ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

MATEMATIKOS KATEDRA

Renata Daukšaitė

Jungtinė universalumo teorema Dirichlė L funkcijoms

Magistro darbas

Magistro darbo vadovas
Prof. habil. dr. A. Laurinčikas

Šiauliai
2012

Turinys

1. Įvadas

Tarkime, kad $\chi(m)$ yra Dirichlė charakteris moduliu q, o $s = \sigma + it$ yra kompleksinis kintamasis. Dirichlė L funkcija $L(s,\chi)$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama Dirichlė eilute

$$L(s,\chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)}{m^s}.$$

Gerai žinoma [10], kad funkcija $L(s,\chi)$, kai χ nėra pagrindinis charakteris, yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, tai yra, ji yra sveikoji funkcija. Jeigu χ_0 yra pagrindinis charakteris, tai tuomet funkcija $L(s,\chi_0)$ taške $s = 1$ turi paprastąjį polių su reziduumu

$$\prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

1975 m. S. M. Voroninas(Voronin) [12] atrado labai įdomią funkcijų $L(s,\chi)$ universalumo savybę. Grubiai kalbat, ši savybė reiškia, kad kiekviena analizinė funkcija tam tikroje srityje gali būti norimu tikslumu aproksimuojama L funkcijų pastūmiais $L(s + i\tau, \chi)$, $\tau \in \mathbb{R}$. Tikslus Voronino teoremos formulavimas yra toks. Tarkime, kad $0 < a < \frac{1}{4}$, o funkcija $f(s)$ yra tolydi ir neturi nulių skritulyje $|s| \le a$ ir yra analizinė to skritulio viduje. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$ egzistuoja toks realus skaičius $\tau = \tau(\varepsilon)$, kad

$$\max_{|s| \le a} \left| L(s + \frac{3}{4} + i\tau, \chi) - f(s) \right| < \varepsilon.$$

Šį rezultatą tais pačiais metais S. M. Voroninas apibendrino keliomis funkcijomis, tai yra įrodė Dirichlė L funkcijų jungtinį universalumą. Primename, kad du Dirichlė charakteriai vadinami ekvivalenčiais jeigu jie yra generuoti to paties primityvaus charakterio. Jungtinė universalumo teorema Dirichlė L funkcijoms turi tokį pavidalą.

1 teorema [13]. *Tarkime, kad* $0 < a < \frac{1}{4}$, *o* $\chi_1, ..., \chi_r$ *yra kas du neekvivalentūs Dirichlė charakteriai. Tegul* $f_1(s), ..., f_r(s)$ *yra funkcijos, tolydžios ir neturinčios nulių skritulyje* $|s| \le a$, *ir analizinės to skritulio viduje. Tuomet su kiekvienu* $\varepsilon > 0$ *egzistuoja toks* $\tau = \tau(\varepsilon)$, *kad visiems* $j = 1, .., r$ *yra teisinga nelygybė*

$$\max_{|s|\le a}\left|L(s + \frac{3}{4} + i\tau, \chi_j) - f_j(s)\right| < \varepsilon.$$

1 teorema rodo, kad analizinių funkcijų rinkinys tolygiai juostos $D = \{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} \le \sigma \le 1\}$ skrituliuose vienu metu yra tolygiai aproksimuojamas L funkcijų rinkinio postūmiais.

Kiek vėliau panašius rezultatus gavo amerikiečių matematikas S. M. Gonekas (Gonek) [4] ir indų matematikas B. Bagčis (Bagchi) [1].

Sakoma, kad aibė $A \subset (0, \infty)$ turi apatinį tankį d, jeigu

$$\liminf_{T \longrightarrow \infty} \frac{1}{T} \text{meas}\{\tau \in [0, T] : \tau \in A\} = d;$$

čia meas$\{A\}$ žymi mačios aibės $A \subset \mathbb{R}$ Lebego matą. Bagčio teorema yra formuluojama taip.

2 teorema [1] *Tegul* $q \in \mathbb{N}$, $\quad \chi_1, ..., \chi_r$ *yra skirtingi Dirichlė charakteriai moduliu* q. *Su kiekvienu* $1 \le j \le r$ *tegul* K_j *yra silpnai jungi kompaktinė juostos* D *aibė, o funkcija* $f_j(s)$ *yra tolydi ir neturi nulių aibėje* K_j *ir yra analizinė aibės* K_j *viduje. Tuomet aibė visų* $\tau \in \mathbb{R}$, *kuriems yra teisinga nelygybė*

$$\sup_{1\le j\le r}\sup_{s\in K_j}|L(s+i\tau,\chi_j)-f_j(s)|<\varepsilon,$$

su visais $\varepsilon>0$ *turi teigiamą apatinį tankį.*

Pastaruoju metu yra žinomas šiek tiek bendresnis 2 teoremos variantas, kai $\chi_1,...,\chi_r$ yra Dirichlė charakteriai, tenkinantys 1 teoremos sąlygas, tačiau šio varianto įrodymas nėra niekur paskelbtas. Todėl magistro darbo tikslas yra pateikti tokios jungtinės universalumo teoremos Dirichlė L funcijoms įrodymą.

3 teorema. *Tarkime, kad* $\chi_1,...,\chi_r$ *yra kas du neekvivalentūs Dirichlė charakteriai, su kiekvienu* $1\le j\le r$*, tegul* K_j *yra kompaktinė juostos* D *aibė, turinti jungųjį papildinį, o funkcija* $f_j(s)$ *yra tolydi ir neturi nulių aibėje* K_j *ir yra analizinė aibės* K_j *viduje. Tuomet su kiekvienu* $\varepsilon>0$*,*

$$\liminf_{T\longrightarrow\infty}\frac{1}{T}\text{meas}\{\tau\in[0,T]:\sup_{1\le j\le r}\sup_{s\in K_j}|L(s+i\tau,\chi_j)-f_j(s)|<\varepsilon\}>0.$$

2. Ribinė teorema

3 teoremos įrodymui naudosime tikimybinį metodą, kuris remiasi ribine teorema apie silpnąjį matų konvergavimą analizinių funkcijų erdvėje.

Priminsime silpnojo tikimybinių matų konvergavimo apibrėžimą. Tegul X yra metrinė erdvė, o $\mathcal{B}(X)$ yra erdvės X Borelio aibių klasė, tai yra, minimali σ algebra, generuota erdvės X atvirųjų aibių sistemos. Tarkime, $(X, \mathcal{B}(X))$. Sakome, kad P_n, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į P, jei su kiekviena realia aprėžta tolydžia funkcija f erdvėje X yra teisinga lygybė

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f dP_n = \int_X f dP.$$

Simboliu $H(D)$ žymėsime analizinių juostoje D funkcijų erdvę su tolygaus konvergavimo kompaktinėse aibėse topologija. Šioje topologijoje seka $\{g_n(s)\} \subset H(D)$ konverguoja į funkciją $g(s) \in H(D)$ jeigu su bet kuriuo kompaktiniu poaibiu $K \subset D$ yra teisinga lygybė

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \sup_{s \in K} |g_n(s) - g(s)| = 0.$$

Erdvė $H(D)$ yra metrizuojama, tai yra, joje galima apibrėžti metriką, kuri indukuoja tolygaus konvergavimo kompaktinėse aibėse topologiją. Yra žinoma[6], kad egzistuoja tokia kompaktinių aibių seka $\{K_l : l \in \mathbb{N}\} \subset D$, kad

$$D = \bigcup_{l=1}^{\infty} K_l,$$

$K_l \subset K_{l+1}$ su visais $l \in \mathbb{N}$ ir, jei K yra bet kuri kompaktinė juostos D aibė, tai tuomet $K \subset K_l$ su kuriuo nors $l \in \mathbb{N}$.

Metrika ρ aibėje $H(D)$ yra apibrėžiami taip:

$$\rho(g_1, g_2) = \sum_{l=1}^{\infty} 2^{-l} \frac{\sup_{s \in K_l} |g_1(s) - g_2(s)|}{1 + \sup_{s \in K_l} |g_1(s) - g_2(s)|}, \qquad g_1, g_2 \in H(D).$$

Apibrėžime dar vieną topologinę struktūrą. Tegul $\gamma = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$ yra vienetinis apskritimas kompleksinėje plokštumoje. Apibrėžiame Dekarto sandaugą

$$\Omega = \prod_p \gamma_p,$$

kurioje $\gamma_p = \gamma$ su visais pirminiais p. Primename, kad aibę Ω (ji vadinama toru) sudaro visos funkcijos, kurios pirminių skaičių aibę atvaizduoja vienetiniame apskritime. Aibėje Ω galima apibrėžti pataškinės daugybos operaciją ir sandaugos topologiją[9]. Tuomet ši aibė tampa kompaktine topologine komutatyvine grupe. Todėl [11] mačioje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ galima apibrėžti tikimybini Haro matą m_H. Šis matas pasižymi invariantiškumo savybe. Tai reiškia, kad su kiekviena aibe $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ ir bet kuriuo elementu $\omega \in \Omega$ yra teisingos lygybės

$$m_H = m_H(\omega A) = m_H(A\omega).$$

Pastebime, kad Haro matas ant vienetinio apskritimo γ sutampa su įprastu Lebego matu. Taigi, gauname tikimybinę erdvę $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Tegul $\omega(p)$ su kiekvienu pirminiu p yra elemento $\omega \in \Omega$ projekcija į γ_p. Kitaip tariant, $\omega(p)$ yra p-toji elemento $\omega \in \Omega$ komponentė.

Tegul

$$H^r(D) = \underbrace{H(D) \times ... \times H(D)}_{r}.$$

Tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$ apibrėžiame $H^r(D)$ reikšmį atsitiktinį elementą

$$\underline{L}(s,\omega,\underline{\chi}), \quad \underline{\chi}=(\chi_1,...,\chi_r),$$

formule

$$\underline{L}(s,\omega,\underline{\chi})=(\underline{L}(s,\omega,\chi_1),...,\underline{L}(s,\omega,\chi_r)),$$

kurioje

$$L(s,\omega,\chi_j)=\prod_p\left(1-\frac{\chi_j(p)\omega(p)}{p^s}\right)^{-1}, \quad j=1,...,r.$$

Tegul $P_{\underline{L}}$ yra atsitiktinio elemento $\underline{L}(s,\omega,\underline{\chi})$ pasiskirstymas, tai yra, tikimybinis matas erdvėje $(H^r(D),\mathcal{B}(H^r(D))$, apibrėžiamas formule

$$P_{\underline{L}}(A)=m_H(\omega\in\Omega:\underline{L}(s,\omega,\underline{\chi})\in A), \quad A\in\mathcal{B}(H^r(D)).$$

Apibrėžiame tikimybinį matą P_T formule

$$P_T(A)=\text{meas}\frac{1}{T}\left\{\tau\in[0,T]:(L(s+i\tau,\chi_1),...,L(s+i\tau,\chi_r))\in A\right\},$$

$$A\in\mathcal{B}(H^r(D)).$$

Šiame skyrelyje įrodysime teoremą apie mato P_T silpnąjį konvergavimą, kai $T\to\infty$.

2.1 teorema. *Tikimybinis matas P_T, kai $T\to\infty$, silpnai konverguoja į matą $P_{\underline{L}}$.*

Šios teoremos įrodymas yra standartinis, todėl mes suformuluosime tik pagrindinius tvirtinimus, naudojamus įrodyme ir paaiškinsime jų sąryšį.

Pirmasis tvirtinimas yra apie tikimybinių matų, apibrėžtų mačioje erdvėje $(\Omega,\mathcal{B}(\Omega))$, silpnąjį konvergavimą. Apibrėžiamą tikimybinį matą Q_T formule

$$Q_T(A)=\frac{1}{T}\text{meas}\{\tau\in[0,T]:(p^{i\tau}:p\text{ yra pirminis})\in A\}, \qquad A\in\mathcal{B}(\Omega).$$

2.2 lema. *Tikimybinis matas Q_T, kai $T\to\infty$, silpnai konverguoja į Haro matą m_H.*

Lemos įrodymą galime rasti [6] monografijoje.

Tegul $\sigma_1 > \frac{1}{2}$ yra fiksuotas skaičius ir su visais $m, n \in \mathbb{N}$

$$v_n(m) = \exp\left\{-\left(\frac{m}{n}\right)^{\sigma_1}\right\}.$$

Su visais $j = 1, ..., r$ apibrėžiame

$$L_n(s, \chi_j) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi_j(m) v_n(m)}{m^s}.$$

Tuomet yra žinoma[6], kad pastaroji eilutė konverguoja absoliučiai pusplokštumėje $\sigma > \frac{1}{2}$. Panašiu būdu yra gaunama, kad eilutė

$$L_n(s, \omega_0, \chi_j) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi_j(m)\omega_0(m) v_n(m)}{m^s}$$

taip pat absoliučiai konverguoja pusplokštumėje $\sigma > \frac{1}{2}$. Apibrėžiame du tikimybinius matus

$$P_{T,n}(A) = \frac{1}{T}\text{meas}\{\tau \in [0, T] : (L_n(s + i\tau, \chi_1), ..., L_n(s + i\tau, \chi_r)) \in A\},$$

$$A \in \mathcal{B}(H^r(D)),$$

ir

$$\widehat{P}_{T,n}(A) = \frac{1}{T}\text{meas}\{\tau \in [0, T] : (L_n(s + i\tau, \omega_0, \chi_1), ..., L_n(s + i\tau, \omega_0, \chi_r)) \in A\},$$

$$A \in \mathcal{B}(H^r(D))$$

2.3 lema. *Tikimybiniai matai $P_{T,n}$ ir $\widehat{P}_{T,n}$, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į tą patį matą P_n.*

Įrodymas. Apibrėžiame funkciją $h_n : \Omega \longrightarrow H^r(D)$ formule

$$h_n(\omega) = (L_n(s, \omega, \chi_1), ..., L_n(s, \omega, \chi_r)), \omega \in \Omega.$$

Kadangi eilutės, apibrėžiančios funkcijas $L_n(s, \omega, \chi_j)$, konverguoja absoliučiai, tai funkcija h_n yra tolydi. Be to, iš jos apibrėžimo turime, kad

$$h_n(p^{-i\tau} : p \text{ yra pirminis}) = (L_n(s + i\tau, \chi_1), ..., L_n(s + i\tau, \chi_r)). \tag{2.1}$$

Toliau mums bus reikalinga tikimybinių matų silpnojo konvergavimo savybė. Tegul $(X, \mathcal{B}(X))$ ir $(X_1, \mathcal{B}(X_1))$ yra dvi mačios erdvės, o $h : X \to X_1$ yra $\mathcal{B}(X), \mathcal{B}(X_1)$ mati funkcija, tai yra,

$$h^{-1}\mathcal{B}(X_1) \subset \mathcal{B}(X).$$

(klasės $\mathcal{B}(X)$ pirmavaizdis guli klasėje $\mathcal{B}(X)$). Tuomet yra žinoma, kad kiekvienas tikimybinis matas P erdvėje $(X, \mathcal{B}(X))$ apibrėžia vienintelį tikimybinį matą Ph^{-1} erdvėje $(X_1, \mathcal{B}(X_1))$ formule

$$Ph^{-1}(A) = P(h^{-1}A), A \in \mathcal{B}(X1).$$

Be to, pasirodo, jog kai kuriais atvejais atvaizdžiai išlaiko silpnąjį konvergavimą. Yra teisingas toks tvirtinimas[2]. Tegul P_n, $n \in \mathbb{N}$, ir P yra tikimybiniai matai erdvėje $(X, \mathcal{B}(X))$, ir P_n, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į P. Jei funkcija h yra tolydi, tuomet ir $P_n h^{-1}$, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į Ph^{-1}.

Dabar tęsiame 2.2 lemos įrodymą. Iš matų $P_{T,n}$ ir Q_T apibrėžimų ir (2.1) turime, kad $P_{T,n} = Q_T h_n^{-1}$. Todėl iš čia, 2.2 lemos ir ką tik pateiktos silpnojo tikimybinių matų savybės gauname, kad $P_{T,n}$, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į matą $m_H h_n^{-1}$.

Lieka išnagrinėti mato $\widehat{P}_{T,n}$ silpnąjį konvergavimą. Apibrėžiame funkciją $\widehat{h}_n : \Omega \to H^r(D)$ formule

$$\widehat{h}_n(\omega) = (L_n(s, \omega\omega_0, \chi_1), ..., s, \omega\omega_0, \chi_r)), \omega \in \Omega.$$

Tuomet, pakartoję atvejo $P_{T,n}$ samprotavimus, gauname, kad $\widehat{P}_{T,n}$, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į matą $m_H \widehat{h}_n^{-1}$. Lieka įrodyti, kad $m_H h_n^{-1} = m_H \widehat{h}_n^{-1}$. Tegul funkcija $h : \Omega \to \Omega$ yra duota formule $h(\omega) = \omega\omega_0$, $\omega \in \Omega$. Tuomet turime, kad

$$\widehat{h}_n(\omega) = h_n(h(\omega)).$$

Iš čia, remdamiesi Haro mato invariantiškumu, randame, kad

$$m_H \widehat{h}_n^{-1} = m_H (h_n h)^{-1} = (m_H h^{-1}) h_n^{-1} = m_H h_n^{-1},$$

ir lema įrodyta.

2.1 teoremos įrodymui lieka pereiti nuo mato $P_{T,n}$ prie mato P_T. Tai pati sudėtingiausia įrodymo dalis. Pirma įrodysime dar vieną lemą. Kartu su matu P_T nagrinėsime matą

$$\widehat{P}_T(A) = \frac{1}{T} \text{meas}\{\tau \in [0,T] : (L(s+i\tau,\omega,\chi_1), ..., L(s+i\tau,\omega,\chi_n)) \in A\},$$

$$A \in \mathcal{B}(H^r(D)).$$

2.4 lema. *Tikimybiniai matai P_T ir $\widehat{P}_T$, kai $T \to \infty$ silpnai konverguoja į tą patį tikimybinį matą erdvėje $(H^r(D), \mathcal{B}(H^r(D)))$.*

2.4 lemos įrodymui mums dar reikės kai kurių sąvokų, susijusių su silpnuoju tikimybiniuų matų konvergavimu.

Sakome, kad tikimybinių matų šeima $\{P\}$ erdvėje $(X, \mathcal{B}(X))$ yra reliatyviai kompaktiška jeigu iš kiekvienos tos šeimos sekos galima išskirti silpnai konverguojantį posekį. Šeima $\{P\}$ yra vadinama suspausta, jeigu su kiekvienu $\varepsilon > 0$ egzistuoja tokia kompaktinė erdvės X aibė $K = K(\varepsilon)$, kad su visais šeimos $\{P\}$ matais P yra teisinga nelygybė

$$P(K) > 1 - \varepsilon.$$

Reliatyvaus kompaktiškumo ir suspaustumo sąlygas suriša Prochorovo teoremos[3]. Tiesioginė teorema tvirtina, kad jei matų šeima yra suspausta, tai ji yra ir reliatyviai kompakiška. Atvirkštinėje teoremoje yra reikalaujama, kad erdvė X būtų pilna ir separabili. Tuomet iš matų šeimos reliatyvaus kompaktiškumo išplaukia jos suspaustumas.

Tegul P_n yra ribinis matas 2.3 lemoje, tai yra $P_n = m_H h_n^{-1}$. Įrodysime, kad matų šeima $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ yra suspausta erdvėje $(H^r(D), \mathcal{B}(H^r(D)))$. Šiam tikslui mums dar bus reikalinga konvergavimo pagal pasiskirstymą sąvoka. Tegul yra ξ yra X reikšmis atsitiktinis elementas, apibrėžtas tikimybinėje erdvėje $(\widehat{\Omega}, \mathcal{B}(\widehat{\Omega}), \mathbb{P})$. Tai reiškia, kad su kiekviena aibe $A \in \mathcal{B}(X)$ yra teisingas sąryšis

$$\{\widehat{\omega} \in \widehat{\Omega} : \xi(\widehat{\omega}) \in A)\} \in \mathcal{B}(\widehat{\Omega}).$$

Elemento ξ pasiskirstymu yra vadinamas tikimybinis matas P_ξ, apibrėžiamas erdvėje $(X, \mathcal{B}(X))$ formule

$$P_\xi(A) = \mathbb{P}(\widehat{\omega} \in \widehat{\Omega} : \xi(\widehat{\omega}) \in A).$$

Tegul ξ_n, $n \in \mathbb{N}$, ir ξ yra X reikšmiai atsitiktiniai elementai, apibrėžti tikimybinėje erdvėje $(\widehat{\Omega}, \mathcal{B}(\widehat{\Omega}), \mathbb{P})$. Sakome, kad ξ_n, kai $n \to \infty$, konverguoja į ξ pagal pasiskirstymą ir žymime $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} \xi$, jeigu elemento ξ_n pasiskirstymas, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į elemento ξ pasiskirstymą.

Tegul θ yra atsitiktinis dydis, apibrėžtas tikimybinėje erdvėje $(\widehat{\Omega}, \mathcal{B}(\widehat{\Omega}), \mathbb{P})$ ir tolygiai pasiskirstęs intervale $[0, 1]$. Tai reiškia, kad jo pasiskirstmo funkcija turi pavidalą

$$\begin{cases} 0, & \text{kai} \quad x \le 0, \\ x, & \text{kai} \quad 0 < x \le 1, \\ 1, & \text{kai} \quad x > 1. \end{cases}$$

Erdvėje $(\widehat{\Omega}, \mathcal{B}(\widehat{\Omega}), \mathbb{P})$ apibrėžiame $H^r(D)$ reikšmį atsitiktinį elementą

$$\underline{Y}_{T,n} = \underline{Y}_{T,n}(s) = (Y_{T,n,1}(s), ..., Y_{T,n,r(s)}) = (L_n(s+i\theta T, \chi_1), ..., L_n(s+i\theta T, \chi_r)).$$

Tuomet iš 2.3 lemos turime, kad

$$\underline{Y}_{T,n} \xrightarrow[T\to\infty]{\mathcal{D}} \underline{Y}_n, \tag{2.2}$$

čia $\underline{Y}_n$ yra $H^r(D)$ reikšmis atsitiktinis elementas, kurio pasiskirstymas yra matas P_n. Tegul

$$\underline{Y}_n = \underline{Y}_n(s) = (Y_{n,1}(s), ..., Y_{n,r}(s)).$$

Imame kompaktinę aibę K_l iš metrikos ρ erdvėje $H(D)$ apibrėžimo. Tegul M_{jl} yra bet koks teigiamas skaičius, $j = 1, ..., r, \quad l \in \mathbb{N}$. Tuomet

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\sup_{s\in K_l} |Y_{T,n,j}(s)| &> M_{jl} \text{ su kuriuo nors } j\ ) \\
&= \mathbb{P}(\bigcup_{j=1}^{r} \{\sup_{s\in K_l} |Y_{T,n,j}(s)| > M_{jl}\}) \\
&\le \sum_{j=1}^{r} \mathbb{P}(\sup_{s\in K_l} |Y_{T,n,j}(s)| > M_{jl}) \\
&= \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{T} \text{meas}\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K_l} |Y_{T,n,j}(s+i\tau)| > M_{jl}\} \\
&\le \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{TM_{jl}} \int_0^T \sup_{s\in K_l} |L_n(s+i\tau, \chi_j)| d\tau. \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

Kadangi eilutė

$$L_n(s, \chi_j) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi_j(m)\nu_n(m)}{m^s}$$

konverguoja absoliučiai pusplokštumėje $\sigma > \frac{1}{2}$, tai iš Dirichlė eilučių sąvybių yra žinoma, kad toje pusplokštumėje

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int |L_n(\sigma + it, \chi_j)|^2 dt = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\chi_j(m)|^2 \nu_n^2(m)}{m^{2\sigma}} \le \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2\sigma}} < \infty.$$

Pasinaudoję integraline Koši formule bei standartiniu kontūriniu integravimu, iš čia gauname, kad su kuriais nors $C_l > 0$ ir $\sigma_l > \frac{1}{2}$ yra teisinga nelygybė

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sup_{s\in K_l} |L_n(s+i\tau, \chi_j)| d\tau \le C_l R_l \tag{2.4}$$

su

$$R_l = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2\sigma_l}} \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Tegul $\varepsilon > 0$ yra bet koks skaičius. Dabar skaičius M_{jl} parenkame taip: $M_{jl} = C_l R_l r 2^l \varepsilon^{-1}$. Tuomet iš (2.3) ir (2.4) nelygybių randame, kad

$$\begin{aligned} \limsup_{T\to\infty} \mathbb{P}(\sup_{s\in K_l} |Y_{T,n,j}(s)| &> M_{jl} \text{ su kuriuo nors } j) \\ &\leq \sum_{j=1}^{r} \frac{C_l R_l}{C_l R_l r 2^l \varepsilon^{-1}} = \frac{\varepsilon}{2^l r} \sum_{j=1}^{r} 1 = \frac{\varepsilon}{2^l}. \end{aligned}$$

Iš čia ir (2.2) sąryšio gauname, kad

$$\mathbb{P}(\sup_{s\in K_l} |Y_{n,j}(s)| > M_{jl} \text{ su kuriuo nors } j) \leq \frac{\varepsilon}{2^l}. \tag{2.5}$$

Apibrėžiame aibę

$$H_\varepsilon = \left\{ (g_1, ..., g_r) \in H^r(D) : \sup_{s\in K_l} |g_j(s)| \leq M_{jl}, \qquad j = 1, ..., r, \qquad l \in \mathbb{N} \right\}.$$

Tuomet aibė H_ε yra tolygiai aprėžta juostos D kompaktinėse aibėse, todėl ji yra kompaktinė erdvės $H^r(D)$ aibė. Be to, iš (2.5) nelygybės išplaukia, kad

$$\mathbb{P}(\underline{Y}_n \in H_\varepsilon) = 1 - \mathbb{P}(\underline{Y}_n \notin H_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^l} = 1 - \varepsilon \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \varepsilon$$

su visais $n \in \mathbb{N}$. Tai reiškia, kad matų šeima $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ yra suspausta. Todėl pagal Prochorovo teoremą ji yra reliatyviai kompaktinė. Vadinasi, egzistuoja toks posekis $\{P_{n_k}\} \subset \{P_n\}$, kad matas P_{n_k}, kai $k \to \infty$, silpnai konverguoja į kurį nors matą P erdvėje $(H^r(D), \mathcal{B}(H^r(D)))$. Kitaip tariant, gauname, kad

$$\underline{Y}_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{\mathcal{D}} P. \tag{2.6}$$

Apibrėžiame dar vieną $H^r(D)$ reikšmį atsitiktinį elementą $\underline{Y}_T$ formule

$$\underline{Y}_T(s) = (L(s + i\theta T, \chi_1), ..., L(s + i\theta T, \chi_r)).$$

Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
& \lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \mathbb{P}\left(\rho(\underline{Y}_T(s), \underline{Y}_{T,n}(s)) \geq \varepsilon\right) \\
= \; & \lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T}\text{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \rho\left(\underline{L}(s+i\tau,\underline{\chi}), \underline{L}_n(s+i\tau,\underline{\chi})\right) \geq \varepsilon\right\} \\
\leq \; & \lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{\varepsilon T}\int_0^T \rho\left(\underline{L}(s+i\tau,\underline{\chi}), \underline{L}_n(s+i\tau,\underline{\chi})\right) d\tau. \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

[6] monografijoje yra gauta, kad su kiekviena juostos D kompaktine aibe K yra teisingas sąryšis

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \sup_{s\in K_l} |L(s+i\tau,\chi) - L_n(s+i\tau,\chi)| \, d\tau = 0.$$

Pastaroji lygybė yra teisinga su bet kuriuo charakteriu χ. Iš čia ir metrikos ρ apibrėžimo išplaukia, kad

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \rho\left(\underline{L}(s+i\tau,\underline{\chi}), \underline{L}_n(s+i\tau,\underline{\chi})\right) d\tau = 0.$$

Sugrįžę prie (2.7) formulės gauname, kad

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \mathbb{P}\left(\rho(\underline{Y}_T(s), \underline{Y}_{T,n}(s)) \geq \varepsilon\right) = 0.$$

Ši lygybė ir (2.2) bei (2.6) sąryšiai rodo jog yra išpildytos 4.2 teoremos iš [2] monografijos sąlygos. Pritaikę minėtą teoremą, gauname, kad

$$\underline{Y}_T \xrightarrow[T\to\infty]{\mathcal{D}} P. \qquad (2.8)$$

Pastarasis sąryšis rodo, jog matas P_T, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į matą P. Be to, iš (2.8) turime, kad matas P neprilauso nuo matų sekos $\{P_{n_k}\}$ parinkimo. Taigi, yra teisingas sąryšis

$$\underline{Y}_T \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} P. \qquad (2.9)$$

Lieka parodyti, kad matas $\widehat{P}_T$, kai $T \to \infty$, taip pat silpnai konverguoja į matą P. Apibrėžiame $H^r(D)$ reikšmis atsitiktinius elementus

$$\underline{\widehat{Y}}_{T,n} = \underline{\widehat{Y}}_{T,n}(s) = (L_n(s+i\theta T,\omega,\chi_1), ..., L_n(s+i\theta T,\omega,\chi_r))$$

ir

$$\underline{\widehat{Y}}_T = \underline{\widehat{Y}}_T(s) = (L(s+i\theta T, \omega, \chi_1), ..., L(s+i\theta T, \omega, \chi_r))\,.$$

Tuomet, pakartoję ankstesnius samprotavimus šiems atsitiktiniams elementams ir pasinaudoję 2.3 lema bei (2.9) sąryšiu, gauname, kad

$$\underline{\widehat{Y}} \xrightarrow[T\to\infty]{\mathcal{D}} P.$$

Šis sąryšis įrodo, kad matas $\hat{P}_T$, kai $T \to \infty$, taip pat silpnai konverguoja į matą P.

Lema įrodyta.

2.1 teoremos įrodymas. Tegul A yra bet kuri fiksuota ribinio mato P 2.4 lemoje tolydumo aibė. Tai reiškia, kad jei ∂A yra aibės A kraštas, tai $P(\partial A) = 0$. Panaudoję silpnojo tikimybinių matų konvergavimų ekvivalentą tolydumo aibių terminais, iš 2.4 lemos turime, kad

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \text{meas}\,\{\tau \in [0,T] : (L(s+i\tau, \omega, \chi_1), ..., L(s+i\tau, \omega, \chi_r)) \in A\} = P(A). \quad (2.10)$$

Tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$ apibrėžiame atsitiktinį dydį $\hat{\theta}$ formule

$$\hat{\theta}(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{kai } \underline{L}(s, \omega, \underline{\chi}) \in A, \\ 0, & \text{kai } \underline{L}(s, \omega, \underline{\chi}) \notin A. \end{cases}$$

Simboliu $\mathbb{E}(\hat{\theta})$ žymėsime atsitiktinio dydžio $\hat{\theta}$ vidurkį. Iš atsitiktinio dydžio $\hat{\theta}$ ir vidurkio apibrėžimų randame, kad

$$\mathbb{E}(\hat{\theta}) = \int_\Omega \hat{\theta} dm_H = m_H(\omega \in \Omega : \underline{L}(s, \omega, \underline{\chi}) \in A) = P_{\underline{L}}(A). \quad (2.11)$$

Primename, kad $P_{\underline{L}}(A)$ yra atsitiktinio elemeneto $\underline{L}(s, \omega, \underline{\chi})$ pasiskirstymas. Dabar pasinaudosime kai kuriais ergodinės teorijos elementais. Tegul

$$a_\tau = \{p^{-it} : p \text{ yra pirminis}\}, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Apibrėžiame toro Ω transformacijų šeimą $\{\varphi_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$ formule

$$\varphi_\tau(\omega) = a_\tau \omega, \quad \omega \in \Omega.$$

Tuomet turime, kad φ_τ yra mačių, matą išlaikančių toro Ω transformacijų grupė. [6] monografijoje yra įrodyta, kad ši grupė yra ergodinė. Iš čia išplaukia, kad atsitiktinis procesas $\hat{\theta}(\varphi_\tau(\omega))$ taip pat yra ergodinis. Todėl jam galioja klasikinė Birkhofo-Chinčino ergodinė teorema [3], kurią pritaikę gauname, kad beveik visiems $\omega \in \Omega$ yra teisinga lygybė

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \hat{\theta}(\varphi_\tau(\omega)) d\tau = \mathbb{E}(\hat{\theta}). \tag{2.12}$$

Pasinaudoję $\hat{\theta}$ ir φ_τ apibrėžimais randame, kad

$$\frac{1}{T} \int_0^T \hat{\theta}(\varphi_\tau(\omega)) d\tau = \frac{1}{T} \text{meas} \left\{ \tau \in [0, T] : \underline{L}(s + i\tau, \omega, \underline{\chi}) \in A \right\}.$$

Ši lygybė kartu su (2.11) ir (2.12) lygybėmis parodo, kad su beveik visais $\omega \in \Omega$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \text{meas} \left\{ \tau \in [0, T] : \underline{L}(s + i\tau, \omega, \underline{\chi}) \in A \right\} = P_{\underline{L}}(A).$$

Iš čia ir (2.10) turime lygybę

$$P(A) = P_{\underline{L}}(A).$$

Aišku, kad ši lygybė teisinga su visomis mato P tolydumo aibėmis A. Yra žinoma, kad tolydumo aibės sudaro tikimybinio mato apibrėžiančią klasę[2]. Taigi, galutinai gauname kad $P(A) = P_{\underline{L}}(A)$ su visomis aibėmis $A \in \mathcal{B}(H^r(D))$. Teorema įrodyta.

3. Ribinio mato atrama

3 teoremos įrodymas remiasi ribinio mato $P_{\underline{L}}$ 2.1 teoremoje atramos išreikštiniu pavidalu. Priminsime tikimybinio mato atramos apibrėžimą. Tarkime, kad X yra separabili metrinė erdvė, o P yra tikimybinis matas erdvėje $(X, \mathcal{B}(X))$. Mato P atrama yra vadinama minimali uždara aibė $S_P \subset X$, su kuria $P(S_P) = 1$. Aibė S_P yra sudaryta iš tokių erdvės X elmenetų x, kurių bet kuriai atvirai aplinkai G galioja nelygybė

$$P(G) > 0.$$

Atsitiktinio elemento atrama yra vadinama to elemento pasiskirstymo atrama.

Šiame skyrelyje nagrinėsime $H^r(D)$ reikšmio atsitiktinio elemento $\underline{L}(s, \omega, \underline{\chi})$ atramą, kuri yra ir elemento $P_{\underline{L}}$ atrama. Apibrėžiame

$$S = \{g \in H(D) : g^{-1}(s) \in H(D) \quad \text{arba} \quad g(s) \equiv 0\}.$$

3.1 teorema. *Tarkime, kad $\chi_1, ..., \chi_r$ yra kas du neekvivalentūs Dirichlė charakteriai. Tuomet mato $P_{\underline{L}}$ atrama yra aibė $S^r = \underbrace{S \times ... \times S}_{r}$.*

Šios teoremos įrodymui yra reikalinga visa eilė papildomų rezultatų. Atsitiktinio elemento ξ atramą žymėsime S_ξ.

3.2 lema. *Tegul $\{\underline{X}_m : m \in \mathbb{N}\}$ yra tokių nepriklausomų $H^r(D)$ reikšmių atsitiktinių elementų seka, kad eilutė*

$$\sum_{m=1}^{\infty} X_m$$

konevrguoja beveik tikrai. Tuomet tos eilutės sumos atrama yra lygi aibės visų tokių elementų $\underline{g} \in H^r(D)$, kurie yra užrašomi konverguojančia eilute

$$\underline{g} = \sum_{m=1}^{\infty} \underline{g}_m, \underline{g}_m \in S_{\underline{X}_m},$$

uždariniui.

Lema yra 5 lemos, įrodytos [8] darbe, specialusis atvejis.

3.3 lema. *Tarkime, kad seka $\{\underline{g}_m : m \in \mathbb{N}\} = \{(g_{1m}, ..., g_{rm}) : m \in \mathbb{N}\} \subset H^r(D)$ tenkina sąlygas:*

1° *Tegul $\mu_1, ..., \mu_r$ yra kompleksiniai Borelio matai erdvėje $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$, turintys kompaktines atramas, priklausančias juostai D, ir tenkinantys sąlygą*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{r} g_{jm}(s) d\mu_j(s) \right| < \infty.$$

Tuomet su visais $j = 1, ..., r$ ir $l \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup 0$ yra teisinga lygybė

$$\int_{\mathbb{C}} s^l d\mu_j(s) = 0;$$

2° *Su bet kuria kompaktine aibe $K \subset D$ eilutė*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{r} \sup_{S \in K} \left| g_{jm}(s) \right|^2$$

konverguoja;

3° *Eilutė*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \underline{g}_m$$

konverguoja erdvėje $H^r(D)$.

Tuomet aibė visų konverguojančių eilučių

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m \underline{g}_m$$

su $|a_m| = 1$ yra visur tiršta erdvėje $H^r(D)$.

Lema yra 6 lemos, įrodytos [8], atskiras atvejis.

3.4 lema. *Tegul* μ *yra kompleksinis Borelio matas erdvėje* $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$, *kurio kompaktinė atrama priklauso pusplokštumei* $\{s \in \mathbb{C} : \sigma > \sigma_0\}$, *ir*

$$g(s) = \int_{\mathbb{C}} c^{sz} d\mu(z).$$

Tarkime, kad $g(s) \not\equiv 0$. *Tuomet*

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{\log |g(x)|}{x} > \sigma_0.$$

Lema yra 6.4.10 lema iš [6] monografijos .

Dabar priminsime eksponentinio tipo funkcijos sąvoką. Tegul $0 < \theta_0 \leq \pi$. Funkcija $g(s)$, analizinė kampinėje srityje $|\arg s| \leq \theta_0$, yra vadinama eksponentinio tipo funkcija jeigu tolygiai θ atžvilgiu, $|\theta| \leq \theta_0$,

$$\limsup_{r \to \infty} \frac{\log |g(re^{i\theta})|}{r} < \infty.$$

3.5 lema. *Tarkime, kad* $g(s)$ *yra tokia eksponentinio tipo funkcija, kad*

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{\log |g(s)|}{x} > -1.$$

Tuomet visiems l, *tarpusavyje pirminiams su* k,

$$\sum_{p \equiv l \pmod k} \big| g(\log p) \big| = +\infty.$$

Lema yra 4.1 lema, įrodyta [7] straipsnyje.

Kiekvienas Dirichlė charakteris yra tolydus homomorfizmas, atvaizduojantis sveikų teigiamų skaičių aibę nelygių nuliui kompleksinių skaičių multiplikatyvioje grupėje (tiksliau - vienetiniame apskritime). Todėl mato $P_{\underline{L}}$ atramos nagrinėjimui bus naudingas toks tvirtinimas.

3.5 lema. *Tarkime, kad* $h_1, ..., h_r$ *yra skirtingi homomorfizmai iš grupės* G *į nelygių nuliui kompleksinių skaičių multiplikatyvią grupę. Tuomet* $h_1, ..., h_r$ *yra tiesiškai nepriklausomi virš kompleksinio kūno* $\mathbb{C}$.

Lemos įrodymą galima rasti [5] monografijoje.

3.1 teoremos įrodymas. Tegul

$$g_{jp}(s,\omega) = -\frac{\chi_j(p)\omega(p)}{p^s}, j = 1, ..., r.$$

Tuomet atsitiktinį elementą $\underline{L}(s,\omega,\underline{\chi})$ galima užrašyti pavidalu

$$\underline{L}(s,\omega,\underline{\chi}) = \Big(\prod_p \big(1 + g_{1p}(s,\omega)\big)^{-1}, ..., \prod_p \big(1 + g_{rp}(s,\omega)\big)^{-1}\Big). \tag{3.1}$$

Skritulyje $|z| < 1$ funkciją $\log(1+z)$ apibrėžiame formule

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - ....$$

Tuomet funkcija $\log(1 + g_{jp}(s,\omega))$, $s \in D$, $j = 1, ..., r$, yra apibrėžta korektiškai, nes toje srityje $|g_{pj}(s,\omega)| < 1$. Todėl vietoje (3.1) atsitiktinio elemento atramos galime nagrinėti patogesnio atsitiktinio elemento

$$\Big(-\sum_p \log(1 + g_{1p}(s,\omega)), ..., -\sum_p \log(1 + g_{rp}(s,\omega))\Big) \tag{3.2}$$

atramą.

Sandauga

$$\prod_p (1 + g_{jp}(s,\omega))^{-1}$$

yra $H(D)$ reikšmis atsitiktinis elementas, todėl beveik visiems $\omega \in \Omega$ ji konverguoja tolygiai kompaktinės juostos D aibėse, $j = 1, ..., r$. Tegul

$$\underline{g}_p(s,\omega) = \big(g_{1p}(s,\omega), ..., g_{rp}(s,\omega)\big).$$

Tuomet iš šių pastabų turime, kad egzistuoja tokia seka $\underline{b} = \{b_p : |b_p| = 1\}$, su kuria eilutė

$$\sum_p \underline{g}(s,\underline{b}) \tag{3.3}$$

konverguoja erdvėje $H^r(D)$. Be to, kadangi $\left|g_{jp}(s,\underline{b})\right|\leq \frac{1}{p^\sigma}$, tai su bet kuria kompaktine juostos D aibe K eilutė

$$\sum_p \sum_{j=1}^r \sup_{s\in K}\left|g_{jp}(s,\underline{b})\right|^2$$

konverguoja. Taigi turime, kad seka $\{g_p(s,\underline{b})\}$ tenkina 3.3 lemos 2° ir 3° sąlygas. Lieka patikrinti tos lemos 1° sąlygą.

Tegul p_0 yra fiksuotas teigiamas skaičius, o kompleksiniai matai $\mu_1,...,\mu_r$ erdvėje $(\mathbb{C},\mathcal{B}(\mathbb{C}))$ su kompaktinėmis atramomis juostoje D tenkina sąlygą

$$\sum_{p>p_0}\left|\sum_{j=1}^r \int_{\mathbb{C}} g_{jp}(s,\underline{b})d\mu_j(s)\right|< \infty. \tag{3.4}$$

Tarkime, kad d yra charakterių $\chi_1,...,\chi_r$ modulių sandauga. Tuomet kiekvienas iš tų charakterių yra periodinė funkcija su periodu d. Iš čia ir funkcijos $g_{jp}(s,\underline{b})$ apibrėžimo išplaukia, kad (3.4) sąlygą galima užrašyti pavidalu

$$\sum_{p>p_0}\left|\sum_{j=1}^r \chi_j(l)\int_{\mathbb{C}} \frac{1}{p^s}d\mu_j(s)\right|< \infty$$

su visais $l=1,...,d,\quad (l,d)=1$. Aibėms $A\in\mathcal{B}(\mathbb{C})$ apibrėžiame

$$\nu_l(A)=\sum_{j=1}^r \chi_j(l)\mu_j(A),\qquad l=1,..,d,\qquad (l,d)=1.$$

Kadangi $\mu_1,...,\mu_r$ yra kompleksiniai matai su kompaktinėmis atramomis juostoje D, tai tokią pat savybę turi ir matai $\nu_1,...,\nu_r$. Panaudoję žymenį

$$\rho_l(z)=\int_{\mathbb{C}} e^{-sz}d\nu_l(s),\qquad l=1,...,d,\qquad (l,d)=1, \tag{3.5}$$

(3.5) sąlygą tuomet galima užrašyti pavidalu

$$\sum_{\substack{p>p_0\\ p\equiv l \pmod d}}\left|\rho_l(\log p)\right|< \infty,\qquad l=1,...,d,\qquad (l,d)=1. \tag{3.6}$$

Iš apibrėžimo matome, kad funkcija $\rho_l(z)$ yra eksponentinio tipo, todėl, remdamiesi 3.4 lema turime, kad $\rho_l(z) \equiv 0$, arba

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\log|\rho_l(x)|}{x} > -1, \quad l = 1, ..., d, \quad (l, d) = 1.$$

Jeigu paskutinė lygybė yra teisinga su kuriuo nors $l = 1, ..., d, \qquad (l, d) = 1$, tai iš 3.5 lemos išplaukia, kad tai l reikšmei

$$\sum_{\substack{p>p_0 \\ p\equiv l \pmod d}} \left|\rho_l(\log p)\right| = \infty,$$

tačiau tai prieštarauja (3.6) sąlygai. Taigi, su visais $l = 1, ..., d, \quad (l, d) = 1$, turi būti teisinga lygybė $\rho_l(z) \equiv 0$. Iš čia ir funkcijos $\rho_l(z)$ bei matų ν_l apibrėžimo randame, kad

$$\sum_{j=1}^{r} \chi_j(l) \int_{\mathbb{C}} e^{-sz} d\mu_j(s) \equiv 0, \qquad l = 1, ..., d, \qquad (l, d) = 1. \tag{3.7}$$

Dabar pasinaudosime prielaida, kad charakteriai $\chi_1, ..., \chi_r$ yra poromis neekvivalentūs. Ši prielaida leidžia remtis 3.6 lema, kurią pritaikę iš (3.7) lygybių gauname

$$\int_{\mathbb{C}} e^{-sz} d\mu_j(s) \equiv 0, \quad j = 1, ..., r.$$

Gautą lygybę diferencijuojame z atžvilgiu ir įstatome $z = 0$. Ši procedūra duoda lygybę

$$\int_{\mathbb{C}} s^m d\mu_j(s) = 0, \qquad m \in \mathbb{N}_0, \quad j = 1, ..., r.$$

Pastaroji lygybė reiškia, kad seka $\{\underline{g}_p(s, \underline{b})\}$ taip pat tenkina 3.3 lemos 1° sąlygą. Todėl iš 3.3 lemos išplaukia, kad aibė visų konverguojančių eilučių

$$\sum_{p>p_0} \hat{a}(p) g_p(s, \underline{b}) \tag{3.8}$$

su $|\hat{a}(p)| = 1$ yra visur tiršta $H^r(D)$.

Imame bet kokį $\varepsilon > 0$ ir bet kurią kompaktinę aibę $K \subset D$. Tegul $\underline{x}_0 = (x_{10}(s), ..., x_{n0}(s))$ yra bet kuris erdvės $H^r(D)$ elementas. Tuomet egzistuoja toks p_0, kad su bet kuriuo $\underline{a} = \{a(p) : |a(p)| = 1\}$

$$\max_{1\le j\le r} \sup_{s\in K} \left(\sum_{p>p_0} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|g_{jp}(s, \underline{a}|^k)}{k} \right) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.9}$$

Iš (3.8) eilučių aibės tirštumo išplaukia, kad egzistuoja tokia seka $\underline{\hat{a}} = \{\hat{a}(p) : |\hat{a}(p)| = 1\}$ su kuria

$$\max_{1\le j\le r} \sup_{s\in K} \left| x_{j0}(s) - \sum_{p\le p_0} \log(1 + g_{jp}(s, 1)) - \sum_{p>p_0} \hat{a}(p) g_{jp}(s, \underline{b}) \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.10}$$

Tegul

$$a(p) = \begin{cases} \hat{a}(p), & \text{jei} \quad p > p_0, \\ 1, & \text{jei} \quad p \le p_0, \end{cases}$$

ir $\underline{a} = \{a(p)\}$. Tuomet iš (3.9) ir (3.10) randame, kad

$$\begin{aligned} & \max_{1\le j\le r} \sup_{s\in K} \left| x_{j0}(s) - \sum_{p} \log(1 + g_{jp}(s, \underline{a})) \right| \\ \le \; & \max_{1\le j\le r} \sup_{s\in K} \left| x_{j0}(s) - \sum_{p\le p_0} \log(1 + g_{jp}(s, 1)) - \sum_{p>p_0} \hat{a}(p) g_{jp}(s, \underline{b}) \right| \\ + \; & \max_{1\le j\le r} \sup_{s\in K} \left| \sum_{p>p_0} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{g_{jp}^k(s, \underline{a})}{k} - \sum_{p>p_0} \frac{\hat{a}(p)\chi_j(p) b_p}{p^s} - \sum_{p>p_0} \frac{\chi_j(p) a(p)}{p^s} \right| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Tai reiškia, kad aibė visų konverguojančių eilučių

$$-\sum_{p} (\log(1 + g_{1p}(s, \underline{a})), ..., \log(1 + g_{rp}(s, \underline{a}))) \tag{3.11}$$

su $|a(p)| = 1$ yra visur tiršta erdvėje $H^r(D)$.

Iš toro Ω apibrėžimo išplaukia, kad $\{\omega(p)\}$ yra nepriklausomų atsitiktinių dydžių, apibrėžtų tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$, seka. Iš čia turime, kad

$$\{\log(1+g_{1p}(s,\omega)),...,\log(1+g_{rp}(s,\omega))\}$$

yra nepriklausomų $H^r(D)$ reikšmių atsitiktinių elementų, apibrėžtų tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$, seka. Kiekvieno atsitiktinio elemento $\omega(p)$ atrama yra vienetinis apskritimas , todėl aibė

$$\{(g_0,...,g_r)\} \in H^r(D) : g_j(s) = \log(1+g_{jp}(s,\underline{a})), \qquad j=1,...,r\}$$

su $\underline{a} = \{a(p) : |a(p)| = 1\}$ yra $H^r(D)$ reikšmio atsitiktinio elemento

$$(\log(1+g_{1p}(s,\omega)),...,\log(1+g_{rp}(s,\omega)))$$

atrama.

Iš čia ir 3.2 lemos išplaukia, kad (3.2) atsitiktinio elemento atrama yra (3.11) konverguojančių eilučių aibės uždarinys. Tačiau mes įrodėme, kad ši aibė yra visur tiršta erdvėje $H^r(D)$, todėl (3.2) atsitiktinių elementų atrama sutampa su visa erdve $H^r(D)$.

Tegul funkcija $u : H^r(D) \to H^r(D)$ yra duota formule

$$u(g_1,...,g_r) = (e^{g_1},...,e^{g_r}), \qquad (g_1,...,g_r) \in H^r(D).$$

Aišku, kad u yra tolydžioji funkcija, vektoriui

$$\left(-\sum_p \log(1+g_{1p}(s,\omega)),...,-\sum_p \log(1+g_{rp}(s,\omega))\right)$$

priskirianti vektorių

$$\left(\prod_p (1+\log(1+g_{1p}(s,\omega))^{-1},...,\prod_p (1+\log(1+g_{rp}(s,\omega))^{-1}\right) \qquad (3.12)$$

ir atvaizduojantį erdvę $H^r(D)$ į aibę $(S \backslash \{0\})^r$. Tai ir (3.2) atsitiktinio elemento atrama (visa erdvė $H^r(D)$) rodo, kad (3.12) atsitiktinio elemento atramai priklauso $(S \backslash \{0\})^r$. Kadangi atrama yra uždara aibė, tai iš čia turime, kad (3.12) elementų atramai priklauso S^r, nes aibės $(S\backslash\{0\})^r$ uždarinys yra aibė S^r. Dabar įrodysime, tvirtinimą į kitą pusę. Sandaugų

$$\prod_p (1 + g_{1p}(s, \omega))^{-1}, \qquad j = 1, ..., r,$$

visi daugikliai yra nelygūs nuliui, ir jos beveik visiems $\omega \in \Omega$ konverguoja tolygiai juostos D kompaktinėse aibėse. Todėl iš čia turime, kad aibei S^r priklauso (3.12) atsitiktinių elementų atrama. Iš čia ir anksčiau įrodyto priešingo tvirtinimo gauname, kad (3.12) atsitiktinio elemento atrama yra aibė S^r. Teorema įrodyta.

4. Pagrindinės teoremos įrodymas

Šiame skyrelyje įrodysime pagrindinę magistro darbo teoremą apie jungtinį Dirichlė L funkcijų universalumą.

4.1 teorema. *Tarkime, kad $\chi_1, ..., \chi_r$ yra kas du neekvivalentūs Dirichlė charakteriai. Su kiekvienu $1 \leq j \leq r$, tegul K_j yra kompaktinė juostos D aibė, turinti jungųjį papildinį, o funkcija $f_j(s)$ yra tolydi ir neturi nulių aibėje K_j ir yra analizinė aibės K_j viduje. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{T \longrightarrow \infty} \frac{1}{T} \text{meas}\{\tau \in [0, T] : \sup_{1 \leq j \leq r} \sup_{s \in K_j} |L(s + i\tau, \chi_j) - f_j(s)| < \varepsilon\} > 0.$$

Mums bus reikalingos dar dvi lemos. Pirmiausia formuluojame Mergeliano teoremą apie analizinių funkcijų aproksimavimą polinomais.

4.2 lema. *Tegul K yra kompaktinė aibė kompleksinėje plokštumoje, turinti jungųjį papildinį, o funkcija $f(s)$ yra tolydi aibėje K ir analizinė aibės K viduje. Tuomet kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuoja toks polinomas $p(s)$, kad*

$$\sup_{s \in K} |f(s) - p(s)| < \varepsilon.$$

Lemos įrodymą galima rasti [14] monografijoje. Dar priminsime silpnojo mato konvergavimo ekvivalentą atvirųjų aibių terminais.

4.3 lema. *Tarkime, kad P_n, $n \in \mathbb{N}$, ir P yra tikimybiniai matai erdvėje $(X, \mathcal{B}(X))$. Tuomet P_n, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į matą P tada ir tik tada, kai su kiekviena atvira erdvės X aibę G yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{n \to \infty} P_n(G) \leq P(G).$$

Lema yra 2.1 teoremos iš [2] dalis.

4.1 teoremos įrodymas. Iš 4.2 lemos turime, kad egzistuoja tokie polinomai $p_1(s), ..., p_r(s)$, jog

$$\sup_{1\le j\le r}\sup_{s\in K}|f_j(s)-p_j(s)|<\frac{\varepsilon}{4}. \tag{4.1}$$

Kadangi funkcijos $f_j(s)\neq 0$ aibėje K_j, tai iš čia gauname, kad ir polinomai $p_j(s)$ neturi nulių aibėje K_j. Todėl aibėje K_j galima apibrėžti tolydžią logaritmo $\log(p_j(s))$ šaką, kuri bus analizinė aibės K_j viduje. Vėl pritaikę 4.2 lemą, gauname, kad egzistuoja tokie polinomai $\hat{p}_1(s), ..., \hat{p}_r(s)$, kad

$$\sup_{1\le j\le r}\sup_{s\in K}|f_j(s)-e^{\hat{p}_j(s)}|<\frac{\varepsilon}{4}.$$

Iš čia ir (4.1) randame, kad

$$\begin{aligned}\sup_{1\le j\le r}\sup_{s\in K} &| f_j(s)-e^{\hat{p}_j(s)}|\\ &\le \sup_{1\le j\le r}\sup_{s\in K}|f_j(s)-p_j(s)|+\sup_{1\le j\le r}\sup_{s\in K}|f_j(s)-e^{\hat{p}_j(s)}|\\ &< \frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}\tag{4.2}$$

Apibrėžiame aibę

$$G=\left\{(g_1,...,g_r)\in H^r(D):\sup_{1\le j\le r}\sup_{s\in K}|e^{\hat{p}_j(s)}-g_j(s)|<\frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Tuomet aibė G yra atvira, todėl iš 2.1 teoremos ir 4.3 lemos gauname, kad

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}\text{meas}\{\tau\in[0,T]:(L(s+i\tau,\chi_1,...,L(s+i\tau,\chi_r))\in G\}\ge P_{\underline{L}}(G). \tag{4.3}$$

Pagal 3.1 teoremą, $(e^{\hat{p}_1(s)},...,e^{\hat{p}_1(s)})$ yra mato $P_{\underline{L}}$ atramos elementas. Kadangi G yra šio elemento atviroji aplinka, tai turime, kad $P_{\underline{L}}(G)>0$. Iš čia, aibės G apibrėžimo ir (4.3) nelygybės randame, kad

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}\text{meas}\left\{\tau\in[0,T]:|L(s+i\tau,\chi_j)-e^{\hat{p}_j(s)}|<\frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Taigi, teoremos tvirtinimas yra pastarosios ir (4.2) nelygybių išvada.

Summary

Joint universality theorem for Dirichlet L-functions

Let χ be a Dirichlet character modulo q, and $s = \sigma + it$ be a complex variable. A Dirichlet L-function $L(s, \chi)$ is defined, for $\sigma > 1$, by

$$L(s, \chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)}{m^s},$$

and is analytically continued to the whole complex plane. It is known that the function $L(s, \chi)$ is universal in the sense that the shifts $L(s + i\tau, \chi), \tau \in \mathbb{R}$, approximate any analytic function. Also, Dirichlet L-functions are jointly universal. This means that a collection $L(s, \chi_1), ..., L(s, \chi_r)$ approximate a collection of given analytic functions.

The master work is devoted to the proof of a modern joint universality theorem for Dirichlet L-functions. This theorem is known, however, its proof is not given in literature. We remove this gap, and prove the following theorem. Let $\text{meas}\{A\}$ denote the Lebesgue measure of a measurable set $A \subset \mathbb{R}$.

Theorem. *Suppose that $\chi_1, ..., \chi_r$ are pairwise non-equivalent Dirichlet characters. For $j = 1, ..., r$, let K_j be a compact subset of the strip $\{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\}$ with connected complement, and $f_j(s)$ be a continuous non-vanishing function on K_j. Then for every $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{T \to \infty} \frac{1}{T} \text{meas} \left\{ \tau \in [0, T] : \sup_{1 \le j \le r} \sup_{s \in K_j} |L(s + i\tau, \chi_j) - f_j(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Literatūra

1. Bagchi B. *A joint universality theorem for Dirichlet L-functions*, Math. Z,181, 1982, 319-334

2. Billingsley P. *Convergence of Probability Measures*, Wiley, New York, 1968.

3. Cramer H., Leadbetter M. R. *Stationary and Related Stochastic Processes*, Wiley, New York, 1967.

4. Gonek S. M. *Analytic properties of zeta and L-function*, PhD. Thesis, University of Michigan, 1979.

5. Lang S. *Algebra*, Reading Mass., Addison-Wesley, 1967.

6. Laurinčikas A. *Limit Theorems for the Riemann Zeta-function*, Kluwer, Dordrecht, 1996.

7. Laurinčikas A., Matsumoto K. *The joint universality and the functional independence for Lerch zeta-functions*, Nagoya Math. J. 157, 2000, 211-299.

8. Laurinčikas A., Matsumoto K. *The joint universality of zeta-functions attached to certain cusp forms*, Fiz. Mat. Fak. Moks. Semin Darb. 5, 2002, 58-78.

9. Paulauskas V., Račkauskas A. *Funkcinė analizė. I knyga. Erdvės*, Vaistų žinios, Vilnius, 2007.

10. Prachar K. *Raspredelenie prostych čisel*, Mir, Moskva, 1967 (rusų kalba).

11. Rudinas V. *Funkcinė analizė*, Mokslas, Vilnius, 1983.

12. Voronin S. M. *Theorem on the "universality" of the Riemann zeta-function*, Izv. AN SSSR, Ser. Matem., **39**, 1975. 475-486 (rusų kalba).

13. Voronin S. M. *The function independence of Dirichlet L-function*, Acta Arith. **27** , 1975. 493-503 (rusų kalba).

14. Walsh J. L. *Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain*, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. 20, 1960.