

VILNIAUS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

Magistro darbas

Finansinio kintamumo modeliavimas apibendrintuoju

Gegenbauer-LARCH modeliu

Generalised Gegenbauer-LARCH model for financial volatility
modeling

Aušra Osipavičiūtė

VILNIUS 2008

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
EKONOMETRINĖS ANALIZĖS KATEDRA

Darbo vadovas *prof. Remigijus Leipus* _____

Darbas apgintas 2008 m. gegužės mėn. 28 d. _____

Gynimo posėdžio protokolo Nr. _____

Darbas įvertintas _____

Registravimo Nr. _____

2008-05-20 _____

TURINYS

ANOTACIJA	4
SUMMARY	5
ĮVADAS.....	6
1. FINANSINIŲ LAIKO EILUČIŲ MODELIŲ APŽVALGA	8
1.1. GARCH modeliai	8
1.2. Ilgos atminties procesai	9
1.2.1. FIGARCH modeliai.....	9
1.2.2. GARMA ir Gegenbauer-GARCH modeliai	11
1.2.3. LARCH modeliai	15
2. GEGENBAUER-LARCH MODELIAI.....	17
2.1. Vieno faktoriaus Gegenbauer-LARCH modelis.....	17
2.2 Vieno faktoriaus Gegenbauer-LARCH modelio stabilumo sąlygos tikrinimas	17
2.3. Apibendrintas Gegenbauer-LARCH modelis.....	19
2.4. Gegenbauer-LARCH procesų modeliavimas	20
2.5 Modelio vertinimas	23
2.6. LUDE algoritmas	24
3. PERIODINĖS ILGOS ATMINTIES STRUKTŪROS EURO-DOLERIO VALIUTŲ KURSUOSE MODELIAVIMAS.....	27
IŠVADOS	35
LITERATŪROS SĄRAŠAS	36
1. PRIEDAS. Sąvokos ir trumpiniai	37
2. PRIEDAS. Programos <i>R</i> komandos.....	39

ANOTACIJA

Darbe siekiama aprašyti periodinį ilgą atminties finansinių laiko eilučių elgesį. Remiantis anksčiau sukurtais modeliais, siūlomas h -faktorių *Gegenbauer-LARCH* modelis, kuris į *LARCH* tipo proceso sąlyginės dispersijos lygtį įtraukia apibendrintą ilgą atminties filtrą, paremtą Gegenbauer polinomais. Darbe pateikiama anksčiau sukurtų modelių, skirtų finansinių aktyvų gražų kintamumo modeliavimui, apžvalga. Remiantis ankstesnėmis idėjomis ir darbais, sukonstruojamas naujas *Gegenbauer-LARCH* modelis, kuriam tikrinama kovariacijos stacionarumo sąlyga. Pateikiamos modeliuotos h -faktorių *Gegenbauer-LARCH* proceso trajektorijos. Sukurtas modelis taikomas realiems Euro-Dolerio valiutų kurso duomenims. Identifikuotas modelio parametrai vertinami *LUDE* algoritmu, kuris maksimizuoja didžiausio tikėtimumo funkciją. Atliekama modelio adekvatumo analizė. Darbo pabaigoje pateikiamos išvados ir rekomendacijos.

SUMMARY

On the ground of previous works and ideas a new class of models which describe long memory periodic behaviour in a time varying volatility of financial returns is introduced. Generalised periodic long-memory filters, based on Gegenbauer polynomials, are included into volatility equation of *LARCH* model and capture long memory periodic behaviour of the data. Thus, a new type of model called *h-factor Gegenbauer-LARCH* is presented. Moreover, a covariance stationarity condition is checked for one factor *Gegenbauer-LARCH* model. Also, generated processes are demonstrated. Furthermore, *h-factor Gegenbauer-LARCH* model is applied to Euro-Dollar hourly exchange rate returns. Identified model is estimated by means of *LUDE* algorithm which maximizes maximum likelihood function. The adequacy of the model is checked by reviewing residuals behaviour. Concerning empirical results the following conclusion is drawn:

- Although model captures specific characteristics of the data such as slowly decaying periodic behaviour of autocorrelation function and pronounced peaks in periodogram but residuals analysis shows that model should be improved. Bordignon, Caporin, Lisi suggest that all possible frequencies were included to the model because higher frequencies might not be obvious from autocorrelation function or periodogram. However, we face computer capability problem. As a matter of fact, we cannot estimate a more complex model. Inclusion of autoregressive coefficients into the model did not provide better results.

Finally, *h-factor Gegenbauer-LARCH* model should be interesting for practitioners, however either theoretical characteristics and practical application possibilities should be investigated further.

IVADAS

Finansiniai laiko eilučių duomenys pasižymi sąlyginiu heteroskedastiškumu bei ilgą atmintimi. Kalbant griežčiau, transformuotų duomenų (absoliutinių dydžių, logaritmuotų, pakeltų kvadratu ir kitų laipsnių) eilučių autokoreliacijos gęsta lėtai, o periodograma turi piką nuliniame dažnyje. Norint aprašyti duomenis pasižyminčius minėtomis savybėmis buvo ir yra kuriami bei tobulinami modeliai nusakantys ilgą atmintį turinčių finansinių grąžų kintamumo elgesį. Baillie, Bollerslev ir Mikkelsen (1996) pasiūlė trupmeninius integruotus apibendrintus autoregresinius sąlyginio heteroskedastiškumo (*FIGARCH*) modelius, kurie nusako ilgos atminties elgesį finansinių grąžų kintamume. Breidt (1998) ir Harvey(1998) pasiūlė ilgos atminties stochastinio kintamumo modelių versijas.

Vis dėlto, minėti modeliai nėra tinkami modeliuoti aukšto dažnio duomenų kintamumą, pavyzdžiui, tokiais atvejais, kai duomenys fiksuojami keturis kartus dienoje, arba net kas valandą, kas penkias minutes ir panašiai. Aukšto dažnio finansiniai duomenys pasižymi periodiniu grąžų kintamumo elgesiu. Toks elgesys pastebimas transformuotų grąžų eilučių autokoreliacinėse funkcijose, kurios periodiškai svyruoja ir gęsta lėtai. Be to, periodogramos turi vieną arba daugiau pikų nenuliniame dažnyje.

Bordignon, Caporin, Lisi (2006) pasiūlė būdą modeliuoti laike kintančio finansinių laiko eilučių kintamumo periodines ilgalaikes priklausomybes. Dėmesys sutelkiamas į h -faktorių Gegenbauer (*GARMA*) modelius. Apibendrintas ilgos atminties filtras, kuris remiasi Gegenbauer polinomais, įtraukiamas į *GARCH* modelio sąlyginio kintamumo lygtį. *G-GARCH* modelių trūkumas yra tas, kad nėra užtikrinamas kintamumo teigiamumas.

LARCH modelis (pasūlytas Robinson (1991)) taip pat leidžia modeliuoti ilgą atmintį. Be to, modelio koeficientai gali įgyti tiek teigiamas, tiek neigiamas reikšmes, ir kitaip, nei *GARCH* modelyje, σ_t (ne σ_t^2) yra tiesinė praeities reikšmių r_t kombinacija. *LARCH* modelis užtikrina sąlyginės variacijos teigiamumą.

Mūsų darbo tikslas, remiantis jau žinomais darbais ir idėjomis, pasiūlyti modifikuotą modelį, kuris aprašytų periodinį ilgos atminties aukšto dažnio finansinių laiko eilučių elgesį.

Darbe naudojami mokslinės literatūros analizės, matematiniai, statistiniai duomenų apdorojimo metodai. Informacija gauta iš skirtingų mokomosios literatūros šaltinių. Skaičiavimai atliekami statistiniams ir ekonometriniais tyrimams skirtu paketu *R*.

Remiantis *LARCH* modelio savybėmis, tikriname vieno faktoriaus *Gegenbauer-LARCH* modelio stacionarumo sąlygą kovariacijų prasme. Be to, pateikiame generuotas *h-faktorių* *Gegenbauer-LARCH* proceso trajektorijas. Siūlomą modelį taikome realių valandinių Euro-Dolerio valiutų kurso grąžų sąlyginio kintamumo ilgos atminties periodiniam elgesiui aprašyti.

Darbo pabaigoje pateikiamas naudotos literatūros sąrašas ir priedai, kuriuose sudėtos kai kurios sąvokos ir trumpiniai bei komandos, naudojamos skaičiavimams *R* pakete.

1. FINANSINIŲ LAIKO EILUČIŲ MODELIŲ APŽVALGA

Darbe nagrinėjame laiko eilučių duomenis. Laiko eilučių pritaikymas praktikoje yra labai platus – nuo astronomijos iki ekonominių reiškinių. Iki šių dienų sukurti, išplėtoti ir toliau nagrinėjami bei tobulinami įvairūs modeliai, aprašantys specifinį laiko eilučių elgesį. Vieni žinomiausių yra *AR*, *ARMA*, *ARIMA*, *ARCH*, *GARCH*. Šie modeliai skirti trumpos atminties procesų modeliavimui, t.y. tokių procesų, kuriems beveik nebūdinga arba visai nebūdinga turėti užsitęsusių šokų įtaką. Tam, kad aprašyti procesus, kuriems įvairūs šokai daro ilagalaikę įtaką, dar kitaip vadinant, ilgos atminties procesus, apie aštuoniasdešimtuosius praeito amžiaus metus buvo praplėsti jau egzistavę modeliai ir sukurti *ARFIMA* bei *GARMA* procesai. Šie, ką tik minėti modeliai taikyti, pavyzdžiui, hidrologijoje (Montanari 1996), pasaulinio atšilimo modeliavimui (Smith 1993), seisminių reiškinių modeliavimui (Ogata ir Abe 1991) [4].

Ypatingo susidomėjimo sulaukė finansiniai laiko eilučių duomenys, tokie kaip akcijų kainos, valiutų kursai, elektros kainos, naftos kainos, ir t.t. Pirmieji literatūroje pasirodė *ARCH* tipo modeliai, kuriuos vėliau sekė įvairūs jų plėtiniai ir tobulinimai, aprašantys įvairius stilizuotus faktus, tokius kaip asimetrija, sunkios uodegos, sverto efektas.

1.1. *GARCH* modeliai

Reikia pradėti nuo pačių pirmųjų reikšmingą įtaką ekonometrijai modeliavimui turėjusių Engle (1982) ir Bollerslev (1986) darbų, t.y. *ARCH* ir *GARCH* modelių. Šie modeliai įgalino aprašyti finansinio aktyvo gražos kintamumą. Minėtinos kai kurios kintamumo charakteristikos:

- Kintamumo klasteriai (kintamumas gali būti aukštas tam tikrais laiko periodais ir žemas kitais laiko periodais).
- Kintamumo šuoliai yra reti, t.y., kintamumas evoliucionuoja tolydžiai.
- Kintamumas nediverguoja, t.y. jis varijuoja tam tikrame fiksuotame intervale. Statistiniais terminais, tai reiškia, kad kintamumas dažniausiai būna stacionarus.
- Asimetrinė reakcija į didelius ir mažus kainų šuolius. [5]

Klasikinis *GARCH* modelis yra užrašomas lygtimis:

$$r_t = \sigma_t \varepsilon_t, \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \alpha_j r_{t-j}^2, \quad (1.1.1)$$

kur $\alpha_0 > 0, \alpha_j \geq 0, \beta_i \geq 0, p \geq 0, q \geq 0$ yra modelio parametrai, o $\{\varepsilon_j, j \in Z\}$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę (n.v.p) atsitiktiniai dydžiai su nuliniu vidurkiu ir pastovia dispersija. Kintamieji $r_t, \sigma_t, \varepsilon_t$ dažniausiai yra interpretuojami kaip (log) gražos (r_t), jų kintamumai arba kitaip sąlyginiai standartiniai nuokrypiai σ_t ir šokai ε_t , kurie tariama, jog turi tam tikrą konkretų skirstinį (pvz., standartinį normalųjį). Informacijos apie statistinius ir ekonometrinius *ARCH* modelio aspektus galima rasti Bollerslev (1992, 1994), Shephard (1996), Bera ir Higgins (1993) darbuose. Esant tam tikroms papildomoms sąlygoms, *GARCH* modelis gali būti užrašytas kaip *ARCH* (∞) modelis, t.y., σ_t^2 gali būti išreikštas kaip praeities kvadratinių gražų $r_s^2, s < t$ slenkantis vidurkis su eksponentiškai gęstančiais koeficientais (Bollerslev, 1988) ir absoliučiai sumuojama eksponentiškai gęstančia autokovariacine funkcija [6].

1.2. Ilgos atminties procesai

Vis dėlto, empiriniai tyrimai parodė, kad finansinių transformuotų duomenų (absoliutinių dydžių, pakeltų kvadratu ir kitų laipsnių) eilučių autokoreliacijos gęsta labai lėtai (Dacorgana, 1993, Ding, 1993, Baillie, 1996, Ding ir Granger, 1996, Breidt, 1998, Mikosch ir Starica, 2003, Andersen, 2001), o periodogramos turi piką nuliniame dažnyje [6]. Procesai pasižymintys tokiomis charakteristikomis yra vadinami ilgus atminties procesais.

1.2.1 apibrėžimas. Tegu $\{Y_t, t \in R\}$ yra antros eilės stacionarus procesas. Šis procesas yra ilgus atminties procesas, jei jo spektrinis tankis $f_Y(\lambda)$ yra toks, kad teigiamoje nulinio dažnio aplinkoje

$$f_Y(\lambda) \sim c_f \lambda^{-\alpha}, \lambda \rightarrow 0_+, c_f \in (0, \infty),$$

arba kitaip, ilgus atminties procesų autokoreliacinės funkcijos nėra absoliučiai sumuojamos, t.y.,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\rho_Y(k)| = \infty. [7]$$

1.2.1. FIGARCH modeliai

Norint aprašyti duomenis pasižyminčius minėtomis savybėmis buvo ir yra kuriami bei tobulinami modeliai nusakantys ilgą atmintį turinčių finansinių gražų kintamumo elgesį. Baillie,

Bollerslev ir Mikkelsen (1996) pasiūlė trupmeninius integruotus apibendrintus autoregresinius sąlyginio heteroskedastiškumo (*FIGARCH*) modelius, kurie nusako ilgą atminties elgesį finansinių gražų kintamume. Modelis remiasi *IGARCH* procesu. Taigi, *GARCH(p,q)* procesas gali būti užrašytas kaip begalinis *ARCH* procesas:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 [1 - \beta(L)]^{-1} + \alpha(L) [1 - \beta(L)]^{-1} r_t^2, \quad (1.2.1.1)$$

$$\text{čia } \beta(L) = \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2, \text{ o } \alpha(L) = \sum_{i=1}^q \alpha_i r_{t-i}^2.$$

GARCH(p,q) yra trumpos atminties procesas, kadangi šoko efektas sąlyginėje dispersijoje gėsta eksponentiškai. *GARCH(p,q)* procesas gali būti interpretuojamas kaip *ARMA(m,p)* procesas, kur $m = \max(p,q)$. Pažymėjus $u_t = r_t^2 - \sigma_t^2$, *GARCH(p,q)* lygtį galima perrašyti tokiu pavidalu:

$$[1 - \alpha(L) - \beta(L)] r_t^2 = \alpha_0 + [1 - \beta(L)] u_t. \quad (1.2.1.2)$$

Kai polinomas $[1 - \alpha(L) - \beta(L)]$ turi vienetinę šaknį, *GARCH(p,q)* procesas yra vadinamas interguotu *GARCH (IGARCH(p,q))* procesu:

$$\Phi(L)(1-L)r_t^2 = \alpha_0 + [1 - \beta(L)]u_t, \quad (1.2.1.3)$$

$$\text{čia } \Phi(L) = [1 - \alpha(L) - \beta(L)](1-L)^{-1}.$$

Nei *GARCH*, nei *IGARCH* procesai neatsižvelgia į lėtai gėstančią autokoreliaciją. Tam, kad pagauti stiprią priklausomybę kintamumo eilutėse, buvo išvesti trupmeniniai integruoti *GARCH* procesai (*FIGARCH*):

$$\Phi(L)(1-L)^d r_t^2 = \alpha_0 + [1 - \beta(L)]u_t, \quad (1.2.1.4)$$

kur $\Phi(L)$ ir $[1 - \beta(L)]$ šaknys guli vienetinio apskritimo išorėje, o d yra trupmeninio integravimo parametras. Jei $d=0$, tai turime *GARCH(p,q)* modelį, jei $d=1$, tai turime interguotą *GARCH* procesą.

Atitinkamai perrašius u_t per σ_t^2 , turėsime tokio pavidalo procesą:

$$[1 - \beta(L)]\sigma_t^2 = \alpha_0 + [1 - \beta(L) - \Phi(L)(1-L)^d]r_t^2$$

arba

$$(1.2.1.5)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 [1 - \beta(1)]^{-1} + [1 - [1 - \beta(L)]^{-1} \Phi(L)(1-L)^d] r_t^2.$$

Čia ilgo laikotarpio kintamumo dinamika yra perteikiama trupmeninio integravimo parametro d pagalba, kai tuo tarpu trumpą atmintį atspindi įprastiniai *GARCH* modelio parametrai [8].

Reikia pažymėti, kad *FIGARCH* modelio stacionarumas dar nėra teoriškai įrodytas. Baillie (1996) pasiūlytas įrodymas buvo neteisingas. Taigi, dar iki šių dienų išlieka atviras klausimas apie stacionaraus *FIGARCH* lygties sprendinio egzistavimą.

1.2.2. *GARMA* ir *Gegenbauer-GARCH* modeliai

Pastebėta, jog finansinės aukšto dažnio eilutės pasižymi ne tik ilga atmintimi, bet ir periodiniu elgesiu. Toks elgesys pastebimas transformuotų gražų eilučių autokoreliacinėse funkcijose, kurios periodiškai svyruoja ir gęsta lėtai. Be to, periodogramos turi vieną arba daugiau pikų nenuliniame dažnyje [1].

Bordignon, Caporin, Lisi (2006) siūlo būdą modeliuoti laike kintančio finansinių laiko eilučių kintamumo periodines ilgalaikes priklausomybes. Dėmesys sutelkiamas į h -faktorių *Gegenbauer* (*GARMA*) modelius (Woodward (1998)). Šie modeliai pasižymi tuo, kad leidžia aprašyti ilgos atminties procesų elgesį skirtinguose h -dažniuose. Straipsnio autoriai siūlo apibendrintą ilgos atminties filtrą, kuris remiasi *Gegenbauer* polinomais, įtraukti į *GARCH* modelio sąlyginio kintamumo lygtį. Naujojo *Gegenbauer-GARCH* (*G-GARCH*) modelio privalumas yra tas, kad jis leidžia susieti įvairaus laipsnio atmintį su įvairiais periodiškumais. Šis modelis apjungia ir *FIGARCH* modelį.

1.2.2.1 apibrėžimas. Tegu $|z| \leq 1$ ir $d \neq 0$. Remiantis Rainville (1960), $|v| \leq 1$ apibrėžiamame *Gegenbauer* polinomus $C_k^d(v)$ taip:

$$(1 - 2vz + z^2)^{-d} = \sum_{k \geq 0} C_k^{(d)}(v) z^k. \quad (1.2.2.1)$$

Šie polinomi yra užrašomi taip:

$$C_k^{(d)}(v) = \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \frac{(-1)^j \Gamma(d+k-j)(2v)^{k-2j}}{\Gamma(d)j!(k-2j)!}, \quad (1.2.2.2)$$

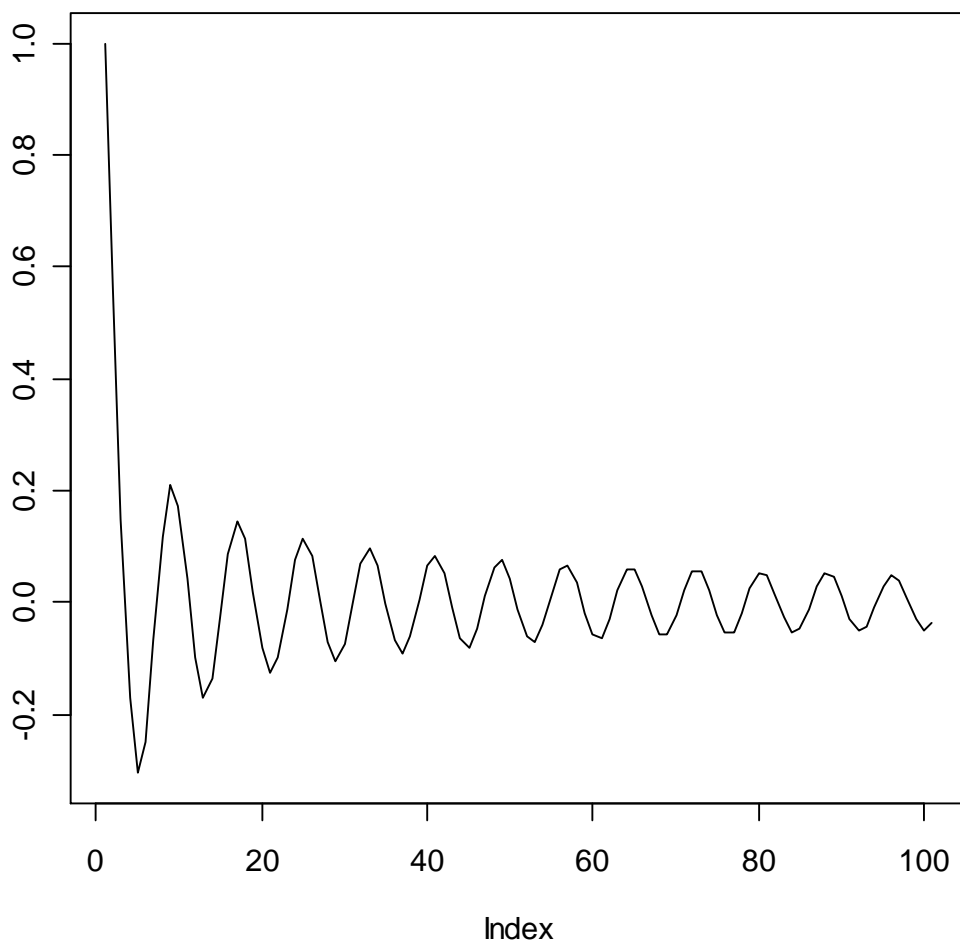
kur $\lfloor k/2 \rfloor$ yra sveikoji $k/2$ dalis, o Γ yra Eulerio gamma funkcija apibrėžiama kaip

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad [4].$$

Gegenbauer polinomų reikšmės gali būti apskaičiuojamos ir iš rekursinių lygčių:

$$C_k^{(d)}(v) = 2v \left(\frac{d-1}{k} + 1 \right) C_{k-1}^{(d)}(v) - \left(2 \frac{d-1}{k} + 1 \right) C_{k-2}^{(d)}(v), \quad \forall k > 1, \quad (1.2.2.3)$$

čia $C_0^{(d)}(\nu) = 1$ ir $C_1^{(d)}(\nu) = 2d\nu$ [9].



1.2.2.1 pav. Gegenbauer polinomai, kai parametras $d=0.4$, o parametras $\nu=0.7$.

1.2.2.2 apibrėžimas. Procesui $\{X_t\}$ Gegenbauer autoregresinis slenkančio vidurkio modelis $GARMA(p, \nu, d, q)$ yra užrašomas taip:

$$\phi(L)(1 - 2\nu L + L^2)^d (X_t - \mu) = \theta(L)\varepsilon_t, \quad |d| \leq 1/2, |\nu| \leq 1, \quad (1.2.2.4)$$

kur $\{\varepsilon_t\}$ nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su nuliniu vidurkiu ir pastovia dispersija σ_ε^2 , L - vėlinimo operatorius, μ - proceso vidurkis, o $\phi(L) = 1 - \sum_{j=1}^p \phi_j L^j$ ir

$\theta(L) = 1 - \sum_{j=1}^q \theta_j L^j$ yra $ARMA$ operatoriai. AR ir MA dalys charakterizuoja proceso trumpo laikotarpio dinamiką. Parametras d yra trupmeninio integravimo parametras, o ν yra

periodiškumo parametras. Kartu jie pagauna ilgo laikotarpio dinamiką laiko eilutėse. Kai $d=0$, turime *ARMA* modelį, kai $\nu=1$, turime *ARFIMA*, o, kai $\nu=1, d=1/2$, turime *ARIMA* modelį [4].

GARMA(p,q) procesas yra stacionarus, jei

- i) $|\nu| < 1, d < 1/2$, o visos $|\phi(z)| = 0$ šaknys guli vienetinio apskritimo išorėje,
- ii) $|\nu| = 1, d < 1/4$, o visos $|\theta(z)| = 0$ šaknys guli vienetinio apskritimo išorėje.

GARMA(p,q) procesas yra apverčiamas, jei

- i) $|\nu| < 1, d > -1/2$, o visos $|\phi(z)| = 0$ šaknys guli vienetinio apskritimo išorėje,
- ii) $|\nu| = 1, d > -1/4$, o visos $|\theta(z)| = 0$ šaknys guli vienetinio apskritimo išorėje.

Sakoma, kad *GARMA*(p,q) procesas turi ilgą atmintį, jei

- i) $|\nu| < 1$ ir $0 < d < 1/2$,
- ii) $|\nu| = 1$ ir $0 < d < 1/4$.

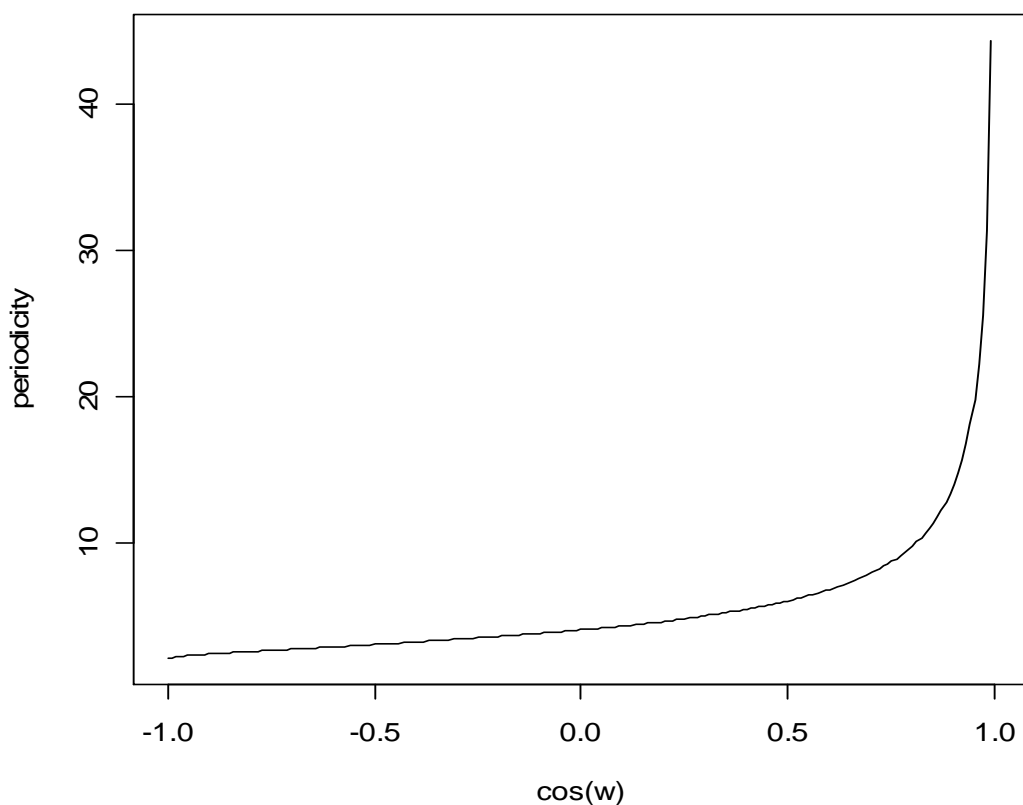
Kai $-1/2 < d < 0$, sakoma, jog *GARMA* procese dominuoja labai aukšto dažnio komponentės ir procesas turi trumpą atmintį [10].

Tegu $\omega_0 = \arccos(\nu)$. Kuomet spektrinis tankis tampa neaprežtas taške ω_0 , tai reiškia, kad turime ilgą atminties procesą. Kitais atvejais proceso spektrinis tankis yra:

$$f_x(\omega) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \frac{|\theta(e^{i\omega})|}{|\phi(e^{i\omega})|} (2|\cos(\omega) - \cos(\omega_0)|)^{-2d}, \quad \omega \in [0, \pi]. \quad (1.2.2.5)$$

ω_0 yra vadinamas Gegenbauer'io dažniu ir matuoja duomenų periodiškumą. Pavyzdžiui, $\nu = \cos(\omega) = 0.9$ sako, jog periodiškumas yra 13.93. Gegenbauer'io dažniui (radianais) galioja lygibė $f = \arccos(\nu)/2\pi$ ¹. Dažnis su periodiškumu yra susietas atvirkščia priklausomybe, t.y. *periodiškumas = 1/dažnis*. Galime pastebėti tokią priklausomybę tarp periodiškumo parametro ν ir periodiškumo: kuo ν arčiau vieneto, tuo daugiau laiko vienetų reikia, kad įvyktų ciklas, tuo žemesnis yra dažnis, ir atvirkščiai, kuo aukštesnis dažnis, tuo trumpesnis ciklas [10].

¹ Čia užrašėme standartizuotą dažnį. Programų spektrinio tankio grafikuose dažniausiai yra pateikiami standartizuoti dažniai.



1.2.2.2 pav. $v=\cos(\omega)$ periodiškumo parametro ir periodiškumo tarpusavio santykis.

[1] straipsnyje rašoma, kad, pasak Woodward (1998), h -faktorių $GARMA$ modelis leidžia susieti ilgos atminties elgesį su $h+1$ skirtingais dažniais iš intervalo $[0, \pi]$, ir yra apibūdinamas kaip

$$\phi(L) \prod_{j=0}^h (1 - 2 \cos(\omega_j)L + L^2)^{d_j} (X_t - \mu) = \theta(L)\varepsilon_t, \quad (1.2.2.6)$$

kur h yra sveikasis skaičius, $\omega_j, (j=0, \dots, h)$ yra dažniai, kuriuose pasireiškia ilgos atminties elgesys, $d_j (j=0, \dots, h)$ yra ilgos atminties parametrai, nusakantys, kaip lėtai gęsta autokoreliacijos (arba kitaip tariant, nusako atminties stiprumą).

Straipsnio autoriai Gegenbauer polinomus generuojančią funkciją

$$P(L) = \prod_{j=0}^h (1 - 2 \cos(\omega_j)L + L^2)^{d_j}$$

traukia į $GARCH$ modelio kintamumo lygtį.

$X_t = \mu_t + \varepsilon_t \equiv \mu_t + \sigma_t z_t$, kur μ_t yra sąlyginis X_t vidurkis, o z_t yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su nuliniu vidurkiu ir vienetine didspersija, o $\varepsilon_t | I_{t-1} \sim D(0, \sigma_t^2)$ su

sąlyginė dispersija σ_t^2 , I_{t-1} yra informacija iki momento $t-1$. Taigi, sąlyginio kintamumo dinamika yra nusakoma lygtimi

$$\sigma_t^2 = \gamma + \beta(L)\sigma_t^2 + \{1 - \beta(L) - P(L)\phi(L)\}\varepsilon_t^2. \quad (1.2.2.7)$$

Pabrėžiama, jog apibendrinti ilgos atminties filtrai gali būti pritaikyti bet kokio tipo *GARCH* struktūrai. Vis dėlto, *G-GARCH* modelis ne visada tinkamas. Autoriai susiduria su kintamumo teigiamumo problema, todėl siūlo taikyti logaritmines transformacijas. Vis dėlto, gautas modelis yra artimesnis *FIGARCH*, o ne *FIEGARCH* tipo modeliams. Panašiai, kaip ir *FIGARCH* modeliams, taip ir *G-GARCH* modeliams nėra įrodytas ir iširtas kovariacijos stacionarumas [1].

1.2.3. *LARCH* modeliai

Dar vienas *ARCH* tipo modelis yra tiesinis *ARCH* (*LARCH*) modelis, kurį pristatė Robinson (1991). Modelis apibrėžiamas taip:

$$r_t = \sigma_t \varepsilon_t, \sigma_t = \alpha + \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j r_{t-j}, \quad (1.2.3.1)$$

kur $\{\varepsilon_t, t \in Z\}$ yra n.v.p atsitiktinių dydžių seka su nuliniu vidurkiu ir baigtine dispersija, o koeficientai β_j tenkina

$$\beta_j \sim c j^{d-1}, \text{ kur } 0 < d < 1/2, c > 0.$$

LARCH modelio privalumas yra tas, kad jis leidžia modeliuoti ilgą atmintį ir tam tikras asimetrijas („svertas efektas“). Koeficientai α ir β_j gali įgyti tiek teigiamas, tiek neigiamas reikšmes, ir σ_t (ne σ_t^2) yra tiesinė praeities reikšmių r_t kombinacija. Pastebime, kad *LARCH* modelyje σ_t gali būti neigiamas ar nykstantis, todėl jam trūksta įprastos kintamumo interpretacijos. Vis dėlto, Koulikov (2003) nagrinėjo tam tikrą *LARCH* atvejį, su kuriuo galioja savybė $\sigma_t > 0$. Remiantis *LARCH* modelio išraiška, sąlyginė dispersija yra $Var(r_t | r_s, s < t) = \sigma_t^2$, kur

$$\sigma_t^2 = \left(\alpha + \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j r_{t-j} \right)^2 \quad (1.2.3.2)$$

yra kvadratu pakelta tiesinė reikšmių $r_s, s < t$ kombinacija.

LARCH modelio atveju stacionarus kovariacijų prasme r_t sprendinys egzistuoja tada ir tik tada, kai

$$b = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^2 \right\}^{1/2} < 1 \quad (1.2.3.3)$$

(čia tariama, kad $E\varepsilon_t^2 = 1$), ir tada sprendinys gali būti užrašytas konverguojančia Volterra eilute

$$r_t = \sigma_t \varepsilon_t, \sigma_t = \alpha \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^{\infty} \beta_{j_1} \dots \beta_{j_k} \varepsilon_{t-j_1} \dots \varepsilon_{t-j_1-\dots-j_k} \right) [6]. \quad (1.2.3.4)$$

2. GEGENBAUER-LARCH MODELIAI

2.1. Vieno faktoriaus Gegenbauer-LARCH modelis

Remdamiesi anksčiau sukurtais modeliais ir jų savybėmis, sudarėme modelį, kuris yra paremtas *LARCH* struktūra ir [1] idėja įtraukti Gegenbauer filtrą į kintamumo lygtį. Savo naująjį modelį pavadino *Gegenbauer-LARCH* modeliu.

Gegenbauer-LARCH modelis su periodiškumu, pasireiškiančiu viename dažnyje, atrodo taip:

$$r_t = \mu_t + a_t \equiv \mu_t + \sigma_t \varepsilon_t, \quad (2.1.1)$$

r_t yra tam tikrų finansinių instrumentų gražos, μ_t yra sąlyginis r_t vidurkis, ε_t yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su nuliniu vidurkiu ir pastovia dispersija σ_ε , o $a_t | I_{t-1} \sim D(0, \sigma_t^2)$ su sąlygine dispersija σ_t^2 , I_{t-1} yra informacija iki momento $t-1$. Sąlyginės dispersijos dinamika laike yra aprašoma žemiau pateikta lygtimi:

$$\sigma_t^2 = \left(\alpha + \sum_{j=1}^{\infty} C_j^{(d)}(\nu) r_{t-j} \right)^2, \quad (2.1.2)$$

čia $C_j^{(d)}(\nu)$ yra Gegenbauer polinomi, kurių reikšmės apskaičiuojamos pagal formules (1.2.2.2) arba (1.2.2.3), d yra ilgos atminties parametras, $\nu = \cos(\omega)$ yra periodiškumo parametras, ω yra dažnis randamas iš spektrinio tankio arba periodogramos. Šio modelio privalumas yra tas, kad kartu aprašoma proceso ilga atmintis ir periodiniai svyravimai. Be to, yra užtikrinamas dispersijos σ_t^2 teigiamumas, o parametrų α ir $C_j^{(d)}(\nu)$ reikšmės gali būti tiek teigiamos, tiek ir neigiamos.

2.2 Vieno faktoriaus Gegenbauer-LARCH modelio stabilumo sąlygos tikrinimas

Remiantis *LARCH* modelių savybėmis, modelis bus stacionarus kovariacijų prasme, jei

$$\sum_{j=1}^{\infty} C_j^{(d)}(\nu)^2 < 1. \quad (2.2.1)$$

Šią nelygybę mūsų modelio atveju įrodysime remdamiesi ortogonalium polinomų savybėmis. Taikysime nelygybę, paimtą iš [11]:

$$|C_j^{(d)}(\cos \omega)| < 2^{1-d} \frac{j^{d-1}}{(\sin \omega)^d \Gamma(d)}, (0 < d < 1, 0 < \omega < \pi), \quad (2.2.2)$$

čia $C_j^{(d)}(\cos \omega)$ yra Gegenbauer polinomiali. Gauname, kad

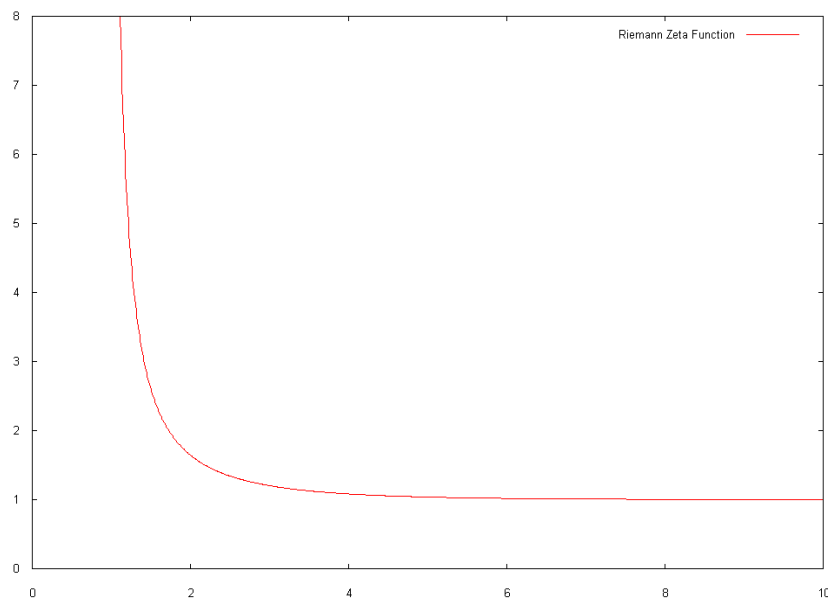
$$(C_j^{(d)}(\cos \omega))^2 < \left(2^{1-d} \frac{j^{d-1}}{(\sin \omega)^d \Gamma(d)} \right)^2 \quad (2.2.3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (C_j^{(d)}(\cos \omega))^2 < \frac{2^{2(1-d)}}{(\sin \omega)^{2d} (\Gamma(d))^2} \sum_{j=1}^{\infty} j^{2(d-1)}$$

Tam, kad Dirichlet eilutė $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^s}$ konverguotų, s turi būti daugiau už vieneta. Mūsų turima

$$\text{eilutė } \sum_{j=1}^{\infty} j^{2(d-1)} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{2(1-d)}} \text{ konverguos, kai } 2(1-d) > 1, \text{ tai yra, kai } d < \frac{1}{2}.$$

Suma $\zeta(2(1-d)) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{2(1-d)}}$ yra Riemann'o Zeta funkcija, kurios reikšmių sritis yra $(1; \infty)$:



2.2.1 pav. Riemann'o Zeta funkcija

Reiškinys $\frac{2^{2(1-d)}}{(\sin \omega)^{2d} (\Gamma(d))^2} \sum_{j=1}^{\infty} j^{2(d-1)}$ gali įgyti tiek mažesnes, tiek didesnes už vieneta

teigiamas reikšmes. Tai priklauso nuo parametrų d ir ω reikšmių. Esant d artimiems $\frac{1}{2}$, Zeta funkcija įgyja dideles reikšmes, todėl tikėtina, kad su bet koku ω visas reiškinys bus didesnis už vieneta. Kai $d=0$, Zeta funkcijos reikšmė yra apytiksliai lygi 1.64493 ([11], 811 psl. lentelė). Jei

d yra artimas nuliui, tai ω taip pat gali įgyti labai mažas artimas nuliui reikšmes, kad reiškinys

$$\frac{2^{2(1-d)}}{(\sin \omega)^{2d} (\Gamma(d))^2} \sum_{j=1}^{\infty} j^{2(d-1)} \text{ vis dar būtų mažesnis už vienetą.}$$

Taigi, norint įsitikinti, kad yra tenkinama modelio stacionarumo sąlyga, reikia parametrų d ir ω reikšmes įsistatyti į reiškinį $\frac{2^{2(1-d)}}{(\sin \omega)^{2d} (\Gamma(d))^2} \sum_{j=1}^{\infty} j^{2(d-1)}$ ir patikrinti, ar jis yra mažesnis už vienetą.

Pavyzdžiui, kelioms skirtingoms d reikšmėms pateikiame apytikslius skaičiavimus, kokie turėtų būti ω , kad reiškinys $\frac{2^{2(1-d)}}{(\sin \omega)^{2d} (\Gamma(d))^2} \sum_{j=1}^{\infty} j^{2(d-1)}$ būtų mažesnis už vienetą.

$$\text{Kai } d=0.1, \text{ tai } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-2(d-1)}} \approx 1.88223 \Rightarrow \omega \in \left[\frac{32}{100000} \pi; \pi \right).$$

$$\text{Kai } d=0.2, \text{ tai } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-2(d-1)}} \approx 2.2857 \Rightarrow \omega \in \left[\frac{32}{1000} \pi; \pi \right).$$

$$\text{Kai } d=0.3, \text{ tai } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-2(d-1)}} \approx 3.10555 \Rightarrow \omega \in \left[\frac{336}{1000} \pi; \pi \right].^2$$

Pasirinktas įrodymo būdas leidžia patikrinti, ar mūsų sudarytas modelis gali būti stacionarus kovariacijų prasme.

2.3. Apibendrintas Gegenbauer-LARCH modelis

Praktikoje finansinėse laiko eilutėse periodiškumai gali pasireikšti ne viename, o keliuose skirtinguose dažniuose. Tokia savybė pastebima pažvelgus į proceso spektro grafiką arba periodogramą, kurioje gali būti vienas arba daugiau pikų nenuliniame dažnyje. Be to, autokoreliacinės funkcijos dažniausiai turi lėtai gęstantį banguojantį pavidalą, o tai taip pat yra signalas apie periodinius svyravimus. Norėdami aprašyti periodiškumus keliuose skirtinguose dažniuose, praplečiame vieno faktoriaus *Gegenbauer-LARCH* modelio sąlyginės dispersijos lygtį. Turime tokį h -faktorių *Gegenbauer-LARCH* modelio pavidalą:

$$r_t = \mu_t + a_t \equiv \mu_t + \sigma_t \varepsilon_t, \text{ kur} \tag{2.3.1}$$

² Zeta funkcijų reikšmės konkreitiems parametrms suskaičiuotos naudojant matematiniams skaičiavimams skirtą programą *Mathematica*.

$$\sigma_t^2 = \left(\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{1 \leq j_1, \dots, j_h \leq n \\ j_1 + \dots + j_h = n}} C_{j_1}^{(d_1)}(\nu_1) \cdots C_{j_h}^{(d_h)}(\nu_h) r_{t-n} \right)^2 \quad (2.3.2)$$

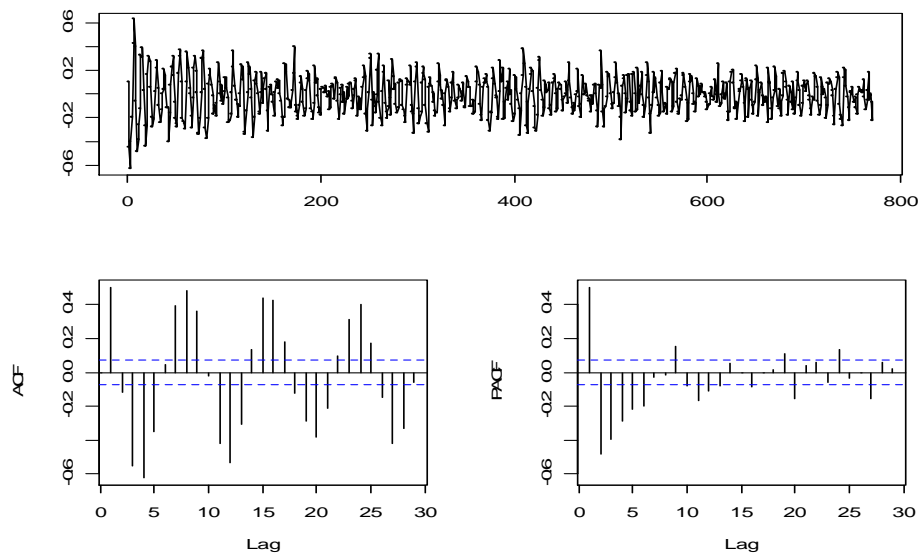
čia $C_{j_i}^{(d_i)}(\nu_i), i=1, \dots, h$ yra Gegenbauer polinomialai, $d_i, i=1, \dots, h$ yra ilgos atminties stiprumą matuojantys parametrai, $\nu_i = \cos(\omega_i), i=1, \dots, h$ yra periodiškumo parametrai, $\omega_i, i=1, \dots, h$ yra dažniai parenkami iš spektrinio tankio arba periodogramos, L yra vėlinimo operatorius toks, kad $L^p X_t = X_{t-p}$.

Galima patikrinti apibendrinto *Gegenbauer-LARCH* modelio stacionarumo sąlygą. Įrodymas yra techniškai ir šiame darbe nėra pateikiamas.

2.4. Gegenbauer-LARCH procesų modeliavimas

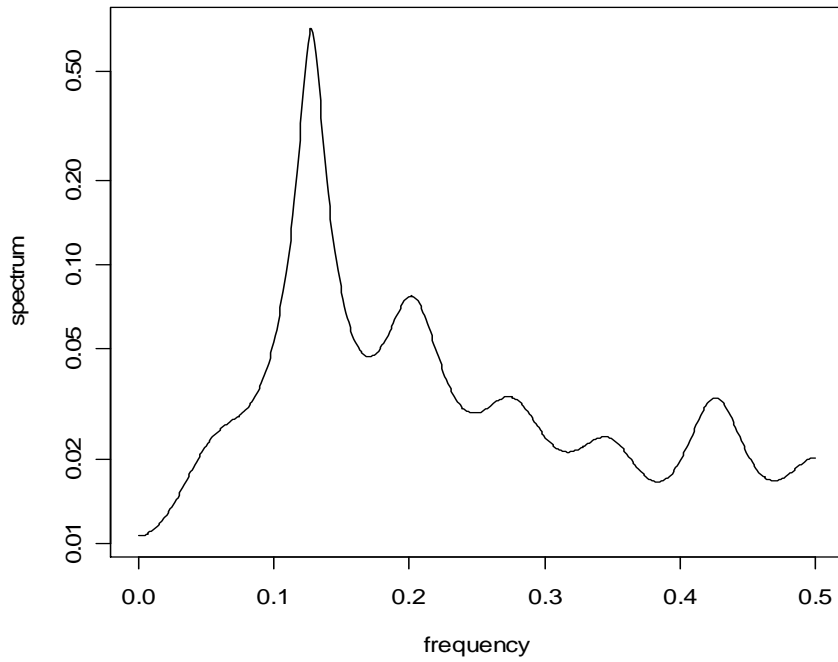
Pateikiame keletą skirtingų generuotų *Gegenbauer-LARCH* procesų trajektorijų.

Gegenbauer-LARCH procesas su periodiškumu pasireiškiančiu viename dažnyje, ilgos atminties parametru $d = 0.2$ ir periodiškumo parametru $\nu = 0.7$ atrodo taip:



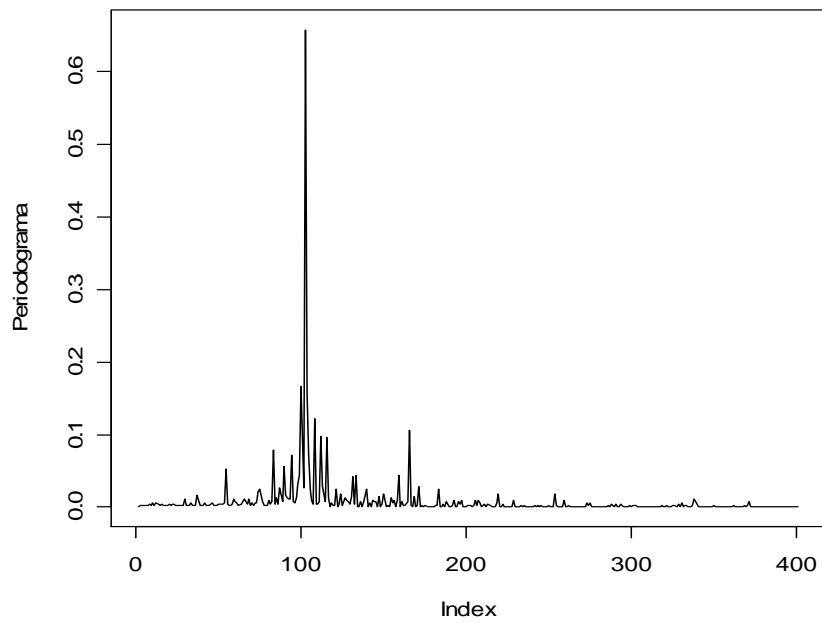
2.4.1 pav. Vieno faktoriaus *Gegenbauer-LARCH* proceso trajektorija, jos autokoreliacinė bei dalinė autokoreliacinė funkcija.

Spektrinis šio proceso tankis turi piką dažnyje 0.1265, kas atitinka maždaug 8 laiko vienetų periodiškumą. Pavyzdžiui, tai galėtų būti 8 minučių ar dienų periodiškumas, pasireiškiantis minutiniuose ar valandiniuose stebėjimuose.



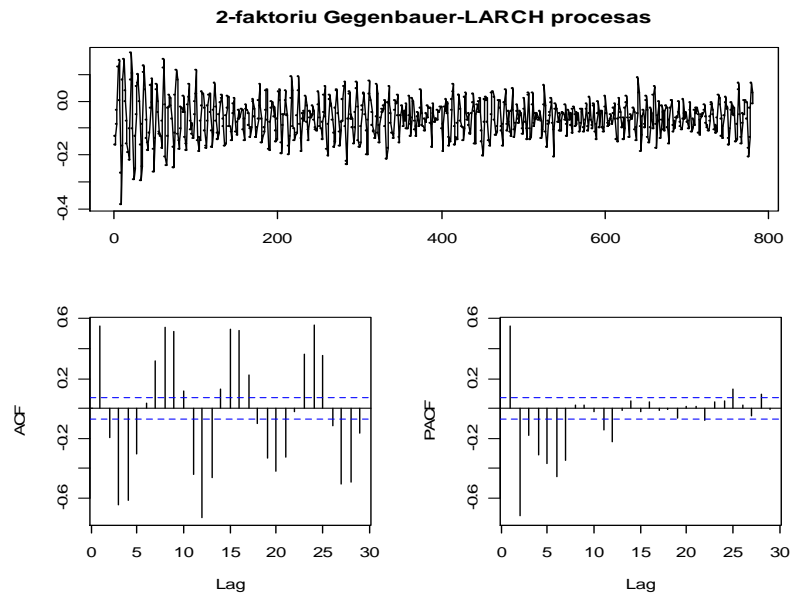
2.4.2 pav. Vieno faktoriaus *Gegenbauer-LARCH* proceso spektrinis tankis.

Periodogramoje matome ryškų piką:



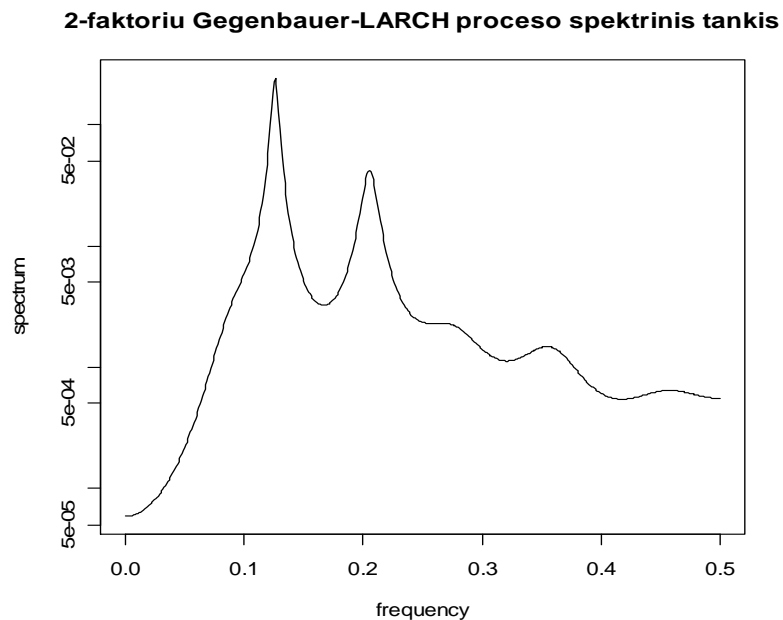
2.4.3 pav. Vieno faktoriaus *Gegenbauer-LARCH* proceso periodograma.

Gegenbauer-LARCH procesas su periodiškumais pasireiškiančiais dviejuose dažniuose, ilgos atminties parametrais $d_1 = 0.45, d_2 = 0.4$ bei periodiškumo parametrais $\nu_1 = 0.7, \nu_2 = 0.3$ atrodo taip:



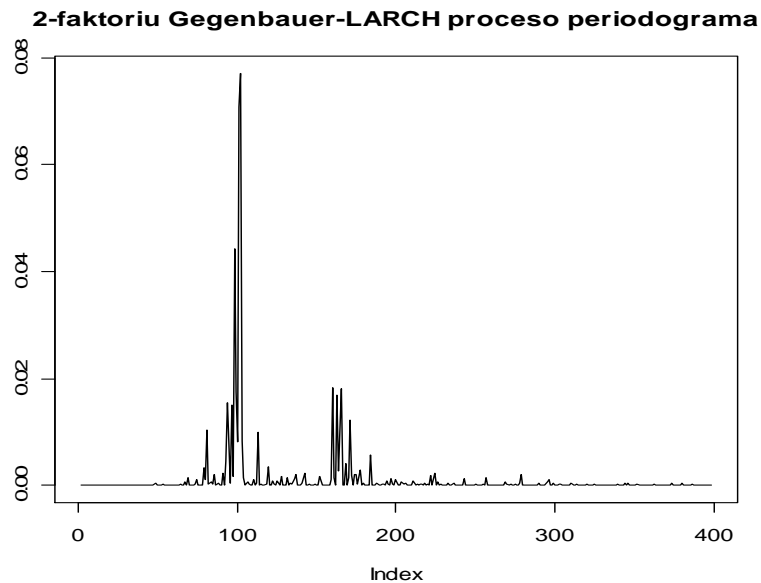
2.4.4 pav. Dviejų faktorių *Gegenbauer-LARCH* proceso trajektorija, jos autokoreliacinė bei dalinė autokoreliacinė funkcija.

Spektrinis 2-jų faktorių *Gegenbauer-LARCH* proceso tankis turi du pikus dažniuose 0.126 ir 0.2, kas atitinka maždaug 8 ir 5 laiko vienetų periodiškumą.



2.4.5 pav. Dviejų faktorių *Gegenbauer-LARCH* proceso spektrinis tankis.

Periodogramoje taip pat matome du ryškius pikus:



2.4.6 pav. Dviejų faktorių Gegenbauer-LARCH proceso periodograma.

Abiem atvejais simuliuoti procesai pasižymi periodiniu elgesiu (matyti tiek iš procesų periodogramų grafikų, tiek iš banguojančio autokoreliacinių funkcijų pavidalo).

2.5 Modelio vertinimas

Gegenbauer-LARCH modelio pritaikymas finansinėms laiko eilutėms gali būti atliktas tokiais žingsniais: i) sąlyginio vidurkio pašalinimas iš duomenų; ii) modelio struktūros identifikavimas; iii) parametrinės struktūros įvertinimas; iv) modelio adekvatumo duomenų atžvilgiu diagnozavimas.

Sąlyginio vidurkio priklausomybė gali būti pašalinta pritaikius, pavyzdžiui, *ARMA* modelį gražų eilutei r_t . *Gegenbauer-LARCH* modelis toliau būtų konstruojamas paklaidoms $e_t = r_t - \hat{\mu}_t$. Jei r_t yra nekoreliuotos, šis žingsnis nėra reikalingas [1].

Kitame žingsnyje *Gegenbauer-LARCH* modelio struktūra yra identifikuojama pagal transformuotų gražų eilučių autokoreliacinės funkcijos ir periodogramos pavidalą. Būtent, dažniai ω_j yra kalibruojami *a priori* pagal transformuotų (pvz., kvadratinių) duomenų periodogramą [1].

Nežinomų modelio parametrų vektorius vertinamas maksimizuojant kvazi-log-tikėtinumo funkciją (šis būdas yra plačiai taikomas *GARCH* literatūroje) [1]. Tardami, kad inovacijos $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ turi sąlyginę Gauso pasiskirstymą, apibrėžiame sąlyginę log-tikėtinumo funkciją:

$$\max_{\theta} \rightarrow l(\theta | r_1, \dots, r_T) \approx \sum_{t=1}^T l(r_t | I_{t-1}, \theta) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left[\ln(\sigma_t^2) + \frac{(r_t - \hat{\mu}_t)^2}{\sigma_t^2} \right], \quad (2.5.1)$$

čia σ_t^2 yra apibrėžtas *Gegenbauer-LARCH* modelyje [1].

Deja, kvazi-didžiausio tikėtinumo įverčių ilgos atminties modeliuose suderinamumo bei pasiskirstymo teorija nėra formaliai įrodyta net asimptotiškai. Siūloma įverčių standartines paklaidas ieškoti pagal:

$$\hat{\theta}_n \sim \left(\theta_0, n^{-1} A(\hat{\theta}_n)^{-1} B(\hat{\theta}_n) A(\hat{\theta}_n)^{-1} \right), \quad (2.5.2)$$

kur θ_0 yra tikrųjų parametrų vektorius, o $A(\cdot)$ ir $B(\cdot)$ yra atitinkamai didžiausio tikėtinumo funkcijos Hessianas ir gradientas [1].

Mūsų modelyje ieškomi nežinomi parametrai yra ilgos atminties stiprumą matuojantys parametrai $d_i, i=1, \dots, h$. Kaip jau minėta anksčiau, dažniai ω_j yra nustatomi pagal periodogramos ar/ir spektrinio tankio pavidalą.

2.6. *LUDE* algoritmas

Nežinomus modelio parametrus vertinsime didžiausio tikėtinumo metodu. Tam, kad rastume parametrų įverčius, turime maksimizuoti log-tikėtinumo funkciją. Jos maksimizavimui taikysime *LUDE* algoritmą.

LUDE algoritmas randa netiesinės tikslo funkcijos su N sprendinių globalų optimumo tašką. Vieninteliai apribojimai ieškomiems parametrams yra apatiniai ir viršutiniai rėžiai galimoms parametrų reikšmėms:

$$x \in X = \left\{ x \mid x \in \mathbb{R}^N, x^{lo} \leq x \leq x^{up} \right\},$$

čia x yra N -matis parametrų vektorius, x^{lo} , x^{up} yra apatiniai ir viršutiniai rėžiai. Tikslo funkciją žymėsime $f(x)$.

Algoritmą pradėdame L galimų sprendinių populiacijos generavimu. Sprendiniai generuojami tariant, kad kiekvienas kintamasis yra pasiskirstęs tolydžiai savo galimų reikšmių intervale. Tokiu atveju turėsime $N \times L$ matavimų matricą-galimų sprendinių aibę:

$$\begin{pmatrix} x_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{1L} \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ x_{N1} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{NL} \end{pmatrix}.$$

Užrašysime detalų *LUDE* algoritmą. Dėl bendrumo laikysime, kad šis algoritmas padeda minimizuoti tikslo funkciją f . Pasirenkame maksimalų iteracijų skaičių $mxiter$ ir priskiriame iteracijų skaičių $iter=0$. Tuomet:

1. Generuojama L sprendinių populiacija $x_i, i = 1, \dots, L$.
2. Iteracijų skaičius padidinamas 1, $iter = iter + 1$.
3. Kiekvienam sprendiniui suskaičiuojama tikslo funkcija $f(x_i), i = 1, \dots, L$. Sprendiniai išrikiuojami tikslo funkcijos mažėjimo tvarka: x_1, x_2, \dots, x_L , kur x_i eina prieš x_j , jei $f(x_i) > f(x_j), i, j = 1, \dots, L$.

4. Taikomas taip vadinamas „*crossover*“ operatorius:

FOR $i=1, \dots, L-1$

$x_{i,new} = x_i + r(x_{i+1} - x_i)$, kur r yra atsitiktinis skaičius tarp 0 ir 1

if $f(x_{i,new}) < f(x_{i+1})$ then $x_i = x_{i,new}$

END

5. Sprendiniai vėl išrikiuojami tikslo funkcijos mažėjimo tvarka: x_1, x_2, \dots, x_L , kur x_i eina prieš x_j , jei $f(x_i) > f(x_j), i, j = 1, \dots, L$.

6. Taikomas mutacijos operatorius:

FOR $i=1, \dots, L$

$p_{m,i} = \frac{L-i+1}{L}$

FOR $j=1, \dots, N$

Generuojamas atsitiktinis skaičius r tarp 0 ir 1

IF $r < p_{m,i}$

Generuojamas binarinis atsitiktinis dydis b ir atsitiktinis skaičius r tarp 0 ir 1

IF $b=0$ THEN $x_{i,new}(j) = x_i(j) + (x^{up}(j) - x_i(j))re^{-2*iter/mxiter}$

IF $b=1$ THEN $x_{i,new}(j) = x_i(j) - (x_i(j) - x^{lo}(j))re^{-2*iter/mxiter}$

END

END

IF $f(x_{i,new}) < f(x_i)$ THEN $x_i = x_{i,new}$

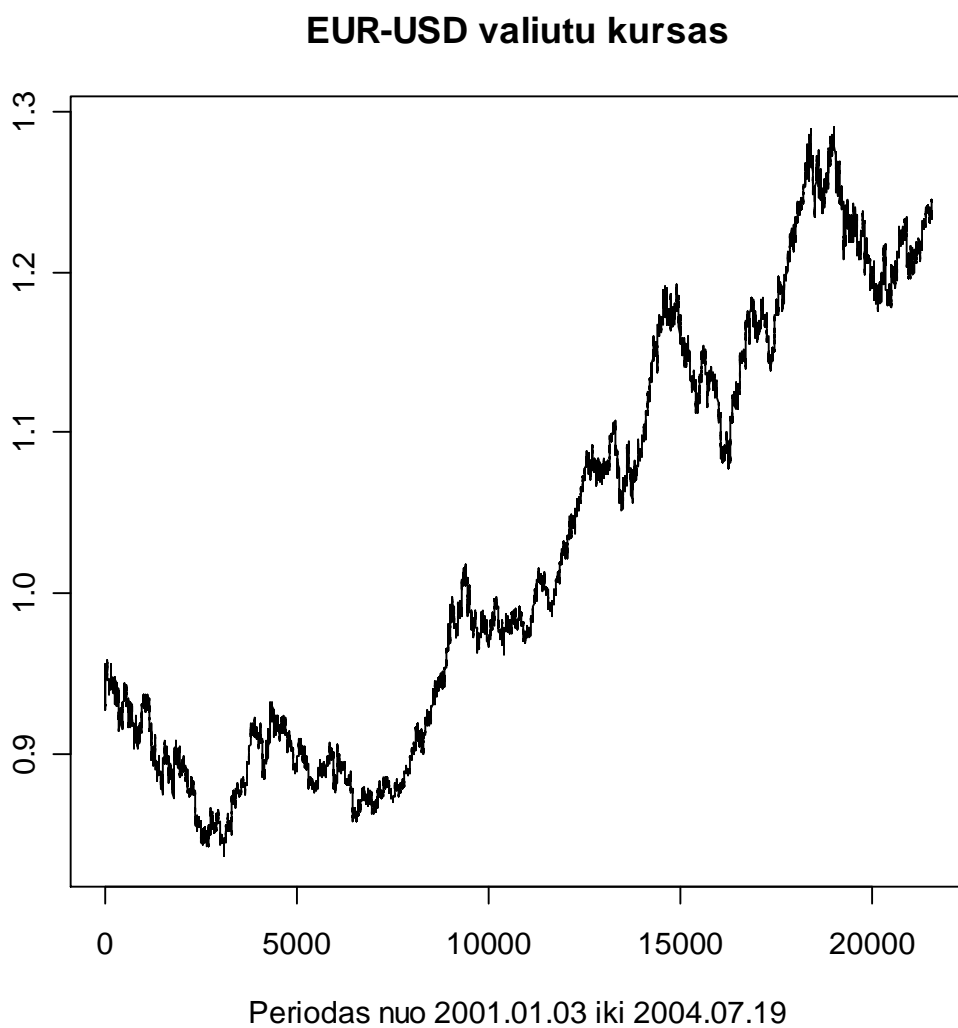
END

7. Jei iteracijų skaičius pasiekia maksimalų (*mxiter*), grąžinami rezultatai. Kitu atveju grįžtama prie antro žingsnio. [12]

3. PERIODINĖS ILGOS ATMINTIES STRUKTŪROS EURO-DOLERIO VALIUTŲ KURSUOSE MODELIAVIMAS

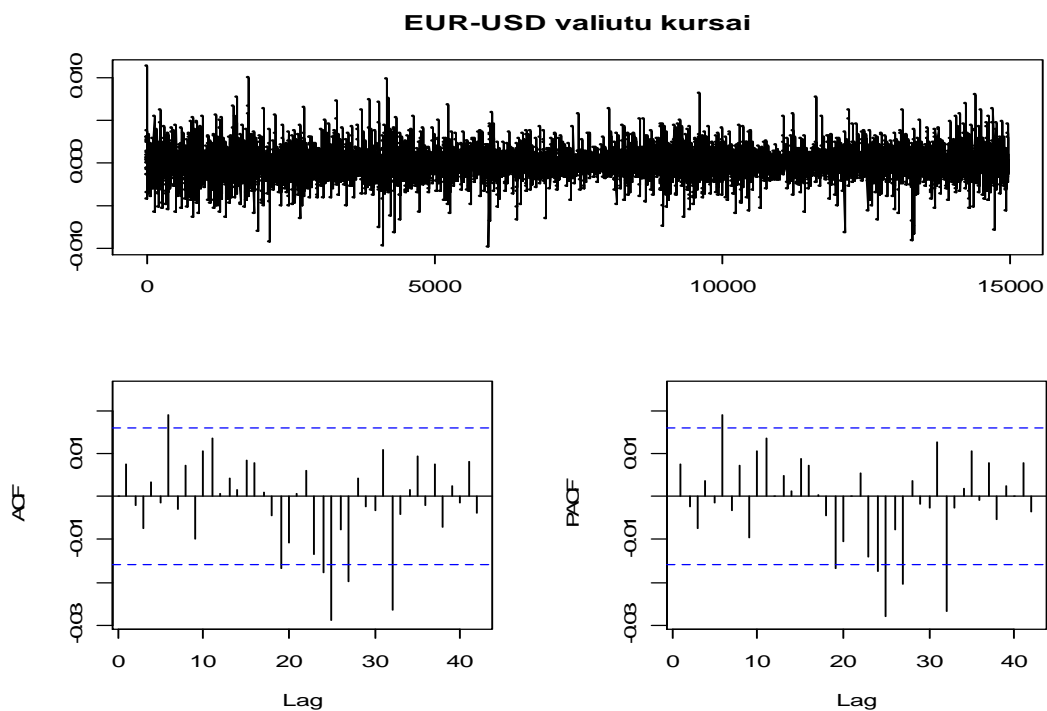
Gegenbauer-LARCH modelį praktiškai taikome Euro-Dolerio transformuotoms grąžų eilutėms modeliuoti.

Turimi duomenys apima periodą nuo 2001-01-03 iki 2004-07-19. Stebimi valandiniai Euro-Dolerio kursai. Laiko eilutės ilgis $T=14960$. Originalios laiko eilutės dinamika laike atrodo taip:



3. 1 pav. Euro-Dolerio valiutų kurso dinamika laike.

Toliau nagrinėjame valiutų kursų grąžas. Pateikiame Euro-Dolerio valiutų kurso grąžų, autokoreliacinės (*ACF*) ir dalinės autokoreliacinės (*PACF*) funkcijų grafikus.

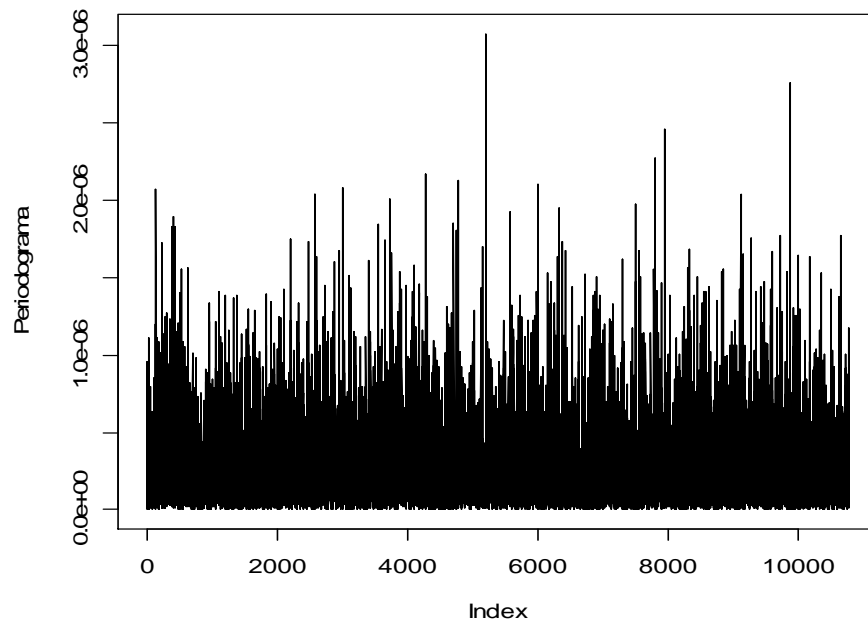


3.2 pav. Euro-Dolerio valiutų kurso, autokoreliacinės bei dalinės autokoreliacinės funkcijų grafikas.

Gražų laiko eilučių autokoreliacinės funkcijos grafike matyti keletas reikšmingų pavėlinimų (kertančių brūkšninę liniją). Vis dėlto, laikome, kad gražų eilutės nėra koreliuotos ir netaikome jokio modelio sąlyginiam vidurkiui aprašyti³.

Gražų eilučių periodogramoje (3.3 pav.) nėra stipriai išsiskiriančių pikų, kas leistų įtarti, jog duomenims būdingas periodinis elgesys:

³ Taikėme autoregresinį slenkančio vidurkio modelį, kad pašalintume reikšmingus pavėlinimus, tačiau tai neturėjo įtakos mūsų tolimesniems rezultatams.



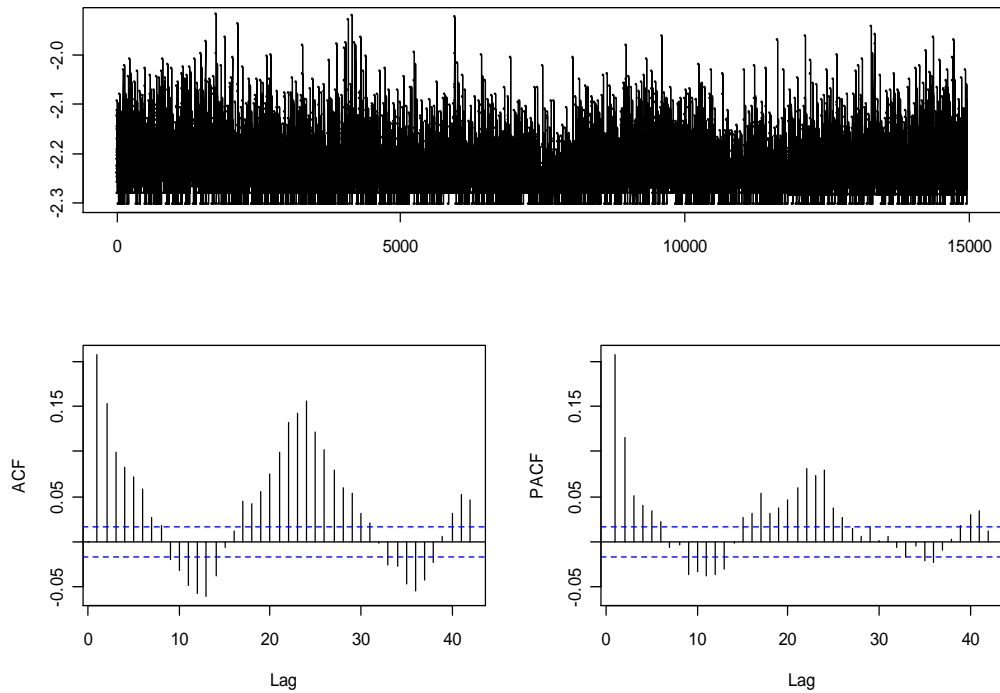
3.3 pav. EUR-USD valiutų kurso gražų periodograma

Kita vertus, transformuoti finansiniai duomenys dažniausiai yra priklausomi, todėl savo gražų eilutėms pritaikome tokią transformaciją:

$$\tilde{r}_t = \ln\left(|r_t|^{2/3} + 0.1\right), t = 1, \dots, T^4 \quad (3.1)$$

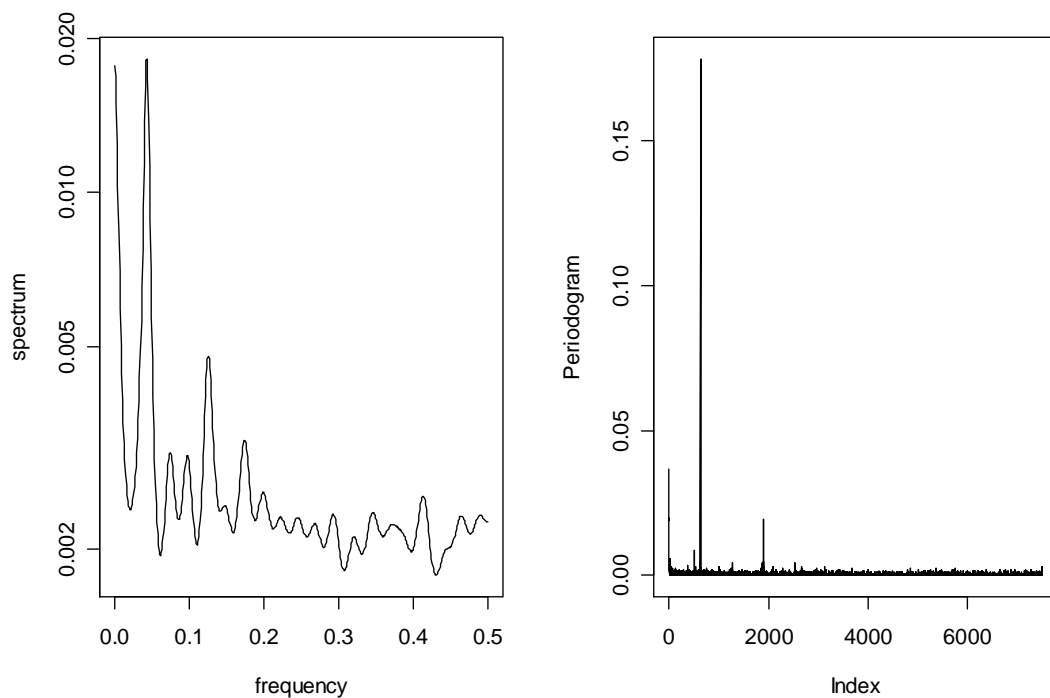
Kaip ir tikėtasi, transformuotos gražų eilutės yra koreliuotos, be to, autokoreliacinės funkcijos grafikas rodo lėtai gėstančius periodinius svyravimus, panašiai kaip ir antrame skyriuje generuoti procesai:

⁴ Logaritmines transformacijas ėmėme, kad neapriboti duomenų tikrai teigiamomis reikšmėmis. Konstantą 0.1 pridėjome, kad logaritmas turėtų prasmę, nes gražų duomenyse yra reikšmių lygių nuliui. Laipsnį, kuriuo pakėlėme absoliutines gražų eilutes, pasirinkome taip, kad nagrinėjamos duomenų savybės (periodinis elgesys, koreliuotumas) atsispindėtų ryškiausiai.



3.4 pav. EUR-USD valiutų kurso transformuotų gražų, autokoreliacinės ir dalinės autokoreliacinės funkcijų grafikai

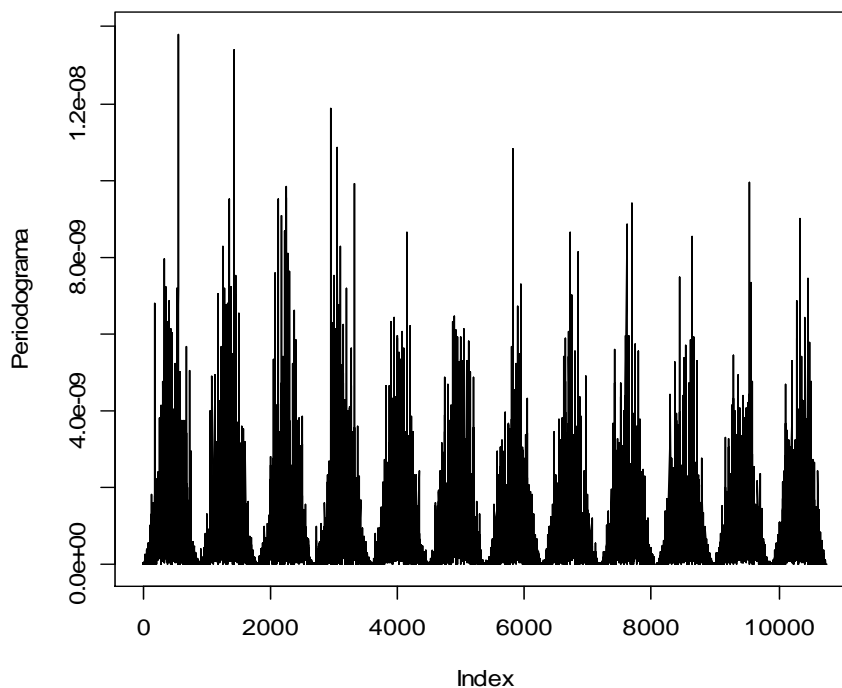
Pažvelkime į (3.5 pav.), kaip atrodo transformuotų duomenų spektrinis tankis ir periodograma:



3.5 pav. Transformuotų EUR-USD valiutų kurso gražų spektrinis tankis (kairėje) ir periodograma.

Spektrinis tankis ir periodograma turi ryškius pikus koordinatų pradžioje ir tam tikruose dažniuose. Šie požymiai leidžia įtarti, jog duomenys turi periodinę ilgą atminties struktūrą. Ryškiausi pikai yra išsidėstę dažniuose $f_1 = 0, f_2 = 0.0416, f_3 = 0.125^5$, kurie atitinkamai žymi tradicinę ilgą atminties komponentę ir dvi galimas ilgą atminties periodines komponentes, atitinkančias 24 ir 8 valandų periodinius svyravimus. Šie periodiniai svyravimai sutampa ir su tais, kuriuos matome autokoreliacinės funkcijos grafike.

Matydami akivaizdžius dieninius svyravimus, išbandome sezoninį diferencijavimą. (3.4 pav.) yra pavaizduota nusezonintų eilučių $(1-L^{24})\tilde{r}_t$ periodograma. Gilūs kritimai ties nuliu ir sezoniniai dažniai duoda suprasti apie galimą duomenų perdiferencijavimą (angl. *over-differencing*) [1], todėl šis būdas yra atmetamas.



3.6 pav. $(1-L^{24})\tilde{r}_t$ duomenų periodograma

Toliau taikome *Gegenbauer-LARCH* modelį transformuotoms gražų eilutėms. Kadangi pritaikėme logaritmines transformacijas, užrašysime, kaip dabar atrodo taikomas modelis:

⁵ Reikia pažymėti, kad spektrinio tankio grafike dažniai yra normalizuoti, kas radianų terminais reiškia $\omega = 2\pi f$, taigi mūsų modelyje $\omega_1 = 0, \omega_2 = 2\pi 0.0416, \omega_3 = 2\pi 0.125$.

$$\tilde{r}_t \approx \ln|\sigma_t|^{2/3} + \ln|\varepsilon_t|^{2/3} - \frac{1}{3}E[\ln(\varepsilon_t^2)] + \frac{1}{3}\tau, \quad (3.2)$$

čia $\tau = E[\ln(\varepsilon_t^2)]$, kurio reikšmė priklauso nuo triukšmo skirstinio. Standartinio normaliojo skirstinio atveju $\tau = -1.27$ [1].

Gražos kintamumas $\ln|\sigma_t|^{2/3} = \tilde{\sigma}_t$ toliau modeliuojamas pagal *Gegenbauer-LARCH* modelio kintamumo struktūrą:

$$\tilde{\sigma}_t^2 = \left(\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{1 \leq j_1, \dots, j_h \leq n \\ j_1 + \dots + j_h = n}} C_{j_1}^{(d_1)}(v_1) \cdots C_{j_h}^{(d_h)}(v_h) \tilde{r}_{t-n} \right)^2. \quad (3.3)$$

Remdamiesi anksčiau išdėstytais samprotavimais, transformuotoms gražų eilutėms identifikuojame *Gegenbauer-LARCH* modelį:

$$\tilde{\sigma}_t^2 = \left(\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{1 \leq j_1, j_2, j_3 \leq n \\ j_1 + j_2 + j_3 = n}} C_{j_1}^{(d_1)}(v_1) C_{j_2}^{(d_2)}(v_2) C_{j_3}^{(d_3)}(v_3) \tilde{r}_{t-n} \right)^2, \quad (3.4)$$

kur $\omega_1 = 0, \omega_2 = 2\pi 0.0416, \omega_3 = 2\pi 0.125$.

Parametrų α, d_1, d_2, d_3 vertinimui taikome 2.6 skyriuje aprašytą *LUDE* algoritmą, kuris maksimizuoja (2.5.1) didžiausio tikėtinumo funkciją. Taigi, parametrų įverčiai yra tokie:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= 0.000179 \\ \hat{d}_1 &= 0.066733 \\ \hat{d}_2 &= 0.085717 \\ \hat{d}_3 &= 0.034599 \end{aligned}$$

Gautus parametrų įverčius įsistatome į kintamumo (3.4) lygtį ir įvertiname $\tilde{\sigma}_t$. Modelio liekanas randame iš $\tilde{\varepsilon}_t \approx \tilde{r}_t - \tilde{\sigma}_t - \frac{1}{3}\tau$, kur $\tilde{\varepsilon}_t = \ln|\varepsilon_t|^{2/3} - \frac{1}{3}E[\ln(\varepsilon_t^2)]$. (3.7 pav.) pateikti atitinkamai modelio liekanų ir *ACF* grafikai. Vizualiai liekanos svyruoja apie nulį, tačiau reikia patikrinti, ar jų vidurkis statistiškai reikšmingai nesiskiria nuo nulio. Tam taikome *t-testą*:


```

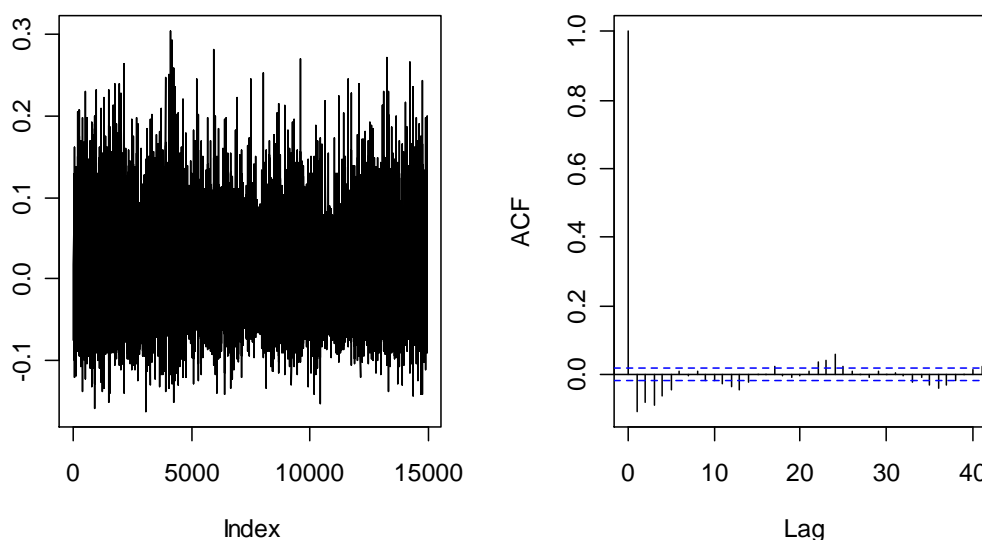
One Sample t-test
data: liek
t = 9.491, df = 14955, p-value < 2.2e-16
alternative hypothesis: true mean is not equal to 0
mean of x
0.004119479

```

Atsižvelgiant į p -reikšmę, kuri yra mažesnė už kritinį reikšmingumo lygmenį 0.05, negalime priimti nulinės hipotezės, jog liekanos vidutiniškai yra lygios nuliui.

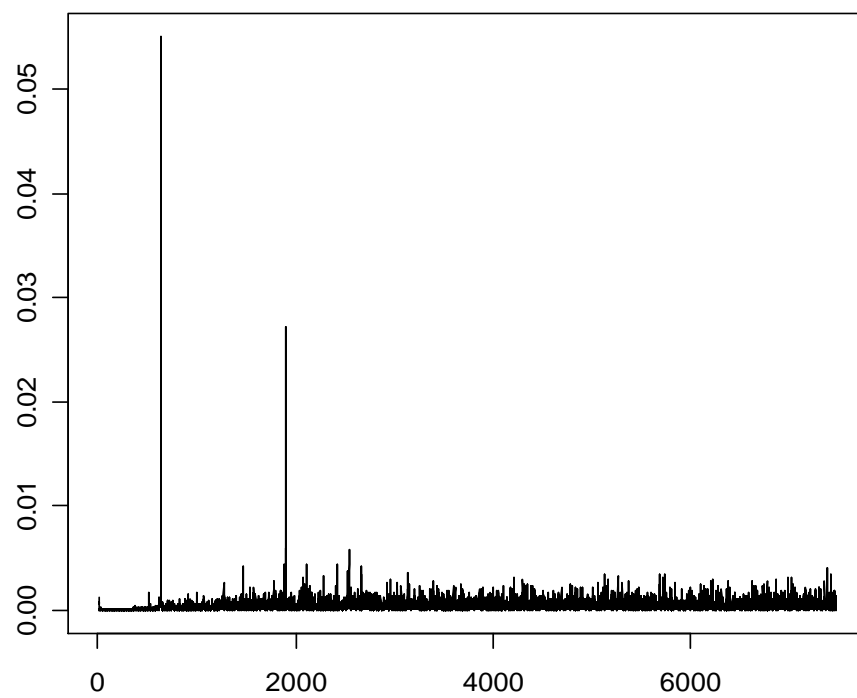
Toliau tikriname liekanų charakteristikas, kuriomis remiantis, nuspręsimė, ar modelis tinkamai aprašo turimus duomenis. Autokoreliacinės funkcijos grafikas rodo, kad liekanos vis dar koreliuoja. Be to, matomi nežymūs periodiniai svyravimai. Norint įsitikinti, ar modelis sugebėjo tinkamai aprašyti ilgus atminties periodinius svyravimus duomenyse, reikia išbrėžti periodogramą modelio liekanoms. (3.8 pav.) yra liekanų periodograma, kurioje vis dar akivaizdūs pikai dažniuose $\omega_2 = 2\pi 0.0416, \omega_3 = 2\pi 0.125$.

Nors modelis gerai išryškina charakteringus duomenų bruožus, tačiau liekanų analizė atskleidė, jog modelis yra tobulintinas. Kadangi turimi duomenys nėra pakankamai tiksliai aprašyti, modelio taikymas prognozėms gali būti netikslus.⁶



3.7 pav. Įvertinto modelio liekanų (kairėje) ir autokoreliacinės funkcijos grafikas.

⁶ *Gegenbauer-LARCH* modelis buvo taikytas ir kitiems valiutų kursų svyravimas aprašyti, tačiau rezultatai buvo panašūs į čia išdėstytus.



3.8 pav. Įvertinto modelio liekanų periodograma

IŠVADOS

Darbe siekta aprašyti periodinį ilgą atminties finansinių laiko eilučių elgesį. Remiantis anksčiau sukurtais modeliais, pasiūlytas h -faktorių *Gegenbauer-LARCH* modelis, kuris į *LARCH* tipo procesą įtraukia apibendrintą ilgą atminties filtrą, paremtą Gegenbauer polinomais.

Be to, vieno faktoriaus *Gegenbauer-LARCH* modeliui nagrinėta kovariacijos stacionarumo sąlyga. Gauta, jog su tam tikromis, bet ne visomis galimomis modelio parametrų reikšmėmis, siūlomas procesas yra stacionarus kovariacijų prasme.

Sudarytas modelis taikytas Euro-Dolerio valiutų kurso transformuotoms gražų eilutėms aprašyti. Įvertintas identifikuotas modelis ir atlikta jo adekvatumo analizė. Nors modelis gerai išryškina charakteringus duomenų bruožus, tokius kaip ryškūs pikai periodogramoje, lėtai gėstančios banguojančios autokoreliacijos, tačiau liekanų analizė atskleidė, jog modelis yra tobulintinas. Bordignon, Caporin, Lisi siūlo vertinant modelį įtraukti daugiau dažnių, nei matyti periodogramoje, nes aukštesnį dažnį atitinkantys periodiškumai gali būti nepastebimi iš duomenų autokoreliacinių funkcijų ir periodogramų grafikų. Norint pagerinti modelį, įtraukiant didesnį dažnių skaičių, susidūrėme su kompiuterio pajėgumų problema. Esamo modelio papildymas autoregresiniais nariais geresnių rezultatų nedavė.

Reziumuojant, *Gegenbauer-LARCH* modelis yra naujas ir turėtų būti įdomus praktikams, tačiau tiek teorinės savybės, tiek praktinio taikymo galimybės dar turi būti toliau studijuojamos.

LITERATŪROS SĄRAŠAS

1. Bordinon, S., Caporin, M., Lisi, F., (2006), Generalised long-memory GARCH models for intra-daily volatility, *J. Computational Statistics & Data Analysis*.
2. Surgailis, D., (2007), A Quadratic ARCH(∞) model with long memory and Levy stable behavior of squares, Institute of Mathematics and Information, Vilnius.
3. Giraitis, L., Leipus, R., Robinson, P.M. and Surgailis, D., (2004), LARCH, leverage and long memory, *J. Financial Econometrics* 2, 177-210.
4. Bouette, J.-Ch., Chassagneux, J.-F., Sibai, D., Terron, R., Charpentier, A., (2006), Wind in Ireland: long memory or seasonal effect, *preprint*.
5. Tsay, S.R., (2002), Analysis of financial time series, *John Wiley & Sons, Inc.*
6. Giraitis, L., Leipus, R., Surgailis, D., Recent Advances in ARCH Modelling, *preprint*.
7. Teysiere, G., Abry, P., Wavelet Analysis of Nonlinear Long-Range Dependent Processes. Applications to Financial Time Series, *preprint*.
8. Lardic, S., Mignon, V., Term premium and long range dependence in volatility: A FIGARCH-M estimation on some Asian countries, *preprint*.
9. Diongue, A.K., Guegan, D., (2007), Estimation of k-factor GIGARCH process: a Monte Carlo study, *preprint*.
10. Ramachandran, R., Beaumont, P., (2001), Robust Estimation of GARMA Model Parameters with an Application to Cointegration among Interest Rates of Industrialized Countries, *Computational Economics* 17: 179-201, 2001.
11. Абрамовица, М., Стиган, И., (1979), Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами, Москва "Наука", Главная редакция физико-математической литературы.
12. Sarimveis, H., Nikolakopoulos, A., (2003), A line up evolutionary algorithm for solving nonlinear constrained optimization problems, *Computers & Operations Research; Elsevier Ltd.*

1. PRIEDAS. Sąvokos ir trumpiniai

Graža. Finansinio aktyvo graža- tai jo vertės padidėjimas (sumažėjimas) per tam tikrą laikotarpį, skaičiuojama pagal formulę:

$$r_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}, t=1, \dots, T,$$

kur p_t yra aktyvo vertė momentu $t, t=1, \dots, T$.

Heteroskedastiškumas. Atsitiktiniai dydžiai yra heteroskedastiniai, jei jų dispersijos skiriasi.

Kintamumas. Čia kintamumas reiškia aktyvo gražos sąlyginę dispersiją.

Spektrinis tankis. Tegu x_t yra skaliarinis stacionarus kovariacijų prasme procesas su absoliučiai sumuojamomis autokovariacijomis, o γ_j tegu yra j -oji autokovariacija. Tuomet proceso x_t spektras yra apibrėžiamas kaip

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma_j e^{-i\omega j}, -\pi \leq \omega \leq \pi,$$

kur $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma_j e^{-i\omega j}$ yra eilučių $\{\gamma_j\}$ Fourier transformacija.

Periodograma. Spektrinio tankio funkcijos įvertinys yra periodograma:

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi N} \left| \sum_{n=1}^N x_n e^{-i\omega n} \right|^2, -\pi \leq \omega \leq \pi.$$

Dažis. Dažnis apibrėžiamas kaip periodų skaičius per laiko vienetą.

Periodas – tai pasikartojančio įvykio ciklo trukmė.

AR- autoregresinis procesas.

ARMA- autoregresinis slenkančio vidurkio procesas.

ARIMA- integruotas autoregresinis slenkančio vidurkio procesas.

ARCH- autoregresinis sąlyginio heteroskedastiškumo procesas.

GARCH- apibendrintas autoregresinis sąlyginio heteroskedastiškumo procesas.

IGARCH- integruotas apibendrintas autoregresinis sąlyginio heteroskedastiškumo procesas.

ARFIMA- autoregresinis trupmeninis integruotas slenkančio vidurkio procesas.

GARMA- apibendrintas autoregresinis slenkančio vidurkio procesas.

2. PRIEDAS. Programos R komandos

```
library(forecast)
library(gsl)
library(longmemo)
```

1. Generuoti Gegenbauer-LARCH procesai

```
#####h-faktorių Gegenbauer-LARCH proceso generavimas#####
```

```
#####h=2#####
```

```
m=1000
```

```
d1=0.45
```

```
d2=0.4
```

```
niu1=0.7
```

```
niu2=0.3
```

```
do.it<-function(w1,
```

```
    w2,
```

```
    d1,
```

```
    d2,
```

```
    n){
```

```
  require(gsl)
```

```
  C1<-c(1,tapply(1:n,1:n,function(x) gegenpoly_n(x,lambda=d1,x=niu1)))
```

```
  C2<-c(1,tapply(1:n,1:n,function(x) gegenpoly_n(x,lambda=d2,x=niu2)))
```

```
  fact<-array(1:(n+1),dim=c(n+1,n+1))+t(array(1:(n+1),dim=c(n+1,n+1)))
```

```
  vekt<-tapply(C1%o%C2,fact,sum)[1:(n+1)]
```

```
  return(vekt)
```

```
}
```

```
gegenb=do.it(niu1,niu2,d1,d2,m)
```

```
gegenb=gegenb[2:(m+1)]
```

```
#####Generuojame balta triukšma#####
```

```
bt=arima.sim(list(order=c(0,0,0)),sd=1,n=m+1)
```

```
bt=bt[2:(m+1)]
```

```
b=bt
```

```
l=rep(list(rep(NA,(m))), (m))
```

```
for (i in 1:(m)){
```

```
  bt=b
```

```
  b=rep(NA,(m))
```

```
  for (j in 1:(m)) {
```

```
    if (j<(m)) b[j]=bt[j+1]
```

```
    else (b[j]=bt[1])
```

```
    b[j]=b[j]}
```

```

l[[i]]=b
}
e=matrix(data=unlist(rep(1,1)),ncol=m,nrow=m)
#####Generuojame duomenis#####
alfa=0.0012
x=gegenb%*%e
sigma=alfa*(1+x)
r=sigma%*%e
r=matrix(data=r, ncol=1,nrow=m)
tsdisplay(r)          #generuoto proceso grafikas
spectrum(r,method="ar") #spektrinis tankis
plot(per(r),type="l") #periodograma

```


2. LUDE algoritmas

```
#nuskaitome duomenis#
rpilna=read.table(file.choose())
rpilna=unlist(rpilna)
r=log(abs(rpilna[40:15000])^(2/3)+0.1)
r1=r[1:length(r)]
rr=r[21:length(r)]
imtis=length(rr)
N=4 #parametru skaicius
m=20
T=length(rr)
####dažniai iš periodogramos####
w1=0
w2=2*pi/24
w3=6*pi/24
####parametru viršutiniai ir apatiniai rėžiai###
pup=c(0.001,0.5,0.5,0.5)
plo=c(0,0,0,0)
#####parametru populiacija#####
L=30
pop=array(c(rep(NA,N*L)),dim=c(N,L))
pop[1,]=runif(L,plo[1],pup[1])
pop[2,]=runif(L,plo[2],pup[2])
pop[3,]=runif(L,plo[3],pup[3])
pop[4,]=runif(L,plo[4],pup[4])

mxiter=50
Iteracijos=function(mxiter){

for (iter in 1:mxiter){

#### 3-ias žingsnis ####
l=rep(NA,L)
for(j in 1:L) {

do.it_k<-function(
      w=c(0.041666*2*pi,
          0.45*2*pi,
          0.5*2*pi
      ),
      d=c(0.301,
```

```

        0.399,
        0.261
    ),
    n=100){
require(gsl)
k<-length(w)
if(length(w)!=length(d)) stop("Patikrinkite investys: w ir d ilgiai
skiriasi")
n2<-n
C<-c(1,tapply(1:n2,1:n2,function(x)
    gegenpoly_n(x,lambda=d[1],x=cos(w[1]))))
fakt<-1:(n2+1)
df<-n2+1
for(i in 2:k){
C<-C%o%c(1,tapply(1:n2,1:n2,function(x)
    gegenpoly_n(x,lambda=d[i],x=cos(w[i]))))
temp<-fakt
df<-c(df,n2+1)
for(j in 1:(n2+1)){if(j>1)fakt<-cbind(fakt,temp+j) else fakt<-fakt+j}
}
#browser()
dim(fakt)<-df

vekt<-tapply(C,fakt,sum)[1:(n2+1)]
return(vekt)
}

gegenb=do.it_k(w=c(w1,w2,w3),d=c(pop[2,j],pop[3,j],pop[4,j]),n=m)
gegenb=gegenb[2:(m+1)]
skaiciukai=c(1:m)
reiksmes=gegenb
sukeisti=order(x <- skaiciukai, y <- reiksmes)
sukeistos=rbind(x,y)[, order(-x, y)]
gegenb=sukeistos["y",]

sigmakv=rep(NA,imtis)
for(i in 1:imtis){
sigmakv[i]=(pop[1,j]+(gegenb)**(cbind((r1[i:(i+(m-1)]))))^2
}
sigmakv=c(sigmakv)
l[j]=sum((-0.5)*log(sigmakv)-0.5*(rr^2/sigmakv))
}

```

```

#### 4-tas žingsnis ####
tvarka=order(1)
poptvarka=array(c(rep(NA,N*L)),dim=c(N,L))
for (i in 1:L) {
    poptvarka[,i]=pop[,tvarka[i]]
}
ltvarka=rep(NA,L)
for (i in 1:L) {
    ltvarka[i]=l[tvarka[i]]
}
print(iter)
print(ltvarka[L])

if (iter==mxiter) print(poptvarka)

##### 5-tas žingsnis - crossover operator#####
popn=array(c(rep(NA,N*(L-1))),dim=c(N,L-1))
for (i in 1:(L-1)){
    urn=runif(1,0,1)
    popn[,i]=poptvarka[,i]+urn*(poptvarka[,i+1]-poptvarka[,i])
}

ln=rep(NA,L-1)
for(j in 1:(L-1)) {

do.it_k<-function(
    w=c(0.041666*2*pi,
        0.45*2*pi,
        0.5*2*pi
    ),
    d=c(0.301,
        0.399,
        0.261
    ),
    n=100){
    require(gsl)
    k<-length(w)
    if(length(w)!=length(d)) stop("Patikrinkite investys: w ir d ilgiai
skiriasi")
    n2<-n
    C<-c(1,tapply(1:n2,1:n2,function(x)
        gegenpoly_n(x,lambda=d[1],x=cos(w[1]))))

```

```

fakt<-1:(n2+1)
df<-n2+1

for(i in 2:k){
C<-C%o%c(1,tapply(1:n2,1:n2,function(x)
      gegenpoly_n(x,lambda=d[i],x=cos(w[i])))
temp<-fakt
df<-c(df,n2+1)
for(j in 1:(n2+1)){if(j>1)fakt<-cbind(fakt,temp+j) else fakt<-fakt+j}
}
#browser()
dim(fakt)<-df
vekt<-tapply(C,fakt,sum)[1:(n2+1)]
return(vekt)
}

```

```

gegenb=do.it_k(w=c(w1,w2,w3),d=c(popn[2,j],popn[3,j],popn[4,j]),n=m)
gegenb=gegenb[2:(m+1)]
skaiciukai=c(1:m)
reiksmes=gegenb
sukeisti=order(x <- skaiciukai, y <- reiksmes)
sukeistos=rbind(x,y)[, order(-x, y)]
gegenb=sukeistos["y",]

```

```

sigmakv=rep(NA,imtis)
for(i in 1:imtis){
sigmakv[i]=(popn[1,j]+(gegenb)**%(cbind((r1[i:(i+(m-1)]))))^2
}
sigmakv=c(sigmakv)
ln[j]=sum((-0.5)*log(sigmakv)-0.5*(rr^2/sigmakv))
}
popnew=array(c(rep(NA,N*L)),dim=c(N,L))
for (i in 1:(L-1)){
  if (ln[i]>ltvarka[i+1]) popnew[,i+1]=popn[,i]
  else popnew[,i+1]=poptvarka[,i+1]
}
popnew[,1]=poptvarka[,1]

```

6-tas žingsnis- perskaiciuojam funkcijos reikšmes pagal naujausius parametrus

```

lnew=rep(NA,L)
for(j in 1:(L)) {

o.it_k<-function(
  w=c(0.041666*2*pi,
    0.45*2*pi,
    0.5*2*pi
  ),
  d=c(0.301,
    0.399,
    0.261
  ),
  n=100){
  require(gsl)
  k<-length(w)
  if(length(w)!=length(d)) stop("Patikrinkite investys: w ir d ilgiai
skiriasi")
  n2<-n
  C<-c(1,tapply(1:n2,1:n2,function(x)
    gegenpoly_n(x,lambda=d[1],x=cos(w[1]))))
  fakt<-1:(n2+1)
  df<-n2+1

  for(i in 2:k){
  C<-C%o%c(1,tapply(1:n2,1:n2,function(x)
    gegenpoly_n(x,lambda=d[i],x=cos(w[i]))))
  temp<-fakt
  df<-c(df,n2+1)
for(j in 1:(n2+1)){if(j>1)fakt<-cbind(fakt,temp+j) else fakt<-fakt+j}
  }
  #browser()
  dim(fakt)<-df
vekt<-tapply(C,fakt,sum)[1:(n2+1)]
  return(vekt)
}

gegenb=do.it_k(w=c(w1,w2,w3),d=c(popnew[2,j],popnew[3,j],popnew[4,j]),n=m)
gegenb=gegenb[2:(m+1)]
skaiciukai=c(1:m)
reiksmes=gegenb
sukeisti=order(x <- skaiciukai, y <- reiksmes)
sukeistos=rbind(x,y)[, order(-x, y)]

```

```

gegenb=sukeistos["y",]

sigmakv=rep(NA,imtis)
for(i in 1:imtis){
sigmakv[i]=(popnew[1,j]+(gegenb)**(cbind((r1[i:(i+(m-1)]))))))^2
}
sigmakv=c(sigmakv)
lnew[j]=sum((-0.5)*log(sigmakv)-0.5*(rr^2/sigmakv))
}
tvarka=order(lnew)
poptvarkal=array(c(rep(NA,N*L)),dim=c(N,L))
for (i in 1:L) {
      poptvarkal[,i]=popnew[,tvarka[i]]
}
ltvarkal=rep(NA,L)
for (i in 1:L) {
      ltvarkal[i]=lnew[tvarka[i]]
}

##### 7-tas žingsnis- mutacijos operatorius #####
popn=array(c(rep(NA,N*L)),dim=c(N,L))
pm=c(rep(NA,L))
for (i in 1:L){
      pm[i]=(L-i+1)/L
      for (j in 1:N){
            rnd=runif(1,0,1)
            if(rnd<pm[i])
                  rnd=runif(1,0,1)
                  b=rbinom(1,1,0.5)
                  if (b==0) popn[j,i]=poptvarkal[j,i]+(pup[j]-
                        poptvarkal[j,i])*rnd*exp(-2*iter/mxiter)
            if (b==1) popn[j,i]=poptvarkal[j,i]-(poptvarkal[j,i]-
                        plo[j])*rnd*exp(-2*iter/mxiter)
            else (popn[j,i]=poptvarkal[j,i])
      }
}

##### galutinė rotacija #####

lgalut=rep(NA,L)
for(j in 1:(L)) {
o.it_k<-function(

```

```

        w=c(0.041666*2*pi,
            0.45*2*pi,
            0.5*2*pi
            ),
        d=c(0.301,
            0.399,
            0.261
            ),
        n=100){
    require(gsl)
    k<-length(w)
    if(length(w)!=length(d)) stop("Patikrinkite  ivestys:  w  ir  d  ilgiai
skiriasi")
    n2<-n
    C<-c(1,tapply(1:n2,1:n2,function(x)
        gegenpoly_n(x,lambda=d[1],x=cos(w[1]))))
    fakt<-1:(n2+1)
    df<-n2+1
    for(i in 2:k){
        C<-C%o%c(1,tapply(1:n2,1:n2,function(x)
            gegenpoly_n(x,lambda=d[i],x=cos(w[i]))))
        temp<-fakt
        df<-c(df,n2+1)
    for(j in 1:(n2+1)){if(j>1)fakt<-cbind(fakt,temp+j) else fakt<-fakt+j}
        }
        #browser()
        dim(fakt)<-df
    vekt<-tapply(C,fakt,sum)[1:(n2+1)]
        return(vekt)
    }
    gegenb=do.it_k(w=c(w1,w2,w3),d=c(popn[2,j],popn[3,j],popn[4,j]),n=m)
    gegenb=gegenb[2:(m+1)]
    skaiciukai=c(1:m)
    reiksmes=gegenb
    sukeisti=order(x <- skaiciukai, y <- reiksmes)
    sukeistos=rbind(x,y[, order(-x, y)])
    gegenb=sukeistos["y",]

    sigmakv=rep(NA,imtis)
    for(i in 1:imtis){
        sigmakv[i]=(popn[1,j]+(gegenb)%*(cbind((r1[i:(i+(m-1)]))))^2
    }

```

```

sigmakv=c(sigmakv)
lgalut[j]=sum((-0.5)*log(sigmakv)-0.5*(rr^2/sigmakv))
}
for (i in 1:L){
  if (lgalut[i]>ltvarka[i]) pop[,i]=popn[,i]
  else pop[,i]=poptvarka[,i]
}
}
}

```

Iteracijos(mxiter)

3. Modelio liekanos

```

alfa=0.0001788380
do.it_k<-function(
  w=c(0.041666*2*pi,
    0.45*2*pi,
    0.5*2*pi,
    0
  ),
  d=c(0.301,
    0.399,
    0.261,
    0.4
  ),
  n=100){
  require(gsl)
  k<-length(w)
  if(length(w)!=length(d)) stop("Patikrinkite investys: w ir d ilgiai
skiriasi")
  n2<-n
  C<-c(1,tapply(1:n2,1:n2,function(x)
    gegenpoly_n(x,lambda=d[1],x=cos(w[1]))))
  fakt<-1:(n2+1)
  df<-n2+1
  for(i in 2:k){
    C<-C%o%c(1,tapply(1:n2,1:n2,function(x)
      gegenpoly_n(x,lambda=d[i],x=cos(w[i]))))
    temp<-fakt
    df<-c(df,n2+1)
  }
  for(j in 1:(n2+1)){if(j>1)fakt<-cbind(fakt,temp+j) else fakt<-fakt+j}

```



```

    }
    #browser()
    dim(fakt)<-df

    vekt<-tapply(C,fakt,sum)[1:(n2+1)]
    return(vekt)
}
gegenb=do.it_k(w=c(0,2*pi/24,6*pi/24),d=c(0.0667336202,
0.0857169731,0.0345989142),n=m)
gegenb=gegenb[2:(m+1)]
    skaiciukai=c(1:m)
reiksmes=gegenb
sukeisti=order(x <- skaiciukai, y <- reiksmes)
sukeistos=rbind(x,y)[, order(-x, y)]
gegenb=sukeistos["y",]
sigma=rep(NA,imtis)
for(i in 1:imtis){
sigma[i]=(alfa+gegenb%%(cbind((r1[i:(i+(m-1)]))))))
}
#### Modelio liekanos ####
liek=rr-(sigma)+1.27*(1/3)

```