

VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

Magistro darbas

**PORTFELIO RIZIKUOJAMOSIOS VERTĖS NUSTATYMAS
TAIKANT DAUGIAMAČIUS SĄLYGINIO
HETEROSKEDASTIŠKUMO MODELIOUS**

**PORTFOLIO VALUE-AT-RISK ESTIMATION USING
MULTIVARIATE GARCH MODELS**

IRENA MIKOLAJUN

VILNIUS 2008

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
EKONOMETRINĖS ANALIZĖS KATEDRA

Darbo vadovas _____
(Vadovo pareigos, vardas, pavardė) (parašas)

Darbas apgintas 2008 m. gegužės mėn. 28 d.
Gynimo posėdžio protokolo Nr. _____
Darbas įvertintas _____

Registravimo Nr. _____
2008-05-20 _____

TURINYS

ANOTACIJA.....	1
ĮVADAS	2
1. TEORINĖ DALIS	4
1.1. RIZIKUOJAMOSIOS VERTĖS SAŲOKA.....	4
1.2. RIZIKUOJAMOSIOS VERTĖS NUSTATYMO METODAI	5
1.3. DAUGIAMAČIAI SAĲYGINIO HETEROSKEDASTIŠKUMO MODELIAI	8
1.3.1. <i>VEC, diagonalinis GARCH ir BEKK modeliai</i>	9
1.3.2. <i>CCC ir DCC modeliai</i>	10
1.3.3. <i>Faktorinis ir ortogonalusis GARCH modeliai</i>	12
2. PRAKTINĖ DALIS.....	15
2.1. DUOMENŲ APRAŠYMAS IR PIRMINĖ ANALIZĖ	15
2.2. SAĲYGINĖS AKCIJŲ GRAŲŲ KOVARIACIJŲ MATRICOS VERTINIMAS	19
2.2.1. <i>DCC modelio taikymas ir diagnostika</i>	19
2.2.2. <i>Faktorinio (O-GARCH) modelio taikymas ir diagnostika</i>	31
2.3. RIZIKUOJAMOSIOS VERTĖS VERTINIMAS	41
2.4. RIZIKUOJAMOSIOS VERTĖS PROGNOZAVIMO ĮVAIRIAIS MODELIAIS PALYGINIMAS.....	51
IŠVADOS.....	56
LITERATŪRA IR ŠALTINIAI	58
PRIEDAI	60

ANOTACIJA

Darbe nagrinėjamas akcijų portfelio rizikuojamosios vertės nustatymas dispersijos-kovariacijos metodu taikant daugiamačius sąlyginio heteroskedastiškumo modelius. Naudojant Baltijos šalių akcijų rinkos duomenis yra įvertinami du daugiamačiai sąlyginio heteroskedastiškumo modeliai – DCC ir O-GARCH. Remiantis šių modelių rezultatais, apskaičiuojamos portfelių, sudarytų iš dešimties Baltijos šalių bendrovių akcijų, rizikuojamosios vertės, taikant dispersijos-kovariacijos metodą. Siekiant gauti tikslesnius rizikuojamosios vertės įverčius, dispersijos-kovariacijos metodas yra modifikuojamas, vietoje standartinio normaliojo atsitiktinio dydžio kvantilio imant skirstinių iš apibendrintų hiperbolinių skirstinių šeimos kvantilius. Parodoma, jog apibendrintų hiperbolinių skirstinių šeimos taikymas žymiai pagerina rizikuojamosios vertės vertinimo tikslumą. Todėl siūloma apibendrintų hiperbolinių skirstinių šeimą taikyti praktikoje vietoje normaliojo skirstinio.

Pagrindiniai žodžiai: rizikuojamoji vertė, daugiamačiai GARCH modeliai, grįžtamasis patikrinimas, apibendrinti hiperboliniai skirstiniai

ABSTRACT

The thesis examines the variance-covariance approach to the estimation of portfolio Value-at-Risk using multivariate GARCH models. Two multivariate GARCH models, DCC and O-GARCH, are estimated using Baltic stock market data. Based on the results of these models, Value-at-Risk of randomly generated portfolios is calculated using the variance-covariance approach. This approach was improved by taking quantiles of generalized hyperbolic distributions instead of standard normal ones. The analysis suggests that the use of generalized hyperbolic distribution considerably improves the accuracy of Value-at-Risk estimates. Therefore, it is proposed to use the family of generalized hyperbolic distributions in practice.

Keywords: Value-at-Risk, multivariate GARCH models, backtesting, generalized hyperbolic distribution

IVADAS

Rinkos rizika (angl. *market risk*), t.y. galimybė patirti nuostolį valdant tam tikrą finansinį portfelį dėl rinkos faktorių (vertybinių popierių kainų, palūkanų normų ar valiutos kursų) pokyčių yra neatskiriamas finansinių rinkų elementas. Kiekvienas investuotojas – finansinė institucija ar privatus asmuo – valdydamas portfelį, prisiima rinkos riziką. Todėl jos vertinimas ir valdymas, norint sėkmingai veikti, yra labai svarbi investuotojo užduotis. Kaip kiekybiškai išmatuoti šią riziką? Egzistuoja gausybė galimybių – standartinis nuokrypis, kvantilis, tarpkvartilinis plotis, kapitalo aktyvų įkainojimo (angl. *Capital Asset Pricing Model*, sutrumpintai *CAPM*) teorijos beta koeficientas, tikėtinas trūkumas (angl. *expected shortfall*) ir kt. Rizikuojamoji vertė (angl. *Value-at-Risk*, sutrumpintai *VaR*) – maksimalus galimas patirti nuostolis, esant fiksuotam pasiklivimo lygmeniui arba tiesiog portfelio gražų skirstinio $(1-\alpha)$ lygmens kvantilis – vienas iš plačiausiai praktikoje taikomų rizikos matų. Jos populiarumą lėmė bankų priežiūros Bazelio komiteto siūlymas taikyti šią sąvoką bankuose rinkos rizikos vertinimui. Sukurta nemažai rizikuojamosios vertės vertinimo metodų, vieni iš jų yra labiau taikomi, kiti – mažiau, kiekvienas iš jų turi savo privalumų ir trūkumų. Kiek galima tiksliau įvertinti rizikuojamąją vertę bankams svarbu ir dėl to, kad nuo to priklauso kokį kapitalo rezervą bankas privalo laikyti galimiems nuostoliams dėl rinkos rizikos padengti.

Darbo tikslas – susipažinti su egzistuojančiais vertybinių popierių portfelio rizikuojamosios vertės vertinimo metodais, didesnę dėmesį skiriant dispersijos-kovariacijos metodui, parinkti modelius portfelių, sudarytų iš Baltijos šalių bendrovių akcijų, rizikuojamosios vertės įvertinimui ir palyginti šių modelių tikslumą bei adekvatumą.

Darbą sudaro dvi pagrindinės dalys – teorinė ir praktinė. Teorinės dalies pirmame skyriuje paaiškinama rizikuojamosios vertės sąvoka, pateikiami jos vertinimo metodai. Antrame skyriuje pateikiama teorinė bazė praktinėje dalyje taikomų daugiamačių sąlyginio heteroskedastiškumo modelių (MGARCH) supratimui. Aprašomi žinomiausi ir labiausiai taikomi daugiamačiai GARCH modeliai: VEC, BEKK, CCC, DCC bei faktoriai modeliai. Praktinėje dalyje yra analizuojami realūs duomenys – dešimties Baltijos rinkos įmonių akcijų gražos. Pirmame praktinės dalies skyriuje skaitytojas yra supažindinamas su duomenimis bei jų šaltiniais. Antrajame skyriuje įvertinami du daugiamačiai sąlyginio heteroskedastiškumo modeliai – VAR-DCC modelis ir O-GARCH modelis – turint tikslą daugiamačių akcijų gražas transformuoti į nepriklausomus vienodai pasiskirsčiusius daugiamačius atsitiktinius dydžius. Trečiame praktinės dalies skyriuje, taikant dispersijos-kovariacijos metodą bei naudojantis antrojo skyriaus rezultatais, įvertinamos 50 portfelių, sudarytų iš įvairių nagrinėjamų įmonių akcijų pozicijų

rizikuojamosios vertės. Siekiant gauti tikslesnius VaR įverčius, metodas yra modifikuojamas, vietoje standartinio normaliojo atsitiktinio dydžio kvantilio imant skirstinių iš apibendrintų hiperbolinių skirstinių šeimos kvantilius. Paskutiniajame – ketvirtame – praktinės darbo dalies skyriuje VAR-DCC ir O-GARCH metodologijų rezultatai yra palyginami, taikant grįžtamojo patikrinimo (angl. *backtesting*) procedūrą.

Darbe įvertintų modelių rezultatai įrodo, jog dispersijos-kovariacijos metode apibendrintų hiperbolinių skirstinių šeimos kvantilių taikymas vietoje standartinio normaliojo kvantilio, žymiai pagerina rizikuojamosios vertės įverčių, gautų šiuo metodu, tikslumą. Rezultatai rodo, jog gaujami VaR įverčiai yra suderinti su pasirinktu pasiklovimo lygmeniu, tuo tarpu taikant standartinio normaliojo skirstinio kvantilį rizikuojamoji vertė apskaičiuojama klaidingai.

Didžioji ekonometrinių skaičiavimų ir programavimo dalis darbe atliekama statistinės programos *R* pagalba. Daugiamačių sąlyginio heteroskedastiškumo modelių parametrai vertinami naudojantis *RATS* programa.

Reikalingų įmonių akcijų kainos rastos OMX NASDAQ vertybinių popierių biržos internetiniame puslapyje¹.

¹ Prieiga per internetą: <http://www.baltic.omxnordicexchange.com/market/?pg=stats>

1. TEORINĖ DALIS

1.1. Rizikuojamosios vertės sąvoka

Investuotojas, valdydamas tam tikrą vertybinių popierių portfelį, susiduria su rinkos rizika – rizika, kuri atsiranda dėl rinkos faktorių (vertybinių popierių kainų, palūkanų normų ar valiutos kursų) pokyčių. Norint tinkamai valdyti savo investicijas, būtina mokėti šią riziką įvertinti ir suteikti jai konkretų kiekybinį matą. Vienas iš tokių rinkos rizikos matų ir yra rizikuojamoji vertė (angl. *Value-at-Risk*, sutrumpintai VaR). Šis terminas atsirado 9-tame dešimtmetyje, kai JAV komercinis bankas JP Morgan viešai paskelbė savo rinkos rizikos vertinimo metodologijos *RiskMetrics*² techninį aprašymą. Nuo tada atsirado labai daug literatūros VaR tema, o *RiskMetrics* tapo tam tikru baziniu modeliu, su kuriuo naujai sukurtų modelių rezultatai buvo lyginami.

Rizikuojamoji vertė yra apibrėžiama kaip didžiausias galimas vertybinių popierių portfelio nuostolis dėl rinkos parametrų pasikeitimo per pasirinktą laikotarpį su pasirinktu pasiklovimo lygmeniu bei normaliomis rinkos sąlygomis. Kitaip tariant, VaR – tai atitinkamas portfelio gražų kvantilis.

Kalbant griežčiau, tegul $P_{i,t}$ žymi i -tosios įmonės t -tosios dienos akcijų rinkos kainą. Tarkime, šią akciją laikome h dienų. Tuomet jos t -tosios dienos graža yra $r_{i,t}$ ir apibrėžiama taip

$$r_{i,t} = \frac{P_{i,t} - P_{i,t-h}}{P_{i,t-h}} \cdot 100.$$

Sukonstravę iš d įmonių akcijų portfelį ir laikydami jį h dienų, akivaizdu, kad laiko momentu t turėsime portfelio gražą, lygią

$$r_i^P = \sum_{i=1}^d \varpi_i r_{i,t} = \varpi' r_t,$$

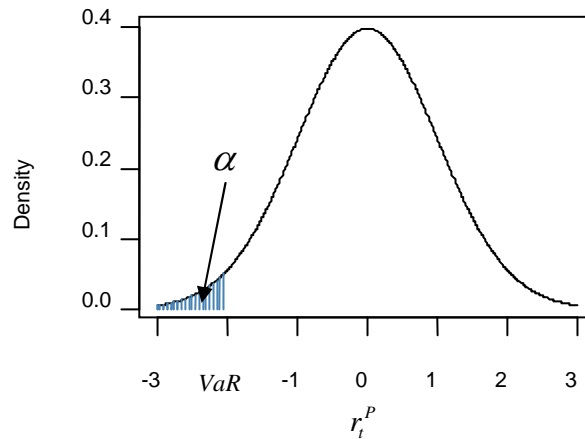
kur $r_t = (r_{1,t}, \dots, r_{d,t})'$, o $\varpi = (\varpi_1, \dots, \varpi_d)'$ yra svorių vektorius, nusakantis kiekvienos įmonės akcijų dalį portfelyje ir yra toks, kad $\sum_{i=1}^d \varpi_i = 1$. Laikysime, kad i -tosios įmonės akcijų dalis portfelyje $\varpi_i \geq 0$.

Pasirinkus reikšmingumo lygmenį α , portfelio $(1-\alpha)\%$ rizikuojamoji vertė laiko momentu t yra apibrėžiama kaip jo gražų skirstinio $(1-\alpha)$ lygmens kvantilis (1 pav.):

² Prieiga per internetą: www.riskmetrics.com

$$P(r_i^P < VaR_t) = \alpha. \quad (1)$$

Iš rizikuojamosios vertės apibrėžimo akivaizdu, kad $VaR_t < 0$ ir tarp $\alpha \cdot 100\%$ didžiausių neigiamų portfelio grąžų nurodo mažiausią. Dažnai interpretacijai palengvinti VaR yra imamas su priešingu ženklu ir kalbama apie $-VaR_t$ dydį. Darbe rizikuojamoji vertė bus nagrinėjama kaip neigiamas dydis. Rizikuojamąją vertę galima išreikšti ir piniginiiais vienetais, tiesiog padauginant ją iš investuojamos sumos dydžio.



1 pav. Rizikuojamosios vertės sąvoka.

Jei r_i^P skirstinys būtų žinomas, VaR_t galėtume apskaičiuoti iš karto. Deja, akcijų grąžos nėra gerai aprašomos žinomais (besąlyginiais) skirstiniais. Jos pasižymi kintančia sąlygine dispersija, didesniu negu normaliojo skirstinio ketvirtuoju momentu, todėl rizikuojamosios vertės vertinimas sudėtingėja. Kitame skyrelyje bus aptariami pagrindiniai VaR vertinimo metodai.

1.2. Rizikuojamosios vertės nustatymo metodai

Rizikuojamosios vertės nustatymo metodų yra sukurta nemažai ir jie iki šiol yra tebekuriami, tobulinami, modifikuojami. Tokį domėjimąsi jais lėmė jų poreikis praktikoje, vertinant vertybinių popierių portfelių rinkos riziką. Metodus galima suskirstyti į dvi pagrindines klases – pilnojo įvertinimo (angl. *full valuation*) ir lokalinio įvertinimo (angl. *local valuation*) metodus. Lokalinio įvertinimo metodas remiasi parametriniais modeliais, kurie aprašo grąžų skirstinį bei galimą jų kintamumo dinamiką, kitaip šis metodas yra žinomas kaip dispersijos-kovariacijos metodas (angl. *variance-covariance method*). Pilnojo įvertinimo metodų klasei priklauso istorinio modeliavimo (angl. *historical simulation*) ir Monte Carlo metodai. Pastaruoju metu

atsirado taip pat metodų, kurie remiasi ekstremalių reikšmių teorija bei kvantilių regresija. Tačiau šie metodai nėra tokie populiarūs kaip anksčiau minėti ir taikomi žymiai rečiau³.

Dispersijos-kovariacijos metodas remiasi prielaida, kad portfelį sudarančių akcijų gražų daugiamatis skirstinys yra normalusis, t. y. $r_t = (r_{1,t}, \dots, r_{d,t})' \sim N_d(\mu_{d \times 1}, \Sigma_{d \times d})$. Tuomet portfelio, sudaryto iš šių įmonių akcijų, gražų skirstinys yra taip pat normalusis, $r_t^P = \varpi' r_t \sim N_1(\varpi' \mu, \varpi' \Sigma \varpi)$. Tokiu būdu portfelio rizikuojamoji vertė gali būti lengvai apskaičiuota. Sunormavus portfelio gražas, atėmus jų vidurkį bei padalinus iš standartinio nuokrypio ir pasinaudojus (1) lygybe, gaunama

$$P\left(\frac{r_t^P - \varpi' \mu}{\sqrt{\varpi' \Sigma \varpi}} < \frac{VaR_t - \varpi' \mu}{\sqrt{\varpi' \Sigma \varpi}}\right) = \alpha$$

arba

$$\Phi\left(\frac{VaR_t - \varpi' \mu}{\sqrt{\varpi' \Sigma \varpi}}\right) = \alpha,$$

kur Φ - standartinio normaliojo atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcija. Tada portfelio rizikuojamoji vertė yra

$$VaR_t = \varpi' \mu + q_{1-\alpha} \sqrt{\varpi' \Sigma \varpi},$$

kur $q_{1-\alpha}$ – standartinio normaliojo atsitiktinio dydžio $(1 - \alpha)$ kvantilis.

Kadangi finansinės gražos paprastai turi nulinius vidurkius ir nėra autokoreliuotos, dispersijos-kovariacijos metodo rizikuojamosios vertės skaičiavimo formulė suprastinama į

$$VaR_t = q_{1-\alpha} \sqrt{\varpi' \Sigma \varpi}.$$

Taigi matome, kad šiame metode svarbiausias dydis, vertinant rizikuojamąją vertę, yra gražų kovariacijų matrica Σ .

Praktikoje, skaičiuojant VaR dispersijos-kovariacijos metodu, reikia žinoti μ ir Σ įverčius. Jei šie dydžiai gali būti įvertinti kaip portfelį sudarančių gražų empirinis (daugiamatis) vidurkis ir empirinė kovariacijų matrica, kalbama apie besąlyginę dispersijos-kovariacijos metodą. Taip vertinant μ ir Σ parametrus remiamasi prielaida, kad akcijų gražos kiekvienu laiko momentu turi pastovią sąlyginę dispersiją. Deja, akcijų gražoms sąlyginės dispersijos pastovumo prielaida yra per stipri. Stilizuoti faktai (angl. *stylized facts*) rodo, kad gražos pasižymi klasterizacija ir dėl to jų kintamumui aprašyti labiau tinka kintanti sąlyginė dispersija. Išėjis – daugiamaciai sąlyginio heteroskedastiškumo modeliai (angl. *multivariate conditional heteroscedastic models*). Laikoma, kad gražas generuojantis procesas yra *sąlyginai* normalusis, t. y. $r_t | F_{t-1} \sim N_d(\mu_t, \Sigma_t)$,

³ Plačiau apie rizikuojamosios vertės nustatymo metodus, kurie remiasi ekstremalių reikšmių teorija bei kvantilių regresija rašoma, pavyzdžiui, [14].

kur $F_{t-1} = \{r_{t-1}, r_{t-2}, \dots\}$, μ_t – sąlyginis gražų vidurkių vektorius, Σ_t – sąlyginė gražų kovariacijų matrica. Tuomet VaR gali būti įvertintas pagal formulę

$$VaR_t = \varpi' \mu_t + q_{1-\alpha} \sqrt{\varpi' \Sigma_t \varpi}. \quad (2)$$

Metodo trūkumas, vertinant akcijų portfelio rizikuojamąją vertę – normališkumo prielaida. Empirinė analizė rodo, jog akcijų gražos turi sunkesnes, negu normaliojo skirstinio, uodegas. Dėl to normalusis skirstinys yra prasta aproksimacija gražų skirstiniui.

Alternatyva parametriniam rizikuojamosios vertės vertinimui – neparametriniai metodai. Istorinio modeliavimo metodas, ko gero, paprasčiausias iš visų VaR vertinimo metodų. Jis remiasi tikrojo portfelio gražų skirstinio aproksimacija empiriniu. Kadangi pagal didžiųjų skaičių dėsnį

$$F_n(x) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T I\{\varpi' r_t \leq x\} \rightarrow P(\varpi' r_t \leq x) = F(x), \text{ kai imties plotis } T \rightarrow \infty,$$

tai rizikuojamąją vertę galima vertinti kaip empirinės duomenų pasiskirstymo funkcijos F_n kvantilį, t. y. VaR įvertis yra $r_{[T(1-\alpha)]}^P$, $[T(1-\alpha)]$ žymi didžiausią sveikąjį skaičių, neviršijantį $T(1-\alpha)$. Istorinio modeliavimo metodo privalumas – jo paprastumas. Metodą lengva įdiegti, rizikuojamosios vertės įvertį galima gauti labai greitai. Be to, nedaroma jokių prielaidų apie portfelio gražų skirstinį. Vienintelis reikalavimas – pakankamai didelis imties plotis, kad galėtų asimptotiniai rezultatai, tačiau duomenų trūkumo problemos, analizuojant akcijų rinkos duomenis, nėra. Visgi, istorinio modeliavimo metodas turi didelį trūkumą. Tai – besąlyginis metodas, todėl pagal nutylėjimą laikoma, jog sąlyginė akcijų gražų dispersija yra pastovi, o kaip rodo stilizuoti faktai, tai nėra teisinga.

Kitas pilnojo įvertinimo metodas remiasi Monte Carlo modeliavimu. Šio metodo tikslas – sukonstruoti hipotetinių būsimųjų akcijų gražų reikšmių seką, iš kurios būtų galima gauti empirinį jų skirstinį ir tokiu būdu apskaičiuoti dominantį kvantilį – rizikuojamąją vertę. Problema ta, kad metodas reikalauja žinoti akcijų gražas generuojantį procesą. Kadangi r_t skirstinys yra sąlyginis, praktikoje paprastai yra imamas daugiamatis sąlyginio heteroskedastiškumo modelis sąlyginei r_t kovariacijų matricai vertinti. Įvertinus modelį, generuojama N galimų vektorius r_{t+1} realizacijų, iš kurių apskaičiuojama N portfelio gražų r_{t+1}^P realizacijų, taip gaunamas būsimųjų portfelio gražų skirstinys, kurio empirinis kvantilis ir laikomas VaR įverčiu. Aišku, kad N turi būti „didelis“. Dėl to portfeliams, sudarytiems iš didelio skaičiaus akcijų, šis metodas reikalauja ilgų skaičiavimų.

[3], [13] ir [17] knygos gali būti puikiu įvadu į rizikuojamosios vertės sąvokos bei jos vertinimo metodų supratimą.

Darbe rizikuojamajai vertei vertinti bus taikomas sąlyginis dispersijos-kovariacijos metodas. Tam būtina turėti gerą supratimą apie daugiamačius sąlyginio heteroskedastiškumo modelius, kurie ir bus aprašyti kitame darbo skyriuje.

1.3. Daugiamačiai sąlyginio heteroskedastiškumo modeliai

1982 m. pasirodęs Engle autoregresinis sąlyginio heteroskedastiškumo modelis (angl. *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*, sutrumpintai *ARCH*) tapo sąlyginio heteroskedastiškumo modelių pradininku. Nuo tada atsirado daugybė šio modelio variacijų ir papildymų, kurių dauguma buvo skirta vienamatės finansinės laiko eilutės modeliavimui. Tačiau turint vertybinių popierių portfelį, į kurį įeina d įvairių įmonių akcijų, ypač svarbi tampa koreliacija tarp portfelį sudarančių akcijų grąžų, todėl neišvengiamai susiduriama su daugiamačiais sąlyginio heteroskedastiškumo modelių variantais (sutrumpintai *MGARCH*). Pirmasis pasiūlytas MGARCH modelis buvo Bollerslev, Engle ir Wooldridge VEC modelis (1988 m.) [6]. Kadangi šis modelis yra labai bendras ir turi didelį vertinamų parametru skaičių, reikėjo kurti modelius, kurie pasižymėtų paprastesne struktūra, bet tuo pačiu sugebėtų tinkamai aprašyti sąlyginės daugiamačių duomenų kovariacijų matricos kitimą.

Apibrėžkime bendrą MGARCH tipo modelių pavidalą. Tarkime, $\varepsilon_t = (\varepsilon_{1t}, \dots, \varepsilon_{dt})'$, $t = 1, 2, \dots$ yra d -matis baltojo triukšmo procesas su nuliniu vidurkių vektoriumi ir vienetine kovariacijų matrica. Sakoma, kad $r_t = (r_{1t}, \dots, r_{dt})'$ turi MGARCH struktūrą, jei

$$r_t = \Sigma_t^{1/2} \varepsilon_t, \quad (3)$$

kur Σ_t – $d \times d$ dimensijos teigiamai apibrėžta matrica, kuri priklauso nuo informacijos aibės $F_{t-1} = \{r_{t-1}, r_{t-2}, \dots\}$.

Sąlyginis tokio proceso vidurkis yra

$$E(r_t | F_{t-1}) = E(\Sigma_t^{1/2} \varepsilon_t | F_{t-1}) = \Sigma_t^{1/2} E(\varepsilon_t) = \mathbf{0}_{d \times 1},$$

o sąlyginė kovariacijų matrica

$$\text{Cov}(r_t | F_{t-1}) = E(r_t r_t' | F_{t-1}) = \Sigma_t^{1/2} E(\varepsilon_t \varepsilon_t') (\Sigma_t^{1/2})' = \Sigma_t^{1/2} (\Sigma_t^{1/2})' = \Sigma_t.$$

Priklausomai nuo to, kaip apibrėžiama matrica Σ_t (3) lygybėje, skiriamos įvairios MGARCH modelių variacijos, kurios yra aprašytos 1.3.1. - 1.3.3. skyreliuose.

MGARCH modelio vertinimui paprastai taikomas normalusis pseudo didžiausio tikėtinumo metodas (angl. *pseudo-maximum likelihood method*). Pažymėjus θ – visų MGARCH modelio parametru vektoriu, pseudo didžiausio tikėtinumo įvertis $\hat{\theta}$ yra apibrėžiamas kaip

$$\hat{\theta} = \underset{\theta \in \Theta}{\operatorname{argmax}} \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left(\log |\Sigma_t(\theta)| + r_t' \Sigma_t^{-1}(\theta) r_t \right) \right\},$$

kur Θ žymi tinkamų parametrų erdvę, o r_1, \dots, r_T yra turima (d -mačių) gražų imtis. Šio metodo privalumas yra tas, kad juo gauti įverčiai tam tikroms MGARCH modelio klasėms yra suderinti ir asimptotiškai normalieji net ir tuo atveju, kai ε_t nėra daugiamatis normalusis atsitiktinis dydis [18]. Pseudo tikėtinumo funkcijos maksimizavimas atliekamas taikant standartinius skaitinius optimizavimo metodus (BFGS, BHHH, ir kt.). Čia reikėtų pažymėti, kad literatūros apie daugiamatį GARCH modelių parametrų įverčių savybes kol kas nėra daug.

1.3.1. VEC, diagonalinis GARCH ir BEKK modeliai

Bollerslev, Engle ir Wooldridge VEC(p, q) modelis yra tiesioginis vienamačio GARCH modelio apibendrinimas daugiamatį atveju. Šiame modelyje sąlyginė kovariacijų matrica Σ_t tenkina lygybę

$$\operatorname{Vech}(\Sigma_t) = c + \sum_{j=1}^q A_j \operatorname{Vech}(r_{t-j} r_{t-j}') + \sum_{j=1}^p B_j \operatorname{Vech}(\Sigma_{t-j}),$$

čia $\operatorname{Vech}(\cdot)$ žymi operatorių, kuris paėmęs apatinę trikampę matricos dalį sujungia jos stulpelių elementus į $d(d+1)/2 \times 1$ vektorių. Pavyzdžiui, jei

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix},$$

tai $\operatorname{Vech}(\Sigma) = (\sigma_{11}, \sigma_{21}, \sigma_{31}, \sigma_{22}, \sigma_{32}, \sigma_{33})'$.

A_j ir B_j yra $d(d+1)/2 \times d(d+1)/2$ dimensijos nežinomų parametrų matricos. Bendras šio modelio vertinamų parametrų skaičius yra $(p+q)d(d+1)/2 + d(d+1)/2$ ir yra labai didelis, nebent į portfelį įeinančių akcijų skaičius d yra mažas. Kita problema yra ta, kad šiuo modeliu įvertintos sąlyginės kovariacijų matricos Σ_t ne visada yra teigiamai apibrėžtos [21]. Dėl šių VEC modelio trūkumų Bollerslev, Engle ir Wooldridge pasiūlė supaprastintą modelio versiją, darydami prielaidą, jog A_j ir B_j yra diagonalinės matricos. Šis supaprastintas modelis yra žinomas kaip diagonalinis GARCH ir jam egzistuoja sąlygos, kurios užtikrina, kad Σ_t yra teigiamai apibrėžta $\forall t$ [21]. Be to, padarytas supaprastinimas žymiai sumažina modelio vertinamų parametrų skaičių, kuris dabar yra $(p+q+1)d(d+1)/2$. Tačiau dėl šio supaprastinimo diagonalinis GARCH modelis tampa pernelyg nerealistišku akcijų gražoms

modeliuoti. Stebint tam tikrai rinkai priklausančių akcijų grąžų kintamumą, pastebėta, kad vienos įmonės grąžų kintamumo padidėjimas sąlygoja kitų įmonių grąžų padidėjimą ir atvirkščiai, o diagonalinis GARCH sąveikų tarp skirtingų įmonių grąžų dispersijų ir kovariacijų, modeliuoti neleidžia.

Dar vienas modelis, kuris gali būti laikomas VEC modeliu su apribojimais, yra BEKK(p, q, K) – modelis, pasiūlytas Engle ir Kroner 1995 m. [12] Šiame modelyje sąlyginė kovariacijų matrica Σ_t aprašoma tokia lygtimi

$$\Sigma_t = CC' + \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^K A'_{kj} r_{t-j} r'_{t-j} A_{kj} + \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^K B'_{kj} \Sigma_{t-j} B_{kj}, \quad (4)$$

kur A_{kj} , B_{kj} yra $d \times d$ dimensijos nežinomų parametru matricos, C – $d \times d$ trikampė apačioje laisvųjų narių matrica. Pavyzdžiui, dvimačiu atveju modelis turi tokią struktūrą

$$\begin{aligned} \Sigma_t &= \begin{pmatrix} \sigma_{11,t} & \sigma_{12,t} \\ \sigma_{21,t} & \sigma_{22,t} \end{pmatrix} = \\ &= CC' + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{1,t-1}^2 & r_{1,t-1} r_{2,t-1} \\ r_{2,t-1} r_{1,t-1} & r_{2,t-1}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11,t-1} & \sigma_{12,t-1} \\ \sigma_{21,t-1} & \sigma_{22,t-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Modelio privalumas yra tas, kad, pagal konstrukciją, sąlyginė kovariacijų matrica Σ_t yra teigiamai apibrėžta su visais t . Tačiau, kai $d > 1$, modelyje atsiranda identifikuojamumo problema, nes atsiranda ne viena parametru matricų aibė, tenkinanti (4) lygybę. [16] yra pateikiamos sąlygos, reikalingos tam, kad modelio parametru matricos būtų vienareikšmiškai apibrėžtos. BEKK modelio vertinamų parametru skaičius yra $(p+q)Kd^2 + d(d+1)/2$ ir vėl dideliem d yra nemažas. Pavyzdžiui, jei taikomas BEKK(1,1,1) ir turima 10 įmonių akcijų, reikia įvertinti 255 parametrus. Taigi ir šis modelis reikalauja daug laiko skaičiavimams.

1.3.2. CCC ir DCC modeliai

1990 m. Bollerslev [5] pasiūlė daugiamačią GARCH(p, q) modelį, kuriame laikoma, jog sąlyginės koreliacijos tarp įvairių akcijų grąžų yra pastovios, t. y. nekinta laikui bėgant. Modelis buvo pavadintas pastovios sąlyginės koreliacijos modeliu (angl. *Constant Conditional Correlation*, sutrumpintai CCC). Bollerslev pasinaudojo tokiu sąlyginės kovariacijų matricos išskaidymu:

$$\Sigma_t = D_t R D_t,$$

kur $D_t = \text{diag}(\sqrt{\sigma_{11,t}}, \sqrt{\sigma_{22,t}}, \dots, \sqrt{\sigma_{dd,t}})$ yra matrica, kurios įstrižainėje yra sąlyginiai standartiniai nuokrypiai, įvertinti kiekvienos įmonės gražoms atskirai, taikant vienamatį GARCH(p, q) modelį, t. y.

$$\sigma_{ii,t} = c_{0i} + \sum_{k=1}^q \alpha_{0ik} r_{i,t-k}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_{0ij} \sigma_{ii,t-j}, \quad i = 1, \dots, d$$

$R = (\rho_{ij})_{i,j=1}^d$ – pastovi, nepriklausanti nuo t , gražų korelacių matrica. Taigi bendrasis Σ_t narys turi pavidalą $\sigma_{ij,t} = \rho_{ij} \sqrt{\sigma_{ii,t} \sigma_{jj,t}}$. CCC modelyje turima $d(p+q+1) + d(d+1)/2$ nežinomų parametrų. Modelis yra vertinamas taikant pseudo didžiausio tikėtinumo metodą, aprašytą 1.3. skyriaus pradžioje. Dėl Σ_t išskaidymo, metodo užduotis supaprastėja ir tampa

$$\hat{\theta} = \underset{\theta \in \Theta}{\text{argmax}} \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left(\sum_{i=1}^d \log |\sigma_{ii,t}(\alpha_{0i1}, \dots, \alpha_{0iq})| + \log |R| + r_t' D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} r_t \right) \right\},$$

čia parametrų vektorius $\theta = (\alpha_{011}, \dots, \alpha_{01q}, \alpha_{021}, \dots, \alpha_{02q}, \dots, \alpha_{0d1}, \dots, \alpha_{0dq}, R)$. Kaip matoma, maksimizuojant pseudo-tikėtinumo funkciją korelacių funkcijos atvirkštinę reikia skaičiuoti tik vieną kartą kiekvienos iteracijos metu, dėl to vertinimas tampa greitesnis, lyginant su 1.3.1. skyrelyje aprašytų modelių vertinimu. CCC modelis, kaip ir BEKK, pagal konstrukciją užtikrina, kad Σ_t yra teigiamai apibrėžta $\forall t$. Vienintelis modelio trūkumas – korelacių matricos pastovumas, kas, kaip rodo empiriniai duomenys, yra per stipri prielaida akcijų gražoms.

Engle 2002 m. praplėtė Bollerslev'o CCC modelį, leisdamas korelacių matricai R kisti laike [11]. Modelis buvo pavadintas dinaminės sąlyginės korelacijos modeliu (angl. *Dynamic Conditional Correlation*, sutrumpintai *DCC*) ir yra vertinamas dviem etapais. Pirmajame etape pseudo tikėtinumo funkcija yra maksimizuojama vienamačių sąlyginių dispersijų $\sigma_{ii,t}$ atžvilgiu ir gaunami matricų D_t įverčiai. Kitame DCC vertinimo etape pseudo tikėtinumo funkcija maksimizuojama sąlyginės korelacių matricos R_t atžvilgiu. R_t šiame modelyje yra aprašoma tokiu būdu

$$R_t = Q_t^* Q_t Q_t^*, \quad (5)$$

kur matrica Q_t apibrėžiama rekursija

$$Q_t = (1-a-b)Q_0 + a \cdot \tilde{r}_{t-1} \tilde{r}_{t-1}' + b Q_{t-1} = (q_{ij})_{d \times d}. \quad (6)$$

Šioje lygybėje yra tik du nežinomi parametrai – $a > 0$ ir $b \geq 0$, tokie, kad $a+b < 1$. Kiti lygybėje esantys dydžiai žinomi – standartizuotos vienamačių modelių liekanos $\tilde{r}_{t-1} = D_{t-1}^{-1} r_t$ gaunamos pirmajame etape, o Q_0 – tai besąlyginė standartizuotų liekanų, gautų po pirmojo modelio vertinimo etapo, kovariacių matrica.

$$Q_t^* = \text{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{q_{11}}}, \frac{1}{\sqrt{q_{22}}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{q_{dd}}}\right). \quad (7)$$

Taigi matricos R_t (i, j) elementas ρ_{ijt} turi pavidalą

$$\rho_{ijt} = \frac{q_{ijt}}{\sqrt{q_{iit}} \sqrt{q_{jtt}}}.$$

Iš viso modelio vertinamų parametru skaičius yra $d(p+q+1) + d(d+1)/2 + 2$. Pažymima, kad DCC priešingai nei CCC atveju, pseudo tikėtimumo funkcijos maksimizavimas gali užtrukti, nes korelacių funkcijos atvirkštinė turi būti skaičiuojama $\forall t$ kiekvienos iteracijos metu. Tačiau modelis turi didelį privalumą lyginant su CCC – korelacių matrica kinta laike, o vertinamų parametru skaičius padidėja tik dviem.

[23] knygoje šie ir kiti pagrindiniai MGARCH modeliai aprašyti iš praktinės pusės, parodytas šių modelių taikymas, naudojant statistinį paketą *S-Plus*.

1.3.3. Faktorinis ir ortogonalusis GARCH modeliai

Kai turimas portfelis, sudarytas iš didelio skaičiaus įvairių įmonių akcijų, vertinti daugiamatį GARCH modelį tampa sudėtinga dėl didelio skaičiaus nežinomų parametru, sudėtingų skaičiavimų bei tam reikalingų kompiuterinių resursų (laiko). Išėitis – kintamųjų dimensijos mažinimas prieš taikant sąlyginio heteroskedastiškumo modelius. Tai gali būti atlikta, taikant tiriančiąją faktorinę analizę (angl. *Explorative Factor Analysis*). Faktorinė analizė – tai statistinis metodas, kurio tikslas paaiškinti d -mačių duomenų $r_t = (r_{1t}, \dots, r_{dt})'$ tarpusavio korelacias mažesniu skaičiumi kintamųjų, vadinamų faktoriais. Kitaip tariant, kintamieji r_{it} suskirstomi į grupes, atsižvelgiant į jų tarpusavio korelacias ir kiekvienos grupės elementus jungia vienas tam tikras (realiai nestebimas, latentinis) faktorius.

Apibrėžkime modelį griežtai. Sakoma, kad atsitiktinis vektorius r_t aprašomas tiesiniu faktoriniu modeliu, jei

$$r_t = Bf_t + \varepsilon_t, \quad (8)$$

čia $f_t = (f_{1t}, \dots, f_{pt})'$ – p faktorių (nestebimų) vektorius-stulpelis ($p < d$), B – $d \times p$ dimensijos nežinomų parametru matrica (angl. *factor loadings*), ε_t – nekoreliuotų ir nulinių vidurkių triukšmų vektorius, t. y. $\varepsilon_t \sim (0_{d \times 1}, \Psi_{d \times d})$, kur $\Psi_{d \times d}$ – diagonalinė matrica. Faktoriai f_t yra tokie, kad $Ef_t = 0_{p \times 1}$, o $Cov(f_t, \varepsilon_t) = 0$. Nagrinėjamu atveju tikslinga padaryti dar ir faktorių

nekoreliuotumo prielaidą: $Cov(f_t, f_t) = \Lambda_t = \text{diag}(\lambda_{1t}, \dots, \lambda_{pt})$, kuri užtikrintų, kad apskaičiuoti faktoriai tarpusavyje nekoreliuoja, o tai leistų jų kintamumą modeliuoti atskirai taikant vienamačius sąlyginio heteroskedastiškumo modelius.

Remiantis (8) lygybe, gražų r_t sąlyginė kovariacijų matrica Σ_t yra

$$\Sigma_t = B\Lambda_t B' + \Psi, \quad (9)$$

kur diagonalinės matricos Λ_t elementai $\lambda_{it}, i=1, \dots, p$ aprašomi vienamačiais GARCH modeliais

$$\lambda_{it} = c_i + \sum_{k=1}^q \alpha_{ik} f_{i,t-k}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_{ij} \lambda_{i,t-j}, i=1, \dots, p.$$

Nežinomi parametrai B ir Ψ vertinami standartiniais faktorinės analizės vertinimo metodais (pavyzdžiui, didžiausio tikėtimumo metodu)⁴.

Jei faktoriniame GARCH modelyje laikysime, jog paklaidos $\varepsilon_t \forall t$ yra nulinės, gausime 2001 m. Alexander pasiūlytą ortogonalųjį GARCH modelį (angl. *Orthogonal GARCH*, sutrumpintai O-GARCH) [2]. O-GARCH modelis remiasi pagrindinių komponentių metodu, pritaikytu standartizuotoms gražoms

$$x_{it} = \frac{r_{it} - \bar{r}_i}{sd(r_i)}, t=1, \dots, T, i=1, \dots, d$$

čia $\bar{r}_i, sd(r_i)$ žymi empirinį i -tosios įmonės akcijų gražų vidurkį ir standartinį nuokrypį atitinkamai.

Pagrindinių komponentių metodo tikslas – transformuoti pradinis duomenis x_{it} į jų tiesines kombinacijas $p_{it} = \sum_{j=1}^d a_{ji} x_{jt}, i=1, \dots, d$ taip, kad p_{it} pasižymėtų šiomis savybėmis:

- (nekoreliuotumo) $Cov(p_i, p_j) = 0, \forall i \neq j$;
- $Var(p_1) \geq \dots \geq Var(p_d)$.

Pažymėjus standartizuotų gražų matricą $X = (x_{it})_{d \times T}$ ir pagrindinių komponentių matricą $P = (p_{it})_{d \times T}$ pagrindinės komponentės apskaičiuojamos tokiu būdu

$$P = AX, \quad (10)$$

kur $A = (a_{ij})_{d \times d}$ yra X kovariacijų matricos $Var(X)$ tikrinių vektorių matrica.

Pagrindinės komponentės P_i pagal konstrukciją yra tarpusavyje nekoreliuoti dydžiai, todėl jų sąlygines dispersijas $\gamma_{it} = Var(p_{it} | F_{t-1})$ galima modeliuoti atskirai taikant vienamačius GARCH modelius:

⁴ Faktorinės analizės vertinimo metodai yra aprašyti, pavyzdžiui, [4] ir [19] knygose.

$$\gamma_{it} = c_i + \sum_{k=1}^q \alpha_{ik} p_{i,t-k}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_{ij} \gamma_{i,t-j}, i = 1, \dots, d$$

Iš (10) lygybės turima $X = A^{-1}P$. Tuomet sąlyginė standartizuotų gražų X kovariacijų matrica yra

$$\text{Var}(X_t | F_{t-1}) = A^{-1} \Gamma_t (A^{-1})',$$

kur $\Gamma_t = \text{diag}(\gamma_{1t}, \dots, \gamma_{dt})$. Iš čia, perėjus prie gražų r_t , jų sąlyginė kovariacijų matrica Σ_t yra

$$\Sigma_t = \text{Var}(r_t | F_{t-1}) = DA^{-1} \Gamma_t (A^{-1})' D,$$

kur $D = \text{diag}(sd(r_1), \dots, sd(r_d))$. Taigi matoma, jog O-GARCH modelio įvertinta sąlyginė gražų kovariacijų matrica sutampa su sąlygine gražų kovariacijų matrica, įvertinta faktoriniu GARCH modeliu, (9) formulėje paėmus $B = DA^{-1}$ ir $\Psi = 0_{d \times d}$.

Faktoriniai modeliai išsamiai aprašyti [9] ir [20] straipsniuose. Parodytas jų praktinis pritaikymas valiutų kursams [20] ir Danijos nulinio kupono obligacijoms [9].

Šio darbo praktinėje dalyje dešimties įmonių akcijų gražų sąlyginei kovariacijų matricai vertinti pritaikomi DCC ir O-GARCH modeliai. Įvertinus rizikuojamąją vertę kiekvieno iš modelių atveju, atliekama palyginamoji analizė.

2. PRAKTINĖ DALIS

2.1. Duomenų aprašymas ir pirminė analizė

Analizei atlikti buvo paimtos likvidžiausios 2007-12-08 – 2008-03-08 laikotarpiu akcijos. Tai Lietuvos „Rytų skirstomųjų tinklų“, „Šiaulių banko“, „Panevėžio statybos tresto“, „TEO LT“, „Ūkio banko“, „Rokiškio sūrio“, „Aprangos“ ir Estijos bendrovių „Eesti Telekom“, „Baltika“ bei „Tallinna Kaubamaja“ akcijos.

Iš pradžių, trumpai apžvelgsime įmones.

„Rytų skirstomieji tinklai“ – bendrovė, skirstanti ir tiekianti elektros energiją Vilniaus, Panevėžio, Alytaus ir Utenos apskrityse bei dalyje Kauno ir Marijampolės apskričių. Įmonė siūlo įvairias paslaugas energetikos srityje (elektros įrenginių priežiūrą bei remontą, sudėtingų elektros įrenginių eksploatavimą ir kt.).

„Šiaulių bankas“ – nuo 1992 m. vykdomas savo veiklą komercinis Lietuvos bankas. Skatina smulkiojo ir vidutinio verslo plėtrą Lietuvoje, finansuoja savivaldybių ir regioninius projektus bei teikia paslaugas privatiems asmenims.

„Panevėžio statybos trestas“ – viena didžiausių statybos įmonių Lietuvoje, teikianti gamybinės, komercinės ir visuomeninės paskirties objektų statybos, architektūros paveldo pastatų atnaujinimo, lauko inžinerinių tinklų tiesimo, gerbūvio tvarkymo, projektų valdymo bei projektavimo paslaugas.

„TEO LT“ – didžiausia telekomunikacijų įmonė Lietuvoje, teikianti fiksuoto ryšio telefonijos, prisijungimo prie interneto, skaitmeninės televizijos, svetainių talpinimo ir kitas paslaugas.

„Ūkio bankas“ – seniausias privatus Lietuvos komercinis bankas, teikiantis universalias bankines paslaugas, turintis platų aptarnavimo tinklą didžiausiuose ir ekonomiškai gyvybingiausiuose šalies regionuose.

„Rokiškio sūris“ – didžiausia pagal pajamas Lietuvos pieno produktų gamybos įmonių grupė. Įmonė savo produkciją eksportuoja daugiau kaip į 15 pasaulio šalių.

„Apranga“ – ryškus mažmeninės drabužių prekybos lyderis Lietuvoje, užimantis apie 35% šalies drabužių parduotuvių rinkos.

„Eesti Telekom“ – didžiausia Estijos telefonijos bendrovė, teikianti mobiliojo, plačiajuosčio ir fiksuotojo ryšio paslaugas.

„Baltika Group“ – greitai besiplečianti Estijos bendrovė, užsiimanti mažmenine drabužių prekyba Centrinėje ir Rytų Europoje.

„Tallinna Kaubamaja“ – Estijos prekybos įmonių grupė, didžiausias šalies universalinių parduotuvių tinklas.

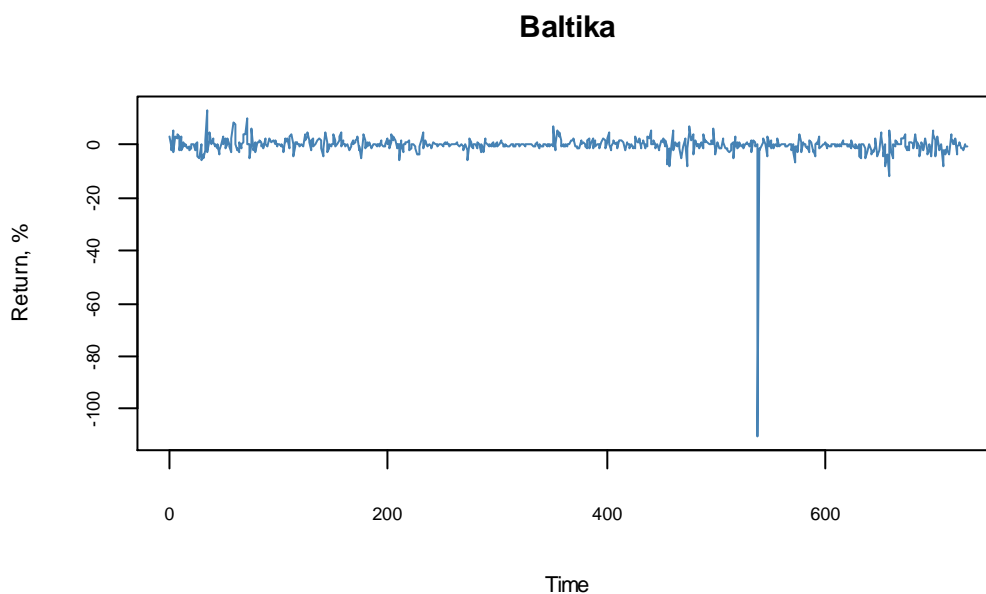
Iš Vilniaus vertybinių popierių biržos tinklalapio buvo paimtos kasdieninės šių įmonių akcijų uždarymo kainos 2005-05-02 – 2008-03-08 laikotarpiu⁵. Iš viso šį laikotarpį sudarė 730 darbo dienų. Taigi turimi 730 akcijų kainų stebėjimai.

Turint šiuos duomenis, apskaičiuojamos logaritminės akcijų grąžos. i -tosios įmonės t -tosios dienos grąža apskaičiuojama pagal formulę

$$r_{i,t} = \ln\left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,t-1}}\right) \cdot 100, \quad t = 2, \dots, T$$

čia $P_{i,t}$ – i -tosios įmonės t -tosios dienos akcijų rinkos uždarymo kaina.

Grafiškai pavaizdavus įmonių grąžas, buvo pastebėta, kad kai kurių įmonių grąžos tam tikrą dieną (ar tam tikromis dienomis) turi labai didelę neigiamą reikšmę, siekiančią net 100% ar daugiau (2 pav. pateiktas „Baltikos“ atvejis).



2 pav. „Baltikos“ akcijų grąžos.

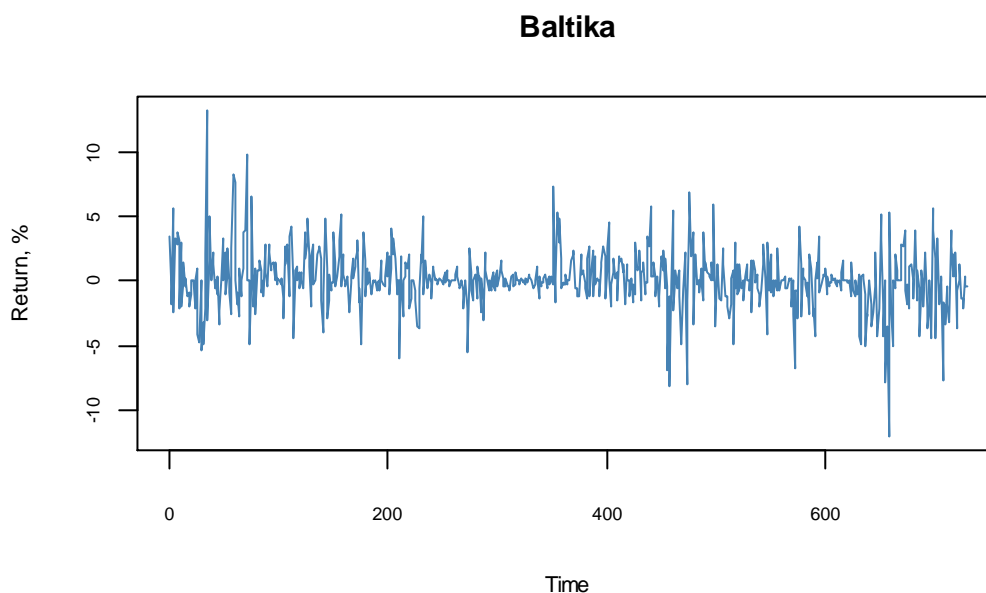
Pasidomėjus, kas įvyko tą dieną, buvo išsiaiškinta, kad 2007-06-06 „Baltika“, nepakeisdama savo akcinio kapitalo dydžio, sumažino nominaliąją akcijų kainą, dvigubai padidindama jų skaičių. Kitaip tariant, bendrovė atliko akcijų skaidymą (angl. *stock split*) į smulkesnius vienetus. Tačiau dėl šios priežasties įvykęs staigus akcijos rinkos kainos mažėjimas atsirado ne dėl rinkos dalyvių veiksmų ir gali būti interpretuojamas kaip tam tikras struktūrinis pasikeitimas. Biržoje siekiant sumažinti įtaką faktorių, kurie pakeičia akcijų kainą, tačiau neturi įtakos emitento rinkos kapitalizacijai, atliekamas kainos koregavimas. Akcijų kainos iki akcinio įvykio (angl. *capital*

⁵ Duomenys yra pateikiami prie darbo pridedamo CD byloje „data.xls“.

action) datos yra paprasčiausiai padauginamos iš tam tikro koeficiento, vadinamo akcinių įvykių įtaką koreguojančiu koeficientu (angl. *adjustment factor*)⁶. Tokiu būdu yra pašalinama akcinio įvykio įtaką akcijų kainos kitimui.

Reikėtų paminėti, jog akcijų skaidymas ir nominalios kainos keitimas nėra vienintelis akcinis įvykis. Kiti akciniai įvykiai – įmonės įstatinio kapitalo didinimas iš įmonės lėšų, įstatinio kapitalo didinimas papildomais įnašais, dividendai ir kt. – taip pat sumažina akcijų rinkos kainą, o rinkos kapitalizaciją palieka nepakitusia.

Iš NASDAQ OMX vertybinių popierių biržos gavus akcinių įvykių įtaką koreguojančius koeficientus⁷, nagrinėjamų bendrovių akcijų rinkos kainos buvo pakoreguotos atsižvelgiant į tos įmonės akcinius įvykius (jei jų buvo). 3 pav. pavaizduotos pakoreguotos pagal 2007-06-06 įvykusį akcijų skaidymą „Baltikos“ gražos.



3 pav. „Baltikos“ akcijų gražos, pakoreguotos pagal akcinį įvykį.

Matoma, kad pakoregavus „Baltikos“ akcijų kainą, išsiskiriančių stebėjimų nebeliko. Gražų grafikas rodo tipišką finansinių gražų kitimą: laiko eilutė pasižymi heteroskedastiškumu bei klasterizacija.

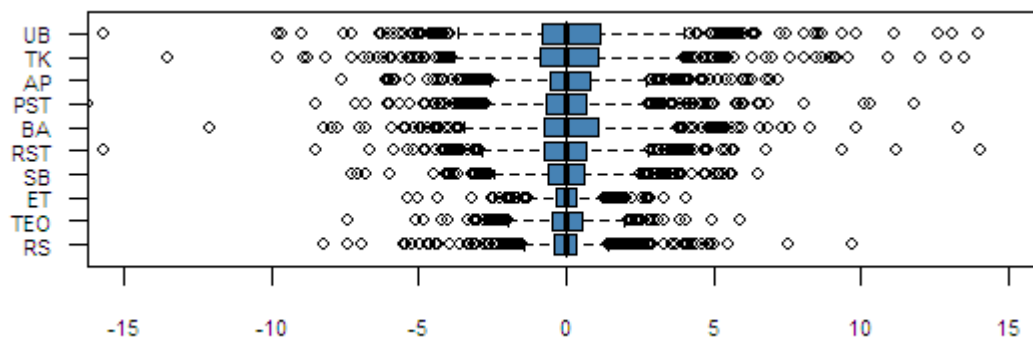
Norint sudaryti tam tikrą vaizdą apie nagrinėjamų įmonių akcijų gražas, buvo apskaičiuotos pagrindinės jų skaitinės charakteristikos – empirinis vidurkis ir standartinis nuokrypis. Mažiausią vidurkį turi „Rokiškio sūrio“ akcijų gražos (-0,033%), didžiausią – „Ūkio banko“ akcijų gražos (0,217 %). Mažiausią standartinį nuokrypį – „Eesti Telekom“ akcijų gražos (0,81), didžiausią –

⁶ Daugiau informacijos apie akcijų kainos/indekso koregavimą galima rasti OMX NASDAQ vertybinių popierių biržos internetiniame puslapyje. Prieiga per internetą: <http://www.baltic.omxgroup.com/>. Biržos informacija apie kainų koregavimą taip pat pateikiama prie darbo pridedamo CD byloje „price adjustments.pdf“.

⁷ Žr. prie darbo pridedamo CD bylą „adjustment factors.txt“.

„Ūkio banko“ akcijų gražos (2,68). Priedų 1 lentelėje pateikiamos šių skaitinių charakteristikų reikšmės visoms nagrinėjamosioms įmonėms.

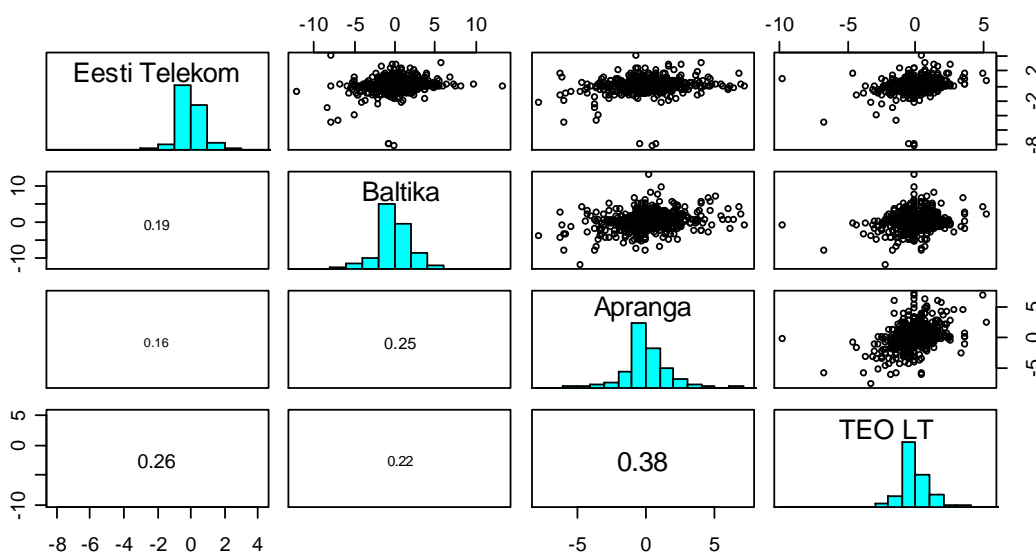
4 pav. pavaizduotos stačiakampės akcijų gražų diagramos kiekvienai iš nagrinėjamų įmonių. Jos yra surūšiuotos pagal įmonės akcijų gražų vidurkį taip, kad žemiausią gražų diagrama atitinka mažiausią gražų vidurkį turinčią įmonę.



4 pav. Kintamųjų, surūšiuotų pagal vidurkio dydį, stačiakampės diagramos (aukščiausias grafikas atitinka didžiausią akcijų vidurkį turinčią įmonę). UK – Ūkio bankas, TK – „Tallinna Kaubamaja“, AP – „Apranga“, PST – „Panevėžio statybos trestas“, BA – „Baltika“, RST – „Rytų skirstomieji tinklai“, SB – Šiaulių bankas, TEO – „TEO LT“, ET – „Eesti Telekom“, RS – „Rokiškio sūris“.

Matoma, kad daugeliu atveju, kai didelė graža, atitinkamai didelis ir išsibarstymas, ir atvirkščiai. Taigi paveikslas empiriškai patvirtina žinomą faktą: didėjančią gražą atitinka vis didėjantis gražų išsibarstymas – rodiklis, kuris gali būti laikomas vienu iš akcijų rizikingumo matų.

Nagrinėjamos įmonės priklauso tai pačiai (Baltijos šalių) rinkai ir todėl yra tarpusavyje susijusios. Taigi tikėtina, jog gražos yra koreliuotos. 5 pav. rodo 4 iš 10 bendrovių tiesinės priklausomybės stiprumą.



5 pav. 4 iš 10 bendrovių akcijų gražų porų sklaidos diagramos. Gražų histogramos. Koreliacijų koeficientai.

Akivaizdu, kad šių įmonių gražos nėra nekoreliuoti dydžiai, nors koreliacijos ir nėra labai didelės. 1 lentelėje pateikta visų tiriamų bendrovių akcijų gražų koreliacijų matrica, iš kurios matosi, kad įmonių, veikiančių susijusiame rinkos segmente, gražos koreliuoja labiau (pavyzdžiui, „Šiaulių bankas“ ir „Ūkio bankas“, „Eesti Telekom“ ir „TEO LT“). Be to, galima pastebėti, jog didesnes gražų koreliacijas turi tos pačios šalies įmonės ir mažesnes – skirtingoms šalims priklausančios įmonės, nors ši tendencija ir nėra labai stipri.

1 lentelė. Nagrinėjamų įmonių akcijų gražų koreliacijų matrica. UK – Ūkio bankas, TK – „Tallinna Kaubamaja“, AP – „Apranga“, PST – „Panevėžio statybos trestas“, BA – „Baltika“, RST – „Rytų skirstomieji tinklai“, SB – Šiaulių bankas, TEO – „TEO LT“, ET – „Eesti Telekom“, RS – „Rokiškio sūris“.

	ET	BA	RST	SB	PST	TK	AP	RS	TEO	UB
ET	1	0,22	0,13	0,18	0,21	0,19	0,19	0,17	0,33	0,15
BA	0,22	1	0,03	0,13	0,19	0,2	0,25	0,17	0,22	0,15
RST	0,13	0,03	1	0,15	0,25	0,07	0,14	0,12	0,19	0,12
SB	0,18	0,13	0,15	1	0,25	0,12	0,38	0,2	0,33	0,41
PST	0,21	0,19	0,25	0,25	1	0,11	0,32	0,19	0,34	0,21
TK	0,19	0,2	0,07	0,12	0,11	1	0,22	0,13	0,19	0,13
AP	0,19	0,25	0,14	0,38	0,32	0,22	1	0,17	0,39	0,35
RS	0,17	0,17	0,12	0,2	0,19	0,13	0,17	1	0,21	0,11
TEO	0,33	0,22	0,19	0,33	0,34	0,19	0,39	0,21	1	0,31
UB	0,15	0,15	0,12	0,41	0,21	0,13	0,35	0,11	0,31	1

2.2. Sąlyginės akcijų gražų kovariacijų matricos vertinimas

2.2.1. DCC modelio taikymas ir diagnostika

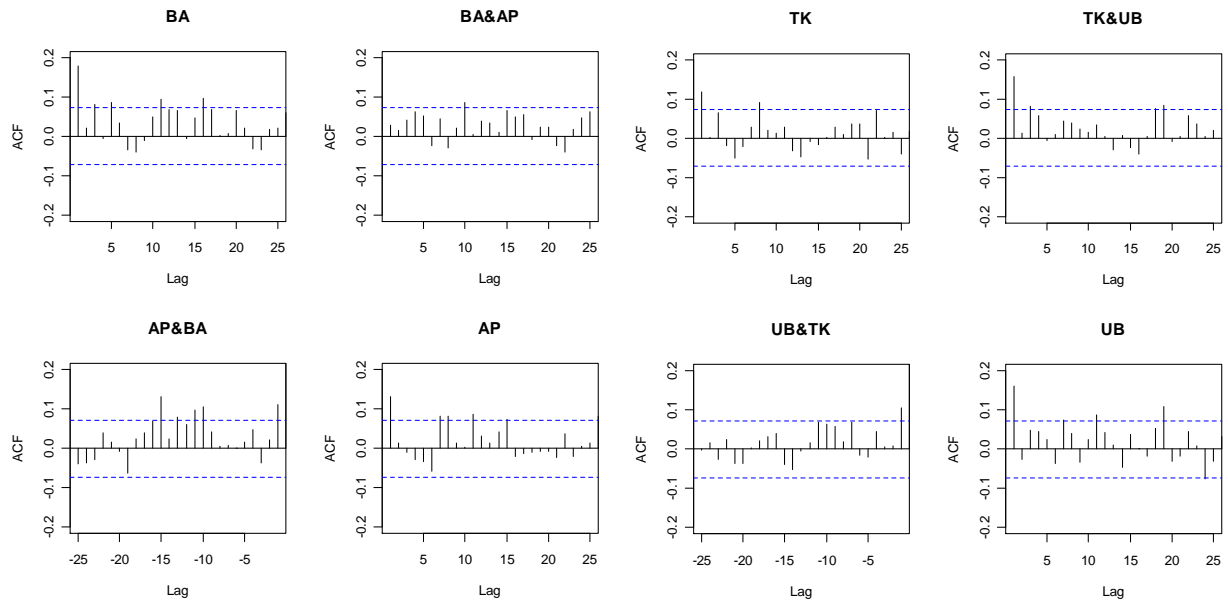
Šiame skyrelyje nagrinėjamų įmonių akcijų gražų sąlyginei kovariacijų matricai vertinti yra parenkamas vienas iš teorinėje dalyje aprašytų GARCH tipo modelių. Tačiau prieš taikant sąlyginio heteroskedastiškumo modelį, būtina įsitikinti, kad daugiamačės gražos nėra autokoreliuotos ir turi pastovų sąlyginį vidurkį μ_t . Jei taip nėra, prieš pradėdant modeliuoti Σ_t , reikia parinkti modelį ir μ_t kitimui nusakyti.

Ištirti daugiamačių gražų nekoreliuotumą galima nubrėžus daugiamačę empirinę duomenų autokoreliacinę funkciją (ACF), daugiamačiu atveju apibrėžiamą taip

$$\hat{R}_i = \hat{D}^{-1} \hat{C}_i \hat{D}^{-1},$$

kur $\hat{C}_i = Cov(r_t, r'_{t-i}) = \frac{1}{T} \sum_{t=i+1}^T (r_t - \bar{r})(r'_{t-i} - \bar{r})'$ – autokovariacinė funkcija, $i = 0, \dots, h < T$ žymi lagų skaičių, o $\bar{r} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_t$ – gražų vidurkių vektorių. \hat{D} nagrinėjamu atveju yra (10×10) matavimo diagonalinė matrica, kurios elementai – \hat{C}_0 įstrižainės elementų kvadratinės šaknys.

Kadangi nagrinėjamu atveju duomenų dimensija yra didelė, 6 pav. vaizduojamos gražų porų dvimatės autokoreliacinės funkcijos.



6 pav. „Baltikos“ ir „Aprangos“ akcijų gražų dvimatė autokoreliacinė funkcija (kairėje). „Tallinna Kaubamaja“ ir „Ūkio banko“ dvimatė autokoreliacinė funkcija (dešinėje).

ACF grafikai rodo, kad duomenys net dvimačiu atveju nėra koreliuoti (beveik visi grafikai turi reikšmingą pirmąjį vėlavimą), todėl aišku, kad ir dešimtmačiu gražos nebus nekoreliuotos. Imant kitų darbe analizuojamų įmonių porų autokorelicines funkcijas, gaunami labai panašūs grafikai, dažnai yra reikšmingas pirmas vėlavimas. Taikant vienamatį Ljung-Box kriterijų individualioms gražoms, su 5% reikšmingumo lygmeniu nekoreliuotumo hipotezė yra atmetama šešių įmonių atvejais (žr. priedų 2 lentelę).

Tokiais atvejais, akcijų gražų sąlyginio vidurkio kintamumui vertinti paprastai yra taikomas vektorinės autoregresijos modelis (VAR), kuris yra natūralus vienamačio autoregresijos modelio apibendrinimas. Jis gana lankstus ir dažnai sėkmingai modeliuoja daugiamačių finansinių gražų sąlyginio vidurkio elgesį, įvertindamas galimą autokoreliaciją tiek kiekvienoje laiko eilutėje atskirai, tiek tarp jų.

VAR(p) modelis apibrėžiamas taip:

$$r_t = v + A_1 r_{t-1} + \dots + A_p r_{t-p} + u_t, \quad t = 1, \dots, T.$$

Čia $r_t = (r_{1t}, r_{2t}, \dots, r_{dt})'$ – d -matis nagrinėjimų kintamųjų vektorius, $u_t = (u_{1t}, u_{2t}, \dots, u_{dt})'$ – nulinio vidurkio vektorinis baltojo triukšmo procesas su pastovia laiko atžvilgiu kovariacijų matrica $\Sigma = (\sigma_{ij})$, $A_t = (a_{ij})$ – $d \times d$ koeficientų matricos, v – $d \times 1$ laisvųjų narių vektorius.

Paprasčiausiu dvimačiu atveju VAR(1) modelis aprašomas tokia lygčių sistema

$$r_{1t} = v_1 + a_{11}r_{1,t-1} + a_{12}r_{2,t-1} + u_{1t},$$

$$r_{2t} = v_2 + a_{21}r_{1,t-1} + a_{22}r_{2,t-1} + u_{2t},$$

$$\text{Cov}(u_{1s}, u_{2t}) = \begin{cases} \sigma_{12}, & t = s, \\ 0, & t \neq s. \end{cases}$$

Kaip turint duomenis nustatyti VAR modelio eilę p ? Paprastai yra taikomi įvairūs informaciniai kriterijai, kurių bendras pavidalas yra

$$IC(p) = \ln|\hat{\Sigma}(p)| + c_T \cdot \varphi(n, p),$$

čia $\hat{\Sigma}(p) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{u}_t \hat{u}_t'$ – VAR(p) modelio liekanų kovariacijų matricos įvertis, $\varphi(n, p)$ – funkcija,

priskirianti „baudą“ už papildomų kintamųjų įtraikimą į modelį (angl. *penalty function*), o c_T – imties dydžio T funkcija. Žinomiausi tokio tipo kriterijai – tai Akaike AIC(p), Hannan-Quinn HQ(p), Schwarz SC(p) ir FPE(p), apibrėžiami taip:

$$AIC(p) = \ln|\hat{\Sigma}(p)| + \frac{2}{T} \cdot pn^2$$

$$HQ(p) = \ln|\hat{\Sigma}(p)| + \frac{2\ln(\ln(T))}{T} \cdot pn^2$$

$$SC(p) = \ln|\hat{\Sigma}(p)| + \frac{\ln(T)}{T} \cdot pn^2$$

$$FPE(p) = \left(\frac{T + np + 1}{T - np - 1} \right)^n \ln|\hat{\Sigma}(p)|$$

Apskaičiavus AIC(p), HQ(p), SC(p) ir FPE(p) informacinius kriterijus⁸, gaunama, kad visi kriterijai įgija mažiausią reikšmę, kai modelio eilė $p = 1$. Priedų 3 lentelėje pateikiamos kriterijų reikšmės imant VAR modelio eilę nuo 1 iki 10. Taigi remiantis šiais kriterijais, tinkamiausias yra VAR(1) modelis.

Įvertinus modelį ir pašalinus nereikšmingus koeficientus, gaunami tokie įverčiai

⁸ R pakete tai galima padaryti naudojant `vars` paketo funkciją `VARselect`.

$$\begin{pmatrix} r_{1t} \\ r_{2t} \\ \dots \\ r_{10,t} \end{pmatrix} = \hat{A}_1 \begin{pmatrix} r_{1,t-1} \\ r_{2,t-1} \\ \dots \\ r_{10,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{u}_{1t} \\ \hat{u}_{2t} \\ \dots \\ \hat{u}_{10,t} \end{pmatrix}.$$

Koeficientų matricos A_1 įvertis pateikiamas 2 lentelėje.

2 lentelė. Įvertinta VAR(1) modelio koeficientų matrica.

	ET[-1]	BA[-1]	RST[-1]	SB[-1]	PST[-1]	TK[-1]	AP[-1]	RS[-1]	TEO[-1]	UB[-1]
ET	0	0	0	0	0,05	0	0	0	0	0
BA	0	0,18	0	0	0	0	0	0	0	0
RST	0	0	0	0	0	0	0,13	0	0	0
SB	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,09
PST	0,19	0,11	0	0	0	0	0,10	0,11	0	0
TK	0	0,09	0	0	0,11	-0,08	0,21	-0,13	0	0
AP	0	0,06	0	0	0	0	0,12	0	0	0
RS	0	0,07	0	0	0	0	0,07	0	0	0
TEO	0,15	0	0,05	0	0	0	0	0	0	0
UB	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,17

Perrašus modelį lygčių sistema, gaunama

$$r_{1t} = 0,05r_{5,t-1} + \hat{u}_{1t},$$

$$r_{2t} = 0,18r_{2,t-1} + \hat{u}_{2t},$$

$$r_{3t} = 0,13r_{7,t-1} + \hat{u}_{3t},$$

$$r_{4t} = 0,09r_{10,t-1} + \hat{u}_{4t},$$

$$r_{5t} = 0,19r_{1,t-1} + 0,11r_{2,t-1} + 0,10r_{7,t-1} + 0,11r_{8,t-1} + \hat{u}_{5t},$$

$$r_{6t} = 0,09r_{2,t-1} + 0,11r_{5,t-1} - 0,08r_{6,t-1} + 0,21r_{7,t-1} - 0,13r_{8,t-1} + \hat{u}_{6t}$$

$$r_{7t} = 0,06r_{2,t-1} + 0,12r_{7,t-1} + \hat{u}_{7t},$$

$$r_{8t} = 0,07r_{2,t-1} + 0,07r_{7,t-1} + \hat{u}_{8t},$$

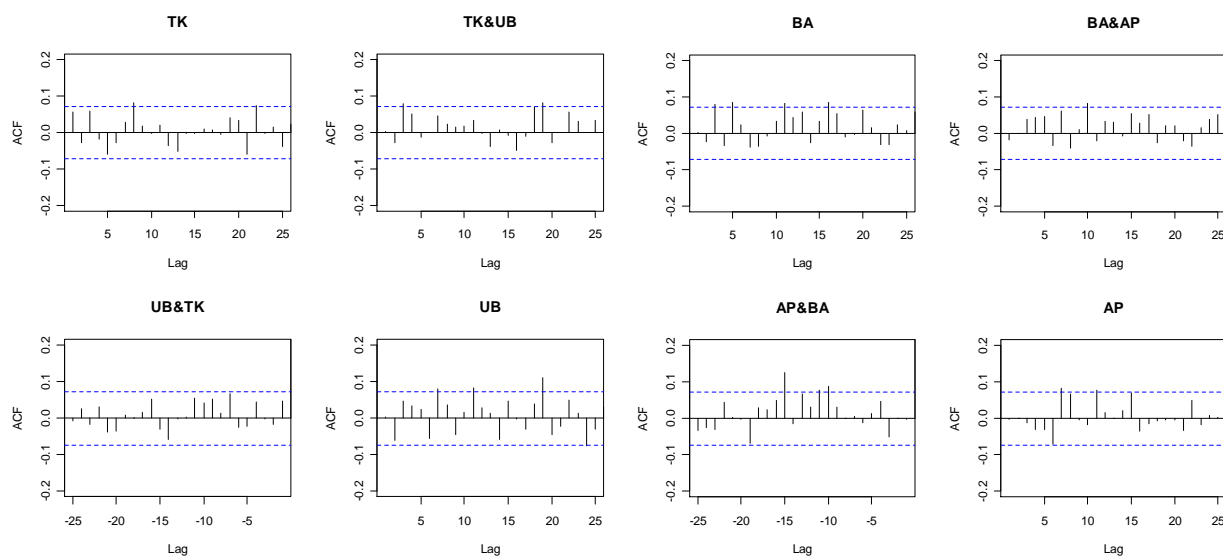
$$r_{9t} = 0,15r_{1,t-1} + 0,05r_{3,t-1} + \hat{u}_{9t},$$

$$r_{10,t} = 0,17r_{10,t-1} + \hat{u}_{10,t}.$$

Modelio rezultatai rodo, jog, pavyzdžiui, ketvirtosios iš nagrinėjamų įmonių – Šiaulių banko – gražos priklauso nuo Ūkio banko gražų su vienos dienos vėlavimu. Tuo tarpu Ūkio banko akcijų gražos priklauso tik nuo savo gražų praėjusios dienos reikšmės.

Gavus modelio parametrų įverčius, atliekama modelio diagnostika. Pirmiausia patikrinamas modelio stabilumas (plačiau apie modelio stabilumą rašoma [16]). Tam pakanka apskaičiuoti \hat{A}_1 tikrinių reikšmių sumą ir paimti jos modelį. Gautajame modelyje šis dydis lygus 0,38 ir yra žymiai mažesnis už 1. Taigi modelis stabilus.

VAR modelis gerai aprašo duomenis, jei jo liekanos (nuo šiol jos bus vadinamos VAR-gražomis) sudaro baltąjį triukšmą, t. y. jei $\hat{u}_t \sim (0_{10 \times 1}, \Sigma_{10 \times 10})$. 7 pav. kairėje pavaizduoti „Tallinna Kaubamaja“ ir „Ūkio banko“ VAR-gražų autokoreliacinės funkcijos grafikai.



7 pav. VAR-gražų ACF („Tallinna Kaubamaja“ ir „Ūkio banko“ atvejais kairėje, „Baltikos“ ir „Aprangos“ atvejais dešinėje).

Matoma, kad tiek „Tallinna Kaubamaja“ ir „Ūkio banko“ VAR-gražų \hat{u}_{it} autokoreliacijos atskirai, tiek jų tarpusavio koreliacijos (angl. *cross-correlations*) yra, ko gero, nereikšmingos (žr. 7 pav. kairėje). Panašūs rezultatai gaunami ir kitoms įmonėms (7 pav. dešinėje pateiktas „Baltikos“ ir „Aprangos“ atvejais).

Formaliai, \hat{u}_t daugiamatį nekoreliuotumą galima patikrinti taikant daugiamatį Portmanteau kriterijų arba Breusch-Godfrey Lagrange daugiklių kriterijų.

Portmanteau testas tikrina $H_0 : R_1 = \dots = R_h = 0$ su alternatyva $H_1 : \exists i : R_i \neq 0$. Testinė statistika yra

$$Q_h = T \sum_{i=1}^h \text{tr}(\hat{C}'_i \hat{C}_0^{-1} \hat{C}_i \hat{C}_0^{-1})$$

ir kai teisinga nulinė hipotezė turi χ^2 su $d^2 h - d^2 p$ laisvės laipsnių skirstinį ([16]). Šio kriterijaus testinė statistika turi χ^2 skirstinį tik kai lagų skaičius h yra didelis. Mažoms h reikšmėms daugiamačio Portmanteau testo rezultatai gali būti klaidingi. Deja, tikslios taisyklės, kokį vėlavimų skaičių imti, nėra. Praktikoje paprastai imamas h nuo $p+1$ iki 15.

Kaip alternatyva Portmanteau kriterijui, gali būti taikomas daugiamatis Breusch-Godfrey Lagrange daugiklių kriterijus. Šis testas remiasi pagalbine daugiamate regresija

$$\hat{u}_t = A_0 + A_1 r_{t-1} + \dots + A_p r_{t-p} + D_1 \hat{u}_{t-1} + \dots + D_h \hat{u}_{t-h} + v_t \quad (11)$$

ir tikrina $H_0 : D_1 = \dots = D_h = 0$ prieš $H_1 : \exists i : D_i \neq 0$.

Testinė statistika yra

$$LM_h = T(d - \text{tr}(\hat{\Sigma}_r^{-1} \hat{\Sigma}_e))^2,$$

kur $\hat{\Sigma}_r$ ir $\hat{\Sigma}_e$ žymi apriboto⁹ (angl. *restricted*) ir neapriboto (angl. *unrestricted*) modelių kovariacijų matricių įverčius atitinkamai. Esant teisingai nulinei hipotezei LM_h turi χ^2 su $d^2 h$ laisvės laipsnių skirstinį.

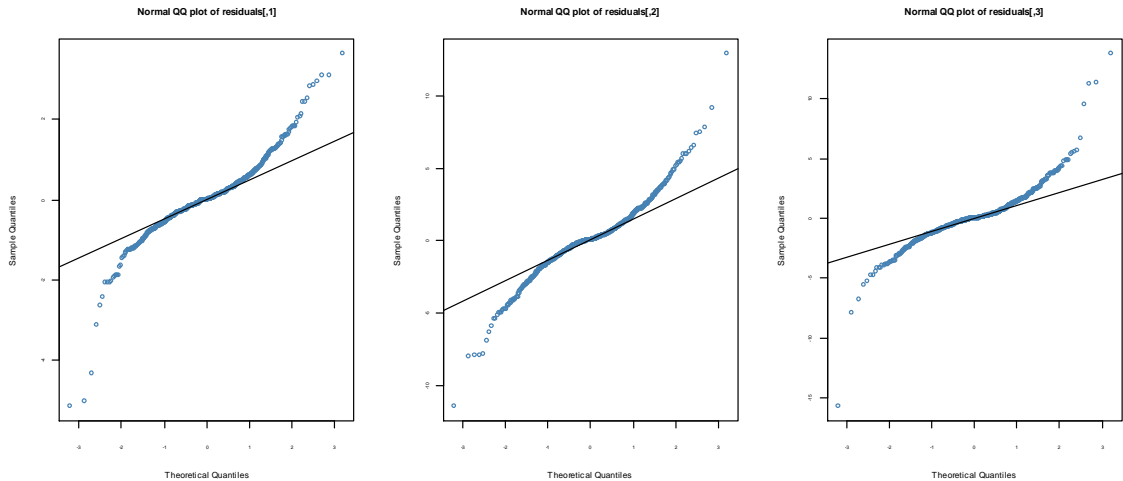
Analizuojamu atveju daugiamatis Breusch-Godfrey Lagrange daugiklių kriterijus imant lagų skaičių nuo 1 iki 5 su 1% reikšmingumo lygmeniu priima liekanų nekoreliuotumo hipotezę (žr. priedų 4 lentelėje pateiktas testo p-reikšmes). Imant vėlavimų skaičių nuo 7 iki 15, abu aukščiau aprašyti testai su 1% reikšmingumo lygmeniu atmeta nulinę hipotezę alternatyvos naudai. Dėl portmanteau testo rezultatų patikimumo tokiems lagų skaičiams galima diskutuoti. Portmanteau statistika turi χ^2 skirstinį tik kai lagų skaičius yra didelis. Koks lagų skaičius yra didelis, nėra tiksliai nustatyta. Be to, H_0 gali būti atmetama dėl to, kad vienai/kelioms įmonėms atsiranda reikšmingų vėlavimų, kai $h > 7$, tačiau tai neturi logiškos interpretacijos. Nelabai tikėtina, jog, pavyzdžiui, „Tallinna Kaubamaja“ VAR-gražos ir „Rokiškio sūrio“ VAR-gražų i -tasis vėlavimas sistemingai koreliuotų, labiau tikėtina, kad taip atsitiko dėl imties atsitiktinumo.

Vis dėlto buvo pabandyta didinti VAR modelio eilę p , tačiau geresnių rezultatų nebuvo gauta – modelis tampa pernelyg gremėzdiškas, su didelių skaičiumi vertinamų parametru, kurių dauguma nėra reikšmingi, o liekanos elgiasi panašiai kaip VAR(1) atveju. Taigi buvo nuspręsta palikti VAR(1) modelį, laikant, kad jo liekanos sudaro daugiamatį baltąjį triukšmą. Juo labiau, kad daugiamatė \hat{u}_t koreliacinė funkcija labai primena daugiamatį baltojo triukšmo ACF, keletas reikšmingų vėlavimų atsiranda tik didelėms lagų reikšmėms.

Ar galima teigti, kad tai normalusis daugiamatis baltasis triukšmas? Tai gali būti patikrinta taikant, pavyzdžiui, daugiamatį Shapiro-Wilk kriterijų¹⁰. Šio kriterijaus p-reikšmė yra $< 2.2 \cdot 10^{-16}$. Normalumo hipotezė yra atmetama alternatyvos naudai. Tokio rezultato ir buvo tikėtasi, nes jei liekanų daugiamatis skirstinys būtų normalusis, tai ir jo marginalieji skirstiniai būtų normalieji, o kaip iliustruoja 8 pav., taip nėra. Marginaliųjų skirstinių uodegos yra žymiai sunkesnės negu normaliojo dydžio.

⁹ (11) lygybe apibrėžtas modelis, kai galioja H_0 .

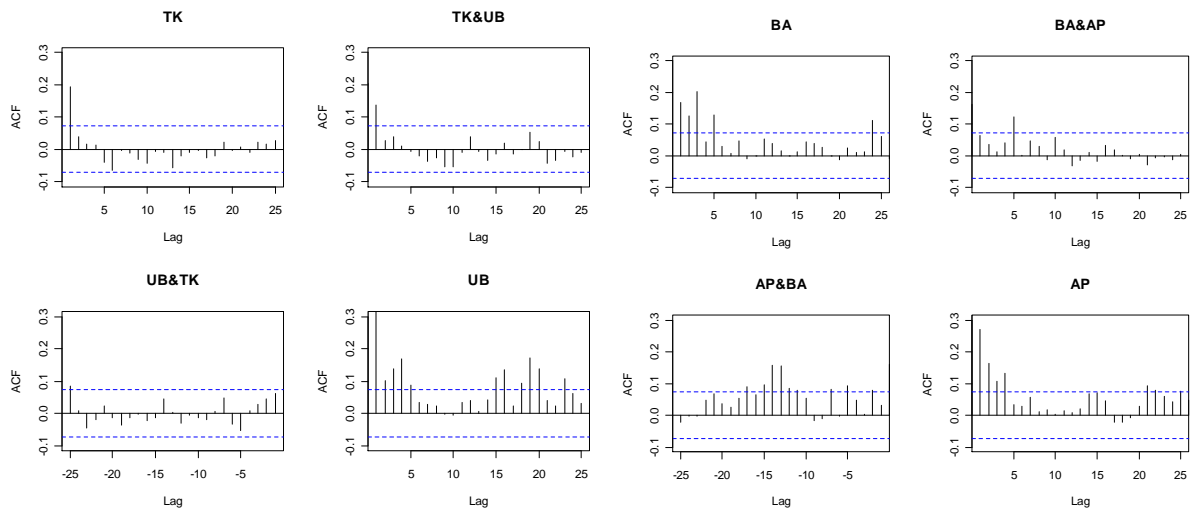
¹⁰ R programoje tai galima atlikti pasinaudojus `mvnormtest` paketo funkcija `mshapiro.test()`.



8 pav. Liekanų kvantilių grafikai (iš kairės: Eesti Telekom, Baltika, Rytų skirstomieji tinklų VAR-gražos)

Toliau VAR modelio liekanoms \hat{u}_t yra pritaikomas daugiamatis GARCH modelis. Tačiau prieš tai reikia įsitikinti, kad VAR modelio liekanos \hat{u}_t turi GARCH struktūrą. Standartinis būdas tam patikrinti yra autokoreliacinės funkcijos grafikų analizė – jei VAR liekanos \hat{u}_t nėra autokoreliuotos, o VAR liekanos kvadratu \hat{u}_t^2 yra autokoreliuotos, vadinasi GARCH modelis turėtų tikti \hat{u}_t kintamumui aprašyti.

9 pav. pavaizduotos kai kurių įmonių VAR-gražų kvadratų \hat{u}_t^2 autokoreliacinės funkcijos.



9 pav. „Tallinna Kaubamaja“ ir „Ūkio banko“ VAR-gražų kvadratų ACF (kairėje). „Baltikos“ ir „Aprangos“ VAR-gražų kvadratų ACF (dešinėje).

Matoma, kad ACF turi daug išsiskiriančių stulpelių, taigi VAR-gražos kvadratu tikrai yra koreliuoti dydžiai. Todėl tikėtina, kad GARCH modelis galėtų tikti VAR-gražų kintamumui modeliuoti.

Formaliai, ar gautosios VAR modelio liekanos turi ARCH struktūrą, patikrinama taikant daugiamatį Lagrange daugiklių ARCH kriterijų. Šis kriterijus taip pat remiasi pagalbine regresija, apibrėžiamą tokiu būdu

$$vech(u_t, u_t') = B_0 + B_1 vech(u_{t-1}, u_{t-1}') + \dots + B_q vech(u_{t-q}, u_{t-q}') + e_t$$

ir tikrina nulinę hipotezę $H_0 : B_1 = \dots = B_q = 0$

Kriterijaus statistika yra $LM_q = \frac{1}{2} Td(d+1) - Ttr(\hat{\Sigma}_u \hat{\Sigma}_r^{-1})$, kur $\hat{\Sigma}_r$ ir $\hat{\Sigma}_u$ – apriboto ir neapriboto modelių kovariacijų matricių įverčiai atitinkamai. Ši testinė statistika, jei galioja H_0 , turi asimptotiškai χ^2 su $qd^2(d+1)^2/4$ laisvės laipsnių skirstinį.

Nagrinėjamu atveju gaunama beveik nulinė ($< 2,2 \cdot 10^{-16}$) testo p-reikšmė, todėl H_0 yra atmetama alternatyvos naudai. Daroma išvada, jog liekanos turi GARCH struktūrą.

Sprendžiant klausimą, kurį iš teorinėje dalyje aprašytų sąlyginio heteroskedastiškumo modelių taikyti turimoms VAR-gražoms, buvo apsistota ties DCC modeliu. Diagonalinis ir CCC modelis reikalauja sąlyginės koreliacijos matricos pastovumo laike, kas nėra realistiška nagrinėjamu atveju. Vargu ar galėtume daryti prielaidą, kad koreliacijos tarp skirtingų įmonių gražų nekinta laikui bėgant. Kinta įmonių veiklos prioritetai, kinta jų tarpusavio ryšiai, kinta smulkesnių rinkos sektorių padėtis, todėl turėtų kisti ir koreliacijos tarp įvairių įmonių akcijų gražų.

Lyginant su BEKK modeliu, DCC modelis yra lankstesnis, be to, turi mažesnę nežinomų parametrų skaičių.

DCC modelio vertinimas atliekamas naudojant statistinį paketą *RATS*. *R* kol kas neturi daugiamatį GARCH tipo modelių vertinimo galimybes. Du *R* paketo vartotojai H. Schmidbauer ir V. S. Tunalioglu siūlo BEKK modelio vertinimo funkciją¹¹, tačiau ji nėra greita, todėl neleidžia vertinti BEKK modelio esant dideliame skaičiui kintamųjų. Šių autorių sukurtas paketas dar nėra įtrauktas į oficialų *R* programos tinklalapio paketų (angl. *contributed packages*) sąrašą. Kadangi DCC modelis yra palyginti naujas ir kol kas nelabai paplitęs praktinėje srityje, tai ir *RATS* paketas siūlo tik modelio parametrų įvertinimo galimybę ir nepateikia nei matricių R_t , nei matricių Σ_t įverčių, nepateikia taip pat jokių diagnostinių testų modelio liekanoms ε_t . Todėl R_t , Σ_t vertinimas bei modelio diagnostika buvo atlikta *R* paketo pagalba¹².

Naudojant *RATS* paketą buvo gauti priedų 5 lentelėje pateikti parametrų įverčiai¹³. Visi jie yra reikšmingi. Koreliacijų matricių vertinimo parametrai a ir b yra lygūs atitinkamai 0,01 ir 0,9. Jų suma yra $0,91 < 1$, todėl modelio stabilumo sąlygos yra tenkinamos.

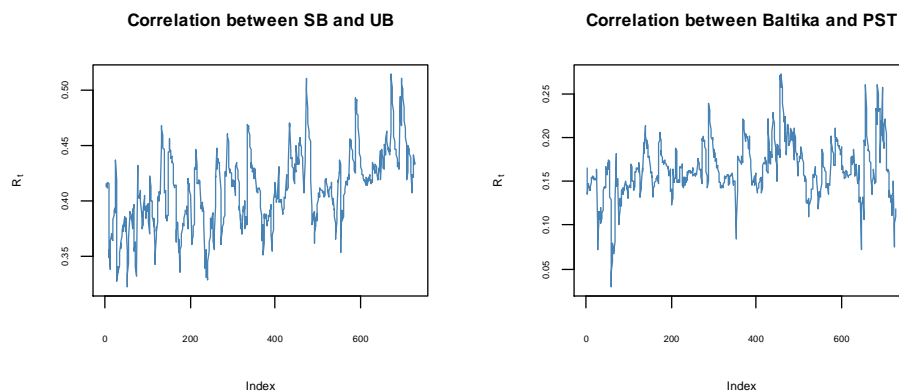
¹¹ Paketo `mgarchBEKK`, kuris gali būti parsisiųstas iš <http://www.vsthost.com/pages/RStuff.php>, funkcija `mvBEKK.est()`.

¹² Vertinimo procedūros *R* komandos ir funkcijų kodai pateikiami prie darbo pridedamame CD, katalogo „R kodai“ byla „2.2.1. DCC vertinimas“.

¹³ Programuojant *RATS* paketu buvo naudotasi [8] knygoje pateikiamais pavyzdžiais bei paketo pagalbos bylose esančiais kodų pavyzdžiais. Modelio vertinimo kodas pateikiamas prie darbo pridedamo CD kataloge „RATS kodai“.

Turint parametrų įverčius, pagal (5), (6) ir (7) formules galima apskaičiuoti įvertintų VAR-gražų \hat{u}_t , koreliacijų matricių įverčius \hat{R}_t kiekvienu laiko momentu t ir grafiškai pažiūrėti kaip kinta įvairių kintamųjų porų koreliacijos laiko atžvilgiu. Tai padėtų atsakyti į klausimą, ar koreliacijos yra pastovios ar kinta laike.

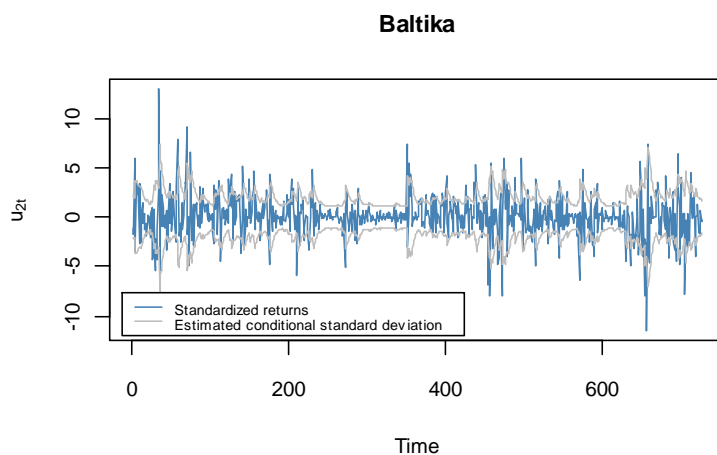
10 pav. iliustruoja Šiaulių ir Ūkio bankų akcijų VAR-gražų $\hat{u}_{4,10,t}$ koreliacijas laike (kairėje) bei „Panevėžio statybos tresto“ ir „Baltikos“ VAR-gražų $\hat{u}_{3,2,t}$ koreliacijas (dešinėje).



10 pav. Koreliacijų kitimas laike. Šiaulių ir Ūkio bankų VAR-gražų koreliacijos (kairėje). „Baltikos“ ir „Panevėžio statybos tresto“

Iš grafikų matoma, kad koreliacijos tarp šių įmonių akcijų VAR-gražų nėra pastovios. Ūkio ir Šiaulių bankų atveju stebima netgi augimo tendencija, kas rodo vis stiprėjantį tiesinį ryšį tarp šių bendrovių akcijų VAR-gražų. Tuo tarpu „Baltikos“ ir „Panevėžio statybos tresto“ atveju augimo tendencijos nesimato, koreliacijos kinta $[0; 0,29]$ intervale su vidutine koreliacija lygia 0,17, bet irgi akivaizdžiai nėra pastovios laiko atžvilgiu.

11 pav. iliustruojamas įvertintas sąlyginis standartinis nuokrypis „Baltikos“ VAR-gražoms. Kaip matoma, DCC modelis neblogai aprašo šios įmonės akcijų VAR-gražų \hat{u}_{2t} kintamumo kitimą. Kitų įmonių atvejais gaunami panašūs rezultatai.



11 pav. „Baltika“ VAR-gražos ir įvertintas sąlyginis standartinis nuokrypis.

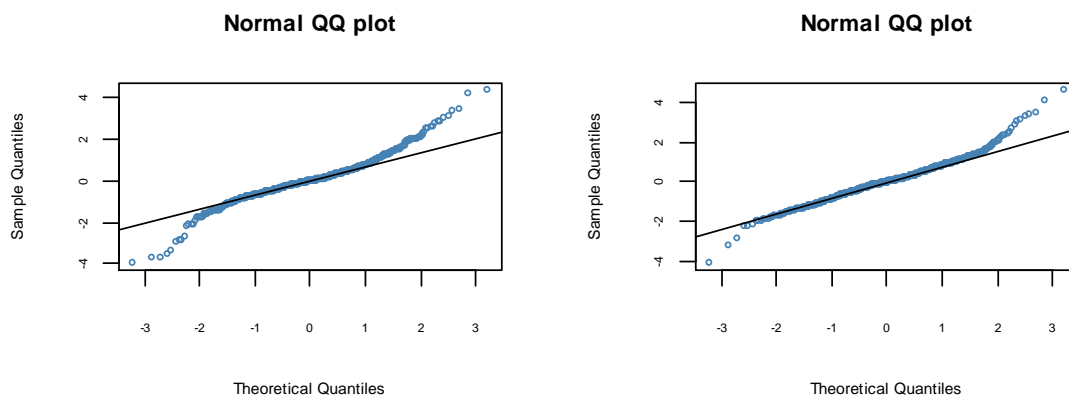
Įvertinus modelį, būtina atlikti jo diagnostiką ir patikrinti, ar gaunamos standartizuotos liekanos $\hat{\varepsilon}_t$ gali būti laikomos (daugiamačio) baltojo triukšmo realizacija.

Kai kurių įmonių VAR-gražų standartizuotos liekanos $\hat{\varepsilon}_i = (\hat{\varepsilon}_{i1}, \hat{\varepsilon}_{i2}, \dots, \hat{\varepsilon}_{i,728})$ pavaizduotos 12 pav.



12 pav. Standartizuotos DCC(1,1) modelio liekanos Šiaulių banko (kairėje) ir TEO LT (dešinėje) VAR-gražų atveju.

Iš 12 pav. matoma, kad pritaikytas DCC modelis pašalino VAR-gražų klasterizacijos efektą, tačiau kintamieji vis dar turi išsiskiriančių stebėjimų. Tai reiškia, kad standartizuotų liekanų skirstinys, ko gero, nebus normalusis. Šį faktą patvirtina ir 13 pav. pavaizduoti Šiaulių banko ir TEO LT standartizuotų DCC liekanų kvantilių grafikai, rodantys, kad šie dydžiai turi sunkesnes negu normaliojo dydžio uodegas. Kadangi vienamačiai skirstiniai nėra normalūs, tai daugiamačiai taip pat nebus normalusis.

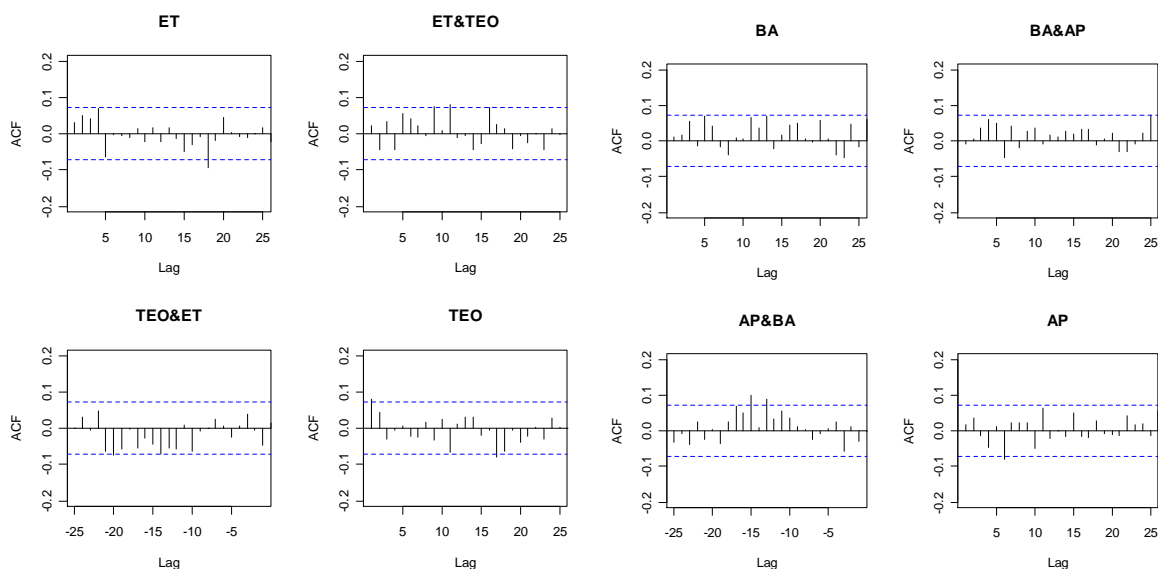


13 pav. Šiaulių banko (kairėje) ir TEO LT (dešinėje) standartizuotų DCC modelio liekanų kvantilių grafikai.

Ir iš tiesų, patikrinus daugiamatį standartizuotų DCC modelio liekanų normalumą taikant Shapiro-Wilk testo apibendrinimą daugiamačiu atveju, kaip ir buvo tikėtasi, normalumo hipotezė yra atmetama su p -reikšme $< 2,2 \cdot 10^{-16}$. Tačiau kadangi DCC vertinimui yra taikomas pseudo

didžiausio tikėtinumo metodas, koeficientų įverčiai, net ir atmetus normalumo hipotezę yra suderinti.

Toliau yra tikrinamas standartizuotų DCC modelio liekanų $\hat{\varepsilon}_t$ nekoreliuotumas. 14 pav. rodo, kad standartizuotos liekanos, „Eesti Telekom“ ir „TEO LT“ bei „Baltikos“ ir „Aprangos“ atvejais tikriausiai nėra koreliuoti dydžiai.



14 pav. „Eesti Telekom“ ir „TEO LT“ DCC modelio liekanų ACF (kairėje). „Baltikos“ ir „Aprangos“ DCC modelio liekanų ACF (dešinėje).

Panašūs rezultatai gaunami nagrinėjant ir kitų įmonių porų $\hat{\varepsilon}_{it}$ autokoreliacinę struktūrą, o patikrinus nekoreliuotumo hipoteze su daugiamačiu portmanteau testu bei Breusch-Godfrey Lagrange daugiklių kriterijumi, gaunama, jog su 5% reikšmingumo lygmeniu atmesti H_0 nėra pagrindo. Taigi galima laikyti, kad liekanos nėra koreliuotos.

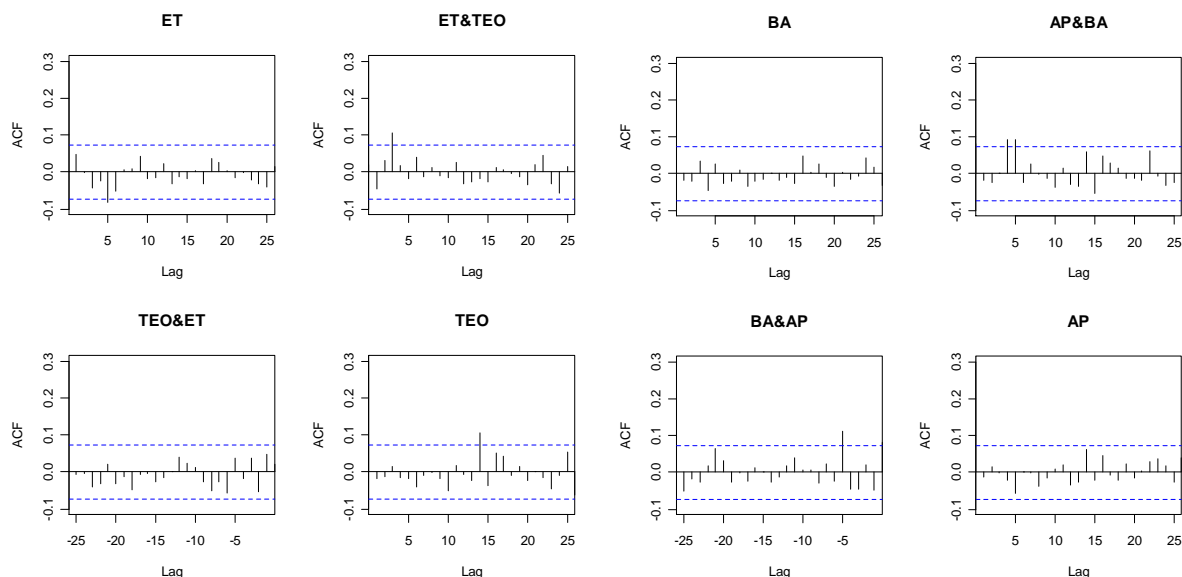
Besąlyginė įvertinta $\hat{\varepsilon}$ kovariacijų matrica yra labai panaši į vienetinę (žr. 3 lentelė).

3 lentelė. Besąlyginė $\hat{\varepsilon}$ kovariacijų matrica.

	$\hat{\varepsilon}_1$	$\hat{\varepsilon}_2$	$\hat{\varepsilon}_3$	$\hat{\varepsilon}_4$	$\hat{\varepsilon}_5$	$\hat{\varepsilon}_6$	$\hat{\varepsilon}_7$	$\hat{\varepsilon}_8$	$\hat{\varepsilon}_9$	$\hat{\varepsilon}_{10}$
$\hat{\varepsilon}_1$	0,85	0,00	0,00	-0,01	0,00	0,00	0,00	0,01	0,01	-0,01
$\hat{\varepsilon}_2$	0,00	0,90	0,00	0,01	0,01	0,01	0,00	0,00	0,00	0,01
$\hat{\varepsilon}_3$	0,00	0,00	0,91	-0,01	-0,01	0,00	0,01	0,00	0,00	-0,01
$\hat{\varepsilon}_4$	-0,01	0,01	-0,01	0,87	0,00	0,00	0,01	0,00	0,00	0,01
$\hat{\varepsilon}_5$	0,00	0,01	-0,01	0,00	0,90	0,00	0,02	0,00	0,01	0,00
$\hat{\varepsilon}_6$	0,00	0,01	0,00	0,00	0,00	0,90	0,00	0,00	0,01	0,00
$\hat{\varepsilon}_7$	0,00	0,00	0,01	0,01	0,02	0,00	0,86	0,00	0,02	0,02
$\hat{\varepsilon}_8$	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,90	0,00	0,00
$\hat{\varepsilon}_9$	0,01	0,00	0,00	0,00	0,01	0,01	0,02	0,00	0,85	0,00
$\hat{\varepsilon}_{10}$	-0,01	0,01	-0,01	0,01	0,00	0,00	0,02	0,00	0,00	0,89

Standartizuotų liekanų kovariacijų matricos lygybę vienetinei matricai patvirtina neparametrinis erdvinis ženklų sferiškumo kriterijus, su p -reikšme lygia 0,28 priimančias sferiškumo hipotezę. Šį testą R statistinėje programoje atlieka `SpatialNP` paketo funkcija `sr.sphere.test`.

Belieka patikrinti, ar $\hat{\varepsilon}_t$ jau nebeturi GARCH struktūros. Analizuojant liekanų kvadratus $\hat{\varepsilon}_t^2$ matoma, kad šie dydžiai, ko gero, taip pat nėra koreliuoti (žr. 15 pav.)



15 pav. „Eesti Telekom“ ir „TEO LT“ DCC modelio liekanų kvadratų ACF (kairėje). „Baltikos“ ir „Aprangos“ DCC modelio liekanų kvadratų ACF (dešinėje).

Tačiau daugiamatis Lagrange daugiklių ARCH kriterijus, kai $q = 5$ visgi atmata H_0 su p -reikšme lygia 0,000033. Gavus tokį atsakymą buvo nuspręsta padidinti DCC modelio eilę. Tačiau toks sprendimas nepagerino standartizuotų liekanų elgesio – Lagrange daugiklių ARCH kriterijus, nors ir su nedidele tikimybe, tačiau atmata ARCH struktūros nebuvimo hipotezę (imta $q = 5$). Be to, didinant eilę atsiranda techninių DCC modelio vertinimo kliūčių – ne visada sukonvertuoja modelio tikėtimumo funkcijos optimizavimo algoritmas, o dėl didelio vertinamų parametru skaičiaus, vertinimo procedūra užtrunka ir ne visada pavyksta gauti galutinį atsakymą. Išanalizavus įvairių $\hat{\varepsilon}_t^2$ porų autokoreliacinių funkcijų grafikus buvo gauti į 15 pav. panašūs grafikai – reikšmingų komponenčių beveik nėra, tik kartais iššoka 4 – 7 stulpelis, tad dėl šios priežasties ir buvo gauta, kad nagrinėjant visus daugiamaciū duomenis kartu, LM-ARCH testas atmata H_0 . Tik ar dėl to, kad reikšmingas penktasis ar septintasis vėlavimas, kai kiti vėlavimai nėra reikšmingi, modelį atmesime? Jei modelis būtų akivaizdžiai netinkamas, tai reikšmingų komponenčių būtų daugiau.

Atsižvelgus ir į kitus modelio diagnostikos rezultatus (liekanos neautokoreliuoja ir jų besąlyginė kovariacijų matrica yra vienetinė), išanalizavus dėl kokių priežasčių daugiamatis LM-ARCH kriterijus atmata H_0 ir atsižvelgus į tai, kad praktikoje skaičiuojant portfelio

rizikuojamą vertę paprastai taiko ne aukštesnę nei (1,1) GARCH modelio eilę buvo nuspręsta VAR-DCC(1,1) modelį priimti.

Reikėtų paminėti ir tai, kad VAR modelis buvo vertinamas, neatsižvelgiant į tai, kad duomenys yra heteroskedastiški. Teoriškai teisinga būtų VAR-DCC modelį vertinti kartu ir VAR koeficientų įverčių ieškoti atsižvelgus į duomenų heteroskedastinę struktūrą, tačiau tai sudėtingas teorinis uždavinys, kuris iki šiol nėra ištirtas iki galo, todėl kol kas praktikoje vektorinė autoregresija sąlyginio vidurkio kitimui nusakyti ir daugiamatis GARCH salyginės kovariacijų matricos modeliavimui yra taikomi atskirai. Bendrą VAR-DCC vertinimą komplikuoja tai, kad daugiamatiams GARCH modeliams daug teorinių rezultatų dar nėra įrodyti ir ne visos modelių savybės yra iki galo iširtos.

Kaip buvo rašoma teorinėje darbo dalyje, yra sukurta nemažai modelių daugiamatį akcijų gražų kintamumui modeliuoti. Vienas iš jų – faktorinis modelis – yra įdomus tuo, kad leidžia sumažinti nagrinėjamų kintamųjų dimensiją bei gauti tarpusavyje nekoreliuojančias laiko eilutes (faktorius), kurių kintamumą galima vertinti atskirai. Dėl to daugiamatį modelio vertinimas žymiai supaprastėja. Todėl kaip alternatyvą VAR-DCC modeliui buvo nuspręsta pritaikyti faktorinį GARCH modelį Baltijos šalių rinkos akcijoms, įvertinti rizikuojamą vertę ir palyginti prognozavimo šiuo modeliu rezultatus su VAR-DCC modelio rezultatais.

2.2.2. Faktorinio (O-GARCH) modelio taikymas ir diagnostika

Prieš taikant faktorinę analizę duomenims, būtina įsitikinti, ar duomenys faktorinei analizei tinka. Šiam tikslui paprastai yra taikomi sferiškumo kriterijai bei Kaiser-Meyer-Olkin (KMO) matas. Pritaikykime, iš pradžių, pastarąjį rodiklį.

KMO koeficientas, apibrėžiamas tokia formule

$$KMO = \frac{\sum \sum_{i \neq j} Cor^2(r_i, r_j)}{\sum \sum_{i \neq j} Cor^2(r_i, r_j) + \sum \sum_{i \neq j} Pcor^2(r_i, r_j)},$$

čia

$$r_i = (r_{i,1}, r_{i,2}, \dots, r_{i,T})';$$

$Cor(r_i, r_j)$ – i -tosios ir j -tosios įmonių gražų koreliacija;

$Pcor(r_i, r_j)$ – dalinė i -tosios ir j -tosios įmonių gražų koreliacija¹⁴.

¹⁴ Dviejų kintamųjų r_i ir r_j , $i \neq j$ dalinės koreliacijos koeficientas apibrėžiamas formule

$Pcor(r_i, r_j) = \frac{\tilde{r}_{ij}}{(\tilde{r}_{ii} \tilde{r}_{jj})^{1/2}}$, kur \tilde{r}_{ij} žymi koreliacijų matricos R atvirkštinės matricos R^{-1} (i, j) elementą [19].

Kuo šio koeficiento reikšmė artimesnė vienetui, tuo mažesnė yra dalinių koreliacijos koeficientų suma ir tuo labiau kintamųjų porų koreliacija paaiškinama kitais kintamaisiais. Vadinasi, artima vienetui KMO reikšmė yra ženklas, kad gražos yra tinkamos faktorinei analizei. Laikoma, kad jei $0,9 < KMO$ – faktorinė analizė puikiai tinka, jei $0,8 < KMO \leq 0,9$ – gerai tinka, $0,7 < KMO \leq 0,8$ – tinka patenkinamai, $0,6 < KMO \leq 0,7$ – tinka pakenčiamai, $0,5 < KMO \leq 0,6$ – tinka blogai, $KMO < 0,5$ – faktorinė analizė nepriimtina ([10]).

Apskaičiavus KMO rodiklį nagrinėjamų įmonių gražoms gaunamas $KMO = 0,82$ ¹⁵, kas pagal pateiktą gradaciją reiškia, kad faktorinė analizė tinka gerai.

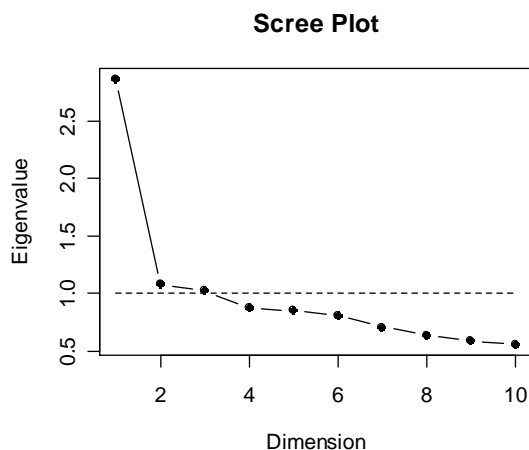
Kitas dažnai taikomas būdas duomenų tinkamumui faktorinei analizei nustatyti yra sferiškumo kriterijai, tikrinantys matricos lygybę tam tikrai diagonalinei matricai, t. y., tikrinama, ar kintamieji nekoreliuoja. Jei taip yra, tai taikyti faktorinę analizę nėra prasmės. Žinomiausi parametriniai sferiškumo kriterijai – tai Bartlett'o ir Mauchly kriterijai, tačiau tiek vienas, tiek kitas reikalauja, kad daugiamatis kintamųjų skirstinys būtų daugiamatis normalusis, o kaip buvo parodyta anksčiau, nagrinėjamiems duomenims taip tikrai nėra. Todėl buvo pritaikytas neparimetrinis erdvinis ženklų sferiškumo kriterijus kintamųjų koreliacijų matricai. Gautoji testo p-reikšmė yra mažesnė nei $2,2 \cdot 10^{-16}$. Todėl nulinė (sferiškumo) hipotezė atmetama alternatyvos naudai. Kintamieji yra koreliuoti. Taigi faktorinė analizė gali būti taikoma.

Pirma užduotis – nustatyti faktorių skaičių m . Egzistuoja keletas kriterijų šiam skaičiui nustatyti. Tegul Σ – nagrinėjamų kintamųjų kovariacijų matrica, R – nagrinėjamų kintamųjų koreliacijų matrica. Siūloma:

- Pasirinkti m tokį, kad būtų paaiškinta fiksuota kintamųjų bendrosios dispersijos $tr(\Sigma)$ arba $tr(R)$ dalis (pavyzdžiui, 80%);
- Pasirinkti m lygų Σ tikrinių reikšmių, didesnių už vidutinę tikrinę reikšmę, skaičiui. Matricos R vidutinė tikrinė reikšmė yra 1, todėl siūloma į modelį įtraukti tiek faktorių, kiek yra didesnių už 1 R tikrinių reikšmių;
- Pasinaudoti Σ arba R tikrinių reikšmių grafiku (angl. *scree plot*), vaizduojančiu matricos tikrines reikšmes dimensijos atžvilgiu. Šis grafikas paprastai turi didelį nuolydį pirmosioms tikrinėms reikšmėms ir yra beveik horizontali tiesė likusioms. Siūloma paimti m lygų tikrinių reikšmių, kurioms „nuolydis yra didelis“, skaičiui.

Nagrinėjamų duomenų koreliacijų matricos R tikrinių reikšmių grafikas pavaizduotas 16 pav.

¹⁵ KMO skaičiavimo funkcija, realizuota R pakete, pateikiama prie darbo pridedamame CD, kataloge „R kodai“, byloje „kmo.R“.



16 pav. Gražų koreliacijų matricos tikrinių reikšmių grafikas.

Vadovaujantis paskutiniu oju iš trijų išvardintų kriterijų, reikėtų imti vieną faktorių. Kas reikštų, kad visų 10 įmonių akcijų gražas vienija vienas bendras faktorius, kuris ir paaiškina koreliacijas tarp kintamųjų. Šis faktorius galėtų būti, pavyzdžiui, kapitalo aktyvų įkainojimo modelyje (angl. *CAPM - Capital Asset Pricing Model*) naudojama rinkos graža (angl. *market return*), matuojanti sisteminių akcijų rizikingumą, t. y. rizikingumą, kuris priklauso nuo bendros rinkos, kuriai priklauso vertybiniai popieriai, tendencijos. Rinkos graža yra vertinama kaip tam tikro rinkos indekso graža. Plačiau CAPM teorija aprašyta [22] knygoje. Tačiau pažiūrėjus į 4 lentelėje pateikiamus gražų koreliacijų matricos tikrinių reikšmių analizės rezultatus, matoma, jog vienas faktorius paaiškina tik trečdalį (29,32%) bendrosios duomenų dispersijos, o tai yra labai mažai. Įvertinę faktorinę analizę su vienu faktoriumi prarastume labai didelę dalį informacijos apie kintamųjų sklaidą.

4 lentelė. Gražų koreliacijų matricos tikrinių reikšmių analizė.

Faktorius	Tikrinės reikšmės	Bendrosios dispersijos dalis, kurią paaiškina <i>i</i> -toji komponentė, %	Kaupiamoji bendrosios dispersijos dalis, %
1	2,93	29,32	29,32
2	1,09	10,94	40,26
3	1,02	10,23	50,49
4	0,87	8,68	59,17
5	0,83	8,30	67,46
6	0,80	8,03	75,50
7	0,71	7,09	82,59
8	0,61	6,14	88,72
9	0,58	5,81	94,53
10	0,55	5,47	100,00

Gaunami rezultatai rodo, kad žymiai sumažinti kintamųjų dimensiją nagrinėjamiems duomenims neįmanoma. Kad paaiškintume didelę bendrosios dispersijos dalį (paprastai imama 80 – 90%),

turime imti bent 8 faktorius, o su tokiu faktorių skaičiumi faktorinės analizės modelis jau nėra identifikuotas.

Primenama, jog būtina ir pakankama (tiriančiosios) faktorinės analizės identifikuojamumo sąlyga yra $(d - p)^2 \geq d + p$ (plačiau žr. [4]), t. y. nagrinėjamu atveju, kai $d = 10$, reikalaujama, kad $p \leq 6$.

Taigi faktorinės analizės nagrinėjamiems duomenims sudaryti nepavyko. Todėl buvo nuspręsta pritaikyti O-GARCH modelį gražoms, kuris, kaip ir buvo minėta, gali būti laikomas faktoriniu GARCH su nulinėmis paklaidomis.

Pirmas žingsnis – standartizuoti gražas ir iš jų gauti tarpusavyje nekoreliuojančius kintamuosius. Tai padaroma pritaikius pagrindinių komponentių metodą¹⁶.

Pažymėjus standartizuotų gražų matricą – $X = (x_{it})_{10 \times 729} = \left(\frac{r_{it} - \bar{r}_i}{sd(r_i)} \right)_{10 \times 729}$, pagrindinės

komponentės apskaičiuojamos tokiu būdu

$$P = AX, \quad (12)$$

kur

$$P = \begin{pmatrix} P_1 \\ \dots \\ P_{10} \end{pmatrix}_{10 \times 729} \quad \text{– pagrindinių komponentių matrica;}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,10} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{10,1} & \dots & a_{10,10} \end{pmatrix}_{10 \times 10} \quad \text{– } Cov(X) \text{ tikrinių vektorių matrica.}$$

Gaunamos pagrindinės komponentės yra tarpusavyje nekoreliuoti dydžiai ir jų (besąlyginės) dispersijos sutampa su $Cov(X)$ tikrinėmis reikšmėmis. Taigi nagrinėjamu atveju gaunama tokia pagrindinių komponentių kovariacijų matrica:

5 lentelė. Pagrindinių komponentių kovariacijų matrica.

	PC1	PC2	PC3	PC4	PC5	PC6	PC7	PC8	PC9	PC10
PC1	2,93	0	0	0	0	0	0	0	0	0
PC2	0	1,09	0	0	0	0	0	0	0	0
PC3	0	0	1,02	0	0	0	0	0	0	0
PC4	0	0	0	0,87	0	0	0	0	0	0
PC5	0	0	0	0	0,83	0	0	0	0	0
PC6	0	0	0	0	0	0,8	0	0	0	0
PC7	0	0	0	0	0	0	0,71	0	0	0
PC8	0	0	0	0	0	0	0	0,61	0	0
PC9	0	0	0	0	0	0	0	0	0,58	0
PC10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,55

¹⁶ Skaičiavimams naudojama R paketo funkciją `princomp()`.

Pagrindinės komponentės turi nulinius vidurkius (nes r_t turi nulinius vidurkius). Be to, kaip ir buvo tikėtasi, nėra normalūs dydžiai. Jarque-Bera kriterijaus statistikos reikšmės yra labai didelės ir normališkumo hipotezė yra atmetama kiekvienai iš pagrindinių komponentių. Pagrindinės komponentės turi sunkiąsias uodegas – eksceso koeficientų reikšmės yra vidutiniškai 2 kartus didesnės negu normaliuoju atveju.

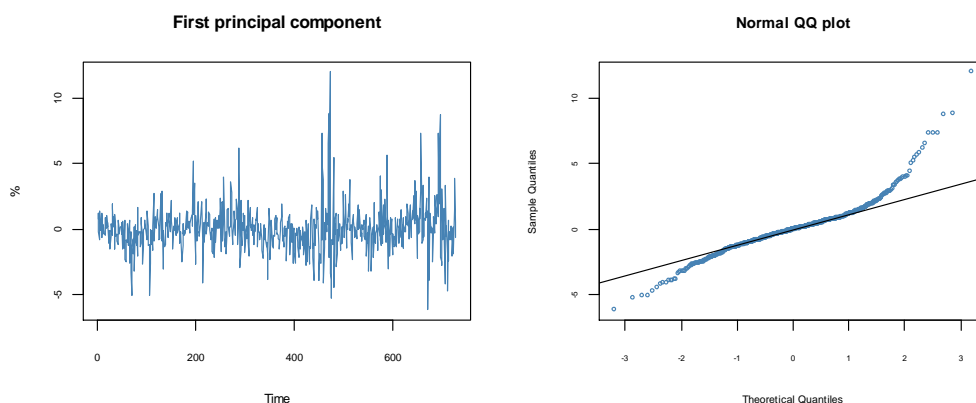
6 lentelė. Pagrindinių komponentių skaitinės charakteristikos.

	PC1	PC2	PC3	PC4	PC5	PC6	PC7	PC8	PC9	PC10
Mean	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Median	-0,04	0,00	-0,03	-0,02	0,00	0,03	-0,01	-0,02	0,03	0,00
Maximum	11,95	4,50	5,63	5,28	3,98	5,01	3,96	3,17	2,36	3,00
Minimum	-6,18	-4,65	-6,08	-3,69	-4,48	-3,54	-3,31	-3,44	-3,41	-2,29
Std. Dev.	1,71	1,05	1,01	0,93	0,91	0,90	0,84	0,78	0,76	0,74
Skewness	1,23	-0,02	0,14	0,30	0,19	0,09	0,33	0,05	-0,41	0,14
Kurtosis	9,93	4,97	7,78	6,36	5,30	5,10	5,46	4,45	4,77	3,89
Jarque-Bera	1642,5	117,8	696,4	353,2	165,1	134,9	197,7	63,9	115,5	26,1
Probability	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Kadangi pagrindinės komponentės yra nekoreliuotos, jų sąlyginės dispersijos gali būti vertinamos atskirai. Taigi norint įvertinti sąlyginę kiekvienos komponentės dispersiją, ją nagrinėsime atskirai, pašalinsime galimą autokoreliaciją ir pritaikyti tinkamą GARCH tipo modelį.

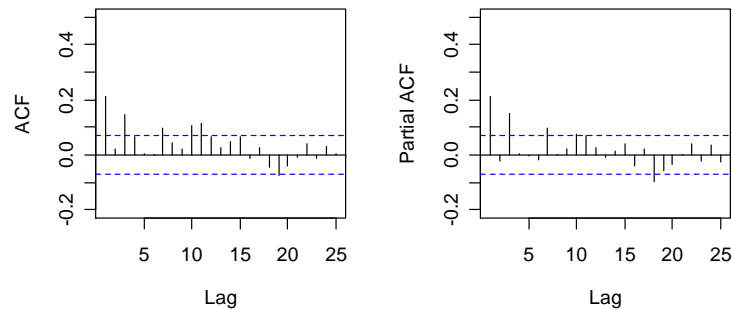
Modelio parinkimas pirmajai komponentei

Pirmosios komponentės grafikas (17 pav. kairėje) rodo būdingą finansinėms eilutėms klasterizacijos efektą. Kintamumas nėra pastovus, ramesnius periodus keičia audringesni ir atvirkščiai. Kvantilių grafikas (17 pav. dešinėje) patvirtina dar vieną ypatingą finansinių laiko eilučių savybę – sunkiąsias uodegas. Pirmoji komponentė turi žymiau daugiau „didelių“ reikšmių, negu jų būtų normaliuoju atveju.



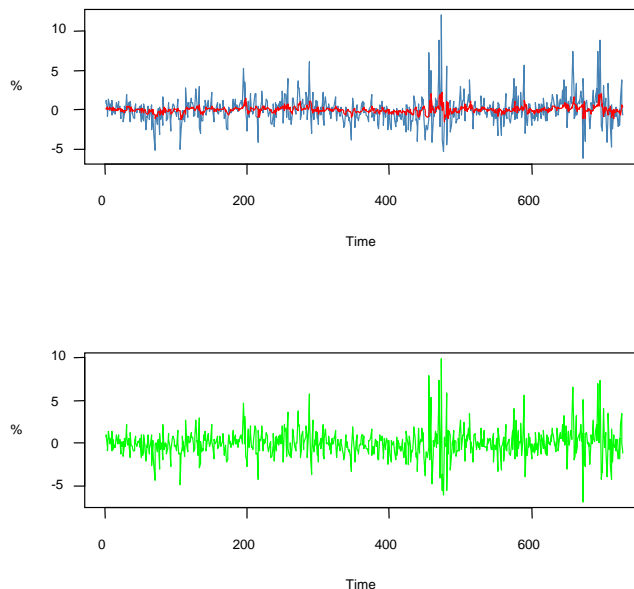
17 pav. Pirmosios pagrindinės komponentės reikšmių grafikas ir jų kvantilių grafikas.

Pirmiausia, reikia išsiaiškinti, ar pirmosios komponentės elementai yra koreliuoti, tokiu atveju prieš parenkant GARCH modelį kintamumui aprašyti, reikia parinkti ARMA modelį sąlyginio vidurkio kitimui nusakyti.



18 pav. Pirmosios pagrindinės komponentės ACF ir PACF funkcijos.

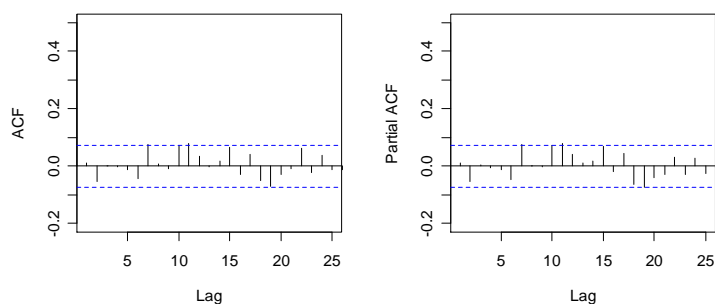
Autokoreliacijos ir dalinės autokoreliacijos funkcijos rodo, kad P_{1t} nėra nekoreliuotų dydžių seka. Kadangi yra reikšmingos pirmoji ir trečioji PACF komponentės, X_{1t} vidurkiui aprašyti pasirenkamas AR(3) modelis. Įvertinus, gaunama $P_{1t} = 0,21P_{1,t-1} + 0,14P_{1,t-3} + \hat{u}_{1t}$. Šio modelio AIC¹⁷ lygus 2808,88 ir yra mažiausias ARMA tipo modelių klasėje. Visi koeficientų įverčiai yra reikšmingi.



19 pav. Pirmosios pagrindinės komponentės grafikas (mėlyna linija), AR(3) modeliui įvertintas sąlyginis vidurkis (raudona linija) ir modelio liekanos (žalia linija).

Pasirinkto AR(3) modelio liekanos neautokoreliuoja (žr. 20 pav. bei 7 lentelėje pateikiamas Ljung-Box testo rezultatus).

¹⁷ $AIC = -2 \cdot l(\hat{\phi}) + 2 \cdot k$, kur $l(\hat{\phi})$ – didžiausia modelio log-tikėtimumo funkcijos reikšmė, $\hat{\phi}$ – modelio parametru didžiausio tikėtimumo įverčiai, k – vertinamų parametru skaičius.

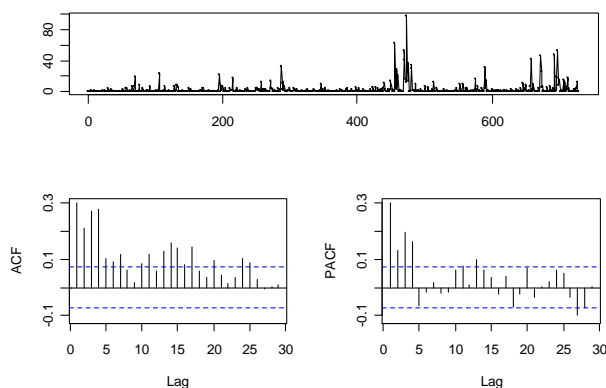


20 pav. AR(3) modelio liekanų ACF ir PACF funkcijos.

7 lentelė. AR(3) modelio liekanų nekoreliuotumo tikrinimas.

Lag	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P-value	0,77	0,34	0,54	0,71	0,81	0,72	0,33	0,42	0,52	0,27

Tačiau liekanų kvadratai yra koreliuoti dydžiai (žr. 21 pav.).



21 pav. AR(3) modelio liekanų kvadratų grafikas, ACF ir PACF funkcijos.

Šis faktas rodo, kad modelio liekanos yra baltasis triukšmas, bet ne nepriklausomas baltasis triukšmas. Kadangi koreliuoti yra antrieji \hat{u}_{1t} momentai, sąlyginio heteroskedastiškumo modelis (GARCH) turėtų būti tinkamas eilutės kintamumui vertinti. GARCH tipo modelio tinkamumą patvirtina ir Lagrange daugiklių ARCH kriterijus, tikrinantis nulinę hipotezę, kad liekanos nėra ARCH proceso realizacija¹⁸. Imant lagų skaičių lygų 5, gaunama p-reikšmė žymiai mažesnė už standartinį 5% reikšmingumo lygmenį (žr. 8 lentelę), todėl H_0 yra atmetama alternatyvos naudai.

8 lentelė. Lagrange daugiklių ARCH kriterijaus rezultatai.

ARCH Test:			
F-statistic	28,47	Probability	$< 2,2 \cdot 10^{-16}$

¹⁸ Vienamačio Lagrange daugiklių ARCH kriterijaus testinės statistikos reikšmė buvo apskaičiuota pasinaudojus [15] konspekte pateikiama R programos funkcija `lm.lag()`.

Koki GARCH tipo modelį parinkti AR(3) modelio liekanoms? Liekanų kvadratų – \hat{u}_{1t}^2 – ACF ir PACF grafikai turi daug reikšmingų komponentų, todėl galima daryti išvadą, kad AR(3) modelio liekanų kintamumui aprašyti turėtų tikti arba aukštos eilės ARCH, arba GARCH(1,1) procesas. Pasirinkus GARCH(1,1) modelį su normaliosiomis inovacijomis ($\varepsilon_{1t} \sim N(0,1)$), gaunami tokie rezultatai:

$$\hat{u}_{1t} = \hat{\sigma}_{1t} \hat{\varepsilon}_{1t}$$

$$\hat{\sigma}_{1t}^2 = 0,14 + 0,13 \cdot \hat{u}_{1,t-1}^2 + 0,83 \cdot \hat{\sigma}_{1,t-1}^2$$

Tačiau, Jarque-Bera bei Shapiro-Wilk kriterijų rezultatai rodo, jog įvertintos liekanos $\hat{\varepsilon}_{1t}$ negali būti laikomos normaliosiomis (žr. priedų 6 lentelę). Todėl buvo nuspręsta GARCH koeficientus įvertinti iš naujo, tariant kad ε_{1t} turi Stjudento su ν laivės laipsnių skirstinį. Įvertinus, gaunamas toks modelis:

$$\hat{u}_{1t} = \hat{\sigma}_{1t} \hat{\varepsilon}_{1t}, \hat{\nu} = 3,93$$

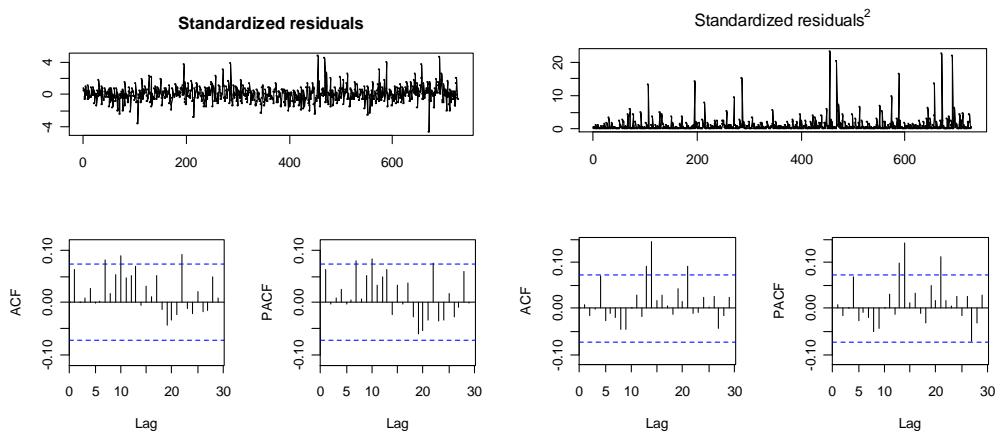
$$\hat{\sigma}_{1t}^2 = 0,35 + 0,20 \cdot \hat{u}_{1,t-1}^2 + 0,69 \cdot \hat{\sigma}_{1,t-1}^2$$

Šio modelio diagnostiniai rezultatai pateikiami 9 lentelėje.

9 lentelė. t-GARCH(1,1) modelio, pritaikyto \hat{u}_{1t} liekanų $\hat{\varepsilon}_{1t}$ diagnostika.

Kriterijus	Testinės statistikos reikšmė	P-reikšmė
Kolmogorov-Smirnov	0,02	0,86
Ljung-Box modelio liekanoms (lagų sk. = 10)	16,40	0,09
Ljung-Box modelio liekanų kvadratams (lagų sk. = 10)	7,71	0,66
LM-ARCH	8,41	0,75

Matoma, kad koeficientų įverčiai nedaug skiriasi nuo normaliojo modelio koeficientų įverčių. Taip pat, kaip ir normaliojo GARCH modelio, naujo modelio liekanos bei liekanos kvadratu yra nekoreliuotos. Tai matosi iš 22 pav. pavaizduotų ACF ir PACF grafikų bei 9 lentelėje pateiktų Ljung-Box testo rezultatų.

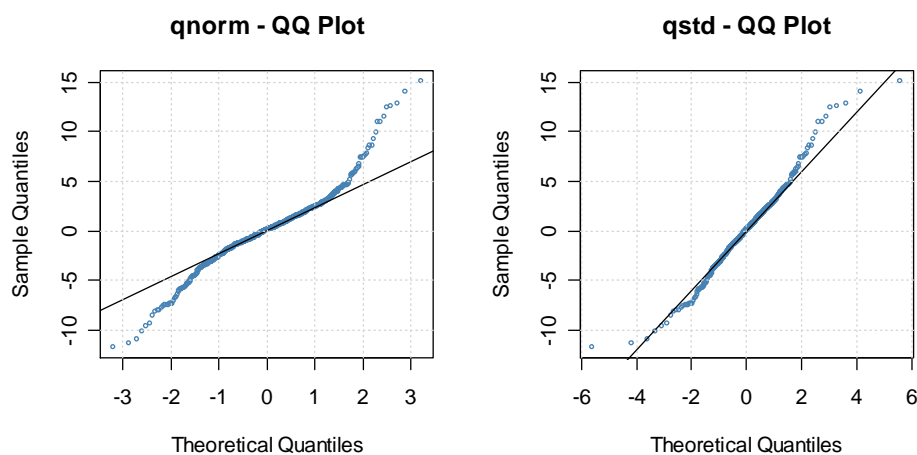


22 pav. Stjudento GARCH(1,1) modelis. Standartizuotų liekanų ir jų kvadratų grafikai, empirinės autokoreliacijos bei dalinės autokoreliacijos funkcijos.

Tiesa, ACF bei PACF vis dar turi išsiskiriančių lagų, tačiau Ljung-Box testas su 5% reikšmingumo lygmeniu neatmeta nekoreliuotumo hipotezės. Be to, reikia turėti omenyje, kad ACF ir PACF pasikliautinieji intervalai yra vertinami su prielaida, kad tiriamos laiko eilutės elementai yra nepriklausomi, o šiuo atveju ne būtinai taip yra, nes liekanos nėra *normalusis* baltasis triukšmas ir dėl to jų nekoreliuotumas nebūtinai reiškia ir jų nepriklausomumą. Todėl į ACF ir PACF pasikliautiniųjų intervalų įverčius ir daromas išvadas reikia žiūrėti atsargiai.

Palyginus 23 pav. kairįjį ir dešinįjį grafikus, kuriuose pavaizduoti standartizuotų liekanų kvantilių grafikai normaliojo ir Stjudento skirstinio atveju, aišku, kad Stjudento skirstinys tinka geriau.

Ar standartizuotos liekanos iš tikrųjų gali būti aprašytos (standartizuotu) Stjudento su 3,93 laisvės laipsnių skirstiniu¹⁹ tikrinama taikant Kolmogorovo ir Smirnovo kriterijų. Gaunama kriterijaus p-reikšmė yra 0,86. Taigi turimi duomenys nulinei hipotezei neprieštarauja.



23 pav. Standartizuotų liekanų kvantilių grafikai. Normalusis GARCH(1,1) modelis (kairėje) ir Stjudento GARCH(1,1) modelis (dešinėje).

Taigi galutinis modelis pirmajai komponentei yra $AR(3) - GARCH(1,1) - t(3,93)$:

$$P_{1t} = 0,21P_{1,t-1} + 0,14P_{1,t-3} + \hat{u}_{1t}$$

$$\hat{u}_{1t} = \hat{\sigma}_{1t} \hat{\varepsilon}_{1t}, \quad \hat{\nu} = 3,93$$

$$\hat{\sigma}_{1t}^2 = 0,35 + 0,20 \cdot \hat{u}_{1,t-1}^2 + 0,69 \cdot \hat{\sigma}_{1,t-1}^2$$

Analogišku būdu parenkami modeliai ir kitoms pagrindinėms komponentėms. Bendras modelio pavidalas i -tajai komponentei yra $ARMA(k,l) - GARCH(p,q) - t(s)$

¹⁹ Jei X yra Stjudento su ν laisvės laipsnių, tai $Y = X \sqrt{\frac{\nu-2}{\nu}}$ yra standartizuotas Stjudento su ν laisvės laipsnių atsitiktinis dydis.

$$P_{it} = \sum_{j=1}^k \phi_{ij} P_{i,t-j} + \sum_{j=1}^l \theta_{ij} u_{i,t-j} + u_{it}$$

$$u_{it} = \sigma_{it} \varepsilon_{it}, \varepsilon_{it} \sim t(s)$$

$$\sigma_{it}^2 = c + \sum_{j=1}^p \alpha_{ij} u_{i,t-j}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_{ij} \sigma_{i,t-j}^2$$

Gaunami rezultatai pateikiami 10 lentelėje. Priedų 7 lentelėje pateikiami Ljung-Box testo rezultatai pagrindinėms komponentėms ir pagrindinių komponentių kvadratams.

10 lentelė. Parinktas modelis 2 – 10 pagrindinėms komponentėms bei jo adekvatumo tikrinimas.

Pagrindinė komponentė	Modelis	Koeficientų įverčiai	Modelio liekanų $\hat{\varepsilon}_{it}$ diagnostiniai rezultatai
2	$GARCH(1,1)-t(4,93)$	c 0,08. alpha1 0,07* beta1 0,87*** s 4,93***	Ljung-Box Test P2 Q(10) 12,36 0,26 Ljung-Box Test P2^2 Q(10) 5,86 0,83 LM Arch Test P2 TR^2 6,58 0,88 KS test 0,02 0,96
3	$GARCH(1,1)-t(3,94)$	c 0,49** alpha1 0,25** beta1 0,31* s 3,94***	Ljung-Box Test P3 Q(10) 10,54 0,39 Ljung-Box Test P3^2 Q(10) 16,89 0,08 LM Arch Test P3 TR^2 16,64 0,16 KS test 0,04 0,32
4	$GARCH(1,1)-t(3,63)$	c 0,43** alpha1 0,27** beta1 0,32. s 3,63***	Ljung-Box Test P4 Q(10) 13,92 0,18 Ljung-Box Test P4^2 Q(10) 15,51 0,11 LM Arch Test P4 TR^2 16,24 0,18 KS test 0,03 0,75
5	$GARCH(1,1)-t(5,8)$	c 0,34. alpha1 0,16** beta1 0,43. s 5,80***	Ljung-Box Test P5 Q(10) 11,57 0,31 Ljung-Box Test P5^2 Q(10) 8,01 0,62 LM Arch Test P5 TR^2 8,23 0,77 KS test 0,03 0,70
6	$AR(2)-GARCH(1,1)-t(6,9)$	ar1 0 ar2 0,12** c 0,23** alpha1 0,17** beta1 0,55*** s 6,90***	Ljung-Box Test P6 Q(10) 16,82 0,08 Ljung-Box Test P6^2 Q(10) 6,07 0,81 LM Arch Test P6 TR^2 6,76 0,87 KS test 0,03 0,64
7	$GARCH(1,1)-t(5,47)$	c 0,05. alpha1 0,05. beta1 0,87*** s 5,47***	Ljung-Box Test P7 Q(10) 15,03 0,13 Ljung-Box Test P7^2 Q(10) 3,89 0,95 LM Arch Test P7 TR^2 8,54 0,74 KS test 0,02 0,98
8	$GARCH(1,1)-t(5,51)$	c 0,22. alpha1 0,17* beta1 0,49. s 5,51***	Ljung-Box Test P8 Q(10) 13,65 0,19 Ljung-Box Test P8^2 Q(10) 7,35 0,69 LM Arch Test P8 TR^2 10,41 0,58 KS test 0,03 0,69
9	$GARCH(1,1)-t(5,89)$	c 0,05. alpha1 0,13* beta1 0,79*** s 5,89***	Ljung-Box Test P9 Q(10) 16,13 0,10 Ljung-Box Test P9^2 Q(10) 8,01 0,63 LM Arch Test P9 TR^2 7,19 0,84 KS test 0,04 0,16

10	<i>ARMA(1,1)–GARCH(1,1)–t(7,6)</i>	arl	-0,56*	Ljung-Box Test	P10
		mal	0,62*	Q(10)	9,26 0,51
		c	0,02	Ljung-Box Test	P10^2
		alpha1	0,06*	Q(10)	9,38 0,50
		beta1	0,90***	LM Arch Test	P10
		s	7,60***	TR^2	9,45 0,66
				KS test	0,03 0,74

Pasinaudojus 10 lentelėje pateiktais modeliais $\forall P_{it}$ galima gauti $E(P_{it} | F_{t-1})$ ir $Var(P_{it} | F_{t-1})$ įverčius. Dėl pagrindinių komponentių nekoreliuotumo iš karto gaunama ir $P_t = (P_{1t}, \dots, P_{10t})'$ sąlyginė kovariacijų matrica $Var(P_t | F_{t-1})$, kuri yra diagonalinė su $Var(P_{it} | F_{t-1})$ įverčiais įstrižainėje. Tokiu būdu $P_t \sim G_{10}(E(P_t | F_{t-1}), Var(P_t | F_{t-1}))$, kur G_{10} žymi dešimtmatį pagrindinių komponentių skirstinį, o $F_{t-1} = \{P_{i,t-j}, i = 1, \dots, 10; j = 1, 2, \dots\}$.

Žinodami sąlyginius pagrindinių komponentių P_t vidurkį ir kovariacijų matricą, nesunkiai randame ir sąlyginius akcijų gražų r_t vidurkį ir kovariacijų matricą, pasinaudoję tuo, kad kiekviena pagrindinė komponentė yra tiesinė standartizuotų akcijų gražų X_t kombinacija, t. y. galioja (12), o iš čia $X_t = A^{-1}P_t$ (čia A^{-1} žymi tikrinių vektorių matricos atvirkštinę matricą) ir

$$E(r_t | F_{t-1}) = DA^{-1}E(P_t | F_{t-1}) + M,$$

$$Var(r_t | F_{t-1}) = DA^{-1}Var(P_t | F_{t-1})(A^{-1})'D,$$

kur $D = diag(sd(r_1), \dots, sd(r_{10}))$, $X_t = (X_{1t}, \dots, X_{10t})'$, o $M = (\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_{10})'$.

2.3. Rizikuojamosios vertės vertinimas

Turėdami du modelius Baltijos rinkos akcijų gražų sąlyginio vidurkio bei sąlyginės kovariacijų matricos kitimui nusakyti, galime pereiti prie rizikuojamosios vertės vertinimo dispersijos-kovariacijos metodu, aprašytu 1.2 skyriuje.

Vienintelis nežinomas dydis (2) formulėje – standartizuotų portfelio gražų skirstinio kvantilis $q_{1-\alpha}$.

Jei būtų žinomas daugiatis gražų skirstinys, kuris pasižymėtų tiesiškumo savybe, t. y. būtų uždaras tiesinių kombinacijų atžvilgiu, tai dominantis kvantilis galėtų būti apskaičiuotas iš karto.

Ilustruosime tai gerai žinomu faktu. Tarkime, d -matis vektorius $X = (X_1, \dots, X_d)' \sim N_d(\mu, \Sigma)$, tuomet su $\forall \varpi = (\varpi_1, \dots, \varpi_d)'$ tiesinė kombinacija ϖX turi vienamatį normalųjį skirstinį su vidurkiu $\varpi'\mu$ ir dispersija $\varpi'\Sigma\varpi$. Taigi žinant daugiamatį d įmonių akcijų gražų skirstinį yra žinomas ir iš šių įmonių akcijų sudaryto portfelio gražų skirstinys, iš čia, aišku, ir kvantilis. Deja,

buvo parodyta, kad nei daugiamačis normalusis skirstinys, nei sąlyginis daugiamačis normalusis skirstinys netiko nagrinėjamaų Baltijos šalių įmonių akcijų gražoms modeliuoti. Todėl būtina kito skirstinio paieška.

Darbe nagrinėjama gana plati daugiamačių skirstinių klasė – apibendrinti hiperboliniai skirstiniai. Tai skirstiniai, kurie yra priskiriami normalių skirstinių mišinio klasei.

Apibrėžimas. Sakoma, kad d -matis atsitiktinis dydis $X = X_{d \times 1}$ turi daugiamačį normalių skirstinių mišinio skirstinį, jei

$$X = \mu + W\gamma + \sqrt{W}AZ, \text{ kur}$$

- $Z = Z_{k \times 1} \sim N_k(0_{k \times 1}, I_{k \times k})$, t. y. Z turi k -matį standartinį normalųjį skirstinį;
- $A = A_{d \times k}$ yra $d \times k$ dimensijos matrica;
- $W \geq 0$ yra teigiamas atsitiktinis skaliaras, nepriklausomas nuo Z ;
- $\mu = \mu_{d \times 1}, \gamma = \gamma_{d \times 1}$ – $d \times 1$ dimensijos parametru vektoriai (μ – vidurkio parametras, γ – asimetrijos parametras).

Iš apibrėžimo seka, kad $X | W \sim N(\mu + W\gamma, WAA')$ ir mišinio kintamasis W gali būti interpretuojamas kaip šokas, keičiantis normaliojo skirstinio vidurkį ir kovariacijų matricą.

Jei atsitiktinis dydis W turi apibendrintą atvirkštinį Gauso skirstinį (žym. $W \sim N^-(\lambda, \chi, \psi)$), tai sakoma, jog X turi apibendrintą hiperbolinį skirstinį (angl. *Generalized Hyperbolic Distribution*) ir žymima $X \sim GH_d(\lambda, \chi, \psi, \mu, \Sigma, \gamma)$, kur $\Sigma = \Sigma_{d \times d} = AA'$.

Apibrėžimas. Atsitiktinis dydis W turi apibendrintą atvirkštinį Gauso skirstinį (angl. *Generalized Inverse Gaussian distribution*), jei $\forall w > 0$ jo tankio funkcija yra

$$f(w; \lambda, \chi, \psi) = \frac{\chi^{-\lambda} (\sqrt{\chi\psi})^\lambda}{2K_\lambda(\sqrt{\chi\psi})} w^{\lambda-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\chi w^{-1} + \psi w)\right\}, \text{ kur}$$

$\chi, \psi > 0$, o $K_\lambda(\cdot)$ – modifikuota trečio tipo Beselio funkcija su indeksu λ ²⁰.

Daugiamačio vektoriaus $X \sim GH_d(\lambda, \chi, \psi, \mu, \Sigma, \gamma)$ tankis yra

$$f(X) = c \frac{K_{\lambda-\left(\frac{d}{2}\right)}\left(\sqrt{\left(\chi + (X-\mu)' \Sigma^{-1} (X-\mu)\right) (\psi + \gamma \Sigma^{-1} \gamma)}\right) e^{(X-\mu)' \Sigma^{-1} \gamma}}{\left(\sqrt{\left(\chi + (X-\mu)' \Sigma^{-1} (X-\mu)\right) (\psi + \gamma \Sigma^{-1} \gamma)}\right)^{\frac{d}{2}-\lambda}},$$

²⁰ Plačiau apie šią funkciją ir jos savybes žr. [1].

čia $c = \frac{(\sqrt{\chi\psi})^{-\lambda} \psi^\lambda (\psi + \gamma \Sigma^{-1} \gamma)^{\frac{d-\lambda}{2}}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}} K_\lambda(\sqrt{\chi\psi})}$ – normuojanti konstanta, o skaliariai λ, χ, ψ tenkina

$\chi > 0, \psi \geq 0$, jei $\lambda < 0$; $\chi > 0, \psi > 0$, jei $\lambda = 0$ ir $\chi \geq 0, \psi > 0$, jei $\lambda > 0$.

Kai $X \sim GH_d(\lambda, \chi, \psi, \mu, \Sigma, \gamma)$ su $\gamma = 0_{d \times 1}$, vektoriaus X skirstinys vadinamas *simetriniu apibendrintu hiperboliniu skirstiniu*.

Atskiri šios skirstinių šeimos atvejai yra hiperbolinis skirstinys (kai $\lambda = \frac{1}{2}(d+1)$, angl. *Hyperbolic Distribution*), normalusis atvirktinis Gauso skirstinys (kai $\lambda = -\frac{1}{2}$, angl. *Normal Inverse Gaussian Distribution*), Laplaso skirstinys (kai $\lambda > 0, \chi = 0$, angl. *Variance Gamma*), Stjudento skirstinys (kai $\lambda = -\frac{1}{2}, \psi = 0$, χ vadinamas laisvės laipsnių skaičiumi)²¹. Kaip matoma, apibendrintų hiperbolinių skirstinių klasė apima nemažą skirstinių spektrą, be to, leidžia modeliuoti sunkias uodegas turinčius duomenis – savybę, kuria pasižymi finansinės grąžos.

Irodyta, jog apibendrintų hiperbolinių skirstinių klasė yra uždara tiesinių kombinacijų atžvilgiu, t. y. jei $X \sim GH_d(\lambda, \chi, \psi, \mu, \Sigma, \gamma)$, tai $\omega'X \sim GH_1(\lambda, \chi, \psi, \omega'\mu, \omega'\Sigma\omega, \omega'\gamma)$, $\forall d \times 1$ matavimo vektoriui ω . Vadinasi, jei daugiamatės grąžos turi apibendrintą hiperbolinį skirstinį, žinomas ir kiekvieno portfelio skirstinys.

Apibendrinto hiperbolinio skirstinio parametrų vertinimui vartojamas didžiausio tikėtimumo metodas taikant EM algoritimą (angl. *expectation maximization*). Pažymėjus $\Theta = (\lambda, \chi, \psi, \mu, \Sigma, \gamma)$ tikslas yra, turint T nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių d -mačio atsitiktinio dydžio X realizacijų x_1, \dots, x_T (d -mačių vektorių), maksimizuoti tikėtimumo funkciją

$$\ln(L(\Theta; x_1, \dots, x_T)) = \sum_{t=1}^T \ln(f_X(x_t; \Theta)),$$

čia f_X – daugiamatis skirstinys iš apibendrintų hiperbolinių skirstinių šeimos.

Dėl didelio vertinamų parametrų Θ skaičiaus, patogiau yra maksimizuoti

$$\ln(\tilde{L}(\Theta; x_1, \dots, x_T, w_1, \dots, w_T)) = \sum_{t=1}^T \ln(f_{X|W}(x_t | w_t; \mu, \Sigma, \gamma)) + \sum_{t=1}^T \ln(f_W(w_t; \lambda, \chi, \psi)),$$

kur $W \sim N^-(\lambda, \chi, \psi)$, $X | W \sim N(\mu + W\gamma, W\Sigma)$.

Šiai užduočiai atlikti pritaikomas EM algoritmas, susidedantis iš dviejų žingsnių – E (*expectation*) ir M (*maximization*).

²¹ Plačiau apie šiuos skirstinius aprašyta [17] knygoje bei R programos `ghyp` paketo aprašyme.

E žingsnis. Apskaičiuojamas sąlyginis \tilde{L} vidurkis žinant x_1, \dots, x_T ir turint apytikres Θ reikšmes $\Theta^{[k]}$, t. y. skaičiuojamas

$$E\{\ln(\tilde{L}(\Theta; x_1, \dots, x_T, w_1, \dots, w_T)) | x_1, \dots, x_T; \Theta^{[k]}\} =: Q(\Theta; \Theta^{[k]})$$

M žingsnis. $Q(\Theta; \Theta^{[k]})$ maksimizuojama Θ atžvilgiu tam, kad būtų gautas tikslesnis $\Theta^{[k]}$ įvertis $\Theta^{[k+1]}$.

E ir M žingsniai kartojami tol, kol skirtumas tarp $Q(\Theta; \Theta^{[k]})$ ir $Q(\Theta; \Theta^{[k+1]})$ tampa “mažu”. Gautasis $\Theta^{[k+1]}$ ir yra laikomas didžiausio tikėtinumo Θ įverčiu. R programoje, parametrus GH_d skirstiniui bei jo atskiriems atvejams vertina `ghyp` paketo funkcijos. Taikomas aprašytas EM algoritmas.

Pirmiausia įvertinkime rizikuojamąją vertę, kai daugiamatės akcijų gražos aprašomos VAR-DCC modeliu. Apskaičiuavę standartizuotas DCC modelio liekanas $\hat{\varepsilon}_t$, parinkime joms geriausią *daugiamatį* skirstinį iš apibendrintų hiperbolinių skirstinių šeimos. Geriausiu buvo nuspręsta laikyti tą skirstinį, kurio Akaikės informacinis kriterijus (AIC) yra mažiausias. Primenama, jog AIC apibrėžiamas tokiu būdu

$$AIC = -2 \cdot \ln(\tilde{L}(\Theta)) + 2 \cdot k,$$

kur k – modelio vertinamų parametrų skaičius. Daugiamačio GH_d skirstinio parinkimą pagal AIC reikšmę atlieka minėto R programos `ghyp` paketo funkcija `stepAIC.ghyp()`. Ši funkcija įvertina GH_d šeimos skirstinių parametrus ir kiekvienam gautam modeliui skaičiuoja AIC reikšmę. Pritaikius šią funkciją, geriausiais skirstiniais standartizuotoms DCC modelio liekanoms $\hat{\varepsilon}$ buvo atrinkti simetriniai apibendrintas hiperbolinis ir Laplaso skirstiniai (žr. 11 lentelę).

11 lentelė. Įvertinti $\hat{\varepsilon}$ daugiamačiai skirstiniai.

Model	Symmetric	λ	$\bar{\alpha}^{22}$	AIC	Log-likelihood	Converged
Variance Gamma	TRUE	2,26	0,00	19030,79	-9449,39	TRUE
Generalized hyperbolic	TRUE	2,26	0,00	19032,79	-9449,39	TRUE
Variance Gamma	FALSE	2,25	0,00	19042,88	-9445,44	TRUE
Generalized hyperbolic	FALSE	2,25	0,00	19044,88	-9445,44	TRUE

²² Egzistuoja keletas apibendrintų hiperbolinių skirstinių šeimos parametrizacijų. Norint išsaugoti vieną laisvės laipsnį, dažnai vertinant parametrus vietoje $(\lambda, \chi, \psi, \mu, \Sigma, \gamma)$ parametrizacijos taikoma $(\lambda, \bar{\alpha}, \mu, \Sigma, \gamma)$ parametrizacija $\bar{\alpha} = \sqrt{\chi\psi}$, $\psi = \bar{\alpha} \frac{K_{1+\lambda}(\bar{\alpha})}{K_{\lambda}(\bar{\alpha})}$. Ši galimybė sumažinti vertinamų parametrų skaičių atsiranda dėl to, kad atsitiktiniam dydžiui W fiskuojama $Var(W) = 1$.

11 lentelė (tęsinys). Įvertinti $\hat{\varepsilon}$ daugiamačiai skirstiniai.

Normal Inverse Gaussian	TRUE	-0,50	1,63	19052,35	-9460,17	TRUE
Normal Inverse Gaussian	FALSE	-0,50	1,63	19067,13	-9457,56	TRUE
Student	TRUE	-2,61	0,00	19069,25	-9468,62	TRUE
Student	FALSE	-2,61	0,00	19084,94	-9466,47	TRUE
Hyperbolic	TRUE	5,50	0,00	19175,32	-9521,66	TRUE
Hyperbolic	FALSE	5,50	0,00	19190,26	-9519,13	TRUE

Iš lentelės matoma, kad simetriniai skirstiniai visais atvejais turi mažesnę AIC kriterijaus reikšmę negu jų asimetriniai atitikmenys.

Kadangi simetrinis Laplaso skirstinys turi mažesnę parametrų skaičių nei simetrinis apibendrintas hiperbolinis skirstinys, o jų AIC beveik sutampa, DCC liekanų $\hat{\varepsilon}$ skirstiniui aprašyti pasirenkamas Laplaso skirstinys $GH_{10}(2,26;0;4,52;\hat{\mu};\hat{\Sigma};0_{10 \times 1})$ ²³. Jei $\hat{\varepsilon}$ iš tikrųjų turi daugiamačią Laplaso skirstinį su įvertintais parametrais, tai ir įvairios jo tiesinės kombinacijos turės Laplaso skirstinį (vienamati) su parametrais $GH_1(2,26;0;4,52;\varpi'\hat{\mu};\varpi'\hat{\Sigma}\varpi;0)$.

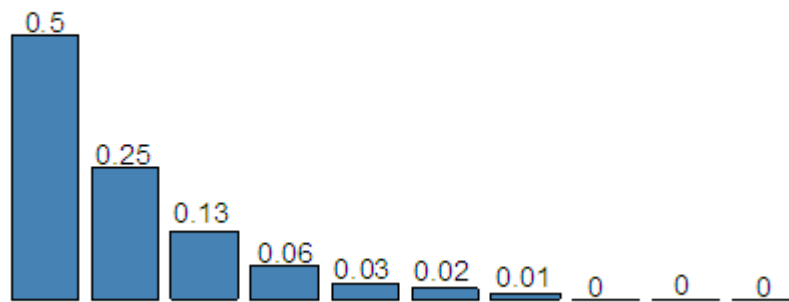
Toliau tai ir yra patikrinama taikant Kolmogorovo-Smirnovo kriterijų tiesinėms kombinacijoms $\varpi'\hat{\varepsilon}$. Svoriai yra sugeneruojami pagal taisyklę $\varpi_i = \alpha(1-\alpha)^i, i=1, \dots, 10$ su $\alpha = 0.5$ ir sunormuojami taip, kad $\sum_{i=1}^{10} \varpi_i = 1$. Imama 50 įvairių $\varpi = (\varpi_1, \dots, \varpi_{10})'$ kėlinių – 10-mačių vektorių $\varpi_{(j)}$ – ir tokiu būdu sugeneruojama 50 skirtingų tiesinių kombinacijų $\varpi'_{(j)}\hat{\varepsilon}_t$. Žinoma, jog $\varepsilon_t \sim F_{10}(0_{10 \times 1}, I_{10 \times 10})$. Vadinasi $\varpi'_{(j)}\varepsilon_t \sim F_1(0, \varpi'_{(j)}\varpi_{(j)})$. Su kiekvienu $\varpi_{(j)}$ patikrinus $H_0: \varpi'_{(j)}\hat{\varepsilon}_t \sim GH_1(2,26;0;4,52;0; \varpi'_{(j)}\varpi_{(j)};0)$, ši hipotezė yra atmetama alternatyvos naudai (žr. priedo 8 lentelę). Taigi daroma išvada, jog daugiamatis standartizuotų DCC liekanų skirstinys nėra daugiamatis Laplaso su nurodytais parametrais.

Pakartojus šią procedūrą kitiems daugiamačiams skirstiniams iš apibendrintų hiperbolinių skirstinių šeimos, hipotezę apie visų sugeneruotų tiesinių kombinacijų skirstinių lygybę vienamačiam skirstiniui išplaukiančiam iš atitinkamo daugiamačio, teko atmesti. Taigi nė vienas iš šių skirstinių netiko daugiamačiam $\hat{\varepsilon}$ skirstiniui aprašyti. Todėl buvo nuspręsta ieškoti skirstinio kiekvienam portfeliui atskirai.

Iš pradžių suformuojami portfeliai. Svoriais paimti tie patys eksponentiškai gęstantys svoriai $\varpi = (\varpi_1, \dots, \varpi_{10})'$. Gaunami svoriai pavaizduoti 24 pav.

²³ Laplaso skirstinio atveju, $\chi = 0$, $\psi = 2\lambda$ [7].

Portfolio weights



24 pav. Nagrinėjamų portfelių svoriai.

Kaip ir standartizuotoms DCC modelio liekanoms, ir šį kartą sugeneruojama 50 įvairių ϖ kėlinių $\varpi_{(j)}$ ²⁴, ir tokiu būdu suformuojama 50 portfelių, kurių gražos yra

$$r_t^{P_j} = \varpi'_{(j)} r_t = \sum_{i=1}^{10} \varpi_{(j),i} r_{i,t}, \quad j = 1, \dots, 50.$$

Imant portfelį, kurio sudėtis pateikta 12 lentelėje, atliekama analizė, kurios tikslas – parinkti geriausią tam tikro kriterijaus atžvilgiu šio portfelio *besąlyginę* skirstinį.

12 lentelė. Pirmojo portfelio sudėtis (svoriai $\varpi'_{(1)}$ išreikšti procentais).

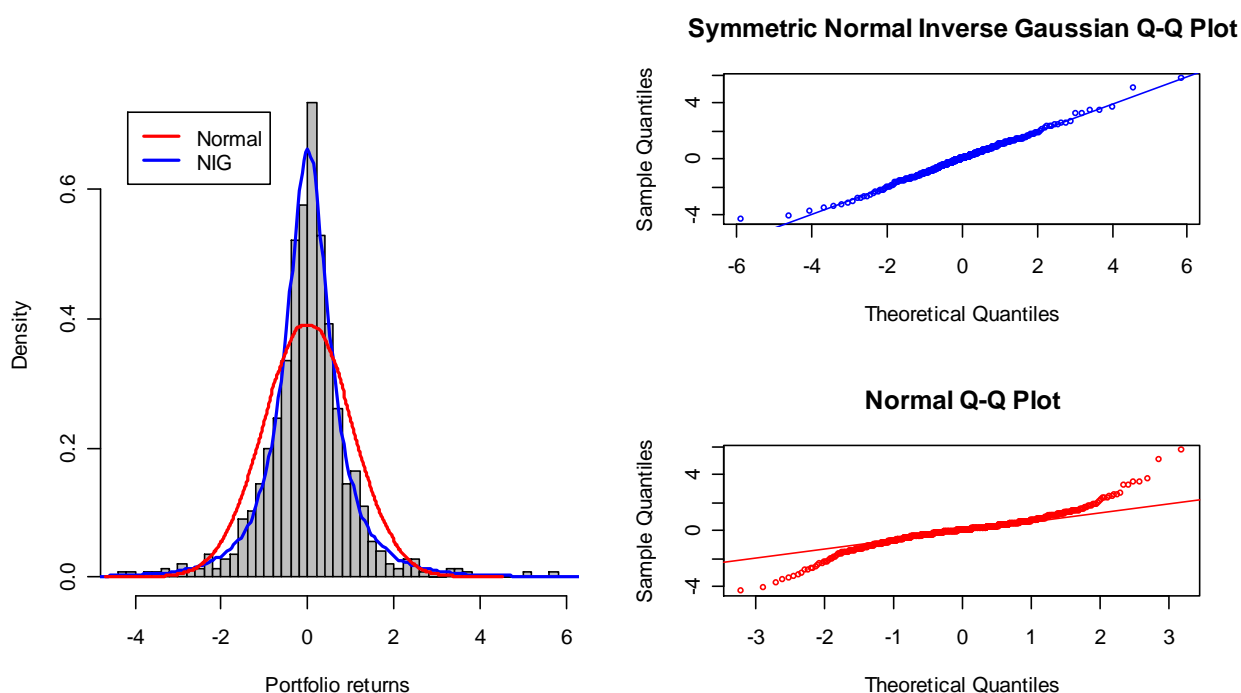
Įmonės pavadinimas	Akcijų dalis portfelyje, %
„Eesti Telekom“	25.02
„Baltika“	1.56
„Rytų skirstomieji tinklai“	0.78
Šiaulių bankas	0.10
„Panevėžio statybos trestas“	0.39
„Tallinna Kaubamaja“	6.26
„Apranga“	3.13
„Rokiškio sūris“	50.05
„TEO LT“	12.51
Ūkio bankas	0.20

Apskaičiavus šio portfelio gražų sąlyginį vidurkį $\varpi'_{(1)}\mu_t$ ir sąlyginę dispersiją $\varpi'_{(1)}\Sigma_t\varpi_{(1)}$, portfelio gražos yra standartizuojamos ir gaunamos standartizuotos gražos $\tilde{r}_t^{P_1} = \frac{\varpi'_{(1)}r_t - \varpi_{(1)}\mu_t}{(\varpi'_{(1)}\Sigma_t\varpi_{(1)})^{\frac{1}{2}}}$. Dydžiai

$\tilde{r}_t^{P_1}$ turi besąlyginę skirstinį su nuliniu vidurkiu ir vienetine dispersija. Tariama, kad šis $\tilde{r}_t^{P_1}$ skirstinys yra iš apibendrintų hiperbolinių skirstinių šeimos. Kuris konkrečiai, bus sprendžiama remiantis Akaikės informaciniu kriterijumi. Parinkus skirstinį, jo parametrai bus vertinami didžiausio tikėtinumo metodu.

²⁴ Visų 50 portfelių svoriai yra prie darbo pridėdama CD byloje „weights.csv“.

\tilde{r}_t^P gražoms AIC kriterijus įgyja mažiausią reikšmę, kai skirstinys yra simetrinis normalusis atvirkštinis Gauso (NIG) su $\chi = \psi = 0,38$, t. y. $\tilde{r}_t^P \sim GH_1(-0,5; 0,38; 0,38; 0; 1; 0)$. 25 pav. kairėje yra pavaizduota \tilde{r}_t^P histograma kartu su standartinio normaliojo bei simetrinio NIG dydžio su $\chi = \psi = 0,38$ tankio funkcijomis. Dešinėje esančiuose paveiksluose yra kvantilių grafikai kai skirstinys yra $GH_1(-0,5; 0,38; 0,38; 0; 1; 0)$ (viršuje) ir kai skirstinys yra $N_1(0, 1)$ (apačioje). Akivaizdu, kad normalusis atvirkštinis Gauso skirstinys aprašo standartizuotas portfelio gražas \tilde{r}_t^P žymiai geriau negu normalusis.

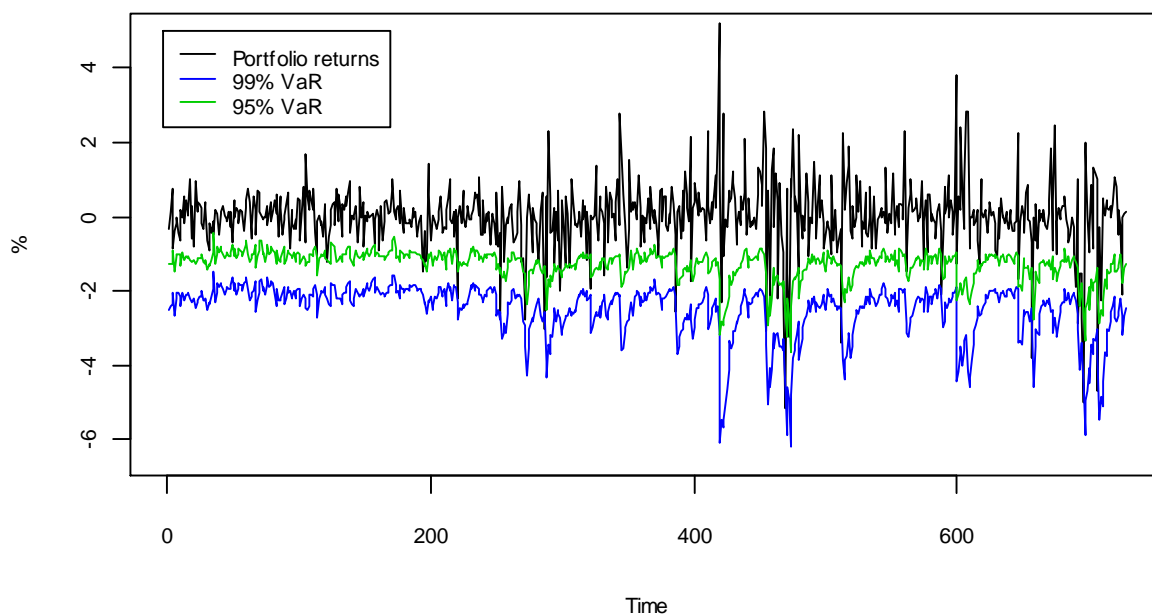


25 pav. \tilde{r}_t^P histograma ir kvantilių grafikai lyginant su normaliuoju atvirkštiniu Gauso bei normaliuoju skirstiniu.

Ar \tilde{r}_t^P skirstinys iš tikrųjų yra simetrinis normalusis atvirkštinis Gauso su duotais parametrais tikrinama su Kolmogorovo ir Smirnovo testu. Gaunama testinės statistikos reikšmė yra 0.03, o kriterijaus p-reikšmė = 0.56. Taigi nėra pagrindo atmesti nulinę hipotezę, kad standartizuotų portfelio gražų skirstinys yra $GH_1(-0,5; 0,38; 0,38; 0; 1; 0)$.

Šio skirstinio 95% kvantilis yra -1,51 (palyginimui, standartinio normaliojo atsitiktinio dydžio atveju, šis dydis yra -1,64), o 99% kvantilis – -2,92 (atitinkamai -2,33 normaliuoju atveju). Vadinas, jei vietoje simetrinio NIG skirstinio taikytume standartinio normaliojo dydžio kvantilį 95% VaR vertinimui, pervertintume rizikuojamąją vertę. Tuo tarpu vertindami 99% VaR, ją per mažai įvertintume, o dėl nepakankamai įvertintos rizikos investuotojas galėtų patirti didesnių nuostolių negu jis tikisi.

Turint $q_{1-\alpha}$ įverčius, galima pereiti prie rizikuojamosios vertės skaičiavimo pagal (2) formulę. 26 pav. pavaizduotos apskaičiuotos 95% ir 99% VaR reikšmės kiekvienu laiko momentu.



26 pav. Portfelio su 12 lentelėje pateikta struktūra gražų grafikas, 95% ir 99% VaR įverčiai 2005-05-03 – 2008-03-08 laikotarpiu.

Iš grafiko matoma, kad modelis pakankamai gerai vertina rizikuojamąją vertę. Visu nagrinėjamu laikotarpiu tikrųjų portfelio gražų viršijančių suprognuozuotą VaR beveik nėra²⁵.

13 lentelėje yra pateikiamos 95% ir 99% įvertintų rizikuojamų verčių skaitinės charakteristikos. Interpretacijai palengvinti paimti VaR_t dydžiai su priešingu ženklu.

13 lentelė. 95% ir 99% rizikuojamų verčių, paimtu su priešingu ženklu, skaitinės charakteristikos (procentais).

	95%	99%
Mean	1,28	2,50
Standard deviation	0,41	0,72
Minimum	0,46	1,46
Maximum	3,66	6,22

Matoma, kad 2005-05-03 – 2008-03-08 laikotarpiu vidutinė 99% rizikuojama vertė buvo 2,5% su standartiniu nuokrypiu 0,72. Mažiausia VaR reikšmė buvo 2005-06-20, t. y. tą dieną su 99% tikimybe maksimalus galimas patirti nuostolis, valdant 12 lentelėje pateiktos struktūros portfelį, buvo tik 1,46%. Tačiau buvo dienų, kai šis nuostolis siekė 6,22%. Taigi investavus 1000 litų į

²⁵ Tiksliau apie VaR prognozavimo gerumą bus kalbama 2.4. skyrelyje.

nagrinėjamą portfelį, su $\alpha = 1\%$ maksimali suma, kurią galima buvo prarasti tą dieną buvo 62,2 litai. Ar tai didelis nuostolis – spręsti investuotojui.

Analogiška analizė buvo atlikta ir su likusiais 49 portfeliais. Standartizavus portfelių gražas, ir gavus dydžius $\tilde{r}_t^{P_i}$, kiekvienam iš jų buvo parenkamas mažiausią AIC turintis modelis iš apibendrintų hiperbolinių skirstinių šeimos. Priedo 9 lentelėje nurodytas parinktas modelis bei Kolmogorovo-Smirnovo kriterijaus, tikrinančio, ar standartizuotos gražos iš tikrųjų turi parinktą skirstinį, p-reikšmė. Kaip galima matyti, su 1% reikšmingumo lygmeniu, tik dviejų iš 49 portfelių standartizuotoms gražoms skirstinio iš apibendrintų hiperbolinių skirstinių šeimos parinkti nepavyko. Tai yra visai neblogas rezultatas, rodantis, jog GH_1 skirstinių šeima gerai aprašo portfelių, sudarytų iš nagrinėjamų įmonių akcijų, standartizuotas gražas $\tilde{r}_t^{P_i}$. Tai savo ruožtu reiškia, jog pačios portfelių gražos $r_t^{P_i}$ turi *salyginius* skirstinius iš GH_1 šeimos.

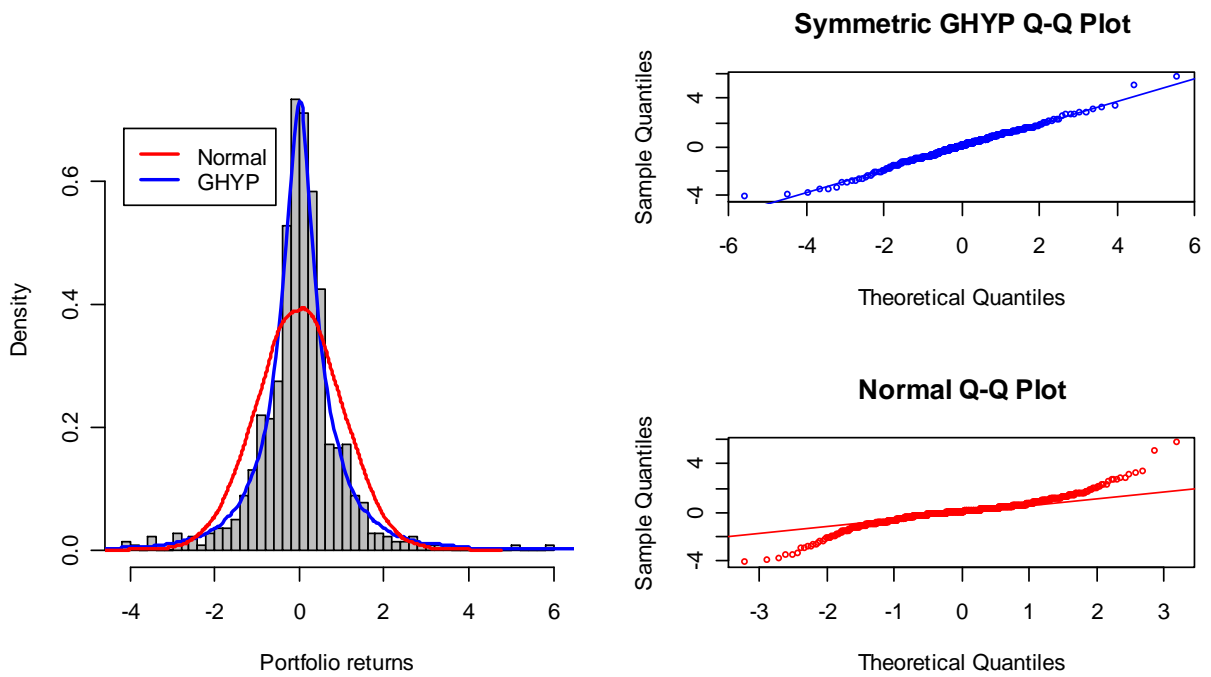
Dabar įvertinkime rizikuojamąją vertę, pasinaudodami kito – ortogonaliojo – modelio rezultatais.

Paėmus portfelį su ta pačia struktūra, nurodyta 12 lentelėje, atlikime panašią analizę, kaip ir VAR-DCC modelio atveju. Pirmiausia apskaičiuokime standartizuotąsias portfelio gražas

$$\tilde{r}_t^{P_i} = \frac{\varpi'_{(1)} r_t - \varpi_{(1)} \hat{\mu}_t^O}{\left(\varpi'_{(1)} \hat{\Sigma}_t^O \varpi_{(1)}\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad \hat{\mu}_t^O \text{ ir } \hat{\Sigma}_t^O \text{ žymi ortogonalioju modeliu suprognuozuotą vidurkių vektorių}$$

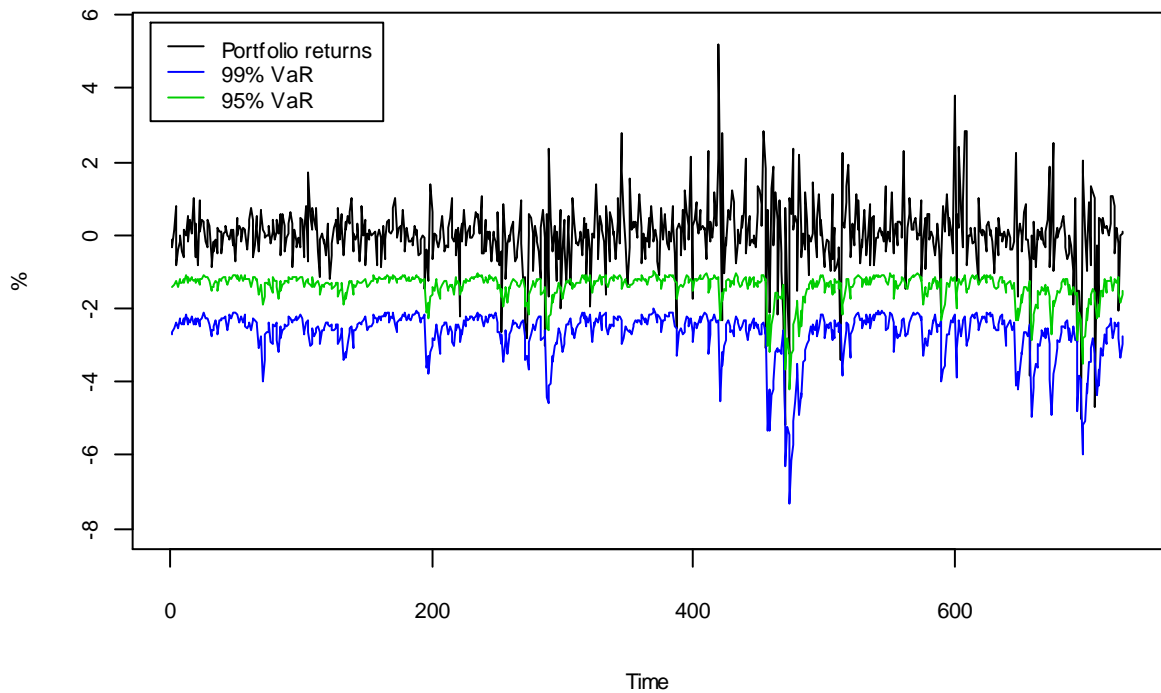
bei kovariacijų matricą kiekvienu laiko momentu.

Iš 28 pav. (dešinysis apatinis grafikas), kuriame pavaizduotas normalusis kvantilių grafikas standartizuotoms portfelio gražoms, akivaizdu, kad $q_{1-\alpha}$ nėra standartinio normaliojo atsitiktinio dydžio kvantilis, $\tilde{r}_t^{P_i}$ skirstinys turi žymiai sunkesnes uodegas negu standartinis normalusis atsitiktinis dydis. Remiantis Akaikės informaciniu kriterijumi, geriausiu skirstiniu standartizuotoms gražoms $\tilde{r}_t^{P_i}$ buvo atrinktas simetrinis apibendrintas hiperbolinis skirstinys $GH_1(0,05; 0,12; 0,70; 0; 1; 0)$. Šis skirstinys iš tikrųjų neblogai aprašo nagrinėjamo portfelio standartizuotas gražas. Tai patvirtina Kolmogorovo-Smirnovo kriterijus, su p-reikšme lygia 0,49 priimantis nulinę hipotezę. O 27 pav. tai iliustruoja grafiškai – $\tilde{r}_t^{P_i}$ histograma ir apibendrinto hiperbolinio dydžio tankis beveik sutampa, o šio dydžio kvantilių grafikas (dešinysis pav. viršuje) yra beveik tiesė.



27 pav. \tilde{r}_t^R histograma ir kvantilių grafikai lyginant su apibendrintu hiperboliniu bei normaliuoju skirstiniu.

Kiekvienu laiko momentu apskaičiavus 95% ir 99% rizikuojamosios vertės reikšmes pagal (2) formulę ir pavaizdavus jas grafiškai, gaunamas 28 pav.



28 pav. Portfelio su 12 lentelėje pateikta struktūra grąžų grafikas, 95% ir 99% VaR įverčiai, gaunami kai grąžos yra aprašomos ortogonalioju modeliu. 2005-05-03 – 2008-03-08 laikotarpis.

Matoma, kad ir šio modelio atveju, gaunami pakankamai tikslūs rizikuojamosios vertės įverčiai – tikrųjų portfelio gražų, viršijančių apskaičiuotą VaR yra labai mažai. Modelis pakankamai gerai aprašo nagrinėjamo portfelio gražų kitimo dinamiką.

Šiuo modeliu įvertintų VaR skaitinės charakteristikos pateikiamos 14 lentelėje.

14 lentelė. 95% ir 99% rizikuojamų verčių, paimtu su priešingu ženklu, skaitinės charakteristikos (procentais). Ortogonalusis modelis.

	95%	99%
Mean	1,40	2,66
Standard deviation	0,38	0,64
Minimum	1,01	2,02
Maximum	4,22	7,30

Lyginant 14 lentelėje pateikiamas skaitines charakteristikas su 13 lentelės rezultatais, galima pastebėti, kad vidurkiai, maksimumai ir minimumai, skaičiuojant rizikuojamąsias reikšmes, kai akcijų gražos aprašomos ortogonaliojo modeliu, yra didesni negu tuo atveju, kai akcijų gražos aprašomos VAR-DCC modeliu, o standartinis nuokrypis mažesnis. Taip, aišku, galėjo atsitikti tik šiam konkrečiam portfeliui. Tačiau, jei taip yra bet kuriam portfeliui, galima daryti išvadą, jog ortogonaliojo modelio atveju prognozuojamas maksimalus galimas patirti nuostolis yra vidutiniškai didesnis nei VAR-DCC modelio atveju, t. y. ortogonaliojo modelio VaR prognozės yra „atsargesnės“. Tai buvo patikrinta, paėmus kitus 49 portfelius²⁶ (tuos pačius kaip ir atliekant ankstesnę analizę). Apskaičiavus jų VaR reikšmių vidurkius nagrinėjamu laikotarpiu, buvo gauta, kad toks rezultatas nėra taisyklė, o priklauso nuo konkretaus portfelio. Taigi spėjimas nepasiteisino.

2.4. Rizikuojamosios vertės prognozavimo įvairiais modeliais palyginimas

Kaip buvo parodyta 2.3. skyrelyje, abu VaR vertinimo modeliai ne visada tiksliai įvertino rizikuojamąją vertę – tiek 95%, tiek 99% VaR atveju atsiradavo $r_t^{P_i}$ reikšmių, mažesnių už VaR įverčius. Tai reiškia, kad kai kuriais laiko momentais investuotojo patirtas nuostolis viršijo VaR nusakomą maksimalų galimą patirti nuostolį. Ar tai reiškia, kad modeliai nepakankamai geri?

Įvertinkime modelio „gerumą“ taikant grįžtamojo testavimo (angl. *backtesting*) procedūrą. Apibrėžkime funkciją $I_t(\alpha)$, vadinamą pažeidimo indikatoriumi:

$$I_t(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{jei } r_t^{P_i} \leq VaR_t \\ 0, & \text{jei } r_t^{P_i} > VaR_t \end{cases}$$

²⁶ Imami tie patys portfeliai, kaip ir atliekant ankstesnę analizę. Prie darbo pridėto CD byla „weights.csv“.

Ši funkcija įgyja reikšmę 1, kai tikroji portfelio grąža yra mažesnė nei įvertintas VaR. Aišku, kad kiekvienu laiko momentu $I_t(\alpha)$ turės Bernulio skirstinį su "sėkmės" tikimybe α . Tada pažeidimų skaičius $\sum_{t=1}^T I_t(\alpha)$ T dienų laikotarpiu turės binominį skirstinį su bandymų skaičiumi T ir "sėkmės" tikimybe α .

Tokiu būdu, kiekvienam portfeliui ir kiekvienam iš dviejų VaR vertinimo metodų galima apskaičiuoti pažeidimų skaičių $\sum_{t=1}^T \hat{I}_t(\alpha)$ per nagrinėjamą laikotarpį ir patikrinti nulinę hipotezę, kad gaunamas pažeidimų skaičius yra suderintas su reikšmingumo lygmeniu α , t. y. galima patikrinti $H_0 : \sum_{t=1}^T I_t(\alpha) = \alpha$. Jei apskaičiavus pažeidimų skaičių, gaunamas dydis, didesnis nei α , tikslinga tikrinti nulinę hipotezę prieš alternatyvą, kad modelis sistemingai nepakankamai įvertina rizikuojamąją vertę. Kalbant griežčiau, tai reikštų tikrinti $H_0 : \sum_{t=1}^T I_t(\alpha) = \alpha$ prieš alternatyvą $H_1 : \sum_{t=1}^T I_t(\alpha) > \alpha$. Jei atvirkščiai gaunama, jog $\sum_{t=1}^T \hat{I}_t(\alpha) < \alpha$ darosi įdomu, ar modelis sistemingai pervertina VaR, t. y. $H_0 : \sum_{t=1}^T I_t(\alpha) = \alpha$ prieš $H_1 : \sum_{t=1}^T I_t(\alpha) < \alpha$.

Tikrinimui galima taikyti Pirsono χ^2 kriterijų, kurio testinė statistika nagrinėjamu atveju yra

$$X^2 = \sum_{i=1}^2 \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i},$$

čia O_i – stebimas dažnis, E_i – tikėtinas (teorinis) dažnis. Esant teisingai nulinei hipotezei ši statistika turi χ^2 su 1 laisvės laipsniu skirstinį.

Imkime portfelį su 12 lentelėje pateikta struktūra ir kiekvienam iš VaR apskaičiavimui taikytų modelių įvertinkime jo adekvatumą, t. y. pažeidimų skaičių.

Pirmiausia, išstirkime VAR-DCC modelio adekvatumą. Apskaičiavus dienų skaičių, kai tikroji portfelio grąža buvo mažesnė nei apskaičiuotas VaR ir išreiškus šį skaičių kaip procentą nuo visų nagrinėjamų dienų skaičiaus, gaunami tokie rezultatai (žr. 15 lentelę).

15 lentelė. VAR-DCC modelio adekvatumo tikrinimas.

	95%	99%
Pažeidimų skaičius	5,08	1,10
χ^2 testo p-reikšmė	0,49	0,47

Gaunama, jog Pirsono χ^2 kriterijus, tikrinantis, ar pažeidimų procentas populiacijoje lygus α prieš alternatyvą, kad šis procentas viršija α , priima nulinę hipotezę tiek kai $\alpha = 5\%$, tiek kai $\alpha = 1\%$. Taigi rezultatai suderinami su teorija.

Imant ortogonalųjį modelį, gaunami 16 lentelėje pateikiami rezultatai:

16 lentelė. Ortogonaliojo modelio adekvatumo tikrinimas.

	95%	99%
Pažeidimų skaičius	4,25	1,10
χ^2 testo p-reiškė	0,20	0,47

Šį kartą, kai $\alpha = 5\%$ buvo tikrinta $H_0 : \sum_{t=1}^T I_t(0,05) = 0,05$ prieš $H_1 : \sum_{t=1}^T I_t(0,05) < 0,05$. Ir vėl, p-reiškėms didesnės už 0,05 rodo, jog rezultatai suderinami su teorija.

Pažeidimų skaičiai buvo įvertinti ir likusiems 49 portfelių. Gauta, jog VAR-DCC modelio atveju, vidutinis pažeidimų skaičius, kai $\alpha = 5\%$ yra 4,29%, o kai $\alpha = 1\%$ – 1,06%.

Kiekvienam portfeliui $i \in \{1, \dots, 50\}$ buvo patikrinta $H_{0,i} : \sum_{t=1}^T I_{i,t}(\alpha) = \alpha$. Alternatyva šiai hipotezei buvo parinkta kaip ir anksčiau: $H_{1,i} : \sum_{t=1}^T I_{i,t}(\alpha) < \alpha$, jei $\sum_{t=1}^T \hat{I}_{i,t}(\alpha) < \alpha$ ir, atitinkamai, $H_{1,i} : \sum_{t=1}^T I_{i,t}(\alpha) > \alpha$, jei $\sum_{t=1}^T \hat{I}_{i,t}(\alpha) > \alpha$. Analizei atlikti pasirenkamas $\alpha = 1\%$.

Gauta, jog su šiuo reikšmingumo lygmeniu nė vienas portfeliui nulinė hipotezė nėra atmetama²⁷. Taigi galima teigti, jog VAR-DCC modelio rizikuojamos vertės įverčiai yra tikslūs. Statistiškai reikšmingų skirtumų tarp kiekvieno iš portfelio VaR pažeidimų skaičių ir $\alpha = 1\%$ nėra.

Atlikus panašią analizę su tų pačių 49 portfelių rizikuojamosiomis vertėmis, įvertintomis taikant ortogonaliojo modelio metodologiją, buvo gauta, jog vidutinis pažeidimų skaičius su $\alpha = 5\%$ yra 4,64% ir 1,11% su $\alpha = 1\%$. O kiekvienam iš 49 portfelių patikrinus nulinę hipotezę, kad 99% VaR skaičiavimo pažeidimų skaičius lygus $\alpha = 1\%$ prieš anksčiau suformuluotą alternatyvą, buvo gauta, jog H_0 taip pat yra priimama kiekvienam iš 49 portfelių. Taigi ir šis modelis tiksliai vertina rizikuojamąją vertę²⁸.

Kaip matėme, rizikuojamosios vertės, apskaičiuotos pagal O-GARCH metodologiją, pažeidimų skaičius yra vidutiniškai didesnis negu VAR-DCC atveju abiem α . Skirtumas yra

²⁷ VAR-DCC metodologijos pažeidimų skaičiai, kriterijaus p-reiškėms ir kt. informacija apie kiekvieną iš 50 portfelių yra pateikiama prie darbo pridamo CD byloje „fifty portfolios DCC.xls“.

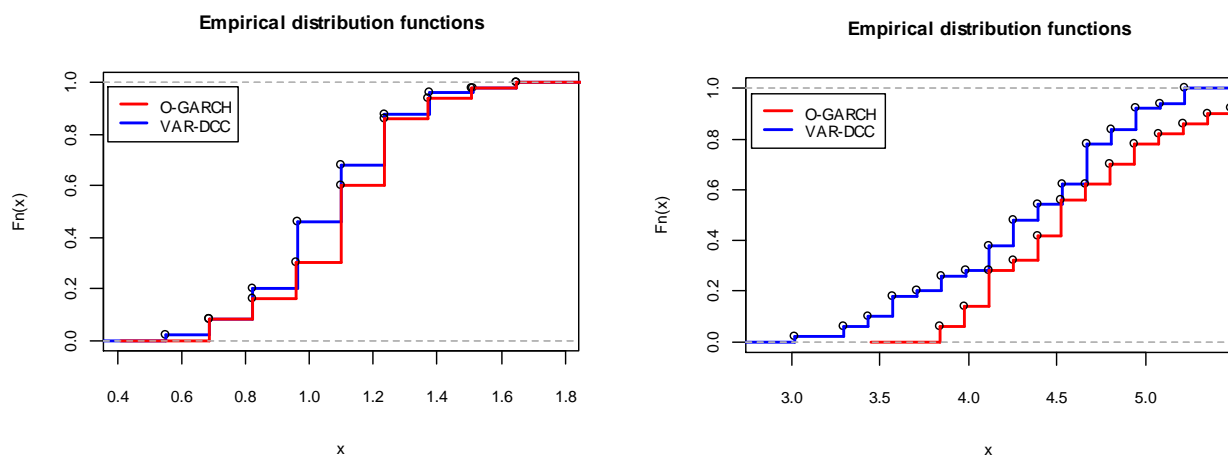
²⁸ O-GARCH metodologijos pažeidimų skaičiai, kriterijaus p-reiškėms ir kt. informacija apie kiekvieną iš 50 portfelių yra pateikiama prie darbo pridamo CD byloje „fifty portfolios O-GARCH.xls“.

labai nedidelis, todėl tikėtina, kad jis nėra reikšmingas. Turint 50 portfelių imtį, šią hipotezę galima patikrinti formaliai. Patikrinkime stipresnę hipotezę – pažeidimų skaičių pasiskirstymo funkcijų, o tuo pačiu ir skirstinių, lygybę [20]. Taigi domina

$$H_0 : F(x) = G(x), \forall x,$$

čia F žymi VAR-DCC modeliu gautų VaR pažeidimų skaičių pasiskirstymo funkciją, G žymi O-GARCH modeliu gautų VaR pažeidimų skaičių pasiskirstymo funkciją.

Prieš formuluojant alternatyvą, verta pažiūrėti į pažeidimų skaičių empirinių pasiskirstymo funkcijų grafikus (29 pav.).



29 pav. Pažeidimų skaičiaus empirinės pasiskirstymo funkcijos. $\alpha = 1\%$ (kairėje), $\alpha = 5\%$ (dešinėje).

Pažvelgus į kairįjį 29 pav. grafiką, peršasi išvada, kad O-GARCH ir DCC-GARCH modeliais įvertintų 99% rizikuojamųjų verčių pažeidimų skaičiai skiriasi nereikšmingai. Tuo tarpu 95% rizikuojamųjų verčių pažeidimų skaičiai (29 pav. dešinėje) skiriasi labiau ir pažeidimų skaičius, taikant O-GARCH metodologiją, yra akivaizdžiai didesnis negu DCC-VAR metodologijos atveju, t. y. turima, jog

$$P\left(\sum_{t=1}^T \hat{I}_t^{PC-GARCH}(0,05) < x\right) \leq P\left(\sum_{t=1}^T \hat{I}_t^{VAR-DCC}(0,05) < x\right), \forall x.$$

Taigi tikslinga suformuluoti tokias alternatyvas:

$$H_1 : F(x) \neq G(x), \text{ kai } \alpha = 1\% \text{ ir}$$

$$H_1 : F(x) < G(x), \text{ kai } \alpha = 5\% .$$

Tikrinimui taikant dviejų imčių Kolmogorovo-Smirnovo kriterijų [20], gauta, jog abiem atvejais nėra pagrindo atmesti nulinę, skirstinių lygybės, hipotezę. P-reikšmė, tikrinant H_0 , kai $\alpha = 1\%$, yra 0,39 ir 0,14, kai $\alpha = 5\%$. Taigi išvada – pažeidimų skaičius, taikant VAR-DCC metodologiją statistiškai reikšmingai neskiria nuo pažeidimų skaičiaus, gaunamo, taikant O-GARCH modelį.

Įdomu, kokį rezultatą gautume, jei portfelio grąžų rizikuojamąją vertę kiekvienu laiko momentu vertintume laikant, jog portfelio skirstinys yra standartinis normalusis. Paėmus $q_{5\%} = -1,64$ (atit. $q_{1\%} = -2,33$) (2) formulėje ir apskaičiavus 95% (atit. 99%) VaR_t pagal VAR-DCC metodologiją kiekvienam iš 50 portfelių buvo gauta, jog su $\alpha = 5\%$ vidutinis pažeidimų skaičius yra 3,90, o su $\alpha = 1\%$ jis yra 1,79. Rezultatas ne nuostabus. Normaliuoju atveju $q_{95\%}$ yra mažesnis negu įvertintų skirstinių iš apibendrintų hiperbolinių skirstinių šeimos 95% - kvantilis. Dėl to, ir pažeidimų skaičius yra mažesnis. Tačiau tai nėra gerai – rizikuojamoji vertė yra pervertinama. Investuotojas, sužinojęs didesnę rizikuojamąją vertę nei ji yra iš tikrųjų, gali nuspręsti rizikuoti mažiau, ir taip sumažinti galimybę gauti didesnę pelną, Nagrinėjant $\alpha = 1\%$ atvejį gaunama, kad jei vietoje skirstinio iš apibendrintų hiperbolinių skirstinių šeimos imamas normalusis, vidutinis pažeidimų skaičius išauga iki 1,79%. Tai yra rimtesnė problema – rizikuojamoji vertė įvertinama nepakankamai, taigi, galimybė patirti VaR nusakomą nuostolį yra didesnė nei 5% .

Kiekvienam portfeliui patikrinus $H_{0,i} : \sum_{t=1}^T I_{i,t}(0,05) = 0,05$, $i \in \{1, \dots, 50\}$, gaunama, jog nulinė hipotezė atmetama 18 iš 50 atvejų ir visais atvejais $H_{0,i}$ atmetimas įvyksta dėl rizikuojamosios vertės pervertinimo. Tikrinant $H_{0,i} : \sum_{t=1}^T I_{i,t}(0,01) = 0,01$, $i \in \{1, \dots, 50\}$, nulinė hipotezė atmetama 26 kartų. Vadinasi, vidutiniškai kas antram portfeliui rizikuojamoji vertė įvertinama nepakankamai.²⁹

Panašūs rezultatai ir ortogonaliam modeliui – 12 kartų iš 50 atmetama $H_{0,i} : \sum_{t=1}^T I_{i,t}(0,05) = 0,05$ ir 25 kartų iš 50 atmetama $H_{0,i} : \sum_{t=1}^T I_{i,t}(0,01) = 0,01$.

Šie rezultatai įrodo, kad standartinio normaliojo skirstinio kvantilių taikymas rizikuojamosios vertės skaičiavimui negalimas.

²⁹ Pirsono kriterijaus p-reikšmės kiekvienam iš 50 portfelių pateikiamos prie darbo pridėto CD byloje „fifty portfolios DCC.xls“, lape „violations for normal quantiles“.

IŠVADOS

Darbe buvo nagrinėtas Baltijos rinkos akcijų portfelių rizikuojamosios vertės vertinimas dispersijos-kovariacijos metodu. Metodas reikalauja portfelį sudarančių akcijų gražų skirstinio žinojimo, o kadangi akcijų gražos pasižymi kintančia dispersija, neišvengiamai susiduriama su daugiamačiais sąlyginio heteroskedastiškumo modeliais. Darbe, dešimties Baltijos rinkos akcijų kintamumui aprašyti, buvo pritaikyti du daugiamačiai sąlyginio heteroskedastiškumo modeliai – DCC ir O-GARCH. Rezultatai rodo, jog abu modeliai gerai aprašo daugiamatį akcijų gražų kintamumą – standartizuotos modelių liekanos gali būti laikomos daugiamačio baltojo triukšmo realizacija.

Įvertinus daugiamačius GARCH modelius, buvo pereita prie rizikuojamosios vertės skaičiavimo naudojantis abiejų įvertintų modelių rezultatais. Parodyta, kad praktikoje paplitęs normalusis skirstinys nėra tinkamas akcijų portfelio rizikuojamai vertei vertinti. Šio skirstinio taikymas pervertina 95% rizikuojamąją vertę ir nepakankamai įvertina 99% rizikuojamąją vertę. Todėl darbe nagrinėti kiti, hiperbolinių skirstinių šeimos, skirstiniai, kurie daug geriau aprašo sunkias uodegas turinčias akcijų gražas. Taikant grįžtamojo patikrinimo procedūrą, nustatyta, kad šios šeimos skirstinių taikymas leidžia gauti tikslias, su pasirinktu reikšmingumo lygmeniu suderintas, rizikuojamosios vertės prognozes.

Palyginus VAR-DCC ir O-GARCH metodologijų tikslumą vertinat rizikuojamąją vertę, buvo gauta, jog nagrinėjamai duomenų imčiai tikrų portfelio gražų, viršijančių apskaičiuotą rizikuojamąją vertę yra vidutiniškai daugiau, taikant O-GARCH metodologiją negu taikant VAR-DCC metodologiją. Tačiau statistiškai patikrinus, buvo gauta, kad šis skirtumas nėra reikšmingas. Taigi abiem modeliais gautos rizikuojamosios vertės prognozės yra patikimos.

Portfelio rizikuojamosios vertės vertinimas yra labai aktuali tema praktikoje. Todėl yra svarbu vystyti jos vertinimo metodus. Darbe nagrinėta tema gali būti vystoma tiek teoriniu, tiek praktiniu aspektais. Kadangi daugiamačiai sąlyginio heteroskedastiškumo modeliai yra palyginti nauji, ne visos teorinės šių modelių savybės yra ištirtos. Todėl tolesnis šių modelių teorijos vystymas, kaip, pavyzdžiui, asimptotinio pseudo didžiausio tikėtimumo įverčių normalumo sąlygų paieška įvairiems daugiamačiams GARCH modeliams, šių modelių diagnostinių kriterijų plėtojimas, atvertų didesnes praktines galimybes. Iš praktinės pusės, galima būtų išskirti daugiamačių sąlyginio heteroskedastiškumo modelių vertinimo funkcijų kūrimą nemokamose statistinėse programose. Rašant darbą buvo išsiaiškinta, kad, nė vienas nemokamas statistinis paketas neturi daugiamačių sąlyginio heteroskedastiškumo modelių vertinimo galimybių. Kita praktinė problema yra ta, kad daugiamačių modelių vertinimas, ypač kai portfelį sudaro didelis

akcijų skaičius, yra laiko skaičiavimams reikalaujanti procedūra. Todėl svarbu ieškoti greitesnių modelio didžiausio tikėtumo funkcijos maksimizavimo algoritmų.

Darbo rašymo eigoje buvo parašyta nemažai *R* programos kodų. Visi jie yra pateikiami prie darbo pridedamo kompaktinio disko kataloge „*R* kodai“ kataloge.

LITERATŪRA IR ŠALTINIAI

1. M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, New York: Dover, 1965.
2. C. Alexander. Orthogonal GARCH, *Mastering risk*, 2001, 2, p. 21-38.
3. L. Allen, J. Boudoukh, A. Saunders. *Understanding Market, Credit, and Operational Risk. The Value at Risk Approach*, Oxford: Blackwell Publishing, 2004.
4. K. A. Bollen, *Structural Equations with Latent Variables*, New York: Wiley, 1989.
5. T. Bollerslev. Modelling the coherence in short-run nominal exchange rates: A multivariate generalized ARCH model, *Review of Economics and Statistics*, 1990, 72, p. 498-505.
6. T. Bollerslev, R. F. Engle, J. M. Wooldridge. A capital asset pricing model with time-varying covariances, *The Journal of Political Economy*, 1988, 96, p. 116-131.
7. W. Breymann, D. Luthi. *ghyp: A package on generalized hyperbolic distributions*, http://rss.acs.unt.edu/Rdoc/library/ghyp/doc/Generalized_Hyperbolic_Distribution.pdf.
8. C. Brooks. *Introductory Econometrics for Finance*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
9. C. Christiansen. *Value at Risk Using the Factor-ARCH Model*, http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=104689.
10. V. Čekanavičius, G. Murauskas. *Statistika ir jos taikymai II*, Vilnius: TEV, 2002.
11. R. F. Engle. Dynamic conditional correlation: A simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models, *Journal of Business and Economic Statistics*, 2002, 20, 339-350.
12. R. F. Engle, K. F. Kroner. Multivariate simultaneous generalized ARCH, *Econometric Theory*, 1995, 11, p. 122-150.
13. P. Jorion. *Value At Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*, New York: McGraw-Hill, 2001.
14. K. Kuester, S. Mittnik, M. Paolella. Value-at-Risk Prediction: A Comparison of Alternative Strategies. *Journal of Financial Econometrics*. 2006, 4 (1), 53-89.
15. R. Lapinskas. *Ekonometrija su kompiuteriu II*, [http://www.mif.vu.lt/~rlapinskas/Praktine%20ekonometrija%20II%20\(ts,%20R,%202k%20ir%204k\)/Konspektas/ts%202008i07.pdf](http://www.mif.vu.lt/~rlapinskas/Praktine%20ekonometrija%20II%20(ts,%20R,%202k%20ir%204k)/Konspektas/ts%202008i07.pdf).
16. H. Lütkepohl. *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*, Berlin: Springer-Verlag, 2005.

17. A. J. McNeil, R. Frey, P. Embrechts. *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques, and Tools*, Woodstock: Princeton University Press, 2005.
18. M. H. Pesaran, P. Zaffaroni. *Model Averaging and Value-at-Risk based Evaluation of Large Multi Asset Volatility Models for Risk Management*, http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=642681.
19. A.C. Rencher. *Methods of Multivariate Analysis*, New York: Wiley, 2002.
20. J. D. C. Semper, I. M. Clemente. Value at risk calculation through ARCH factor methodology: Proposal and comparative analysis, *European Journal of Operational Research*, 2003, 150, p. 516–528.
21. A. Silvennoinen, T. Teräsvirta. Multivariate GARCH models. <http://swopec.hhs.se/hastef/papers/hastef0669.pdf>.
22. Шведов А.С. *Теория эффективных портфелей ценных бумаг*. Москва: ГУ ВШЭ, 1999.
23. E. Zivot, J. Wang. *Modeling Financial Time Series with S-PLUS*, New York: Springer-Science+Business Media, 2006.

PRIEDAI

1 lentelė. Nagrinėjama įmonių akcijų gražų vidurkiai bei standartiniai nuokrypiai.

	Vidurkis	Standartinis nuokrypis
„Eesti telekom“	0.02	0.81
„Baltika“	0.10	2.22
„Rytų skirstomieji tinklai“	0.07	1.95
„Šiaulių bankas“	0.05	1.49
„Panevėžio statybos trestas“	0.10	2.03
„Tallinna Kaubamaja“	0.15	2.51
„Apranga“	0.12	1.72
„Rokiškio sūris“	-0.03	1.44
„TEO LT“	0.02	1.18
„Ūkio bankas“	0.22	2.68

2 lentelė. Vienamačio Ljung-Box testo p-reikšmės kiekvienos įmonės gražų eilutei atskirai (lagų sk. = 10).

Įmonės pavadinimas	P-reikšmė
„Eesti telekom“	0.014
„Baltika“	$3.15 \cdot 10^{-5}$
„Rytų skirstomieji tinklai“	0.051
„Šiaulių bankas“	0.011
„Panevėžio statybos trestas“	0.023
„Tallinna Kaubamaja“	0.077
„Apranga“	0.002
„Rokiškio sūris“	0.362
„TEO LT“	0.104
„Ūkio bankas“	0.001

3 lentelė. VAR(p) modelio parinkimas. Informacinių kriterijų reikšmės imant p nuo 1 iki 10.

VAR eilė	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
AIC(p)	9.4	9.5	9.6	9.7	9.8	9.9	10.0	10.1	10.2	10.3
HQ(p)	9.6	10.0	10.3	10.7	11.0	11.4	11.7	12.1	12.4	12.8
SC(p)	10.1	10.8	11.5	12.3	13.0	13.8	14.5	15.2	16.0	16.7
FPE(p)	11737	13249	14407	15581	17486	19773	21890	23937	26492	29950

4 lentelė. VAR-gražų daugiamačio nekoreliuotumo tikrinimas. Breusch-Godfrey LM testo rezultatai.

Lagų skaičius	P-reikšmė
1	0.70
2	0.66
3	0.37
4	0.04
5	0.03

5 lentelė. DCC(1,1) modelio parametru įverčiai.

Koef.	Įvertis	Standartinis nuokrypis	t-statistikos reikšmė	p-reikšmė
$c_{0,1}$	0.069	0.004	15.622	0.000
$c_{0,2}$	0.383	0.017	22.174	0.000
$c_{0,3}$	2.262	0.040	55.986	0.000
$c_{0,4}$	1.263	0.043	29.115	0.000
$c_{0,5}$	1.823	0.053	34.707	0.000

5 lentelė (tęsinys). DCC(1,1) modelio parametru įverčiai.

$c_{0,6}$	0.931	0.043	21.823	0.000
$c_{0,7}$	0.590	0.024	24.731	0.000
$c_{0,8}$	0.239	0.008	31.134	0.000
$c_{0,9}$	0.276	0.014	19.815	0.000
$c_{0,10}$	0.047	0.007	6.257	0.000
$\alpha_{0,1}$	0.253	0.015	17.140	0.000
$\alpha_{0,2}$	0.254	0.013	18.942	0.000
$\alpha_{0,3}$	0.147	0.023	6.365	0.000
$\alpha_{0,4}$	0.193	0.027	7.176	0.000
$\alpha_{0,5}$	0.373	0.026	14.553	0.000
$\alpha_{0,6}$	0.305	0.018	16.537	0.000
$\alpha_{0,7}$	0.225	0.016	13.988	0.000
$\alpha_{0,8}$	0.129	0.007	17.576	0.000
$\alpha_{0,9}$	0.199	0.016	12.735	0.000
$\alpha_{0,10}$	0.067	0.002	28.617	0.000
$\beta_{0,1}$	0.664	0.009	77.654	0.000
$\beta_{0,2}$	0.700	0.007	97.637	0.000
$\beta_{0,3}$	0.269	0.012	22.587	0.000
$\beta_{0,4}$	0.226	0.021	10.752	0.000
$\beta_{0,5}$	0.225	0.015	14.552	0.000
$\beta_{0,6}$	0.575	0.011	54.299	0.000
$\beta_{0,7}$	0.573	0.011	53.637	0.000
$\beta_{0,8}$	0.764	0.005	157.809	0.000
$\beta_{0,9}$	0.614	0.012	51.840	0.000
$\beta_{0,10}$	0.927	0.002	576.308	0.000
a	0.015	0.002	6.965	0.000
b	0.902	0.017	53.610	0.000

6 pav. Normaliojo GARCH(1,1) modelio, pritaikyto \hat{u}_{1t} liekanų diagnostika.

Kriterijus	Testinės statistikos reikšmė	P-reikšmė
Jarque-Bera	340.46	0
Shapiro-Wilk	0.96	$1.24 \cdot 10^{-13}$
Ljung-Box modelio liekanoms (lagų sk. = 10)	16.36	0.09
Ljung-Box modelio liekanų kvadratams (lagų sk. = 10)	9.50	0.49
LM-ARCH	9.26	0.68

7 lentelė. Pagrindinės komponentės P_i bei jos reikšmių, pakeltų kvadratu, nekoreliuotumo tikrinimas.

Ljung-Box testo su lagų skaičiumi 10 rezultatai.

	Pagrindinė komponentė P_i		Pagrindinė komponentė kvadratu P_i^2	
	Testinės statistikos reikšmė	p-reikšmė	Testinės statistikos reikšmė	p-reikšmė
1	69.60	0.00	168.77	0.01
2	13.75	0.18	22.81	0.00

7 lentelė (tesinys). Pagrindinės komponentės P_i bei jos reikšmių, pakeltų kvadratu, nekoreliuotumo tikrinimas. Ljung-Box testo su lagų skaičiumi 10 rezultatai.

3	10.62	0.39	40.48	0.00
4	14.74	0.14	55.79	0.00
5	18.43	0.05	75.86	0.01
6	29.28	0.00	24.96	0.02
7	16.28	0.09	21.59	0.04
8	15.70	0.11	19.13	0.00
9	20.14	0.03	67.28	0.00
10	19.46	0.03	34.64	0.01

8 lentelė. Kolmogorovo-Smirnovo kriterijaus p-reikšmės i -tajai $\hat{\varepsilon}$ tiesinei kombinacijai.

i	P-reikšmė	i	P-reikšmė	i	P-reikšmė	i	P-reikšmė	i	P-reikšmė
1	$2.81 \cdot 10^{-7}$	11	$3.03 \cdot 10^{-7}$	21	$1.73 \cdot 10^{-8}$	31	$8.79 \cdot 10^{-10}$	41	$8.63 \cdot 10^{-11}$
2	$6.04 \cdot 10^{-9}$	12	$4.95 \cdot 10^{-8}$	22	$1.49 \cdot 10^{-10}$	32	2.91E-11	42	$2.46 \cdot 10^{-11}$
3	$1.46 \cdot 10^{-7}$	13	$4.19 \cdot 10^{-9}$	23	$2.40 \cdot 10^{-7}$	33	$2.20 \cdot 10^{-8}$	43	$2.00 \cdot 10^{-10}$
4	$7.72 \cdot 10^{-13}$	14	$1.88 \cdot 10^{-7}$	24	$2.25 \cdot 10^{-9}$	34	3.61E-11	44	$5.48 \cdot 10^{-8}$
5	$3.52 \cdot 10^{-8}$	15	$2.51 \cdot 10^{-11}$	25	$3.92 \cdot 10^{-10}$	35	1.56E-08	45	$4.70 \cdot 10^{-12}$
6	$6.99 \cdot 10^{-11}$	16	$7.50 \cdot 10^{-9}$	26	$6.60 \cdot 10^{-10}$	36	$3.01 \cdot 10^{-13}$	46	$4.40 \cdot 10^{-8}$
7	$6.95 \cdot 10^{-8}$	17	$2.73 \cdot 10^{-9}$	27	$1.67 \cdot 10^{-9}$	37	$5.94 \cdot 10^{-9}$	47	$2.23 \cdot 10^{-7}$
8	$3.77 \cdot 10^{-13}$	18	$3.30 \cdot 10^{-11}$	28	$4.96 \cdot 10^{-10}$	38	$4.73 \cdot 10^{-8}$	48	$8.43 \cdot 10^{-10}$
9	$4.19 \cdot 10^{-12}$	19	$2.92 \cdot 10^{-11}$	29	$1.42 \cdot 10^{-9}$	39	$4.02 \cdot 10^{-9}$	49	$1.57 \cdot 10^{-10}$
10	$1.26 \cdot 10^{-9}$	20	$3.67 \cdot 10^{-9}$	30	$8.31 \cdot 10^{-12}$	40	$1.83 \cdot 10^{-8}$	50	$2.96 \cdot 10^{-9}$

9 lentelė. Parinktas skirstinys iš apibendrintų hiperbolinių šeimos bei Kolmogorovo ir Smirnovo kriterijaus p-reikšmės kiekvienam iš 50 standartizuotų portfelių. Rezultatai, kai grąžoms yra taikomas VAR-DCC modelis.

	Modelis	λ	$\bar{\alpha}$	γ	P-reikšmė		Modelis	λ	$\bar{\alpha}$	γ	P-reikšmė
1	NIG	-0.50	0.38	0.00	0.56	26	VG	0.81	0.00	0.00	0.34
2	NIG	-0.50	0.64	0.00	0.40	27	NIG	-0.50	0.45	0.00	0.95
3	NIG	-0.50	0.83	0.00	0.47	28	NIG	-0.50	0.91	0.00	0.39
4	NIG	-0.50	1.04	0.00	0.10	29	VG	1.33	0.00	0.00	0.12
5	NIG	-0.50	0.89	0.00	0.24	30	t	-1.81	0.00	0.00	0.17
6	VG	1.78	0.00	0.00	0.11	31	VG	0.96	0.00	0.00	0.22
7	t	-2.20	0.00	0.00	0.19	32	NIG	-0.50	0.52	0.00	0.22
8	NIG	-0.50	0.60	0.00	0.42	33	NIG	-0.50	0.88	0.00	0.90
9	VG	0.96	0.00	0.00	0.02	34	NIG	-0.50	0.77	0.00	0.04
10	NIG	-0.50	0.65	0.00	0.40	35	hyp	1.00	0.29	0.12	0.04
11	VG	1.10	0.00	0.00	0.83	36	VG	1.60	0.00	-0.14	0.00
12	NIG	-0.50	0.51	0.00	0.91	37	NIG	-0.50	0.73	0.00	0.17
13	NIG	-0.50	1.01	-0.12	0.00	38	VG	0.91	0.00	0.00	0.01
14	NIG	-0.50	0.77	0.00	0.06	39	VG	1.04	0.00	0.00	0.01
15	hyp	1.00	0.10	0.00	0.02	40	NIG	-0.50	0.64	0.00	0.36
16	VG	0.93	0.00	0.00	0.84	41	NIG	-0.50	0.66	0.00	0.35
17	hyp	1.00	0.83	0.00	0.17	42	t	-1.95	0.00	0.00	0.05
18	VG	1.37	0.00	0.00	0.29	43	NIG	-0.50	0.87	0.00	0.18
19	VG	1.13	0.00	0.00	0.02	44	t	-1.90	0.00	0.00	0.02
20	hyp	1.00	0.24	0.00	0.50	45	NIG	-0.50	0.72	0.00	0.43
21	NIG	-0.50	0.59	0.00	0.76	46	VG	1.20	0.00	0.00	0.49
22	NIG	-0.50	0.81	0.00	0.17	47	NIG	-0.50	1.00	0.00	0.47
23	hyp	1.00	0.41	0.00	0.42	48	t	-1.66	0.00	0.00	0.07
24	VG	1.69	0.00	0.00	0.18	49	t	-1.83	0.00	0.00	0.02
25	NIG	-0.50	0.64	0.00	0.27	50	VG	1.33	0.00	0.00	0.50