h) koordinatės; jis yra A viduje arba ant trikampio, apibrėžto tiesėmis $y = 0$, $y = x$, $y = n$. Jeigu mes nubrėšime spindulį per tašką 0 ir suksime jį aplink apie koordinačių pradžią pagal laikrodžio rodyklės kryptį aplink Ox ašį, tokiu būdu aplankysime kiekvieną tašką (k, h) (kaip žinome, tai yra Farėjaus sekos trupmena). Jeigu taškai P ir P' su koordinatėmis (k, h) ir (k', h') žymi iš eilės einančias Farėjaus sekos trupmenas, tuomet nėra tokio taško trikampio OPP' viduje arba ant jungties PP', tai yra remiantis minėtais teiginiais, gauname: $kh' - hk' = 1$.

Aproksimavimas Farėjaus sekomis

Farėjaus trupmenos gali būti vaizduojamos tiesėje, apskritime**.** Imkime vienetinio ilgio apskritimą C ir fiksuokime tašką P_x, kurio atstumas nuo nulio yra *x*. Padalinkime apskritimo *C* perimetrą šiuo būdu: imkime Farėjaus seką F_n ir surandame visas mediantes $\mu = \frac{h+h'}{k+k'}$ greta einančių trupmenų $\frac{h}{k}, \frac{h'}{k'}$. Pirmoji ir paskutinė mediantės yra $\frac{0+1}{1+n} = \frac{1}{n+1}$, $\frac{n-1+1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$. Kaip žinome, ne visos mediantės priklauso nagrinėjamai F_n sekai. Dabar kiekvieną tokią mediantę μ atvaizduokime tašku P_μ. Apskritimas, kuris taip dalinamas į lankus, vadinamus Farėjaus arkomis, apima du tokius taškus P_μ ir vieną Farėjaus tašką, kuris yra sekos F_n narys. Vadinasi, $\left(\frac{n}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right)$ yra Farėjaus arka, apimanti vieną Farėjaus tašką 0. Farėjaus arkų sankaupą kartais dar vadinama Farėjaus apskritimo analize.

Tarkime, jog $n. > 1$, jeigu $P_{\frac{h}{k}}$ yra Farėjaus taškas ir $\frac{h_1}{k_1}, \frac{h_2}{k_2}$ yra Farėjaus sekos F_n trupmenos, einančios prieš $\frac{h}{k}$, tuomet Farėjaus arka supanti $P_{\frac{h}{k}}$ yra sudaryta iš dviejų dalių, kurių ilgiai yra:

$$\frac{h}{k} - \frac{h+h_1}{k+k_1} = \frac{1}{k(k+k_1)}, \qquad \frac{h+h_2}{k+k_2} - \frac{h}{k} = \frac{1}{k(k+k_2)} \text{ atitinkamai.}$$

Dabar $k + k_1 > 2n$, kai *k* nelygus k_1 ir ne didesni už *n*. Taigi gauname: *n* – osios eilės Farėjaus analizė, kur *n > 1*, kiekvienos arkos dalies , kuri apima trupmeną $\frac{h}{k}$, ilgis yra $\frac{1}{k(2n-1)}, \frac{1}{k(n+1)}$.

Mes apibrėžiame Farėjaus analizę čia tam , kad įrodyti paprastą teoremą, susijusią su realiųjų skaičių aproksimakcija racionaliaisiais skaičiais.

„Įverčio“ teorema. Jeigu ξ yra bet koks realusis skaičius ir *n* yra teigiamas sveikasis, tuomet egzistuoja tokia nesumažinama trupmena $\frac{h}{k}$, jog teisinga:

$$0 < k \le n, \qquad \left|\xi - \frac{h}{k}\right| \le \frac{1}{k(n+1)}, \text{ kai } 0 < \xi < 1.$$

Tada ξ yra intervale, kurį riboja dvi iš eilės einančios Farėjaus sekos trupmenos, $\frac{h}{k}$ ir $\frac{h'}{k'}$, ir maža to, ši reikšmė yra viename iš intervalų:

$$\left(\frac{h}{k}, \frac{h+h'}{k+k'}\right), \quad \left(\frac{h+h'}{k+k'}, \frac{h'}{k'}\right).$$

Įrodymas. Trupmenos $\frac{h}{k}$ ir $\frac{h'}{k'}$ yra gretimos, priklausančios Farėjaus sekai ir pasirinktasis skaičius ξ yra tarp šių trupmenų, tai yra $\frac{h}{k} < \xi < \frac{h'}{k'}$.

Remiantis Farėjaus sekai būdingomis savybėmis ir teorema, galima parašyti: $kh' - hk' = 1$ ir $kh' - hk' \geq n+1$. Sudarykime trupmenų mediantę $\frac{h''}{k''} = \frac{h+h'}{k+k'}$

Taigi mūsų pasirinktas skaičius ξ gali būti:

- $\frac{h}{k} < \xi < \frac{h+h'}{k+k'}$, tuomet nagrinėkime skirtumą

$$0 < \xi - \frac{h}{k} < \frac{h+h'}{k+k'} - \frac{h}{k} = \frac{kh' - hk'}{k(k+k')} = \frac{1}{k(k+k')} \leq \frac{1}{k(n+1)}.$$

- $\frac{h+h'}{k+k'} < \xi < \frac{h'}{k'}$, tada

$$\frac{h'}{k'} - \xi = \frac{h'}{k'} - \frac{h+h'}{k+k'} = \frac{kh' - hk'}{k'(k+k')} = \frac{1}{k'(k+k')} \leq \frac{1}{k(n+1)}.$$

Minkovskio teorema ir jos įrodymai

Jei P ir Q yra grotelių taškai ir atitinkamai turime du jiems simetriškus nulio atžvilgiu taškus P' ir Q' - tokiu būdu konstruojamas keturkampis *J*; trys keturkampiai yra sukonstruoti ant tiesių OQ, OP'; OP', OQ' ir ant OQ', OP – taip gaunamas naujas keturkampis. Pavadinkime jį *K*, kurio centras yra koordinačių pradžios taškas ir kurio plotas yra 4δ (kitaip tariant, keturis kartus didesnis nei pradinis; šiuo atveju *J*).

Prisiminus anksčiau minėtus faktus, galime pasakyti, jog jei δ reikšmė yra 1, tuomet yra taškų arba išorėje, arba ant keturkampio *K* krašto, išskyrus tašką 0; jeigu $\delta > 1$, tuomet yra ir kitų taškų apart nulį keturkampio viduje. Tai yra žymiosios Minkovskio teoremos atvejis, kuris parodo, kad ta pati savybė galioja ne tik keturkampiams, simetriškiems koordinačių pradžiai, bet ir bet kuriai uždarai sričiai, simetriškai koordinačių pradžiai.

Atviroji sritis *R* yra tokia taškų aibė, kuri turi tokias savybes:

(1) jeigu taškas *P* priklauso aibei *R*, tuomet visi tos aibės taškai, esantys arti prie taško *P*, taip pat priklauso aibei *R*;

(2) bet kuriuos du tos aibės taškus galima sujungti kreive, priklausančia tai aibei.

Pirmąją savybę galima performuluoti taip, jog bet kuris aibės *R* taškas yra vidinis taškas (tai yra tai aibei priklauso su savo aplinka). Tuomet apskritimo ar keturkampio vidus vadinama atvirąja sritimi.

Srities kraštas *C* yra tokia taškų aibė, kur taškų aplinka priklauso aibei *R*, bet pats taškas jau nebepriklauso tai aibei. Taigi apskritimo kraštas yra jo perimetras.

Uždaroji sritis R^* atviroji sritis su savo kraštu. Mes nagrinėjami tik uždaras sritis.

Pateiksime du iškilųjų aibių apibrėžimus.

Mes galime sakyti, kad aibė *R* (arba R^*) yra **iškiloji aibė**, jeigu bet kokius du taškus jungianti kreivė taip pat priklauso tai aibei.

Antrasis: *R* (arba R^*) yra **iškiloji**, jeigu per kiekvieną tašką galima nubrėžti bent vieną tiesę taip, kad visa ta aibė būtų tik vienoje pusėje.

Taigi apskritimas ir lygiagretainis yra iškilosios aibės.

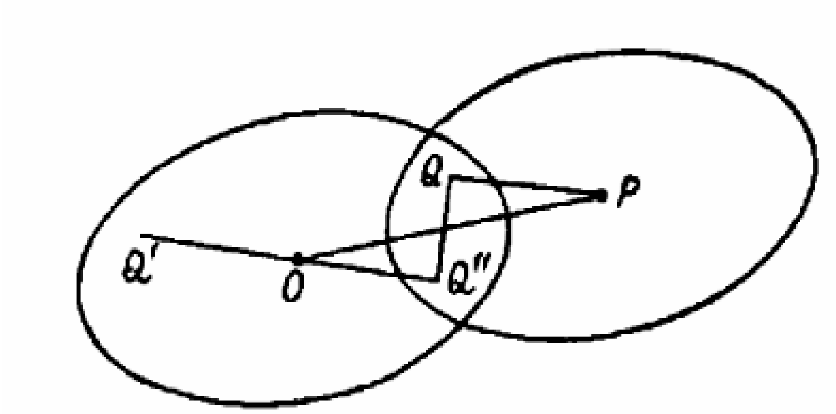
Minkovskio teorema. Tegu $R \subset A$ iškiloji sritis su simetrijos centru taške 0 ir kurios plotas yra didesnis už 4. Tuomet srityje *R* yra bent vienas aibės *A* taškas, nesutampantis su 0.

Pirmiausia paminėsime įrodymui reikalingą teiginį: tarkime, jog R_0 atvira sritis, turinti nulio tašką; R_p yra kongruenti ir panašiai išsidėsčiusi apie bet kokį tašką *P* taip, kad nėra tokių dviejų sričių R_p, kurios persidengia. Tuomet srities R_0 plotas ne didesni nei 1. Teiginys tampa akivaizdus, kai mes apibrėžiame sritį R_0 kaip apskritimą ir apribotą linijomis $x = \pm\frac{1}{2}$, $y = \pm\frac{1}{2}$, tada R_0 plotas bus 1 ir R_p su savo sienomis uždengs visą plokštumą.

Taigi dabar yra lengva įrodyti pačią Minkovskio teoremą. Galimi du Minkovskio teoremos įrodymai, remiantis skirtingais dviem aibės išgaubtumo apibrėžimais.

Pirmas Minkovskio teoremos įrodymas

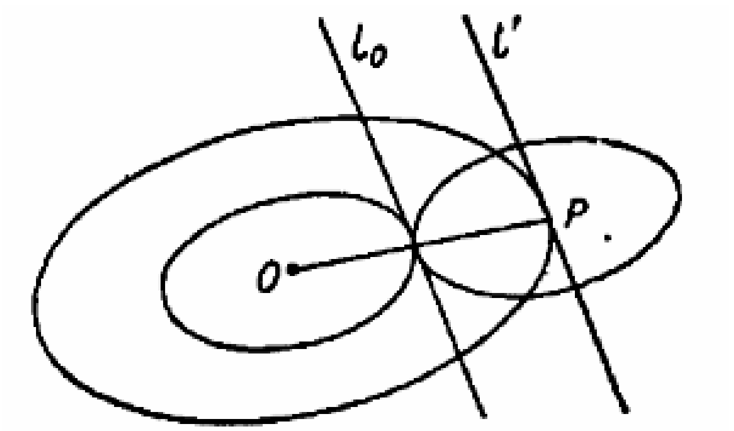
Remiantis pirmuoju apibrėžimu: tarkime, kad srities plotas R_0 yra didesnis nei 1. tuomet du regionai R_p persidengia (pagal prieš tai pateiktą teiginį) ir yra tokie taškai P, priklausantys sričių R_0 ir R_p persidengimui. Tegu Q (žiūrėti brėžinį) yra bendras R_0 ir R_p taškas.



Jeigu $OQ^{'}$ yra lygi ir lygiagreti PQ ir $Q^{''}$ yra vaizdas taško $Q^{'}$ nulio atžvilgiu, tuomet $Q^{''}$ guli srityje R_0; ir maža to, pagal iškilosios aibės apibrėžimą, atkarpos $QQ^{''}$ vidurio taškas taip pat guli srityje R_0, bet šis taškas yra ir OP vidurio taškas, kur P, kaip žinome, guli srityje R_p.

Antrasis Minkovskio teoremos įrodymas

Prisiminus antrąjį iškilosios aibės apibrėžimą, tarkime, jog nėra nė vieno grotelių skaičiaus išskyrus nulį. Tuomet praplėskime aibę apie nulio tašką ir pavadinkime R^{*}. O $R^{'*}$ pavadinkime praplėstą aibę, bet joje dar yra be nulio taško ir grotelių taškas P.
Žiūrėti paveiksle:



Tada taškas P yra apskritimo $C^{'}$ taškas ir tiesė $l^{'}$, einant per tašką P, l_0 yra lygiagreti tiesei $l^{'}$, einanti per atkarpos OP vidurio tašką, tada l_0 yra R_0. Akivaizdu, jog l priklauso ir R_p sričiai; ir ši tiesė skiria abi tas sritis (jos yra skirtingose šios tiesės pusėse), vadinasi, R_0 ir R_p nepersidengia. Ir, kaip žinome, srities R_0 plotas yra didesnis nei 1, o tai jau prieštarauja paskutiniam paminėtam teiginiui.

Taigi įrodėme Minkovskio teoremą.

Yra žinoma ir kitų šios teoremos įrodymų būdų, pavyzdžiui, Mordelio.

Minkovskio teoremos įrodymas pagal Mordelį

Tarkime, jog R yra išgaubta sritis, simetriška nulio atžvilgiu ir turime šios aibės taškus P_1 ir P_2 su koordinatėmis (x_1, y_1) ir (x_2, y_2), tada taškas $(-x_2, -y_2)$ taip pat priklauso šiai sričiai, bei taškas M, kurio koordinatės $\frac{1}{2}(x_1 - x_2)$ ir $\frac{1}{2}(y_1 - y_2)$.

Tada tiesės $x = \frac{2p}{t}$, $y = \frac{2q}{t}$, kur t yra teigiamas fiksuotas skaičius, p, q – bet kokie skaičiai, dalinantys plokštumą į kvadratus, kurių plotas yra $\frac{4pq}{t^2}$ (nes kraštinės yra $\frac{2p}{t}$ ir $\frac{2q}{t}$). Tegu $N(t)$ yra kampų skaičius R ir pažymėkime raide A šios srities plotą. Tuomet akivaizdu, jog $4pqt^{-2}N(t) \to A$, kai $t \to \infty$.

Jeigu $A > 4$, tada $N(t) > t^2$ bet kokiems dideliems t.

Bet poros (p, q) duoda daugiausia skirtingų t^2 reikšmių, kai p ir q yra dalinami t. Maža to, minėtieji du taškai P_1 ir P_2, priklausantys R su koordinatėmis $(\frac{2p_1}{t}, \frac{2q_1}{t})$ ir $(\frac{2p_2}{t}, \frac{2q_2}{t})$ tokie kad skirtumai $p_1 - p_2$ ir $q_1 - q_2$ besidalijantys iš t. Be to, taškas M priklausantis R yra ir nagrinėjamame plote A.

Mediantės ir trikampiai

Buvo apibrėžta, kas yra laikoma Farėjaus seka, kokios yra šios sekos savybės. Vieną iš jų prisiminsime čia ir pabandysime pažiūrėti, kaip tai galėtų būti susiję su geometrinėmis idėjomis.

Taigi kaip žinome: jeigu $\frac{h}{k}$, $\frac{h''}{k''}$ ir $\frac{h'}{k'}$ yra trys gretimos Farėjaus trupmenos, tuomet teisinga:

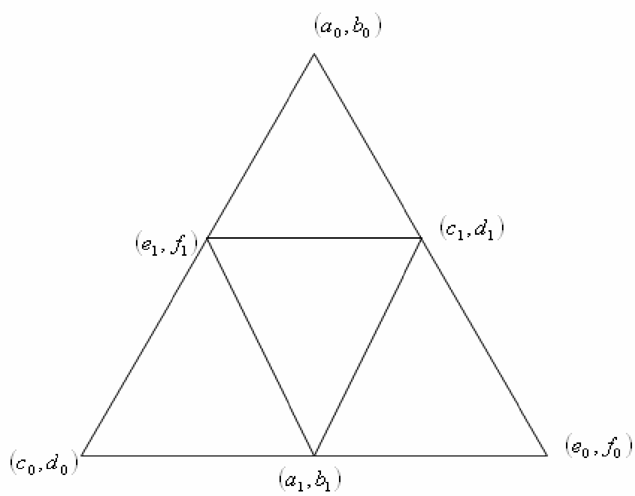
$$\frac{h''}{k''} = \frac{h+h'}{k+k'}$$

Pastaroji trupmena yra vadinama trupmenų $\frac{h}{k}$ ir $\frac{h'}{k'}$ **mediante**.

Taigi mediantė gali būti įterpta tarp bet kokių dviejų nesumažinamų trupmenų. Minėta ir tai, jog F_{n-1} yra užauginama iš F_n, taigi bet koks racionalusis skaičius tarp 0 ir 1 yra auginamas būtent kaip mediantė. Taigi visa tai jau buvo kalbėta pirmuose šio darbo pirmuose puslapiuose. Tai tik trumpas priminimas.

Šis skyrelis bus taip pat apie jas, tačiau kiek kitokiu aspektu: Farėjaus trupmenas laikysime trikampio viršūnėmis ir konstruosime mediantes taip, jog yra žinoma tik dviejų taškų koordinatės vienu momentu. Ir mediantę įterpsime tarp tų dviejų taškų; atitinkamai jas sujungus, gausime naują trikampį.

Sutvarkytomis poromis (a_0,b_0), (c_0,d_0), (e_0,f_0) žymėsime trikampio viršūnes; mūsų tikslas įterpti mediantes – taip bus gaunami naujo trikampio viršūnės.



Naudojantis tokia konstrukcija, galima padaryti tokią išvadą:

Teiginys. Tegu (a_0, b_0), (c_0, d_0), (e_0, f_0) yra sutvarkytos poros. Tuomet apibrėžkime sekas:

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) = (c_n + e_n, d_n + f_n)$$
$$(c_{n+1}, d_{n+1}) = (a_n + e_n, b_n + f_n)$$
$$(e_{n+1}, f_{n+1}) = (a_n + c_n, b_n + d_n).$$

Tuomet $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{c_n}{d_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{e_n}{f_n}\right) = \frac{(a_0 + c_0 + e_0)}{(b_0 + d_0 + f_0)}.$$

Įrodymas. Pasinaudokime simetrija tarp taškų koordinačių $\{(a_n, b_n)\}$, $\{(c_n, d_n)\}$ ir $\{(e_n, f_n)\}$. Pastebėkime, jog pirmosios a_n reikšmės, parašytos per a_0, c_0, e_0 atrodo taip:

$$a_0 = a_0$$
$$a_1 = c_0 + e_0$$
$$a_2 = 2a_0 + c_0 + e_0$$
$$a_3 = 2a_0 + 3c_0 + 3e_0$$
$$a_4 = 6a_0 + 5c_0 + 5e_0$$
$$a_5 = 10a_0 + 11c_0 + 11e_0 \text{ ir taip toliau.}$$

Gauname bendrą pavidalą:

$$a_n = x_n a_0 + y_n c_0 + z_n e_0,$$

kai imame $x_0 = 1, y_0 = z_0 = 0$, gauname

$$x_{n+1} = 2\left(x_n + (-1)^{n+1}\right),$$
$$y_{n+1} = 2y_n + (-1)^n,$$
$$z_{n+1} = 2x_n + (-1)^n.$$

Taigi $y_n = z_n$ kiekvienam n, tuomet visos trys išraiškos x_n, y_n ir z_n, artinant *n* prie begalybės, ir $x_n = y_n + (-1)^{n+1}$. Šie faktai yra pakankami, jog galėtume teigtu, kad: $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = 1$.

Pasinaudojus simetrijos savybe, tas pats galioja ir kitiems koeficientams b_0, d_0, f_0 ir koeficientų perstatymas leidžia mums parašyti:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(x_n a_0+y_n c_0+z_n e_0\right)}{\left(x_n b_0+y_n d_0+z_n f_0\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\left(\frac{x_n}{y_n}\right)a_0+c_0+e_0\right)}{\left(\left(\frac{x_n}{y_n}\right)b_0+d_0+f_0\right)}=\frac{\left(a_0+c_0+e_0\right)}{\left(b_0+d_0+f_0\right)},$$ primename, jog

čia $z_n = y_n$.

Kaip matome tokiu būdu šių trupmenų reikšmė nuolat mažėja, todėl yra natūralus klausimas, ar yra kokia savybė, kuri trupmenas paliktų nesumažinamas?

Tam tikri pradinių trupmenų savybių pasirinkimai garantuoja, kad visos trupmenos trikampiuose išliks nesumažinamos.

Pirmiausia pradėkime nuo būtinos ir pakankamos nesumažinamumo sąlygos:

Teorema. Duotos pradinės trupmenos $\frac{a_0}{b_0}$, $\frac{c_0}{d_0}$ ir $\frac{e_0}{f_0}$, tuomet apibrėškime $\frac{a_1}{b_1}=\frac{c_0+e_0}{d_0+f_0}$, $\frac{u}{v}=\frac{a_0+a_1}{b_0+b_1}$ ir $\frac{a_{i+1}}{b_{i+1}}=\frac{2y_{i-1}a_0+y_i a_1}{2y_{i-1}b_0+y_i b_1}$, kur $y_0=0$, $y_1=1$ ir $y_{i+1}=y_i+2y_{i-1}$ kiekvienam $i\ge 1$.

Tada galime parašyti:

$$\frac{a_{i+1}}{b_{i+1}}=\frac{ua_{i+1}}{va_{i+1}+r_{i-1}}. \qquad (*)$$

Tada $r_{i+1}=\left(-1\right)^i(a_1b_0-a_0b_1)$ ir vienintelis galimas bendras a_{i+1} ir b_{i+1} pirminis daugiklis *p*, toks, kuris dalinasi iš $u(a_1b_0-a_0b_1)$. Dar daugiau sekos $\{a_i\}$ ir $\{b_i\}$ moduliu *p* yra periodinės, taigi tik baigtinį skaičių narių reikia palyginti, norint nuspręsti, ar bendras *p* daugiklis egzistuoja.

Teoremos įrodymas. Iš $\frac{a_{i+1}}{b_{i+1}}=\frac{ua_{i+1}}{va_{i+1}+r_{i-1}}$, gauname $va_{i+1}+r_{i+1}=ub_{i+1}$, ši lygybė sako:

$$(b_0+b_1)(2y_{i-1}a_0+y_ia_1)+r_{i+1}=(a_0+a_1)(2y_{i-1}b_0+y_ib_1).$$

Be to, $r_{i+1}=(2y_{i-1}-y_i)(a_1b_0-a_0b_1)$, bet $y_i=2y_{i-1}-(-1)^i$, tada galime parašyti, jog $r_{i+1}=(-1)^i(a_1b_0-a_0b_1)$.

Tarkime, jog trupmena $\frac{a_{i+1}}{b_{i+1}}$ yra sumažinama. Pirminis skaičius *p*, dalinantis lygybės (*) dešiniosios pusės skaitiklį ir vardiklį Reiškinys $\frac{ua_{i+1}}{va_{i+1}+r_{i+1}}$, turi dalinti arba *u*, arba a_{i+1} - tai akivaizdu. Tokių *p*, dalinančių *u*, skaičius yra baigtinis. Jeigu *p* dalina a_{i+1}, tuomet jis turi dalinti $r_{i+1}=\pm(a_1b_0-a_0b_1)$ - taigi ir vėl gaunamas baigtinis skaičius daliklių.

Periodiškumas išplaukia iš to, jog a_{i+1} priklauso tik nuo y_i ir y_{i-1}, o y_{i+1} priklauso tik nuo y_i ir y_{i-1}, tuomet daugiausia yra p^2 skirtingų (y_i, y_{i-1}) porų, nesikartojančių moduliu *p*.

Išvada. Duotos pradinės trupmenos $\frac{a_0}{b_0}$, $\frac{c_0}{d_0}$ ir $\frac{e_0}{f_0}$, apibrėžkime $u = a_0 + c_0 + e_0$, $r = (c_0 + e_0)b_0 - a_0(d_0 + f_0)$, $s = (a_0 + e_0)d_0 - c_0(b_0 + f_0)$ ir $t = (a_0 + c_0)f_0 - e_0(b_0 + d_0)$. Tuomet bet kokios trupmenos centriniame trikampyje turi turėti bendrą *rstu* sandaugos daliklį.

Teiginys. Nėra baigtinio skaičiaus būdų pasirinkti taip pradines trupmenas, kad iš centrinio trikampio auginant kitus trikampius, trupmenos būtų nesumažinamos.

Įrodymas. Jei trikampio viršūnių koordinates pirmiausia paimsime tokias: nelyginės/nelyginės, nelyginės/lyginės, lyginės/nelyginės – ši struktūra išliks ir kituose potrikampiuose. Taigi mes galime teigti, jog nė viena koordinačių pora nebus lyginė/lyginė (nes nagrinėjame tik nesupaprastinamas trupmenas). Tai reiškia, jog tikrai yra nesumažinamumo savybė (tai taip pat išplaukia ir iš prieš tai pateiktos išvados).

Prisiminkime tai, jog auginant trupmenų seką, įterpiant mediantes, trupmenų skaičius priklausė nuo *n*. Trupmenos gali būti pasirinktos taip, kad *r*, *s*, *t* ir *u* yra antro laipsnio. Yra daugybė būdų tai padaryti, pavyzdžiui vienas iš galimų:

$$\frac{a_0}{b_0} = \frac{2^k - 1}{2^k},$$

$$\frac{c_0}{d_0} = \frac{2^k + 2}{2^k + 3},$$

$$\frac{e_0}{f_0} = \frac{2^{k+1} - 1}{2^{k+1} + 1},$$

Tuomet ribinės reikšmė yra $\frac{2^k}{2^k + 1}$, $r = -4$, $s = 8$, $t = -4$. Taigi akivaizdu, jog kiekvienam *k* gali būti be galo daug kitokių trupmenų.

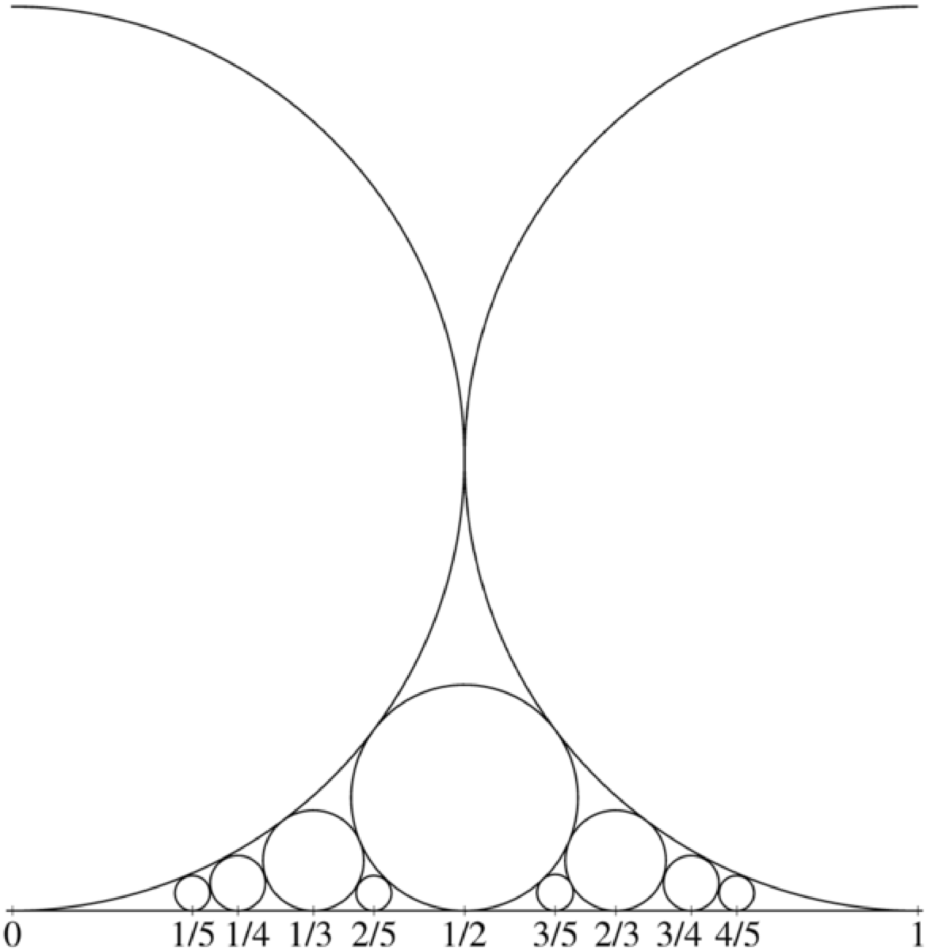
Žinoma, šis teiginys galioja ir mediantėms: nėra nė vieno galimo tokio pradinių trupmenų pasirinkimo, jog mediantės visuose „potrikampiuose“ būtų nesumažinamos.

Fordo apskritimai

Geometrinė interpretacija dažniausiai padeda geriau įsivaizduoti, sukonkretinti abstrakčias matematines idėjas. Farėjaus sekų geometrinę interpretaciją sukonstravo 1938 m. amerikietis Fordas.

Kiekvienam duotam taškui *P* ant *Ox* ašies (reikšmė tebūna $\frac{p}{q}$), imkime $\frac{1}{q^2}$ apskritimo skersmenį ir centro koordinates pasirenkame $(\frac{p}{q};\frac{1}{2q^2})$, apskritimas liečiasi su *Ox* ašimi. Taip sukonstruotas apskritimas vadinamas Fordo apskritimu.

Kiekvienai duotai n eilės Farėjaus sekai teisinga tai: jeigu mes žymėsime visas nagrinėjamas trupmenas ant *Ox* ašies ir brėšime atitinkamai Fordo apskritimus, tuomet gausime tokį skaičių, kiek yra toje sekoje trupmenų, besiliečiančių apskritimų.



F_5 sekos Fordo apskritimai

Verta pastebėti, jog Fordo apskritimai gali nesusiekti (tarp jų yra kiti apskritimai), gali liestis, tačiau jie niekada nesikerta! Ar tai tik sutapimas?

Panagrinėkime atstumus tarp apskritimų centrų (h,k) ir $(h^{'},k^{'})$:

$$d^2 = \left(\frac{h^{'}}{k^{'}} - \frac{h}{k}\right)^2 + \left(\frac{1}{2k^{'2}} - \frac{1}{2k^{'2}}\right)^2.$$

Tegu apskritimų spindulių suma bus lygi:

$$s = r_1 + r_2 = \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{2k^{'2}}, \text{ tuomet}$$

nagrinėkime skirtumą:

$$d^2 - s^2 = \frac{\left(h^{'}k - hk^{'}\right)^2 - 1}{k^2 k^{'2}}.$$

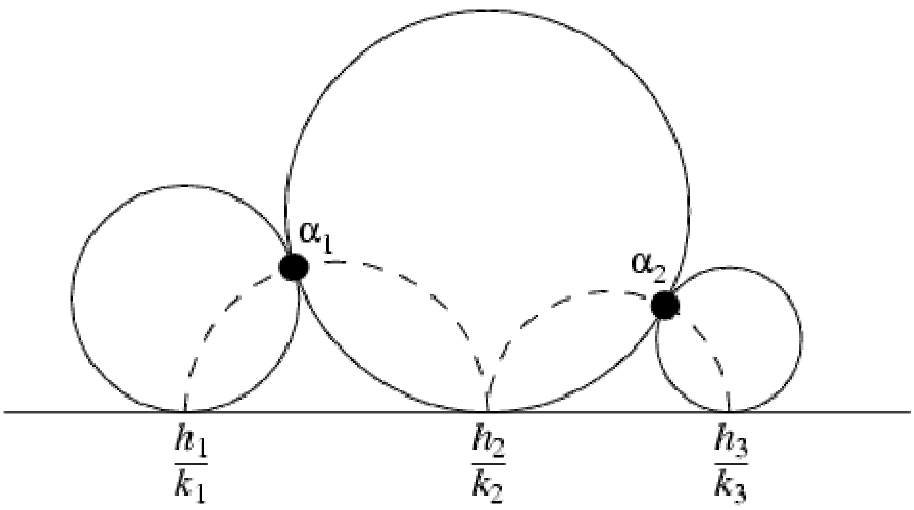
Bet $\left(h^{'}k - k^{'}h\right)^2 \geq 1$, remiantis pagrindine Farėjaus sekų savybe, todėl ir $d^2 - s^2 \geq 0$. Taigi atstumas tarp apskritimų centrų yra didesnis arba lygus nei jų spindulių suma.

Jei $\frac{h_1}{k_1}$, $\frac{h_2}{k_2}$, $\frac{h_3}{k_3}$ yra trys gretimos Farėjaus sekos trupmenos, tuomet apskritimai $C(h_1,k_1)$ ir $C(h_2,k_2)$ kertasi α_1 taške:

$$\alpha_1 = \left(\frac{h_2}{k_2} - \frac{k_1}{k_2(k_2^2 + k_1^2)}, \frac{1}{k_2^2 + k_1^2}\right),$$

o apskritimai $C(h_2,k_2)$ ir $C(h_3,k_3)$ α_2 taške:

$$\alpha_2 = \left(\frac{h_2}{k_2} + \frac{k_3}{k_2\left(k_2^2 + k_3^2\right)}, \frac{1}{k_2^2 + k_3^2}\right).$$



Maža to, α_1 priklauso pusapskritimiui, kurio skersmuo yra $\left(\frac{h_1}{k_1},0\right)-\left(\frac{h_2}{k_2},0\right)$, α_2 atitinkamai $\left(\frac{h_2}{k_2},0\right)-\left(\frac{h_3}{k_3},0\right)$.

Keli MAPLE algoritmai

Šiame skyrelyje pateikti keli MAPLE algoritmai:

- **algoritmas, surandantis sekos narius ir jų skaičių. Sekos narių skaičius yra vadinamas sekos ilgiu:**

```
> Farey:=proc(n)
local l,m,j;
if n=1 then RETURN([0,1]) elif n=2 then RETURN([0,1/2,1]) else
l:=Farey(n-1); m:=nops(l);
for j from 1 to m-1 do
if denom(l[j])+denom(l[j+1])=n then
l:=[op(l),(numer(l[j])+numer(l[j+1]))/n]; fi
od;
sort(l) fi
end:

> Farey(5);
```

$$\left[0, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, 1\right]$$

```
> nops(%);
```

$$11$$

```
> Farey:=proc(n)
local l,m,j;
if n=1 then RETURN([0,1]) elif n=2 then RETURN([0,1/2,1]) else
l:=Farey(n-1); m:=nops(l);
for j from 1 to m-1 do
if denom(l[j])+denom(l[j+1])=n then
l:=[op(l),(numer(l[j])+numer(l[j+1]))/n]; fi
od;
sort(l) fi
end:

> Farey(7);
```

$$\left[0, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, 1\right]$$

```
> nops(%);
```

$$19$$

```
> Farey:=proc(n)
```

```
local l,m,j;
if n=1 then RETURN([0,1]) elif n=2 then RETURN([0,1/2,1]) else
l:=Farey(n-1); m:=nops(l);
for j from 1 to m-1 do
if denom(l[j])+denom(l[j+1])=n then
l:=[op(l),(numer(l[j])+numer(l[j+1]))/n]; fi
od;
sort(l) fi
end:
```

```
> Farey(15);
```

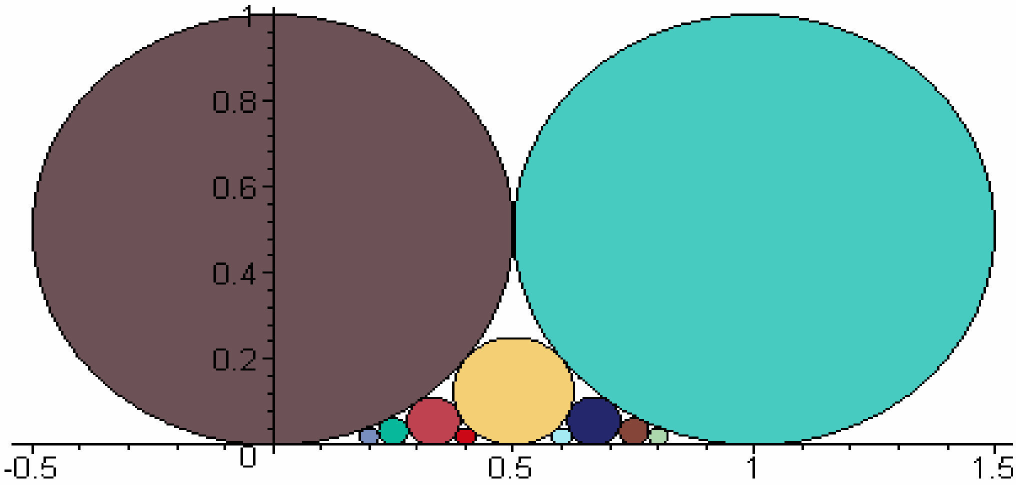
$$\left[0, \frac{1}{15}, \frac{1}{14}, \frac{1}{13}, \frac{1}{12}, \frac{1}{11}, \frac{1}{10}, \frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \frac{2}{15}, \frac{1}{7}, \frac{2}{13}, \frac{1}{6}, \frac{2}{11}, \frac{1}{5}, \frac{3}{14}, \frac{2}{9}, \frac{3}{13}, \frac{1}{4}, \frac{4}{15}, \frac{3}{11}, \frac{2}{7}, \frac{3}{10}, \frac{4}{13}, \frac{1}{3}, \frac{5}{14}, \frac{4}{11}, \frac{3}{8}, \frac{5}{13}, \frac{2}{5}, \frac{5}{12}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{5}{11}, \frac{6}{13}, \frac{7}{15}, \frac{1}{2}, \frac{8}{15}, \frac{7}{13}, \frac{6}{11}, \frac{5}{9}, \frac{4}{7}, \frac{7}{12}, \frac{3}{5}, \frac{8}{13}, \frac{5}{8}, \frac{7}{11}, \frac{9}{14}, \frac{2}{3}, \frac{9}{13}, \frac{7}{10}, \frac{5}{7}, \frac{8}{11}, \frac{11}{15}, \frac{3}{4}, \frac{10}{13}, \frac{7}{9}, \frac{11}{14}, \frac{4}{5}, \frac{9}{11}, \frac{5}{6}, \frac{11}{13}, \frac{6}{7}, \frac{13}{15}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \frac{9}{10}, \frac{10}{11}, \frac{11}{12}, \frac{12}{13}, \frac{13}{14}, \frac{14}{15}, 1\right]$$

```
> nops(%);
```

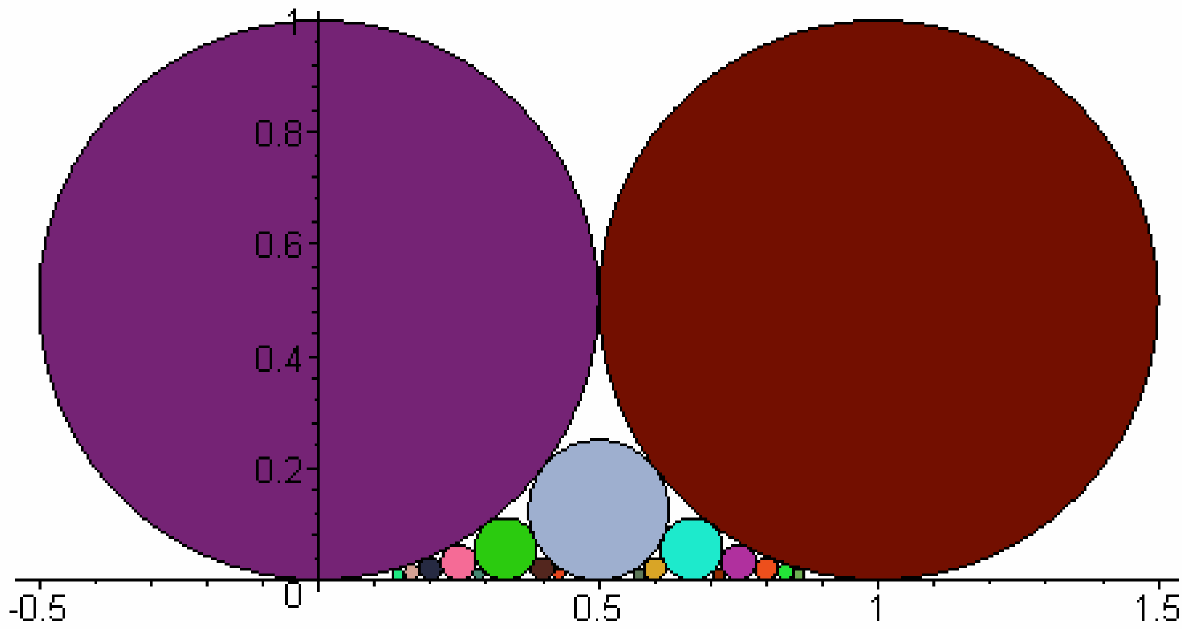
$$73$$

- **algoritmas, piešiantis Fordo apskritimus:**

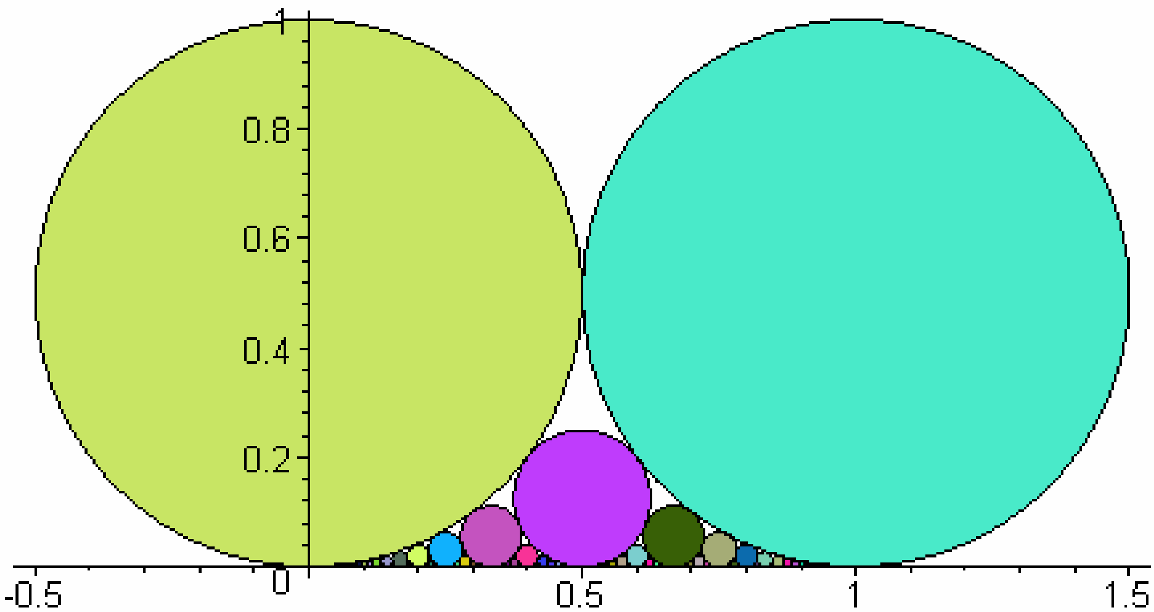
```
> with(plots):
Warning, the name changecoords has been redefined

> with(plottools):
Warning, the name arrow has been redefined

> Ford:=proc(n)
local s,x,d;
s:=farey(n); d:=NULL;
for x in s do d:=d,disk([x,1/(2*denom(x)^2)],1/(2*denom(x)^2),
color=COLOR(RGB,rand()/10^12,rand()/10^12,rand()/10^12)) od;
display(d,scaling=constrained);
end:

> Ford(5);
```




```
> with(plots):
Warning, the name arrow has been redefined

> with(plottools):
Warning, the name arrow has been redefined

> Ford:=proc(n)
local s,x,d;
s:=farey(n); d:=NULL;
for x in s do d:=d,disk([x,1/(2*denom(x)^2)],1/(2*denom(x)^2),
color=COLOR(RGB,rand()/10^12,rand()/10^12,rand()/10^12)) od;
display(d,scaling=constrained);
end:

> Ford(7);
```




```
> with(plottools):
Warning, the name arrow has been redefined

> Ford:=proc(n)
local s,x,d;
s:=farey(n); d:=NULL;
for x in s do d:=d,disk([x,1/(2*denom(x)^2)],1/(2*denom(x)^2),
color=COLOR(RGB,rand()/10^12,rand()/10^12,rand()/10^12)) od;
display(d,scaling=constrained);
end:

> Ford(15);
```



Taigi čia jau galime rasti akivaizdžių sąsajų su fraktalų teorija.

- **algoritmas, randantis Farėjaus sekos trupmeną, didesnę už pasirinktą skaičių:**

```
> Farey:=proc(n)
> local l,m,j;
if n=1 then
RETURN([0,1])
elif n=2 then
RETURN([0,1/2,1])
else
>l:=Farey(n-1); m:=nops(l);
>for j from 1 to m-1 do
>if denom(l[j])+denom(l[j+1])=n then
>l:=[op(l),(numer(l[j])+numer(l[j+1]))/n];
fi
>od;
>sort(l)
fi
> end:
> aa:= Farey(25);
```

$$aa := \left[0, \frac{1}{25}, \frac{1}{24}, \frac{1}{23}, \frac{1}{22}, \frac{1}{21}, \frac{1}{20}, \frac{1}{19}, \frac{1}{18}, \frac{1}{17}, \frac{1}{16}, \frac{1}{15}, \frac{1}{14}, \frac{1}{13}, \frac{2}{25}, \frac{1}{12}, \frac{2}{23}, \frac{1}{11}, \frac{2}{21}, \frac{1}{10}, \frac{2}{19}, \frac{1}{9}, \frac{2}{17}, \right.$$
$$\frac{3}{25}, \frac{1}{8}, \frac{3}{23}, \frac{2}{15}, \frac{3}{22}, \frac{1}{7}, \frac{3}{20}, \frac{2}{13}, \frac{3}{19}, \frac{4}{25}, \frac{1}{6}, \frac{4}{23}, \frac{3}{17}, \frac{2}{11}, \frac{3}{16}, \frac{4}{21}, \frac{1}{5}, \frac{5}{24}, \frac{4}{19}, \frac{3}{14}, \frac{5}{23}, \frac{2}{9}, \frac{5}{22}, \frac{3}{13}, \frac{4}{17},$$
$$\frac{5}{21}, \frac{6}{25}, \frac{1}{4}, \frac{6}{23}, \frac{5}{19}, \frac{4}{15}, \frac{3}{11}, \frac{5}{18}, \frac{7}{25}, \frac{2}{7}, \frac{7}{24}, \frac{5}{17}, \frac{3}{10}, \frac{7}{23}, \frac{4}{13}, \frac{5}{16}, \frac{6}{19}, \frac{7}{22}, \frac{8}{25}, \frac{1}{3}, \frac{8}{23}, \frac{7}{20}, \frac{6}{17}, \frac{5}{14},$$
$$\frac{9}{25}, \frac{4}{11}, \frac{7}{19}, \frac{3}{8}, \frac{8}{21}, \frac{5}{13}, \frac{7}{18}, \frac{9}{23}, \frac{2}{5}, \frac{9}{22}, \frac{7}{17}, \frac{5}{12}, \frac{8}{19}, \frac{3}{7}, \frac{10}{23}, \frac{7}{16}, \frac{11}{25}, \frac{4}{9}, \frac{9}{20}, \frac{5}{11}, \frac{11}{24}, \frac{6}{13}, \frac{7}{15}, \frac{8}{17},$$
$$\frac{9}{19}, \frac{10}{21}, \frac{11}{23}, \frac{12}{25}, \frac{1}{2}, \frac{13}{25}, \frac{12}{23}, \frac{11}{21}, \frac{10}{19}, \frac{9}{17}, \frac{8}{15}, \frac{7}{13}, \frac{13}{24}, \frac{6}{11}, \frac{11}{20}, \frac{5}{9}, \frac{14}{25}, \frac{9}{16}, \frac{13}{23}, \frac{4}{7}, \frac{11}{19}, \frac{7}{12}, \frac{10}{17}, \frac{13}{22},$$
$$\frac{3}{5}, \frac{14}{23}, \frac{11}{18}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{5}{8}, \frac{12}{19}, \frac{7}{11}, \frac{16}{25}, \frac{9}{14}, \frac{11}{17}, \frac{13}{20}, \frac{15}{23}, \frac{2}{3}, \frac{17}{25}, \frac{15}{22}, \frac{13}{19}, \frac{11}{16}, \frac{9}{13}, \frac{16}{23}, \frac{7}{10}, \frac{12}{17}, \frac{17}{24}, \frac{5}{7},$$
$$\frac{18}{25}, \frac{13}{18}, \frac{8}{11}, \frac{11}{15}, \frac{14}{19}, \frac{17}{23}, \frac{3}{4}, \frac{19}{25}, \frac{16}{21}, \frac{13}{17}, \frac{10}{13}, \frac{17}{22}, \frac{7}{9}, \frac{18}{23}, \frac{11}{14}, \frac{15}{19}, \frac{19}{24}, \frac{4}{5}, \frac{17}{21}, \frac{13}{16}, \frac{9}{11}, \frac{14}{17}, \frac{19}{23}, \frac{5}{6},$$
$$\frac{21}{25}, \frac{16}{19}, \frac{11}{13}, \frac{17}{20}, \frac{6}{7}, \frac{19}{22}, \frac{13}{15}, \frac{20}{23}, \frac{7}{8}, \frac{22}{25}, \frac{15}{17}, \frac{8}{9}, \frac{17}{19}, \frac{9}{10}, \frac{19}{21}, \frac{10}{11}, \frac{21}{23}, \frac{11}{12}, \frac{23}{25}, \frac{12}{13}, \frac{13}{14}, \frac{14}{15}, \frac{15}{16}, \frac{16}{17},$$
$$\left. \frac{17}{18}, \frac{18}{19}, \frac{19}{20}, \frac{20}{21}, \frac{21}{22}, \frac{22}{23}, \frac{23}{24}, \frac{24}{25}, 1 \right]$$

```
> f:=proc(arr,t)
local i;
for i in arr do
if t < i then
return i;
end if;
end do;
return "neradom";
end proc:
> sk := evalf(sqrt(5)-2);
```

$$sk := 0.236067977$$

```
> f(aa, sk);
```

$$\frac{5}{21}$$

- **algoritmas, randantis Farėjas sekos trupmeną, kuriai teisinga „Įverčio teorema“:**

```
> Farey:=proc(nn)
> local l, m, j;
> if nn = 1 then
RETURN([0, 1])
elif nn = 2 then
RETURN([0, 1/2, 1])
else
> l := Farey(nn - 1); m := nops(l);
> for j from 1 to m - 1 do
> if denom(l[j])+denom(l[j+1])=nn then
> l:=[op(l),(numer(l[j])+numer(l[j+1]))/nn];
fi
> od;
```

```
> sort(l)
fi
> end:
> n := 7;
aa:= Farey(n);
```

$$n := 7$$

$$aa := \left[0, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, 1\right]$$

```
> f:=proc(arr,t)
local i, indx;
indx := 0;
for i in arr do
indx := indx + 1;
if evalf(t < i) then
return i, indx;
end if;
end do;
return "neradom";
end proc:
> sk := evalf(sqrt(5)-2);
```

$$sk := 0.236067977$$

```
> rez := f(aa, sk);
```

$$rez := \frac{1}{4}, 5$$

```
> tmp1 := aa[rez[2]];
tmp2 := aa[rez[2] - 1];
```

$$tmp1 := \frac{1}{4}$$

$$tmp2 := \frac{1}{5}$$

```
> tmp3 := evalf(abs(sk - tmp1));
tmp4 := evalf(abs(sk - tmp2));
if (tmp3 < tmp4) then
x := tmp1;
else
x := tmp2;
end if;
k := denom(x);
>
```

$$tmp3 := 0.0139320230$$

$$tmp4 := 0.0360679770$$

$$x := \frac{1}{4}$$

$$k := 4$$

```
> A := evalf(1 / (k * (n+1)));
```

$$A := 0.03125000000$$

```
> A-min (tmp3, tmp4);
```

$$0.01731797700$$

Taigi sudėkime keletą tokių skaičiavimų į lentelę:

Skaičius	n	Farėjaus trupmena	"Įverčio" teoremos įvertis A	Skirtumas
$\sqrt{5}-2$	10	$\frac{2}{9}$	0,01010101010	-0,00374474470
	50	$\frac{4}{17}$	0,001153402537	0,000379543137
	100	$\frac{17}{72}$	0,0001375137514	0,0000943796514
	150	$\frac{17}{72}$	0,00009197939662	0,0000488452966
π -3	10	$\frac{1}{7}$	0,01298701299	0,01172252409
	50	$\frac{1}{7}$	0,02801120448	0,00153663154
	100	$\frac{14}{99}$	0,0001000100010	-0,000078502599
	150	$\frac{16}{113}$	0,00005860634121	0,0000583399412
$e-2$	10	$\frac{5}{7}$	0,1298701299	0,00899089929
	50	$\frac{28}{39}$	0,0005027652086	0,0001696551086
	100	$\frac{51}{71}$	0,0001394505648	0,0001114193648
	150	$\frac{51}{71}$	0,00009327488107	0,0001114193648

Matome, jog galima rasti pakankamai artimą Farėjaus sekai priklausančią trupmeną.

Piešimas Farėjaus trupmenomis

Dažnam iš mūsų šiais, kompiuterių laikais, trupmenos yra tik blankus, mokyklos laikų prisiminimas. Tačiau mums to nepastebint paprastosiomis trupmenomis mes naudojamės kasdien: verslo, matematikos, fizikos ar kompiuterių pasauliuose.

Dažniau susiduriantys su matematika, žino, jog ji yra graži. Meno apraiškos gali būti atrastos mažiausiai tikimose vietose. Pabandykime šiuo aspektu pažiūrėti į Farėjaus sekas.

Kaip žinome, F_n žymi Farėjaus seką n – tosios eilės ir ją sudaro tokios trupmenos, kurių reikšmės yra tarp nulio ir vieneto; vardiklio reikšmė neviršija i.

Pavyzdžiui, F_6 nariai yra:

$$F_6 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1} \right\}.$$

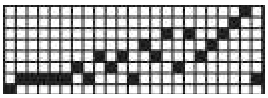
Taigi pažiūrėkime, kokiomis savybėmis Farėjaus sekos pasižymi paveikslo (piešinio) aspektu.

Išskaidykime šią seką tokiu būdu: atskirkime skaitiklius nuo vardiklių ir atitinkamai pažymėkime gautąsias naujas sekas F_s ir F_v. Tuomet remiantis aukščiau pateiktu pavyzdžiu, turime:

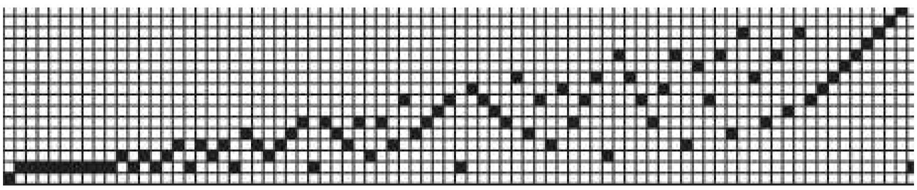
$$F_s(6) = 0, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 2, 3, 4, 5,1;$$

$$F_v(6) = 1, 6, 5, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 5, 6, 1.$$

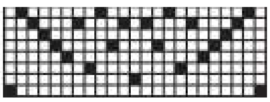
Pažiūrėkime, kaip šios reikšmės yra išsidėsčiusios tinklelyje su langučiais (kad būtų geresnis vaizdas, imkime aukštesnės eilės Farėjaus sekų F_8 ir F_{16} atitinkamai skaitiklių ir vardiklių vaizdus):



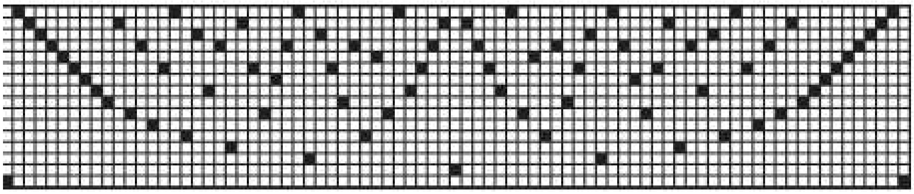
$F_s(8)$ skaitiklių sekos vaizdas



$F_s(16)$ skaitiklių sekos vaizdas



$F_v(8)$ vardiklių sekos vaizdas



$F_v(16)$ vardiklių sekos vaizdas

Kitų reikšmių atvejais struktūra piešinio yra panaši: kuo didesnė n reikšmė, tuo ilgesnis piešinys. Tačiau dera pastebėti, jog tiek skaitiklių, tiek vardiklių piešiniuose yra simetrija.

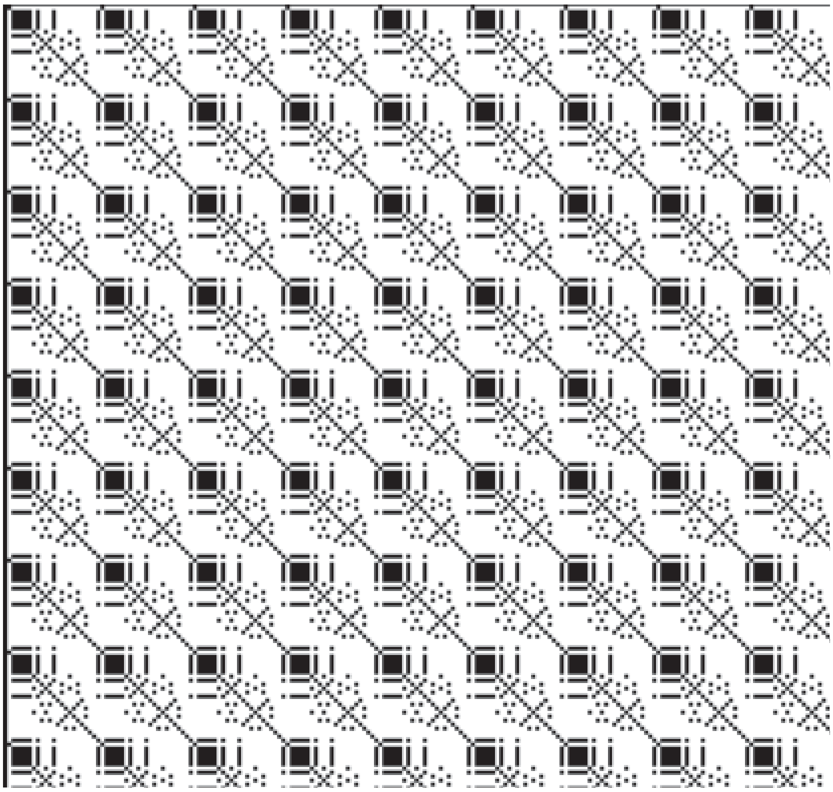
Abi sekos tiek $F_s(n)$, tiek $F_v(n)$ turi skirtingas reikšmes savo sekose. Vaizduojant skaičius *0* sekoje $F_s(i)$ gali būti traktuojamas įvairiai. Vienas iš būdų, pavyzdžiui, yra pridėti vienetą prie kiekvienos iš sekoje esančių reikšmių. Reikšmių pasiskirstymas sekoje nėra subalansuotas. Nulio reikšmė sekoje $F_s(n)$ yra tik vieną kartą ir reikšmė 2 sekoje $F_v(n)$ taip pat yra tik vieną kartą (žinoma, tai nėra teisinga, kai n = 1 arba 2, tačiau tokios išraiškos mes ir nenagrinėjame, nes tuomet negalime matyti jokio vaizdo).

Farėjaus sekos ilgis auga kartu su reikšme n . Išties nėra kokios nors paprastos formulės, kuri išreikštų šios sekos ilgį; tačiau jos ilgis yra apytiksliai išreiškiamas taip:

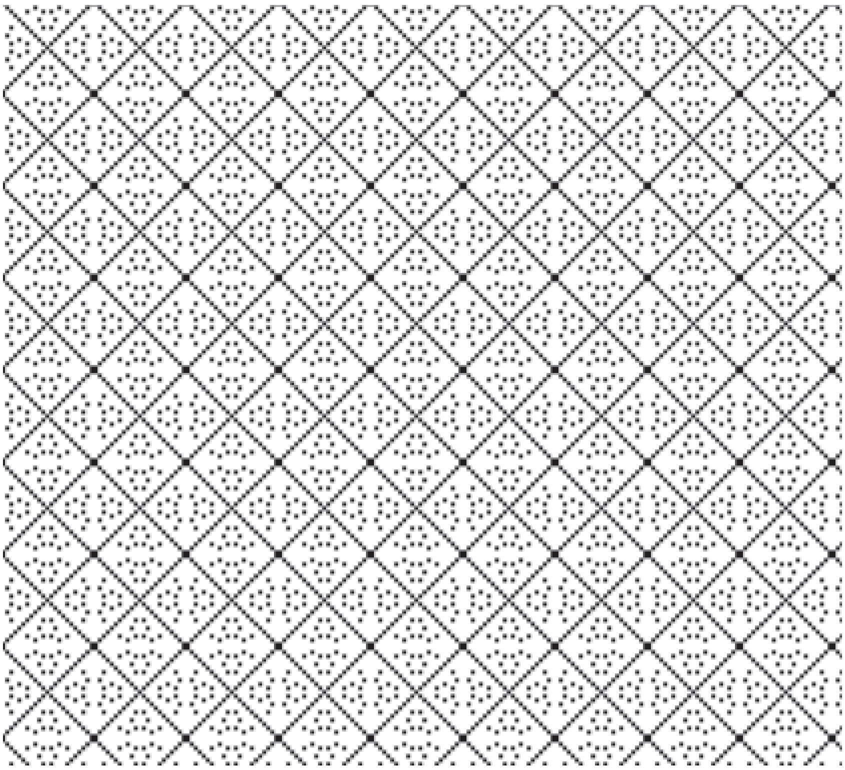
$$3(n/\pi)^2 \approx 0.304 \times n^2$$

Aproksimakcija yra tuo tikslesnė, kuo n didesnis.

Buvo pateikti mažyčiai fragmentai $F_s(8)$ ir $F_v(8)$, taigi dabar pabandykime juos tiesiog suklijuoti – tai ir yra pats paprasčiausias būdas kurti piešinį, naudojantis Farėjaus sekomis. Tokiu būdu aiškiai matosi raštas. Taigi pažiūrėkime, kaip atrodys $F_s(8)$ ir $F_v(8)$, atlikus posūkį ir postūmį:

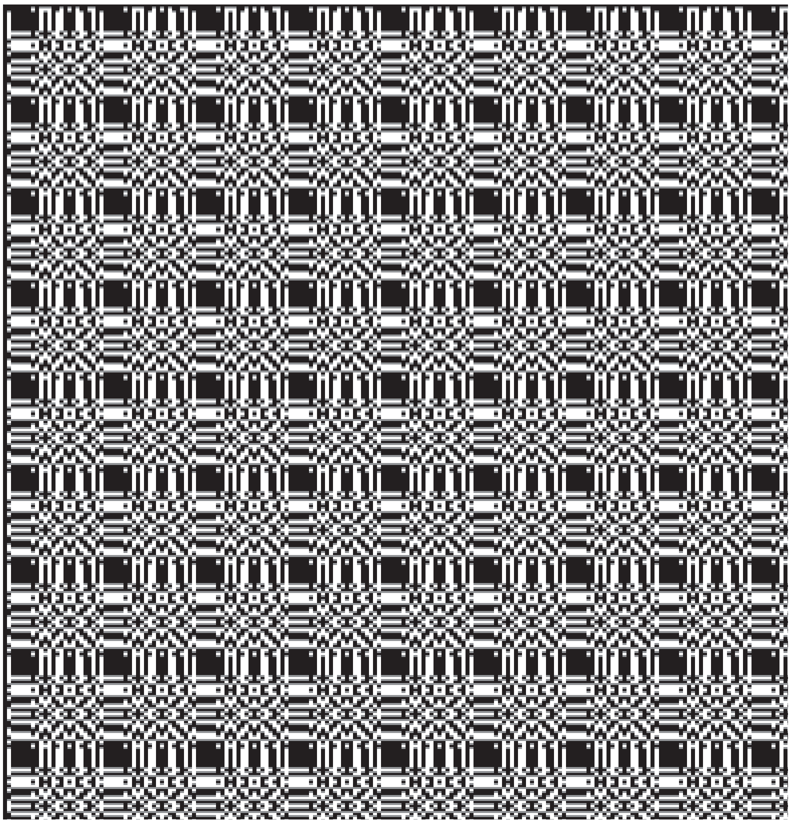


$F_s(8)$ vaizdas

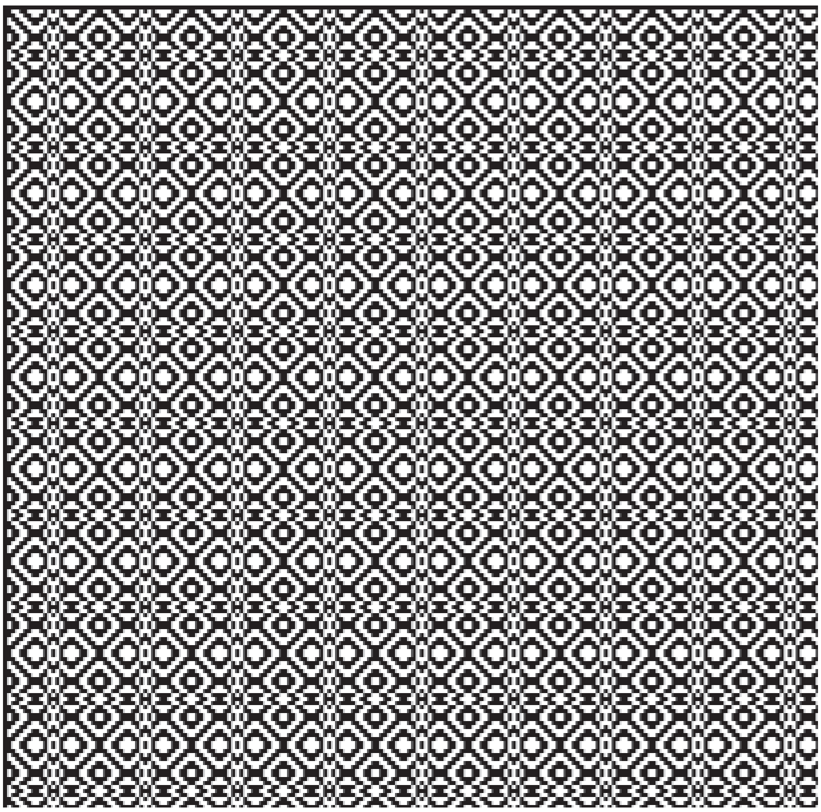


$F_v(8)$ vaizdas

Pasirinkus kitokius konstravimo būdus, gaunami ir kitokie ornamentai. Dar keletas pavyzdžių:



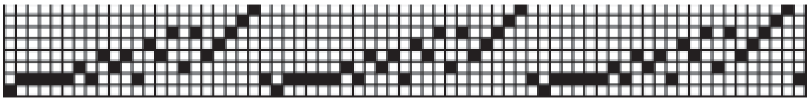
$F_s(8)$ dvigubas



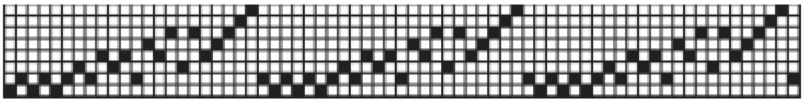
$F_v(8)$ dvigubas

Pakeitimai dažnai yra reikalingi tam, jog geriau būtų matomos sekos savybės piešiniuose arba norint įrodyti, jog būtent iš pasirinktosios sekos yra daromi piešiniai.

Tiesa, skaitiklių sekos yra kur kas sudėtingesnės nei vardiklių, nes skaitiklių sekose dažnai kartojasi tas pats skaičius 1. Tai galima išspręsti įvairiai; vienas iš metodų: kiekvieną pasikartojantį 1 pakeisti į 0. Tokiu būdu sekos ilgis išlieka toks pat ir atlikus šį pakeitimą.
Skirtumą galime pamatyti paveiksluose:

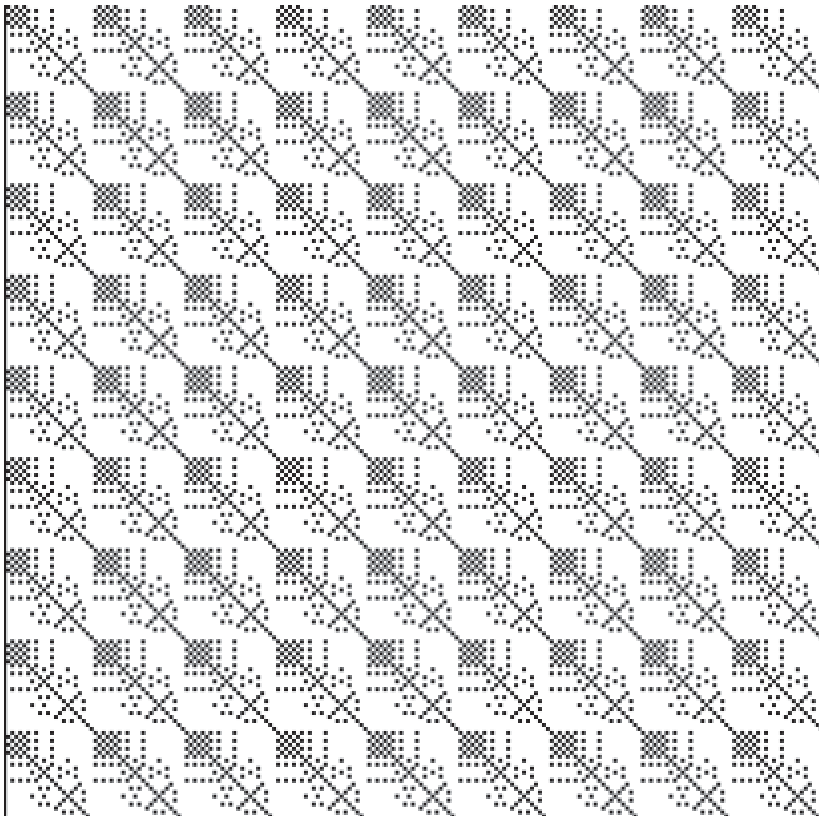


$F_s(8)$ be pakeitimo



$F_s(8)$ vietoje iš eilės einančių vienetų įterpti nuliai

O bendras vaizdas gaunamas toks ($F_s(8)$ be pakeitimo buvo jau pateiktas anksčiau – žiūrėti paveikslėlius, jei norima palyginti vaizdą):



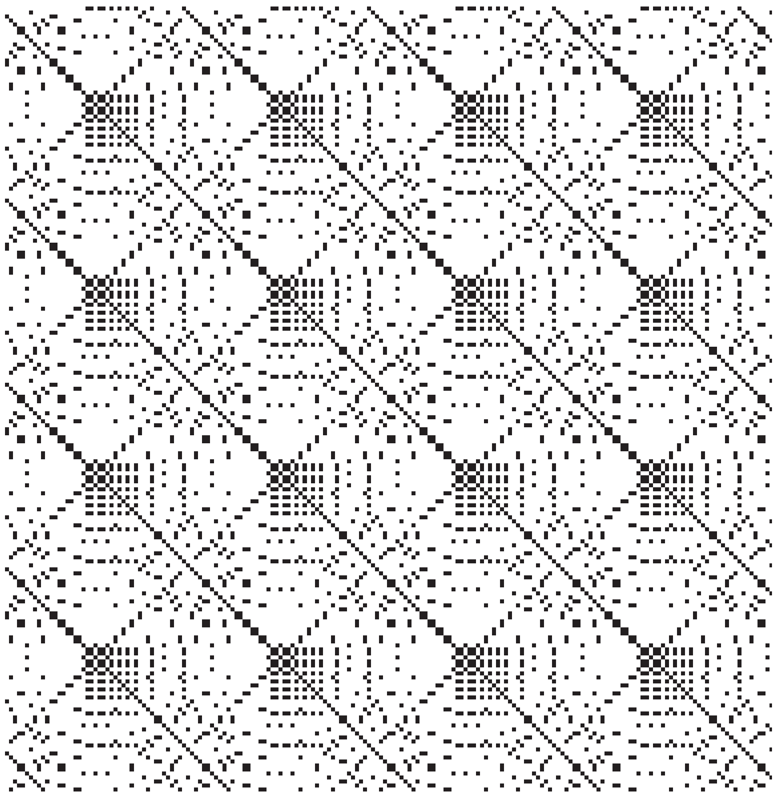
$F_s(8)$ su pakeitimu

Dar viena pastaba, kuri yra svarbi atliekant pakeitimus: pavyzdžiui, naudojant šį metodą (iš eilės einančių vienetų pakeitimas nuliais), reikėtų prisiminti, jog skaitiklių sekoje pirmasis ir paskutinis narys visuomet yra 0 ir 1. Taigi atliekant ir kitokius, galimus, pakeitimus derėtų nepamiršti šio fakto.

Nors ir gali atrodyti, jog pakeitimų skaičius yra neribotas, visgi iš esmės yra tik keli atvejai, kuriuos galima derinti, tai:

- sukimas (sriegimas);
- slinkimas (svarbi ir slinkimo kryptis);
- sukimo ašių skaičius;
- ornamentas keičiasi atitinkamai, imant skaitiklių ar vardiklių seką.

Dar vienas ornamentas:



$F_s(8)$ ir $F_v(8)$ derinys

Tai yra, pavyzdžiui, sekai $F_n(6)$ imant skaitiklių ir vardiklių sekų kombinaciją:

0, 1, 1, 6, 1, 5, 1, 4, 1, 3, 2, 5, 1, 2, 3, 5, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 1, 1

(vienas narys iš skaitiklių sekos, kitas iš vardiklių – toks eiliškumas).

Taigi galimų atvejų yra išties labai daug. Dėl to galima gauti visokių ornamentų. Žinoma, derėtų nepamiršti ir galimų spalvinių derinių.

Išvados

XIX amžiuje Farėjus (John Farey) apibrėžė matematinį objektą - seką, kurią sudaro trupmenos tarp nulio ir vieneto, kurių vardikliai neviršija *n*.

Šiame darbe pateikta Farėjaus sekų pagrindinių savybių analizė, įvairios jų interpretacijos, pavyzdžiui, Fordo apskritimai.

Paliestas realiųjų skaičių aproksimavimo Farėjaus sekomis klausimas. Naudojantis MAPLE paketu, atlikti skaičiavimai, „tikrinantys“ teoremą apie realiųjų skaičių aproksimavimą Farėjaus trupmenomis. Surandama Farėjaus sekai priklausanti trupmena, didesnė už pasirinktą realųjį skaičių. Sudaryti ir kiti MAPLE algoritmai, atskleidžiantys Farėjaus sekų savybes.

Naudojantis Farėjaus sekomis, galima kurti ornamentus. Tai dar kartą patvirtina, jog matematika yra graži.

Reziumė

Farey sequences are named after the British geologist John Farey, whose letter about these sequences was published in the *Philosophical Magazine* in 1816. Farey conjectured that each term in a Farey sequence is the mediant of its neighbours.

In this work you may find the analysis of the main properties of Farey sequences, different their interpretations, examples.

Also there is considered the question of the aproximation of real number by Farey sequence. Various situations and a few algoritms (Farey sequence formation, Ford circles drawing) were demonstrated using MAPLE.

These and others facts introduce the Farey sequences as picturesque mathematical object.

Literatūros sąrašas

1. G. H. Hardy, E. M. Wright. Farey Series and a Theorem of Minkowski, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford, The Clarendox Press, 1960.
2. M. E. Mays. Trangular Farey Arrays, *Number Theory*, Berlin, 1990.
3. A. Matuliauskas. *Algebra*, Vilnius, Mokslas, 1985.
4. E. Misevičius. *Matematinė analizė*, Vilnius, TEV, 1998.
5. G. Žilinskas. *Aukštoji algebra*, Vilnius, Valstybinė politinės ir mokslinės literatūros leidykla, 1960.
6. Piotr Rudnicki. Problem F: Farey sequences, http://acm.uva.es/p/v104/10408.html
7. Martin Huxley. Farey sequences, the Farey map and the Farey Tree, http://www.maths.ex.ac.uk/~mwatkins/zeta/farey.htm
8. C. E. Patrascu, M. Patrascu. Computing Order Statistics in the Farey Sequence, http://web.mit.edu/~mip/www/papers/farey/farey.pdf
9. J J O'Connor, E F Robertson. John Farey, http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Farey.htmlhttp://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Farey.html
10. E. Weisstein. Farey sequence denominators, http://www.cs.arizona.edu/patterns/sequences/fareydseq.html
11. E. Weisstein. Farey sequence numerators, http://www.cs.arizona.edu/patterns/sequences/fareynseq.html
12. L. Vepstas. The Minkowski Question Mark and the Modular Group, http://www.linas.org/math/chap-minkowski/chap-minkowski.html
13. S. Kwan. Farey Series and Ford Circles, http://math.unipa.it/~grim/SiKwan.PDF
14. A. Bogomolny. Stern Brocot Tree, http://www.cut-the-knot.org/blue/Stern.shtml
15. A. Bogomolny. Farey Series, http://www.cut-the-knot.org/blue/Farey.shtml
16. R. E. Griswold. Designing with Farey Fractions, http://www.cs.arizona.edu/patterns/weaving/webdocs/gre_fry.pdf