ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATIKOS KATEDRA

Deimantė Kravčenkaitė

Matematikos studijų programos MAM–10 grupės studentė

EUKLIDO ERDVĖS LIEČIAMOJO PLUOŠTO HIPERPAVIRŠIŲ STRUKTŪRA IR GEOMETRINĖ PRASMĖ

MAGISTRO DARBAS

Darbo vadovė
prof. Angelė Baškienė

Šiauliai, 2012

TURINYS

ĮVADAS

Matematika nagrinėja matematines struktūras, kurias aibėse apibrėžia sąryšiai, tenkinantys tam tikras reikalavimus (aksiomas). Tarp matematinių struktūrų tam tikrą vietą užima tenzorinės stuktūros. Kai kurios iš jų žinomos jau nuo 19 a. vidurio. Pvz., Rymanas nagrinėjo metrines stuktūras, kurias daugdarose apibrėžia metrinis tenzorius, nors tenzoriaus sąvoka įvesta tamprumo teorijoje fiziko Fogto tik 19 a. pabaigoje.

Panašiai fizikoje jau 19 a. buvo naudojami tiesiniai operatoriai, tačiau afinorines struktūros pradėtos nagrinėti tik 20 a. po to, kai Riči, Levi, Eušteino darbuose buvo išvystyta tenzorinė algebra ir analizė. Kontaktinės struktūros pradėtos nagrinėti nuo 1958 m. [3], o beveik kontaktinių metrinių struktūrų teorijos pradininkai yra japonai Sasaki, Hatakeyama, Tashiro, Tachibana ir kiti [5 - 7]. Beveik kontaktines metrines struktūras daugdarose apibrėžia afinorius φ, vektorius ξ, kovektorius η ir metrinis tenzorius g, tenkinantys tam tikras aksiomas.

1967 m. Kazanės geometrijos mokykloje buvo pradėti nagrinėti beveik kontaktinių struktūrų hiperboliniai analogai [13], suteikiant žinomoms ir kiek apibendrintoms beveik kontaktinėms struktūroms elipsinio tipo struktūrų vardą. Taigi Kazanėje buvo pradėtos nagrinėti 2 tipų: elipsinio ir hiperbolinio ir 2 rūšių: I ir II rūšies beveik kontaktinės metrinės struktūros, arba trumpai (φ,ξ,η,g)-struktūros, pabrėžiant jų bendrąsias savybes ir analogiškumą.

Vėliau japonų, indų matematiškai tyrinėjo atskirus jų atvejus. Pvz., hiperbolinio tipo II rūšies struktūras nagrinėjo Sato [6] ir pavadino jas parakontaktinėmis metrinėmis struktūromis. Elipsinio tipo kai kurias struktūras nagrinėjo Tripathi, vadindamas jas ε-struktūromis, o hiperbolinio tipo struktūras — Lorenco struktūromis [8].

Nuo 2001 m. buvo pradėta nagrinėti paraboliniai šių struktūrų analogai [2]. Ištirtas savybes, pateikti tokių struktūrų pavyzdžiai.

Matematikoje labai svarbu taikymai. Todėl beveik kontaktinių metrinių struktūrų teorijos taikymais fizikoje ir kitose matematikos šakose domisi įvairių šalių matematikai. Pvz., 1982 – 1987 metais buvo tyrinėta Rymano n-matės daugdaros liečiamosios sluoksniuotės hiperpaviršių struktūra, kuri yra beveik kontaktinė metrinė struktūra [9-12].

Net ir paprasčiausiais atvejais, kai bazė yra n-matė Euklido erdvė, ar net Euklido plokštuma, čia yra daug neišspręstų problemų.

Mūsų darbo tikslas - kompleksiškai ištirti elipsinio ir hiperbolinio tipo I ir II rūšies beveik kontaktines metrines struktūras (φ,ξ,η,g) Euklido n-matės erdvės E_n liečiamosios sluoksniuotės $T(E_n)$ normalizuotuose hiperpaviršiuose ir išaiškinti šių hiperpaviršių geometrinę prasmę.

Darbo uždaviniai.

1. Rasti minėtą dviejų tipų ir dviejų rūšių (φ, ξ, η, g)-struktūrą liečiamosios sluoksniuotės $T(E_n)$ normalizuotuose hiperpaviršiuose.
2. Ištirti šios universalios (φ, ξ, η, g)-struktūros savybes: normalumą, integruojamumą, kontaktiškumą, sasakiškumą ir kt.
3. Išaiškinti tam tikrų $T(E_n)$ hiperpaviršių turinčių įdomias savybes, geometrinę prasmę bazėje E_n.
4. Pateikti Euklido plokštumos liečiamojo pluošto beveik kontaktinių metrinių hiperpaviršių, turinčių (φ, ξ, η, g)-struktūrą su dominančiomis savybėmis, pavyzdžių ir išaiškinti jų geometrinę prasmę bazėje E_2 .

Šis darbas pratęsia 2010 m. autorės atlikto bakalauro darbo „Elipsinio tipo *B*-erdvių beveik kontaktiniai metriniai hiperpaviršiai“ tyrinėjimus, apibendrina šio darbo rezultatus kitų tipų ir rūšių (φ, ξ, η, g)-struktūroms ir pritaiko juos liečiamųjų sluoksniuočių paviršių teorijoje.

1. LIEČIAJOJI SLUOKSNIUOTĖ

Apibrėžimas 1. Sluoksniuote vadinamas trejetas (X, π, B). Čia X yra bet kuri netuščioji aibė, kurios elementai vadinami taškais, netuščioji aibė B vadinama baze, surjekcija π: $X \to B$ vadinama sluoksniuotės projekcija, $\pi^{-1}(b), b \in B,$ — sluoksniu bazės taške b.

Sluoksniuote kartais vadinamas ir procesas π, ir aibė $\bigcup_{b \in B} \pi^{-1}(b) = X$.

Apibrėžimas 2. Jei bazė yra n-matė diferencijuojamoji daugdara M_n, o sluoksniu taške $b \in M_n$ yra to taško liečiamoji erdvė TM_b, t.y. projekcija π: $T(M_n) = \bigcup_{b \in M_n} TM_b \to M_n$ atvaizduoja liečiamąją erdvę TM_b į tašką $b \in M_n$, tuomet sluoksniuotė vadinama liečiamąja sluoksniuote, arba liečiamuoju pluoštu, ir žymima $T(M_n)$.

Tarkime, kad $x^q, q = 1, 2, ..., n,$ yra taško $b \in M_n$ koordinatės homeomorfizmo h: $M_n \to \Omega \in R^n$ atžvilgiu. Čia M_n — elementarioji n-matė diferencijuojamoji daugdara, Ω — jungioji atviroji realiųjų skaičių aibės R n-tojo Dekarto laipsnio sritis. Sakykime, jog $v^q = x^{n+q}$ yra liečiamojo vektoriaus $\vec{v} \in TM_x$ koordinatės. Tada $2n$ dydžių x^q, x^{n+q} yra liečiamosios sluoksniuotės $T(M_n)$ taško Y koordinatės. Projekcija π liečiamosios sluoksniuotės tašką $Y(x^q, x^{n+q})$ atvaizduoja į bazės M_n tašką $b(x^q)$. Liečiamosios sluoksniuotės $T(M_n)$ liečiamasis vektorius $\vec{V}\left(v^q, v^{n+q}\right)$ taške Y projekcijos π metu atvaizduojamas į vektorių $\vec{v}\left(v^q\right)$ taške $x \in M_n$. Vektoriai $\left(0, v^{n+q}\right)$, kurie atvaizduojami į $\vec{0}$, vadinami vertikaliais vektoriais. Jie yra sluoksnių $\pi^{-1}(b) = TM_b$ liečiamieji vektoriai.

Jei bazėje M_n apibrėžta afinioji sietis Γ^r_{pq}, tuomet liečiamojoje sluoksniuotėje $T(M_n)$ atsiranda horizontalieji vektoriai $\left(v^q, v^{n+q}\right)$, kuriems galioja lygybė

$$v^{n+q} = -\Gamma^q_{pr} x^{n+p} v^r, \; p, q, r, ... = 1, 2, ..., n.$$

Kiekvieną liečiamosios sluoksniuotės $T(M_n)$ vektorių $\vec{V}$ galima išskaidyti į vertikaliosios ir horizontaliosios komponenčių sumą:

$$\vec{V}\left(v^q, v^{n+q}\right) = {}^h\vec{V}(v^q, -\Gamma^q_{pr} x^{n+p} v^r) + {}^v\vec{V}(0, v^{n+q} + \Gamma^q_{pr} x^{n+p} v^r).$$

Tarp horizontaliųjų ir vertikaliųjų vektorių egzistuoja bijekcija f:

$${}^h\vec{V}(v^q, -\Gamma^q_{pr} x^{n+p} v^r) \xleftrightarrow{f} {}^/\vec{V}\left(0, v^q\right).$$

Tarkime, jog sluoksniuotės bazė yra Euklido *n*-matė erdvė E_n, x^q yra erdvės taško *M* Dekarto koordinatės ortonormuoto reperio $\left(O, \vec{E}_p\right)$ atžvilgiu.

Metrinio erdvės E_n tenzoriaus koordinatės $g_{pq} = \vec{E}_p \cdot \vec{E}_q = \delta_{pq} = \begin{cases} 1, \; jei \; p = q, \\ 0, \; jei \; p \neq q. \end{cases}$

Liečiamojoje sluoksniuotėje $T(E_n)$ galima nagrinėti įvairias metrikas [1]: Sasaki metriką, pilno lifto metriką ir kitas. Mes nagrinėsime Sasaki metriką $\left(G_{\alpha\beta}\right) = \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$, paverčiančią erdvę $T(E_n)$ 2*n*-mate euklidine erdve, ir nulinės signatūros metriką $\left(G_{\alpha\beta}\right) = \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$, paverčiančią liečiamąją Euklido erdvės sluoksniuotę indekso *n* psiaudoeuklidine 2*n*-mate erdve. Čia I_q — *q*-matis vienetinis blokas.

Abi šias metrikas galima nagrinėti kartu, įvedant pažymėjimą $\sigma = \pm 1$:

$$\left(G_{\alpha\beta}\right) = \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & \sigma I_q \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Euklido erdvės E_n Kristofelio simboliai $\Gamma^q_{pr} = 0$, todėl liečiamosios sluoksniuotės $T(E_n)$ vektorių $\vec{V}$ galima išreikšti tokia vertikaliosios ir horizontaliosios komponenčių suma:

$$\vec{V}\left(v^q, v^{n+q}\right) = {}^h\vec{V}(v^q, 0) + {}^v\vec{V}(0, v^{n+q}).$$

Pasinaudoję bijekcija *f*: ${}^h\vec{V}(v^q, 0) \xleftrightarrow{f} {}^/\vec{V}\left(0, v^q\right)$, vertikaliąją komponentę ${}^v\vec{V}(0, v^{n+q})$ pakeitę horizontaliuoju vektoriumi ${}^{//}\vec{V}(v^{n+q}, 0)$, sudėję vektorius ${}^/\vec{V}$ ir ${}^{//}\vec{V}$ gausime vektorių $\vec{V}^* = F(\vec{V}) = {}^/\vec{V} + {}^{//}\vec{V}$, kurio koordinatės yra $\left(v^{n+q}, v^q\right)$.

Endomorfizmo *F* matrica turi pavidalą $\left(F^\beta_\alpha\right) = \begin{pmatrix} 0 & I_q \\ I_q & 0 \end{pmatrix}$, *α, β, γ,...* = 1, 2, ..., 2*n*. Jei vektoriui ${}^{//}\vec{V}$ pakeisime ženklą, tuomet vektorius $F(\vec{V}) = {}^/\vec{V} - {}^{//}\vec{V}$ turės koordinates $\left(-v^{n+q}, v^q\right)$, o endomorfizmo *F* matrica turės pavidalą $\left(F^\beta_\alpha\right) = \begin{pmatrix} 0 & I_q \\ -I_q & 0 \end{pmatrix}$.

Vėl abu endomorfizmo *F* atvejus galima nagrinėti kartu, įvedant simbolį $\omega = \pm 1$:

$$\left(F_\alpha^\beta\right)=\begin{pmatrix} 0 & I_q \\ \omega I_q & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Nesunku įrodyti, jog metrikai G (1.1) ir afinoriui F (1.2) galioja sąlygos:

$$F_\alpha^\beta F_\beta^\gamma = \omega\delta_\alpha^\gamma,\ \omega=\pm 1, \quad F_\alpha^\beta G_{\beta\gamma} = \rho F_\gamma^\beta G_{\beta\alpha}, \quad \rho=\omega\sigma=\pm 1. \tag{1.3}$$

(1.3) formulės rodo [1], jog Euklido n-matės erdvės E_n liečiamasis pluoštas $T(M_n)$ yra kompleksinė $(\omega=-1)$ arba dviguba $(\omega=1)$ erdvė su A–metrika $(\rho=-1)$ arba B–metrika $(\rho=1)$, kurių atžvilgiu afinorius F yra kovariantiškai pastovus. Tokia erdvė vadinama [1] elipsinio tipo $(\omega=-1)$ arba hiperbolinio tipo $(\omega=1)$ A–erdve $(\rho=-1)$ arba B–erdve $(\rho=1)$.

Vadinasi, į Euklido n-matės erdvės $E_n\left(x^q\right)$ liečiamąją sluoksnuotę, arba liečiamąjį pluoštą, $T(E_n)\left(x^q, x^{n+q}=v^q\right)$ galima žiūrėti kaip į elipsinio $(\omega=-1)$ arba hiperbolinio $(\omega=1)$ tipo A–erdvę $(\rho=-1)$ arba B–erdvę $(\rho=1)$, kurios struktūriniai tenzoriai F_α^β ir $G_{\alpha\beta}$ turi pavidalą (1.1), (1.2) ir tenkina (1.3) sąlygas.

Taigi liečiamojoje sluoksniuotėje $T(E_n)$ egzistuoja 4 skirtingos (F,G)-struktūros, kurias įvedus simbolius ω,σ,ρ, nagrinėsime kartu. Kitame paragrafe nagrinėsime $2n$-matės erdvės $T(E_n)\left(x^\alpha\right)$, $\alpha, \beta, \gamma, ... = 1, 2, ..., 2n$, hiperpaviršių, normalizuotą normaliniu vektoriumi $\bar{n}$. Hiperpaviršiuose indukuojasi įvairių tipų ir rūšių beveik kontaktinės metrinės struktūros [1].

Mūsų tikslas surasti tas struktūras.

2. $T(E_n)$ HIPERPAVIRŠIŲ STRUKTŪRA

Euklido n-matės erdvės $E_n\left(x^q\right)$ liečiamojo pluošto $T(E_n)\left(x^q, x^{n+q}\right)$ hiperpaviršių M_{2n-1} apibrėšime išreikštine lygtimi

$$x^{2n} = f(x^q, x^{n+a}) = f\left(x^i\right), \qquad (2.1)$$
$$i, j, k, \ldots = 1, 2, \ldots, 2n-1, \ a, b, \ldots = 1, 2, \ldots, n-1, \quad p, q, \ldots = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Kadangi x^{n+q} yra vektoriaus $\vec{v}(v^q = x^{n+q})$ taške $M\left(x^q\right) \in E_n$ koordinatės, tai (2.1) lygybė apibrėžia kiekviename erdvės E_n taške $M\left(x^q\right)$ (n-1)-parametrinę vektorių šeimą $\vec{v}\left(v^a = x^{n+a}, v^n = f(x^q, x^{n+a})\right)$. Jei šių vektorių atstovus atidėsime Euklido erdvės E_n taške $M\left(x^q\right)$, jų galai „brėš“ erdvėje E_n (n-1)-matį hiperpaviršių, kurį vadinsime taško M indikatrise ir žymėsime I_M.

Vadinasi, liečiamojo pluošto $T(E_n)$ hiperpaviršiaus $M_{2n-1}\left(x^i\right)$ (2.1) geometrinė prasmė bazėje E_n — (n-1)-mačių indikatrisių I_M laukas.

Erdvėje $T(E_n)$ egzistuoja (F, G)-struktūra (1.1), (1.2), tenkinanti aksiomas (1.3).

Gerai žinoma [1], jog elipsinio arba hiperbolinio tipo A-erdvės (B-erdvės) hiperpaviršiuje, normalizuotame normalinės vektoriumi $\vec{n}$ (beveik kontaktiniu vektoriumi, apibrėžtu normalės vektoriumi), indukuojasi elipsinio tipo arba hiperbolinio tipo I rūšies (II rūšies) beveik kontaktinė metrinė struktūra (φ, ξ, η, g).

Rasime šią struktūrą. Euklido n-matės erdvės liečiamojo pluošto hiperpaviršiuje (2.1).

Hiperpaviršiaus liečiamųjų vektorių koordinatės $B_i^\alpha = \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial x^i}$ yra tokios:

$$\begin{cases} B_a^\alpha = \delta_a^\alpha + f_a \delta_{2n}^\alpha, \\ B_n^\alpha = \delta_n^\alpha + f_n \delta_{2n}^\alpha, \\ B_{n+b}^\alpha = \delta_{n+b}^\alpha + f_{n+b} \delta_{2n}^\alpha, \end{cases} \Leftrightarrow \ B_i^\alpha = \delta_i^\alpha + f_i \delta_{2n}^\alpha, \ f_i = \frac{\partial_i f}{\partial x^i}. \qquad (2.2)$$

Surasime vektorių $\vec{n}$, statmeną vektoriams $\vec{B}_i$. Pažymėkime jo koordinates $\vec{n}\left(n^1, n^2, \ldots, n^n, \ldots, n^{2n}\right)$. Iš statmenumo sąlygos $\vec{B}_i \cdot \vec{n} = G_{\alpha\beta} B_i^\alpha n^\beta = 0$, paėmę i = 1, 2, 3, ..., 2n-1, pritaikę (1.1), (2.2) išraiškas, gausime lygčių sistemą.

Pvz., kai i = 1, gauname lygtį

$$G_{\alpha\beta} B_1^\alpha n^\beta = G_{11} B_1^1 n^1 + G_{12} B_1^1 n^2 + G_{13} B_1^1 n^3 + G_{14} B_1^1 n^4 + \ldots + G_{2n2n} B_1^{2n} n^{2n} = n^1 + \sigma f_1 n^{2n} = 0.$$

Kai i=2,

$$G_{\alpha\beta}B_2^{\alpha}n^{\beta} = G_{11}B_2^1 n^1 + G_{12}B_2^1 n^2 + G_{13}B_2^1 n^3 + G_{14}B_2^1 n^4 + ... + G_{2n2n}B_2^{2n}n^{2n} = n^2 + \sigma f_2 n^{2n} = 0.$$

Kai i=n,

$$G_{\alpha\beta}B_n^{\alpha}n^{\beta} = G_{11}B_n^1 n^1 + G_{12}B_n^1 n^2 + G_{13}B_n^1 n^3 + G_{14}B_n^1 n^4 + ... + G_{2n2n}B_n^{2n}n^{2n} = n^n + \sigma f_n n^{2n} = 0.$$

Kai i=n+1,

$$G_{\alpha\beta}B_{n+1}^{\alpha}n^{\beta} = G_{11}B_{n+1}^1 n^1 + G_{12}B_{n+1}^1 n^2 + G_{13}B_{n+1}^1 n^3 + G_{14}B_{n+1}^1 n^4 + ... + G_{2n2n}B_{n+1}^{2n}n^{2n} = \sigma n^n + \sigma f_n n^{2n} = 0.$$

Analogiškai gaunamos lygtys, kai i=n+2,....2n-1. Taigi mūsų lygčių sistema turi pavidalą:

$$\begin{cases} n^1 + \sigma f_1 n^{2n} = 0, \\ n^2 + \sigma f_2 n^{2n} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ n^n + \sigma f_n n^{2n-1} = 0, \\ \sigma n^{n+1} + \sigma f_{n+1} n^{2n} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sigma n^{2n-1} + \sigma f_{2n-1} n^{2n} = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^1 = -\sigma f_1 n^{2n}, \\ n^2 = -\sigma f_2 n^{2n}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ n^n = -\sigma f_n n^{2n}, \\ n^{n+1} = -f_{n+1} n^{2n}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ n^{2n-1} = -f_{2n-1} n^{2n}. \end{cases}$$

Normuokime vektorių $\vec{n}$ iki ε-vienetinio vektoriaus. Jei $f_1^2 + f_2^2 + ... + f_n^2 + \sigma\left(f_{n+1}^2 + ... + f_{2n-1}^2 + 1\right) \neq 0$, t.y., jei normalinis vektorius $\vec{n}$ nėra izotopinis, tarę, jog $n^{2n} = \frac{-\sigma}{k}$, gauname normalinį ε-vienetinį vektorių, kurį ir vėl pažymėsime $\vec{n}$:

$$\begin{gathered} \vec{n}\left(f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad ... \quad f_{n-1} \quad f_n \quad \sigma f_{n+1} \quad ... \quad \sigma f_{2n-1} \quad -\sigma \right)\cdot\frac{1}{k}, \\ k = \sqrt{\left|f_1^2 + f_2^2 + ... + f_n^2 + \sigma\left(f_{n+1}^2 + ... + f_{2n-1}^2 + 1\right)\right|} \neq 0. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Elipsinio arba hiperbolinio tipo A-erdvės, kurioje $\rho = \sigma\omega = -1$, hiperpaviršiuje elipsinio arba hiperbolinio tipo I rūšies beveik kontaktinė metrinė struktūra (φ, ξ, η, g) indukuojasi normalizuojant hiperpaviršių normaliniu vektoriumi $\vec{n}$, kuris yra beveik kontaktinis vektorius [1]. Tuo tarpu elipsinio arba hiperbolinio tipo B-erdvės, kurioje $\rho = \sigma\omega = 1$, hiperpaviršiaus normalinis vektorius $\vec{n}$ bendru atveju nėra beveik kontaktinis. Jis tampa tokiu tik tuo atveju, kai vektorius $F\left(\vec{n}\right)$ yra liečiamasis hiperpaviršiaus vektorius, t.y. kai $F_{\alpha}^{\beta}G_{\beta\gamma}n^{\alpha}n^{\beta} = 0$. Pritaikę (1.1), (1.2) ir (2.3) formules šią sąlygą galima užrašyti pavidalu:

$$f_n = f_1 f_{n+1} + f_2 f_{n+2} + \ldots + f_{n-1} f_{2n-1} = \sum_a f_a f_{n+a}. \qquad (2.4)$$

Ateityje laikysime, jog *B*-erdvės hiperpaviršiui (2.1) galioja (2.4) sąlyga, t.y. kad ir šiuo atveju hiperpaviršiaus normalinis vektorius (2.3) yra beveik kontaktinis.

Esant tokiai sąlygai galima teigti, jog abiejų tipų: *A* arba *B*-erdvių hiperpaviršius mes normalizuosime normaliniu vektoriumi (2.3). Hiperpaviršiuose indukuojasi dviejų tipų (elipsinio ir hiperbolinio) ir dviejų rūšių (I ir II) beveik kontaktinė metrinė struktūra (φ, ξ, η, g), kurios struktūriniai tenzoriai gaunami iš sistemos [1]:

$$F(\boldsymbol{B}_i) = \varphi_i^j \boldsymbol{B}_j + \eta_i \boldsymbol{n}, \quad F(\boldsymbol{n}) = -\xi^i \boldsymbol{B}_i, \quad g_{ij} = G_{\alpha\beta} B_i^\alpha B_j^\beta. \qquad (2.5)$$

Čia $\boldsymbol{B}_i$ – hiperpaviršiaus liečiamieji vektoriai, kurių koordinatės $B_i^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i}$ turi pavidalą (2.2), o $\vec{n}$ yra normalinis hiperpaviršiaus vektorius (2.3).

Pritaikę (1.1) ir (2.2) formules rasime hiperpaviršiuje metrinį tenzorių $g_{ij} = G_{\alpha\beta} B_i^\alpha B_j^\beta$.

Pvz. ,

$$\begin{aligned} g_{11} &= G_{\alpha\beta} B_1^\alpha B_1^\beta = G_{11} B_1^1 B_1^1 + G_{12} B_1^1 B_1^2 + \ldots + G_{1n} B_1^1 B_1^n + \ldots + G_{12n-1} B_1^1 B_1^{2n-1} + \\ &+ G_{21} B_1^2 B_1^1 + G_{22} B_1^2 B_1^2 + \ldots + G_{2n} B_1^2 B_1^n + \ldots + G_{22n-1} B_1^2 B_1^{2n-1} + \ldots + \\ &+ G_{2n1} B_1^{2n} B_1^1 + G_{2n2} B_1^{2n} B_1^2 + \ldots + G_{2nn} B_1^{2n} B_1^n + \ldots + G_{2n2n} B_1^{2n} B_1^{2n} = 1 + \sigma f_1^2. \end{aligned}$$

Analogiškai randamos kitos metrinio tenzoriaus koordinatės. Metrinio tenzoriaus matrica yra

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1+\sigma f_1^2 & \sigma f_1 f_2 & \sigma f_1 f_3 & \ldots & \sigma f_1 f_n & \sigma f_1 f_{n+1} & \ldots & \sigma f_1 f_{2n-1} \\ \sigma f_1 f_2 & 1+\sigma f_2^2 & \sigma f_2 f_3 & \ldots & \sigma f_2 f_n & \sigma f_2 f_{n+1} & \ldots & \sigma f_2 f_{2n-1} \\ \sigma f_1 f_3 & \sigma f_3 f_2 & 1+\sigma f_3^2 & \ldots & \sigma f_3 f_n & \sigma f_3 f_{n+1} & \ldots & \sigma f_3 f_{2n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sigma f_1 f_n & \sigma f_n f_2 & \sigma f_n f_3 & \ldots & 1+\sigma f_n^2 & \sigma f_n f_{n+1} & \ldots & \sigma f_n f_{2n-1} \\ \sigma f_1 f_{n+1} & \sigma f_{n+1} f_2 & \sigma f_{n+1} f_3 & \ldots & \sigma f_{n+1} f_n & \sigma + \sigma f_{n+1}^2 & \ldots & \sigma f_{n+1} f_{2n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sigma f_1 f_{2n-1} & \sigma f_{2n-1} f_2 & \sigma f_{2n-1} f_3 & \ldots & \sigma f_{2n-1} f_n & \sigma f_{2n+1} f_{n+1} & \ldots & \sigma + \sigma f_{2n-1}^2 \end{pmatrix},$$

arba jo koordinatės turi pavidalą:

$$g_{pj} = \delta_{pj} + \sigma f_p f_j, \; g_{n+a,n+b} = \sigma \delta_{ab} + \sigma f_{n+a} f_{n+b}. \qquad (2.6)$$

Vektorių $\vec{n}$ paveikę afinoriumi F (1.2), turime vektorių $F(\vec{n})$, kurio koordinatės $F_\alpha^\beta n^\alpha$ yra:

$$F\left(\vec{n}\right)\left(\rho f_{n+1} \quad \rho f_{n+2} \quad \ldots \quad \rho f_{2n-1} \quad -\rho \quad f_1 \quad \ldots \quad f_{n-1} \quad f_n\right)\cdot\frac{1}{k}, \tag{2.7}$$

$$\rho=\omega\sigma=\pm 1.$$

Gautą vektorių $F\left(\vec{n}\right)$ išreiškime vektoriais $\vec{B}_i$. Iš (2.2), $(2.5)_2$ ir (2.7) randame dydžius ξ^i:

$$\xi^i\left(-\rho f_{n+1} \quad -\rho f_{n+2} \quad \ldots \quad -\rho f_{2n-1} \quad \rho \quad -f_1 \quad \ldots \quad -f_{n-1}\right)\frac{1}{k}. \tag{2.8}$$

Paveikiame liečiamuosius vektorius $\vec{B}_i$ afinoriumi F ir gautus vektorius išreiškiame tiesiškai nepriklausomais vektoriais $\vec{B}_i$, $\vec{n}$. Iš (1.2) išraiškos pritaikę (1.1), (2.2), (2.3) formules rasime koeficientus φ_i^j, η_i.

Tarkime, kad $i=1$. Tada iš lygybės $F_\alpha^\beta B_1^\alpha=\varphi_1^j B_j^\beta+\eta_1 n^\beta$, kai $\beta=1$, turime $F_\alpha^1 B_1^\alpha=\varphi_1^1 B_1^1+\varphi_1^2 B_2^1+\varphi_1^3 B_3^1+\ldots+\varphi_1^{2n-1} B_{2n-1}^1+\eta_1 n^1$. Iš čia $\varphi_1^1+\eta_1\frac{f_1}{k}=0$ arba $\varphi_1^1=-\eta_1\frac{f_1}{k}$.

Analogiškai, kai $\beta=2,\ldots,n-1$, $\varphi_1^b=-\eta_1\frac{f_b}{k}$.

Jei $\beta=n$, $\varphi_1^n+\eta_1\frac{f_n}{k}=f_1\omega$, arba $\varphi_1^n=-\eta_1\frac{f_n}{k}+f_1\omega$.

Kai $\beta=n+1$, $\varphi_1^{n+1}+\eta_1\frac{f_{n+1}\sigma}{k}=1$, arba $\varphi_1^{n+1}=-\eta_1\frac{f_{n+1}\sigma}{k}+1$.

Kai $\beta=n+2$, $\varphi_1^{n+2}+\eta_1\frac{f_{n+2}\sigma}{k}=0$, arba $\varphi_1^{n+2}=-\eta_1\frac{f_{n+2}\sigma}{k}$.

Analogiškai, kai $\beta=n+3,\ldots,2n-1$, $\varphi_1^{n+b}=-\eta_1\frac{f_{n+b}\sigma}{k}$.

Pagaliau, jei $\beta=2n$, $\varphi_1^1 f_1+\varphi_1^2 f_2+\ldots+\varphi_1^{2n-1} f_{2n-1}+\eta_1\frac{-\sigma}{k}=0$.

Iš paskutinės lygties randame η_1:

$$-\frac{f_1^{\,2}\eta_1}{k}-\frac{f_2^{\,2}\eta_1}{k}-\ldots-\frac{f_{n-1}^{\,2}\eta_1}{k}-\frac{f_n^{\,2}\eta_1}{k}+f_1 f_n\omega+f_{n+1}-\frac{f_{n+1}^2\eta_1\sigma}{k}-\frac{f_{n+2}^2\eta_1\sigma}{k}-\ldots-\frac{f_{2n-1}^2\eta_1\sigma}{k}-\frac{\sigma\eta_1}{k}=0,$$

$$\frac{\eta_1}{k}\left(-f_1^2-f_2^2-\ldots-f_{n-1}^2-f_n^2-f_{n+1}^2\sigma-f_{n+2}^2\sigma-\ldots-f_{2n-1}^2\sigma-\sigma\right)=-\omega f_n f_1-f_{n+1},$$

$$\eta_1=\frac{\left(\omega f_1 f_n+f_{n+1}\right)k}{-f_1^2-f_2^2-\ldots-f_{n-1}^2-f_n^2-f_{n+1}^2\sigma-f_{n+2}^2\sigma-\ldots-f_{2n-1}^2\sigma-\sigma}=\frac{\left(\omega f_1 f_n+f_{n+1}\right)\varepsilon}{k}.$$

Vadinasi, žinome ir $\varphi_1^a = -\frac{f_b \eta_1}{k}$, $\varphi_1^n = -\frac{f_n \eta_1}{k} + \omega f_1, \varphi_1^{n+b} = \delta_1^b - \frac{\sigma f_{b+n} \eta_1}{k}$.

Panašiai randame $\eta_2, ..., \eta_{n-1}$., bei $\varphi_2^i, ..., \varphi_{n-1}^i$:

$$\eta_2 = \frac{(\omega f_2 f_n + f_{n+2})\varepsilon}{k} \ , \ldots, \ \eta_{n-1} = \frac{(\omega f_{n-1} f_n + f_{2n-1})\varepsilon}{k},$$

$$\varphi_a^b = -\frac{f_b \eta_a}{k}, \varphi_a^n = -\frac{f_n \eta_a}{k} + \omega f_a, \varphi_a^{n+b} = \delta_a^b - \frac{\sigma f_{b+n} \eta_a}{k}.$$

Tarkime, jog $i = n$. Tada $F(\vec{B}_n) = \varphi_n^i \vec{B}_i + \eta_n \vec{n}$. Iš čia $\varphi_n^1 + \eta_n \frac{f_1}{k} = 0$, arba $\varphi_n^1 = -\eta_n \frac{f_1}{k}$.

Analogiškai $\varphi_n^n + \eta_n \frac{f_n}{k} = f_n \omega$, arba $\varphi_n^n = -\eta_n \frac{f_n}{k} + f_n \omega$; $\varphi_n^{n+1} + \eta_n \frac{f_{n+1}\sigma}{k} = 0$, arba $\varphi_n^{n+1} = -\eta_n \frac{f_{n+1}\sigma}{k}$.

Pagaliau $\varphi_n^{2n-1} + \eta_n \frac{f_{2n-1}\sigma}{k} = 0$, arba $\varphi_n^{2n-1} = -\eta_n \frac{f_{2n-1}\sigma}{k}$. Jei sulyginsime paskutiniąsias lygių vektorių koordinates, gausime lygybę

$$\varphi_n^1 f_1 + \varphi_n^2 f_2 + \ldots + \varphi_n^{2n-1} f_{2n-1} + \eta_n \frac{-\sigma}{k} = 1.$$

Iš šios lygties randame η_n:

$$-\frac{f_1^2 \eta_n}{k} - \frac{f_2^2 \eta_n}{k} - \ldots - \frac{f_{n-1}^2 \eta_n}{k} - \frac{f_n^2 \eta_n}{k} + f_n^2 \omega - \frac{f_{n+1}^2 \eta_n \sigma}{k} - \frac{f_{n+2}^2 \eta_1 \sigma}{k} - \ldots - \frac{f_{2n-1}^2 \eta_n \sigma}{k} - \frac{\sigma \eta_n}{k} = 1,$$

$$\frac{\eta_n}{k}\left(-f_1^2 - f_2^2 - \ldots - f_{n-1}^2 - f_n^2 - f_{n+1}^2\sigma - f_{n+2}^2\sigma - \ldots - f_{2n-1}^2\sigma - \sigma\right) = 1 - f_n^2 \omega,$$

$$\eta_n = \frac{(1 - \omega f_n^2)k}{-f_1^2 - f_2^2 - \ldots - f_{n-1}^2 - f_n^2 - f_{n+1}^2\sigma - f_{n+2}^2\sigma - \ldots - f_{2n-1}^2\sigma - \sigma} = \frac{(\omega f_n^2 - 1)\varepsilon}{k}.$$

Įrašę šią η_n reikšmę į φ_n^i išraišką, randame

$$\varphi_n^b = -\frac{f_b \eta_n}{k}, \varphi_n^n = -\frac{f_n \eta_n}{k} + \omega f_n, \varphi_n^{n+b} = -\frac{\sigma f_{b+n} \eta_n}{k}.$$

Toliau imame $i = n+1$. Sulyginę lygių vektorių $F(\vec{B}_{n+1}) = \varphi_{n+1}^i \vec{B}_i + \eta_{n+1} \vec{n}$ pirmąsias koordinates, gauname lygybę $\varphi_{n+1}^1 + \eta_{n+1} \frac{f_1}{k} = \omega$, arba $\varphi_{n+1}^1 = \omega - \eta_{n+1} \frac{f_1}{k}$.

Sulyginę likusias koordinates, gauname $\varphi_{n+1}^{n}+\eta_{n+1}\dfrac{f_n}{k}=f_{n+1}\omega$, arba $\varphi_{n+1}^{n}=-\eta_{n+1}\dfrac{f_n}{k}+f_{n+1}\omega$,. Panašiai $\varphi_{n+1}^{n+1}+\eta_{n+1}\dfrac{f_{n+1}\sigma}{k}=0$, arba $\varphi_{n+1}^{n+1}=-\eta_{n+1}\dfrac{f_{n+1}\sigma}{k}$, ... , $\varphi_{n+1}^{2n-1}+\eta_{n+1}\dfrac{f_{2n-1}\sigma}{k}=0$, arba $\varphi_{n+1}^{2n-1}=-\eta_{n+1}\dfrac{f_{2n-1}\sigma}{k}$.

Iš paskutinių koordinačių lygybės $\varphi_{n+1}^{1}f_1+\varphi_{n+1}^{2}f_2+\ldots+\varphi_{n+1}^{2n-1}f_{2n-1}+\eta_{n+1}\dfrac{-\sigma}{k}=0$ randame η_{n+1}:

$$\omega f_1-\frac{f_1^{\,2}\eta_{n+1}}{k}-\frac{f_2^{\,2}\eta_{n+1}}{k}-\ldots-\frac{f_{n-1}^{\,2}\eta_{n+1}}{k}+\omega f_{n+1}f_n-$$
$$-\frac{f_n^{\,2}\eta_{n+1}}{k}-\frac{f_{n+1}^{2}\eta_{n+1}\sigma}{k}-\ldots-\frac{f_{2n-1}^{2}\eta_{n+1}\sigma}{k}-\frac{\sigma\eta_{n+1}}{k}=0,$$

$$\frac{\eta_{n+1}}{k}\left(-f_1^2-f_2^2-\ldots-f_{n-1}^2-f_n^2-f_{n+1}^2\sigma-f_{n+2}^2\sigma-\ldots-f_{2n-1}^2\sigma-\sigma\right)=-\omega f_1-\omega f_{n+1}f_n,$$

$$\eta_{n+1}=\frac{\left(-\omega f_1-\omega f_{n+1}f_n\right)k}{-f_1^2-f_2^2-\ldots-f_{n-1}^2-f_n^2-f_{n+1}^2\sigma-f_{n+2}^2\sigma-\ldots-f_{2n-1}^2\sigma-\sigma}=\frac{\left(\omega f_1+\omega f_{n+1}f_n\right)\varepsilon}{k}.$$

Analogiškai gauname, jog

$$\eta_{n+b}=\frac{\omega\left(f_b+f_{n+b}f_n\right)\varepsilon}{k},\ b=2,3,\ldots,n-1.$$

Hiperpaviršiuje $M_{2n-1}\left(x^i\right)\subset T\left(E_n\right)\left(x^\alpha\right)$ (2.1) gavome kovektorių

$$\eta_j\left(\omega f_1f_n+f_{n+1}\quad \omega f_2f_n+f_{n+2}\quad \ldots\quad \omega f_{n-1}f_n+f_{2n-1}\quad \omega f_n^2-1\quad \omega f_1+\omega f_{n+1}f_n\quad \ldots\quad \omega f_{n-1}+\omega f_{2n-1}f_n\right)\frac{\varepsilon}{k}.\ (2.9)$$

Įrašę η_j reikšmes į aukščiau gautas φ_{n+a}^{j} išraiškas, randame

$$\varphi_{n+a}^{b}=\omega\delta_a^b-\frac{f_b\eta_{n+a}}{k},\ \varphi_{n+a}^{n}=\omega f_{n+a}-\frac{f_n\eta_{n+a}}{k},\ \varphi_{n+a}^{n+b}=-\frac{\sigma f_{n+b}\eta_{n+a}}{k}.$$

Hiperpaviršiuje $M_{2n-1}\subset T\left(E_n\right)$ (2.1) gauto afinoriaus φ_i^j, vektoriaus ξ (2.8), kovektoriaus η_i (2.9) ir metrinio tenzoriaus g_{ij} (2.6) koordinates surašome kompaktiškai į vieną (2.10) formą:

$$\varphi_a^b = -\frac{f_b\eta_a}{k},\ \varphi_a^n = -\frac{f_n\eta_a}{k} + \omega f_a,\ \varphi_a^{n+b} = \delta_a^b - \frac{f_{b+n}\eta_a\sigma}{k},$$

$$\varphi_n^b = -\frac{f_b\eta_n}{k},\ \varphi_n^n = -\frac{f_n\eta_n}{k} + \omega f_n,\ \varphi_n^{n+b} = -\frac{\sigma f_{b+n}\eta_n}{k},$$

$$\varphi_{n+a}^b = \omega\delta_a^b - \frac{f_b\eta_{n+a}}{k},\ \varphi_{n+a}^n = \omega f_{n+a} - \frac{f_n\eta_{n+a}}{k},\ \varphi_{n+a}^{n+b} = -\frac{\sigma f_{n+b}\eta_{n+a}}{k};$$

$$\xi^a = -\frac{\rho}{k} f_{n+a},\ \xi^n = \frac{\rho}{k},\ \xi^{n+a} = -\frac{f_a}{k}; \tag{2.10}$$

$$\eta_b = \frac{(\omega f_b f_n + f_{n+b})\varepsilon}{k},\ \eta_n = \frac{(\omega f_n^2 - 1)\varepsilon}{k},\ \eta_{n+b} = \frac{(f_{n+b} f_n + f_b)\varepsilon\omega}{k};$$

$$g_{pj} = \delta_{pj} + \sigma f_p f_j,\ g_{n+a,n+b} = \sigma\delta_{ab} + \sigma f_{n+a} f_{n+b};$$

$$a, b, c, \ldots = 1, 2, \ldots, n-1,\ i, j, \ldots = 1, 2, \ldots, 2n-1,\ p, q, \ldots = 1, 2, \ldots, n.$$

Įrodysime, jog tenzoriai φ, ξ, η, g (2.10) tenkina sąlygas:

$$\begin{aligned}
&1)\ \varphi_i^j\varphi_j^k = \omega\delta_i^k + \xi^k\eta_i,\\
&2)\ \varphi_i^j\xi^i = 0,\\
&3)\ \varphi_i^j\eta_j = 0,\\
&4)\ \xi^i\eta_i = -\omega,\\
&5)\ \varphi_i^j g_{jk} = \varphi_{ik} = \rho\varphi_{ki},\\
&6)\ g_{ij}\xi^j = -\rho\varepsilon\eta_i,\ \omega = \pm 1,\ \rho = \omega\sigma = \pm 1,\ \varepsilon = \pm 1,
\end{aligned} \tag{2.11}$$

t.y. priklausomai nuo ω, σ, ρ ženklų, apibrėžia hiperpaviršiuje $M_{2n-1} \subset T(E_n)$ elipsinio arba hiperbolinio tipo I arba II rūšies beveik kontaktinę metrinę struktūrą [1].

1. Įrodysime, jog $\varphi_i^j\varphi_j^k = -\delta_i^k + \xi^k\eta_i$. Pastebime, kad

$$-\delta_\alpha^\gamma B_i^\alpha = -B_i^\gamma = -\delta_i^k B_k^\gamma = -\delta_i^j B_j^\gamma.$$

► Paveikę $(2.5)_1$ lygybę afinoriumi F, gauname, kad

$$F_\beta^\gamma F_\alpha^\beta B_i^\alpha = \varphi_i^j\varphi_j^k B_k^\gamma + \varphi_i^k\eta_k C^\gamma - \eta_i\xi^j B_j^\gamma = \omega B_i^\gamma,$$

$$\omega\delta_\alpha^\gamma B_i^\alpha = \varphi_i^j\varphi_j^k B_k^\gamma + \varphi_i^k\eta_k C^\gamma - \eta_i\xi^k B_k^\gamma = \omega\delta_i^k B_k^\gamma.$$

Kadangi vektoriai $\vec{B}_i$ ir $\vec{n}$ yra tiesiškai nepriklausomi, galima sulyginti koeficientus prie B_k^γ:

$$\varphi_i^j\varphi_j^k = \omega\delta_i^k + \eta_i\xi^k.$$

Koeficientai prie n^γ taip pat turi būti lygūs: $\varphi_i^k \eta_k = 0$. Analogiškai įrodoma, kad $\varphi_a^b \xi^a = 0$. ◄

1. Įrodysime, jog $\xi^i \eta_i = -\omega$.

► Čia turime skirti du atvejus.

I) Jei $\rho = -1$, tuomet $\rho = \omega\sigma => -1$, $\sigma = -\omega$. Kadangi $\xi^a = \frac{1}{k} f_{n+a}$, $\xi^n = \frac{-1}{k}$,

$\xi^{n+a} = -\frac{f_a}{k}$, o $\eta_a = \frac{(\omega f_a f_n + f_{n+a})\varepsilon}{k}$, $\eta_n = \frac{(\omega f_n^2 + 1)\varepsilon}{k}$, $\eta_{n+b} = \frac{(\omega f_{n+b} f_n + f_b)\varepsilon\omega}{k}$, tai

$$\xi^i \eta_i = \frac{\varepsilon}{k^2}\left(\omega \sum_a f_a f_n f_{n+a} + \sum_a f_{n+a} f_{n+a} - \omega f_n^2 + 1 - \omega \sum_a f_a f_a - \omega \sum_a f_n f_a f_{n+a}\right) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{k^2}\left(-\omega\left(\sum_a f_a f_a + f_n^2\right) + \sum_a f_{n+a} f_{n+a} + 1\right)\frac{\sigma}{\sigma} = \frac{\varepsilon}{k^2 \sigma}\left(f_a f_a + f_n^2 + \sigma\left(f_{n+a} f_{n+a} + 1\right)\right) =$$

$$= \sigma = -\omega.$$

II) Jei $\rho = 1$, tuomet $\sigma = \omega = \pm 1$. Tuo atveju, $\xi^a = -\frac{1}{k} f_{n+a}$, $\xi^n = \frac{1}{k}$,

$\xi^{n+a} = -\frac{f_a}{k}$, ir galioja (2.4) formulė. Iš čia

$$\xi^i \eta_i = \frac{\varepsilon}{k^2}\left(-\omega \sum_a f_a f_n f_{n+a} - \sum_a f_{n+a} f_{n+a} + \omega f_n^2 - 1 - \omega \sum_a f_a f_a - \omega \sum_a f_n f_a f_{n+a}\right) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{k^2}\left[-2\omega \sum_a (f_a f_{n+a}) \sum_b (f_b f_{n+b}) + \omega \sum_a (f_a f_{n+a}) \sum_b (f_b f_{n+b}) - 1 - \sum_a f_{n+a} f_{n+a} - \omega \sum_a f_a f_a\right] =$$

$$= \frac{\varepsilon}{k^2}\left[-\sum_a (f_{n+a} f_{n+a}) - 1 - \omega \sum_a f_a f_a - \omega f_n^2\right] = \frac{-\omega\varepsilon}{k^2}\left[f_1^2 + \ldots + f_n^2 + \omega\left(f_{n+1}^2 + \ldots + f_{2n-1}^2 + 1\right)\right] =$$

$$= \frac{-\omega\varepsilon}{k^2}\left[f_1^2 + \ldots + f_n^2 + \sigma\left(f_{n+1}^2 + \ldots + f_{2n-1}^2 + 1\right)\right] = -\omega.$$

Taigi abiem atvejais $\xi^i \eta_i = -\omega$. ◄

2. Toliau įrodysime $(2.11)_5$ formulę.

► Žinome, jog $F_\alpha^\beta G_{\beta\gamma} = \rho F_\gamma^\beta G_{\beta\alpha}$, $\rho = \omega\sigma = \pm 1$. Taip pat žinoma, jog $g_{ij} = G_{\alpha\beta} B_i^\alpha B_j^\beta$,

$G_{\alpha\beta} B_i^\alpha n^\beta = 0$, nes $\vec{B}_i \perp \vec{n}$. Iš $(2.5)_1$ $\varphi_i^j B_j^\alpha = F_\alpha^\beta B_i^\beta - \eta_i n^\alpha$, todėl

$$\varphi_{ik} = \varphi_i^j g_{jk} = \varphi_i^j G_{\alpha\beta} B_j^\alpha B_k^\beta = G_{\alpha\beta} B_k^\beta \left(F_\gamma^\alpha B_i^\gamma - \eta_i n^\alpha\right) = G_{\alpha\beta} B_k^\beta F_\gamma^\alpha B_i^\gamma - G_{\alpha\beta} B_k^\beta \eta_i n^\alpha =$$

$$= \rho G_{\gamma\alpha} F_\beta^\alpha B_k^\beta B_i^\gamma = \rho G_{\gamma\alpha} B_i^\gamma \left(\varphi_k^l B_l^\alpha + \eta_k n^\alpha\right) = \rho G_{\gamma\alpha} B_i^\gamma \varphi_k^l B_l^\alpha + \rho G_{\gamma\alpha} B_i^\gamma \eta_k n^\alpha = \rho g_{il} \varphi_k^l = \rho \varphi_{ki}.$$ ◄

3. Liko įrodyti, kad $g_{ij} \xi^j = -\rho\varepsilon\eta_i$.

► Tarkime, jog $i = 1$. Tuomet

$$g_{1j}\xi^{j} = \frac{1}{k}\left[\left(1+\sigma f_1^{2}\right)\left(-\rho f_{n+1}\right)+\sigma f_1 f_2\left(-\rho f_{n+2}\right)+\ldots+\sigma f_1 f_{n-1}\left(-\rho f_{2n-1}\right)+\sigma f_1 f_n \rho+\sigma f_1 f_{n+1}\left(-f_1\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{k}\left[\sigma f_1 f_{n+2}\left(-f_2\right)+\ldots+\sigma f_1 f_{2n-1}\left(-f_{n-1}\right)\right]=\frac{1}{k}\left[-\rho f_{n+1}-\rho\sigma f_1^{2} f_{n+1}-\sigma\rho f_1 f_2 f_{n+2}-\ldots-\sigma\rho f_1 f_{n-1} f_{2n-1}\right]+$$

$$+\frac{1}{k}\left[\sigma\rho f_1 f_n-\sigma f_1^{2} f_{n+1}-\sigma f_1 f_2 f_{n+2}-\ldots-\sigma f_1 f_{2n-1} f_{n-1}\right]=\frac{1}{k}\left[-\sigma\omega f_{n+1}-\omega f_1\left(f_1 f_{n+1}+\ldots+f_{n-1} f_{2n-1}-f_n\right)\right]-$$

$$-\frac{1}{k}\left[\sigma f_1\left(f_1 f_{n+1}+f_2 f_{n+2}+\ldots+f_{2n-1} f_{n-1}\right)\right]=\frac{1}{k}\left[-\rho f_{n+1}-\omega f_1\left(\sum_a f_a f_{n+a}-f_n\right)-\sigma f_1\sum_a f_a f_{n+a}\right].$$

Vėl skiriami 2 atvejai:

I. Jei $\rho=\omega\sigma=-1$, tada $\omega=-\sigma$, todėl $g_{1j}\xi^{j} = \frac{1}{k}\left(f_{n+1}+\omega f_1 f_n\right)=\varepsilon\eta_1$.

II. Jei $\rho=\omega\sigma=1$, tuomet $\omega=\sigma$, ir iš (2.4) formulės

$$g_{1j}\xi^{j} = \frac{1}{k}\left(-f_{n+1}-\sigma f_1\sum_a f_a f_{n+a}\right)=\frac{1}{k}\left(-f_{n+1}-\omega f_1 f_n\right)=-\varepsilon\eta_1 .$$

Abiem atvejais $g_{1j}\xi^{j}=-\rho\varepsilon\eta_1$. Analogiškai įrodoma, jog tuo atveju, kai $i=2,3,\ldots,2n-1,\ g_{ij}\xi^{j}=-\rho\varepsilon\eta_i$. ◄

Įrodėme, jog tenzoriai $\varphi,\ \xi,\ \eta,\ g$ (2. 10) tenkina (φ,ξ,η,g)-struktūros aksiomas (2.11). Tuo būdu teisingas toks teiginys.

Teorema 1. *Euklido n-matės erdvės $E_n\left(x^{q}\right)$ liečiamosios sluoksnuotės $T\left(E_n\right)$ hiperpaviršiuje (2.1), normalizuotame ε-vienetiniu normaliniu vektoriumi (2.3), indukuojasi elipsinio $(\omega=-1)$ arba hiperbolinio$(\omega=1)$ tipo I $(\rho=-1)$arba II$(\rho=1)$ rūšies beveik kontaktinė metrinė struktūra (φ,ξ,η,g) (2.10).*

Kitame paragrafe nagrinėsime apibendrintosios (φ,ξ,η,g)-struktūros (2.10) erdvės $T\left(E_n\right)$ hiperpaviršiuose M_{2n-1} (2.1) savybes ir išaiškinsime beveik kontaktinių metrinių hiperpaviršių geometrinę prasmę bazėje E_n.

3. BEVEIK KONTAKTINIŲ METRINIŲ ERDVĖS $T(E_n)$ HIPERPAVIRŠIŲ SAVYBĖS IR GEOMETRINĖ PRASMĖ

Ištirsime (φ, ξ, η, g)-struktūros (2.10) savybes.

Iš Gauso lygčių [1]: $\partial_i B_j^\alpha - \Gamma_{ij}^k B_k^\alpha = h_{ij} n^\alpha$ ir (2.2), (2.3) išraiškų išplaukia, jog hiperpaviršiaus $M_{2n-1} \subset T(E_n)$ asimptotinis tenzorius

$$h_{ij} = \partial_i B_j^{2n} \cdot n^{2n} \sigma = \frac{-f_{ij} \cdot \varepsilon}{k}, \; k = \sqrt{|M|}, \varepsilon = \mathrm{sgn}(M), \; f_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}, \tag{3.1}$$

o metrinio tenzoriaus g_{ij} (2.10)$_4$ Kristofelio simboliai

$$\Gamma_{ij}^p = \frac{f_p f_{ij}}{M}, \; \Gamma_{ij}^{n+a} = \frac{\sigma f_{n+a} f_{ij}}{M}, \tag{3.2}$$

$$M = \varepsilon \cdot k^2 = f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_n^2 + \sigma\left(f_{n+1}^2 + \ldots + f_{2n-1}^2 + 1\right),$$

$$p = 1, 2, \ldots, n, \; i, j, \ldots = 1, 2, \ldots, 2n-1, a, b, \ldots = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Apibrėžimas 1. Afinorinė struktūra vadinama integruojamąja, jei afinoriaus Nijenhuis‘o tenzorius N_{ij}^k lygus 0:

$$N_{ij}^k = \varphi_i^l \partial_l \varphi_j^k - \varphi_j^l \partial_l \varphi_i^k - \varphi_l^k \left(\partial_i \varphi_j^l - \partial_j \varphi_i^l\right) = 0. \tag{3.3}$$

Žinoma [1], jog elipsinio (hiperbolinio) tipo I rūšies (φ, ξ, η, g)-struktūra elipsinio (hiperbolinio) tipo *A*-erdvės hiperpaviršiuje yra integruojamoji tada ir tik tada, kai galioja viena iš ekvivalenčių sąlygų:

$$1) \quad h_{ij} + \omega\left(h_i \eta_j + h_j \eta_i - \lambda \eta_i n_j\right) = 0; \tag{3.4}$$

$$2) \quad h_{ik} \varphi_j^k + \omega \eta_i \varphi_j^k h_k = 0,$$

$$\omega = \pm 1, \; h_k = h_{ke} \xi^e, \lambda = -\omega \cdot h_e \xi^e = -\omega h_{ek} \xi^e \xi^k.$$

Elipsinio (hiperbolinio) tipo II rūšies (φ, ξ, η, g)-struktūra elipsinio (hiperbolinio) tipo *B*-erdvės hiperpaviršiuje yra integruojamoji tada ir tik tada, kai galioja viena iš ekvivalenčių lygybių [1]:

$$1) \quad h_{ij} \varphi_k^j - h_{kj} \varphi_i^j + \omega \eta_i \varphi_k^e h_e - \omega \eta_k \varphi_i^e h_e = 0; \tag{3.5}$$

$$2) \quad h_{ij} = \omega \varphi_i^e h_{ek} \varphi_j^k + \omega \lambda \eta_i \eta_j - \omega h_i \eta_j - \omega h_j n_i.$$

Apibrėžimas 2. Beveik kontaktinė metrinė stuktūra vadinama normaliąja, jei lygus nuliui tenzorius S_{ij}^k:

$$S_{ij}^k = N_{ij}^k + \xi^k \left(\partial_i \eta_j - \partial_j \eta_i\right) = 0. \tag{3.6}$$

Beveik kontaktinės metrinės struktūros *A*-erdvės (*B*-erdvės) hiperpaviršiuje normalumas (3.6) ekvivalentus kiekvienai iš lygybių [1]:

$$\begin{aligned} &1)\ \nabla_i \eta_j - \rho \nabla_j \eta_i = 0\ , \\ &2)\ h_{ij}\varphi_k^j - \rho h_{kj}\varphi_i^j = 0\,,\ \rho = -1(+1). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Čia ∇ - kovariantinio diferencijavimo ženklas, t.y. $\nabla_k \eta_i = \partial_k \eta_i - \Gamma_{ki}^j \eta_j$, $\Gamma_{ki}^j = \Gamma_{ik}^j$ yra metrikos g Kristofelio simboliai.

Apibrėžimas 3. Kovektorius η ((φ, ξ, η, g)-struktūra) vadinamas (vadinama) kontaktiniu (kontaktine), jei η yra aukščiausio rango kovektorius:

$$\eta \wedge \underbrace{d\eta \wedge ... \wedge d\eta}_{n-1} \neq 0. \tag{3.8}$$

Čia d – išorinio diferencijavimo simbolis, $\wedge$ – išorinės daugybos simbolis.

Apibrėžimas 4. 1-forma η vadinama uždara, jei jos išorinis diferencialas lygus 0:

$$\nabla_i \eta_j - \nabla_j \eta_i = \partial_i \eta_j - \partial_j \eta_i = 0\,, \tag{3.9}$$

t.y. jei kovektorius η yra gradientas.

Apibrėžimas 5. Elipsinio arba hiperbolinio tipo I rūšies (φ, ξ, η, g)-struktūra ($\rho = -1$) vadinama kontaktine metrine, arba beveik Sasakio struktūra, jei

$$\nabla_i \eta_j - \nabla_j \eta_i = 2\alpha \varphi_{ij},\ \alpha = const \neq 0,\ \varphi_{ij} = \varphi_i^k g_{kj} = -\varphi_{ji}\ , \tag{3.10}$$

ir Sasakio struktūra, jei ji yra dar ir normalioji.

Atsižvelgiant į $(3.7)_1$ formulę, *A*-erdvės hiperpaviršiuje sasakiškumas apibrėžiamas lygybe

$$\nabla_i \eta_j = \alpha \varphi_{ij}\,, \alpha = const \neq 0,\ \varphi_{ij} = -\varphi_{ji}. \tag{3.11}$$

Kai $\rho = -1$, iš (3.6), (3.7) ir (3.4) matome, jog abiejų tipų I rūšies (φ, ξ, η, g)-struktūra yra normalioji ir integruojamoji kartu tada ir tik tada, kai galioja viena iš ekvivalenčių sąlygų:

$$\begin{aligned} &1)\ \ \nabla_i n_j = 0; \\ &2)\ \ h_{ij} = -\omega \lambda \eta_i \eta_j; \\ &3)\ \ h_{ik}\varphi_j^k = 0\,, \lambda = -\omega h_{ek}\xi^e \xi^k. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Apibrėžimas 6. Jei kovektoriui η galioja lygybė

$$\nabla_i \eta_j + \nabla_j \eta_i = 0, \tag{3.13}$$

vektorius $\vec{\xi}$ vadinamas Kilingo vektoriumi.

Apibrėžimas 7. Elipsinio arba hiperbolinio tipo II rūšies (φ, ξ, η, g)-struktūra ($\rho = 1$) vadinama parakontaktine metrine, arba beveik para-Sasakio, jei

$$\nabla_i \eta_j + \nabla_j \eta_i = 2\alpha\varphi_{ij}, \ \alpha = const \neq 0, \ \varphi_{ij} = \varphi_{ji}, \tag{3.14}$$

ir specialia parakontaktine metrine struktūra, arba para-Sasakio struktūra, jei

$$\nabla_i \eta_j = \alpha\varphi_{ij}, \ \alpha = const \neq 0, \ \varphi_{ij} = \varphi_{ji}. \tag{3.15}$$

Kai $\rho = 1$, iš (3.3), bei (3.7) formulių išplaukia, jog II rūšies normalioji (φ, ξ, η, g)-struktūra yra kartu ir integruojamoji. Tačiau ji nėra kontaktinė, nes 1-forma η yra uždara $(d\eta = 0)$. Dėl tos priežasties II rūšies (φ, ξ, η, g)-struktūros, tenkinančios (3.15), (3.14) sąlygas, vadinamos para-kontaktinėmis struktūromis.

Jau minėjome, jog liečiamosios sluoksniuotės $T(E_n)$ hiperpaviršius $M_{2n-1}(x^i)$, kurio išreikštinė lygtis yra

$$x^{2n} = f(x^p, x^{n+a}), \quad a = 1, 2, ..., n-1, \quad p = 1, 2, 3, ..., n,$$

turi tokią geometrinę prasmę bazėje E_n.

Kiekviename euklidinės n-matės erdvės E_n taške $M_0(x_0^p)$ (koordinatės duotos ortonormuoto reperio $R = \left(O, \vec{E}_p\right)$ atžvilgiu) panagrinėkime $(n-1)$-parametrinę vektorių $\vec{v}\left\{v^p\right\}$ šeimą:

$$v^n = f\left(x_0^p, v^a\right).$$

Jei jų atstovus atidėsime nuo taško M_0, tuomet atstovų galai euklidinėje erdvėje E_n „brėš“ $(n-1)$-matį paviršių I_{M_0}, kuris vadinamas taško M_0 indikatrise. Indikatrisės lygtis reperio R atžvilgiu yra

$$X^n - x_0^n = f\left(x_0^p, X^a - x_0^a\right). \tag{3.16}$$

Reperio $R_0 = \left(M_0, \vec{E}_p\right)$ atžvilgiu indikatrisės lygtis bus

$$y^n = f\left(x_0^p, y^a\right). \tag{3.17}$$

Čia y^p yra kintamo indikatrisės taško N koordinatės reperio R_0 atžvilgiu, o X^p - to taško koordinatės reperio R atžvilgiu.

Tarp hiperpaviršių $M_{2n-1} \subset T(E_n)$ (2.1) ir indikatrisių laukų (3.16) pobūdžio egzistuoja priklausomybė. Tolesnis mūsų tikslas klasifikuoti tuos laukus beveik kontaktinių metrinių struktūrų teorijos požiūriu.

Nustatysime, kokius indikatrisių laukus apibrėžia normalieji, integruojamieji, kontaktiniai ir kitokie visų rūšių ir tipų beveik kontaktiniai metriniai erdvės $T(E_n)$ hiperpaviršiai M_{2n-1}(2.1).

Kadangi bendru atveju sunku pastebėti indikatrisių laukų pobūdį, tirsime atskirus hiperpaviršių atvejus.

1. Panagrinėkime liečiamosios sluoksniuotės $T(E_n)$ hiperplokštumą Π_{2n-1}, apibrėžtą išreikštine lygtimi

$$x^{2n} = A_i x^i + A,\ A, A_i = \text{const}. \tag{3.18}$$

Hiperplokštumai $f_i = A_i = const.$, taigi $f_{ij} = 0$ ir $h_{ij} = 0$. Lygybės (3.4), (3.5), (3.7), (3.9), (3.12), (3.13) yra homogeninės f_{ij} atžvilgiu, todėl jos virsta tapatybėmis. Dėl tos pačios priežasties nelygybė (3.8) negali būti teisinga. Kadangi $rang(\varphi_i^j) = 2n-2$, tai matricos $(\varphi_{ij} = \varphi_i^k g_{kj})$ rangas taip pat lygus 2*n*-2, t.y. bitiesinės formos koeficientai φ_{ij} negali būti visi lygūs 0. Vadinasi, lygybės (3.10), (3.11), (3.14), (3.15) negalimos.

Hiperplokštumą (3.18) atitinkantis indikatrisių laukas $I_{M(x^p)}$ apibrėžiamas reperio $R = (0, \vec{E}_i)$ atžvilgiu lygtimi

$$X^n - x_0^n = A_p x^p + A_{n+a}\left(X^a - x^a\right) + A, \tag{3.19}$$

o reperio $R_M = (M, \vec{E}_i)$ atžvilgiu lygtimi

$$y^n = A_p x^p + A_{n+a} y^a + A.$$

Matome, jog hiperplokštumos $\Pi_{2n-1}(x^i) \subset T(E_n)$ (3.18) geometrinė prasmė bazėje E_n yra Euklido *n*-matės erdvės E_n hiperplokštumų P_{n-1} (3.19) laukas.

Šios hiperplokštumos turi tą patį normalinį vektorių $\vec{m}\{A_{n+a}, -1\}$ bazės $\{\vec{E}_i\}$ atžvilgiu, todėl yra lygiagrečios. Tuo būdu įrodytas toks teiginys.

Teorema 2. *Liečiamosios sluoksniuotės $T(E_n)$ hiperplokštumoje (3.18) indukuojasi normalioji, integruojamoji, nekontaktinė (φ, ξ, η, g)-struktūra (2.10). 1-forma η yra uždara, kovektorius η_i yra gradientas, vektorius $\vec{\xi}$ yra Kilingo vektorius.*

Ši struktūra negali būti nei beveik Sasakio, nei beveik para-Sasakio struktūra. Hiperplokštumos $\Pi_{2n-1} \subset T(E_n)$ (3.19) geometrinė prasmė bazėje E_n — lygiagrečių hiperplokštumų P_{n-1} (3.19) laukas.

Įdomus atvejis, kai $A_p = 0$, t.y. hiperpaviršiaus M_{2n-1} lygtis yra $x^{2n} = A_{n+a} x^{n+a} + A$, o jį atitinkantis indikatrisių laukas bazėje E_n reperio $(M, \vec{E}_i)$ atžvilgiu apibrėžiama lygtimi

$$y^n = A_{n+a} y^a + A.$$

Šiuo atveju sakysime, jog indikatrisės kiekviename taške $M(x^p)$ yra „vienodos". Indikatrisių lauko lygtis reperio R atžvilgiu yra

$$X^n - x^n = A_{n+a}\left(X^a - x^a\right) + A.$$

Iš šios lygties matome, jog taško $M_1\left(x_1^p\right)$ indikatrisė I_{M_1}: $X^n - x_1^n = A_{n+a}\left(X^a - x_1^a\right) + A$ pereina į taško $M_2\left(x_2^p\right)$ indikatrisę I_{M_2}: $X^n - x_2^n = A_{n+a}\left(X^{/a} - x_2^a\right)$ atliekant lygiagretųjį postūmį vektoriumi $\overrightarrow{M_1M_2}\left\{x_2^p - x_1^p\right\}$.

2. Panagrinėkime elipsinio $(\omega = -1)$ arba hiperbolinio $(\omega = 1)$ tipo A-erdvės $(\rho = -1)$ $T(E_n)$ hipersferą S_{2n-1}, kurios neišreikštinė lygtis yra

$$\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 + \ldots + \left(x^n\right)^2 + \sigma\left[\left(x^{n+1}\right)^2 + \ldots + \left(x^{2n-1}\right)^2 + \left(x^{2n}\right)^2\right] = c \neq 0.$$

Kai $\sigma = -1,\ c = 0$, turime indekso n kūgį; kai $\sigma = 1,\ c = 0$ — tašką O.

Funkcijos $x^{2n} = f\left(x^i\right)$ apibrėžimo sritis nusakoma šia nelygybe:

$$\left(x^{2n}\right)^2 = \sigma \cdot c - \sigma\left(x^1\right)^2 - \ldots - \sigma\left(x^n\right)^2 - \left(x^{n+1}\right)^2 - \ldots - \left(x^{2n-1}\right)^2 \geq 0.$$

Dėl patogumo tirsime pusę sferos, kurios išreikštinė lygtis yra

$$x^{2n} = \sqrt{\sigma \cdot c - \sigma\left(x^1\right)^2 - \ldots - \sigma\left(x^n\right)^2 - \left(x^{n+1}\right)^2 - \ldots - \left(x^{2n-1}\right)^2}. \qquad (3.20)$$

Nesunku rasti šios funkcijos dalines išvestines:

$$f_p = \frac{-\sigma \cdot x^p}{f},\ f_{n+a} = \frac{-x^{n+a}}{f},\ f_{pq} = \frac{-\sigma \cdot \delta_{pq} f^2 - x^p x^q}{f^3},$$

$$f_{n+a,n+b} = \frac{-\delta_{n+a}^{n+b} f^2 - x^{n+a} x^{n+b}}{f^3},\ f_{p,n+a} = \frac{-\sigma \cdot x^p x^{n+a}}{f^3}.$$

Iš čia ir $(2.10)_4$ išraiškos matome, jog $f_{ij} = \frac{-\sigma}{f} g_{ij}$, o iš (3.2) formulės

$$h_{ij} = \mu \cdot g_{ij},\ \mu = \frac{\varepsilon\sigma}{\sqrt{|c|}} = \text{const} \neq 0.$$

Įrodysime, jog elipsinio arba hiperbolinio tipo A-erdvės hipersfera (3.20) turi normaliąją elipsinio arba hiperbolinio I rūšies (φ, ξ, η, g)-struktūrą (2.10).

► Kadangi A-erdvės atveju $\rho = -1$, tai

$$h_{ij}\varphi_k^j - \rho h_{kj}\varphi_i^j = h_{ij}\varphi_k^j + h_{kj}\varphi_i^j = \mu g_{ij}\varphi_k^j + \mu g_{kj}\varphi_i^j = \mu\left(g_{ij}\varphi_k^j + g_{kj}\varphi_i^j\right) = \mu\left(\varphi_{ki} + \varphi_{ik}\right) = 0.$$

Čia mes pasirėmėme tenzoriaus φ_{ij} antisimetriškumu $(2.11)_5$. Iš $(3.7)_2$ formulės išplaukia struktūros normalumas. ◄

Ši struktūra nėra integruojamoji, nes netenkina integruojamumo sąlygos $(3.4)_2$.

► $h_{ik}\varphi_j^k + \omega\eta_i\varphi_j^k h_{ke}\xi^e = \mu g_{ik}\varphi_j^k + \omega\eta_i\varphi_j^k \mu g_{ke}\xi^e = \mu\left(\varphi_{ji} + \omega\eta_i\varphi_{je}\xi^e\right) = \mu\varphi_{ji} \neq 0,$ nes $rang\left(\varphi_{ij}\right) = 2n-2.$ ◄

Išaiškinsime hipersferos $S_{2n-1} \subset T(E_n)$ (3.20) geometrinę prasmę bazėje E_n. Indikatrisės I_M kiekviename euklidinės erdvės E_n taške $M(x^p)$ apibrėžiamas neišreikštine lygtimi reperio $\left(M, \vec{E}_i\right)$ atžvilgiu:

$$\left(y^1\right)^2 + \left(y^2\right)^2 + \ldots + \left(y^n\right)^2 = \sigma c - \sigma\left(x^1\right)^2 - \sigma\left(x^2\right)^2 - \ldots - \sigma\left(x^n\right)^2.$$

Galimi du atvejai:

1. Jei $\sigma = 1,\ c = r^2$, indikatrisės egzistuoja hiperrutulio

$$\left(x^1\right)^2 + \ldots + \left(x^n\right)^2 = r^2 \tag{3.21}$$

vidiniuose taškuose. Jos yra bazės E_n hipersferos S_{n-1}. Hipersferų $S^t{}_{n-1}$ $\left(x^1\right)^2 + \ldots + \left(x^n\right)^2 = t^2 = const < r^2$ taškuose $M(t)$ indikatrisės $I_{M(t)}$ „vienodos“ hipersferos, kurių centrai yra taškai $M \in S_{n-1}^t$, o spinduliai lygūs $\sqrt{r^2 - t^2}$. Koordinačių pradžios O indikatrisė I_O turi didžiausią spindulį r. Taškui M artėjant prie sferos (3.21), indikatrisių spinduliai artėja į 0.

2. Tarkime, jog $\sigma = -1$, t.y. metrika liečiamojoje sluoksniuotėje yra nulinės signatūros pseudoeuklidinė metrika.

   a) Jei $c < 0$, indikatrisės egzistuoja visuose erdvės E_n taškuose ir yra bazės E_n hipersferos S_{n-1}.

   b) Jei $c = r^2 > 0$, indikatrisės egzistuoja hiperrutulio (3.21) išorės taškuose; indikatrisė taške M yra hipersfera, kurios centras taške M, o spindulys lygus $\sqrt{u^2 - r^2}$, čia $u = OM$. Hipersferų S_{n-1}^u: $\left(x^1\right)^2 + \ldots + \left(x^n\right)^2 = u^2$ taškuose visos indikatrisės „vienodos“.

Taškui M artėjant prie sferos (3.21), indikatrisių spinduliai artėja į 0.

Teorema 3. *Euklido n-matės erdvės E_n liečiamosios sluoksniuotės $T(E_n)$ hipersfera S_{2n-1} (3.20) turi normaliąją, neintegruojamąją elipsinio $(\omega = -1)$ arba hiperbolinio $(\omega = 1)$ tipo I rūšies $(\rho = -1)$ (φ, ξ, η, g)-struktūrą (2.10). Hipersferos S_{2n-1} geometrinė prasmė bazėje E_n — hipersferų S_{n-1} laukas.*

3. Panagrinėkime elipsinio $(\omega = -1)$ arba hiperbolinio $(\omega = 1)$ tipo *B*-erdvės $(\rho = 1)$ $T(E_n)$ tenzorių $F_{\alpha\gamma} = F_\alpha^\beta G_{\beta\gamma}$. Jo matrica turi pavidalą

$$\left(F_{\alpha\gamma}\right)=\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ \rho I_n & 0 \end{pmatrix}, \rho=1. \tag{3.22}$$

Čia (I_n) yra n-tos eilės vienetinė matrica, o (0)- n-tos eilės nulinė matrica. Matrica (3.22) yra simetrinė, neišsigimusi, todėl gali būti nauju metriniu liečiamosios sluoksniuotės $T(E_n)$ tenzoriumi.

Izotropinis kūgis šios metrikos atžvilgiu, apibrėžiamos neišreikštine lygtimi

$$x^1x^{n+1}+\ldots+x^{n-1}x^{2n-1}+x^nx^{2n}=0,$$

arba išreikštine lygtimi

$$x^{2n}=\frac{-x^1x^{n+1}-\ldots-x^{n-1}x^{2n-1}}{x^n},\ x^n\neq 0. \tag{3.23}$$

Išaiškinsime liečiamojo pluošto $T(E_n)$ hiperpaviršiaus (3.23) geometrinę prasmę bazėje E_n. Bet kurio taško $M(x^p)$ indikatrisė I_M yra hiperplokštuma, kurios lygtis reperio $(M,\vec{E}_i)$ atžvilgiu yra:

$$y^1x^1+\ldots+y^{n-1}x^{n-1}+y^nx^n=0\ . \tag{3.24}$$

Kiekvieno euklidinės erdvės E_n taško M indikatrisė I_M eina per tašką M ir statmena vektoriui $\overrightarrow{OM}\{x^p\}_{\{\vec{E}_i\}}$.

Ištirsime kūgio (3.23) savybes.

Nesunku surasti funkcijos (3.23) dalines išvestines:

$$f_a=\frac{-x^{n+a}}{x^n},\ f_n=\frac{x^1x^{n+1}+\ldots+x^{n-1}x^{2n-1}}{\left(x^n\right)^2},\ f_{n+b}=\frac{-x^b}{x^n}. \tag{3.25}$$

Kadangi $f_n=\sum_{a=1}^{n-1}f_af_{n+a}$, tai šiam paviršiui galime taikytis visas 2§ formules. Apskaičiuojame funkcijos (3.23) antros eilės išvestines:

$$f_{ab}=0,\ f_{a,n+b}=0, a\neq b,\ f_{a,n+a}=-\frac{1}{x^n},\ f_{a,n}=\frac{x^{n+a}}{\left(x^n\right)^2},$$

$$f_{n,n}=\frac{-2\left(x^1x^{n+1}+\ldots+x^{n-1}x^{2n-1}\right)}{\left(x^n\right)^3},\ f_{n+b,n}=\frac{x^b}{\left(x^n\right)^2},\ f_{n+a,n+b}=0. \tag{3.26}$$

Įrodysime, jog hiperpaviršius (3.23) turi normaliąją elipsinio $(\omega=-1)$ arba hiperbolinio $(\omega=1)$ tipo II rūšies $(\rho=1)$ (φ,ξ,η,g)-struktūrą (2.10). Pasinaudosime normalumo sąlyga $(3.7)_2$. Kadangi $h_{ij}=-\frac{\varepsilon}{k}f_{ij}$, užtenka parodyti, jog $f_{ij}\varphi_k^j-f_{kj}\varphi_i^j=0.$

►Tegul $i=a,\ k=b\neq a$. Pritaikę $(2.10)_1$, (3.25), (3.26) formules, gauname, jog

$$f_{an}\varphi_b^n + f_{a,n+a}\varphi_b^{n+a} - f_{bn}\varphi_b^{n+a} - f_{b,n+b}\varphi_a^{n+b} = \frac{x^{n+a}}{\left(x^n\right)^2}\left[\frac{-f_n\left(\omega f_b f_n + f_{n+b}\right)\varepsilon + \omega f_b}{k^2}\right] +$$

$$+\left(\frac{1}{x^n}\right)\left[\frac{\sigma f_{n+a}\varepsilon\left(\omega f_b f_n + f_{n+b}\right)}{k^2} - 1\right] - \frac{x^{n+b}}{\left(x^n\right)^2}\left[\frac{-f_n\left(\omega f_a f_n + f_{n+a}\right)\varepsilon + \omega f_a}{k^2}\right] + \frac{1}{x^n}\cdot$$

$$\left[-\frac{\sigma f_{n+b}\varepsilon\left(\omega f_a f_n + f_{n+a}\right)}{k^2} + 1\right] = \frac{x^{n+a}}{\left(x^n\right)^2 k^2}\left[-\varepsilon f_n^2\omega f_b - \varepsilon f_n f_{n+b} + \omega f_b\right] - \frac{x^{n+b}}{\left(x^n\right)^2 k^2}\cdot$$

$$\left[-\varepsilon f_n^2\omega f_a - \varepsilon f_n f_{n+a} + \omega f_a\right] + \frac{1}{x^n k^2}\left[\sigma\omega f_n f_b f_{n+a} + \sigma f_{n+a} f_{n+b} - \sigma\omega f_n f_a f_{n+b} - \sigma f_{n+a} f_{n+b}\right] =$$

$$-\frac{x^{n+a}}{\left(x^n\right)^2 k^2}\varepsilon\omega f_n^2 \cdot \frac{-x^{n+b}}{x^n} - \frac{x^{n+a}\varepsilon}{\left(x^n\right)^2 k^2} f_n \cdot \frac{-x^b}{x^n} + \frac{x^{n+b}}{\left(x^n\right)^2 k^2}\varepsilon\omega f_n^2 \cdot \left(\frac{-x^{n+a}}{x^n}\right) + \frac{x^{n+b}\varepsilon}{\left(x^n\right)^2 k^2} f_n \cdot \left(\frac{-x^a}{x^n}\right) +$$

$$+\frac{1}{x^n k^2}\sigma\omega f_n\left(f_b f_{n+a} - f_a f_{n+b}\right) = \frac{\varepsilon f_n}{\left(x^n\right)^3 k^2}\left(-x^{n+b}x^a + x^{n+a}x^b\right) + \frac{\varepsilon\sigma\omega f_n}{x^n k^2}\left(f_{n+a} f_b - f_{n+b} f_a\right) =$$

$$= \frac{\varepsilon f_n}{\left(x^n\right)^3 k^2}\left(-x^{n+b}x^a + x^{n+a}x^b\right) + \frac{\varepsilon\sigma\omega f_n}{x^n k^2}\left(\frac{-x^a}{x^n}\cdot\frac{-x^{n+b}}{x^n} - \frac{-x^b}{x^n}\cdot\frac{-x^{n+a}}{x^n}\right) =$$

$$= \frac{\varepsilon f_n}{\left(x^n\right)^3 k^2}\left(-x^{n+b}x^a + x^{n+a}x^b\right) + \frac{\varepsilon\sigma\omega f_n}{\left(x^n\right)^3 k^2}\left(x^{n+b}x^a - x^{n+a}x^b\right) =$$

$$= \frac{\varepsilon f_n}{\left(x^n\right)^3 k^2}\left(-x^{n+b}x^a + x^{n+a}x^b + x^{n+b}x^a - x^{n+a}x^b\right) = 0 \qquad \blacktriangleleft$$

Analogiškai įrodoma, kai i, k įgyja kitas reikšmes.

Iš (3.3), (3.9), $(3.7)_1$ ir (3.8) formulių išplaukia, jog ši struktūra yra integruojamoji, kovektorius η yra gradientas, todėl struktūra nėra kontaktinė.

Teorema 4. *Euklido n-matės erdvės liečiamojo pluošto izotropinis kūgis (3.23) (metrikos $F_{\alpha\beta} = F_\alpha^\gamma G_{\gamma\beta}$ atžvilgiu) turi normaliąją, integruojamąją, nekontaktinę elipsinio $(\omega = -1)$ arba hiperbolinio $(\omega = 1)$ tipo II rūšies $(\rho = 1)$ (φ, ξ, η, g)-struktūrą (2.10). Indikatrisių laukas (M, I_M) sudarytas iš bazės hiperplokštumų, statmenų vektoriui $\overrightarrow{OM}$ ir einančių per tašką M.*

4. EUKLIDO PLOKŠTUMOS LIEČIAMOJO PLUOŠTO HIPERPAVIRŠIŲ STRUKTŪROS SAVYBĖS IR GEOMETRINĖ PRASMĖ

Nagrinėsime Euklido plokštumą E_2, kurioje apibrėžta stačiakampė Dekarto koordinačių sistema $R = \left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Taško $M \in E_2$ koordinates reperio R atžvilgiu, žymėsime x^1, x^2 , vektoriaus $\vec{V}$ taške M koordinates bazės $\left\{\vec{i}, \vec{j}\right\}$ atžvilgiu — x^3, x^4. Tuomet Euklido plokštumos liečiamojo pluošto $T(E_2)$taškas Y turės koordinates $\left(x^1, x^2, x^3, x^4\right)$. Hiperpaviršių $M_3 \subset T(E_2)$ apibrėšime išreikštine lygtimi

$$x^4 = f\left(x^1, x^2, x^3\right). \tag{4.1}$$

Ankstesnių paragrafų formulės liks teisingos ir šiuo atveju, tik jos bus paprastesnės, nes čia $n = 2$, $a, b, \ldots = 1$, $n + a, \ldots = 3$, $i, j, \ldots = 1,2,3$, $p, q, \ldots = 1,2$. Pvz., (2.4) lygybe įgauna pavidalą $f_2 = f_1 f_3$.

Pagal teoremą 1 liečiamosios sluoksniuotės $T(E_2)$ hiperpaviršiuje $M\left(x^1, x^2, x^3\right)$, normalizuotame ε-vienetiniu normaliniu vektoriumi

$$\begin{gathered} \vec{n}\left(f_1 \quad f_2 \quad \sigma f_3 \quad -\sigma\right) \cdot \frac{1}{k}, k = \sqrt{|M|}, M = f_1^{\,2} + f_2^{\,2} + \sigma\left(f_3^{\,2} + 1\right), \\ \varepsilon = \operatorname{sgn}(M), \sigma = \pm 1, f_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}, i = 1, 2, 3, \end{gathered} \tag{4.2}$$

indukuojasi elipsinio arba hiperbolinio tipo I arba II rūšies (φ, ξ, η, g)-struktūra (2.10), kurios struktūriniai tenzoriai dabar turi pavidalą

$$\left(\varphi_i^j\right) = \frac{1}{M}\begin{pmatrix} -f_1\left(\omega f_1 f_2 + f_3\right) & -f_2\left(\omega f_1 f_2 + f_3\right) + \omega M f_1 & M - f_3\left(\omega f_1 f_2 + f_3\right)\sigma \\ -f_1\left(\omega f_2^2 - 1\right) & -f_2\left(\omega f_2^2 - 1\right) + \omega M f_2 & -\sigma f_3\left(\omega f_2^2 - 1\right) \\ \omega M - \omega f_1\left(f_2 f_3 + f_1\right) & -\omega f_2\left(f_2 f_3 + f_1\right) + \omega M f_3 & -\sigma f_3 \omega\left(f_2 f_3 + f_1\right) \end{pmatrix},$$

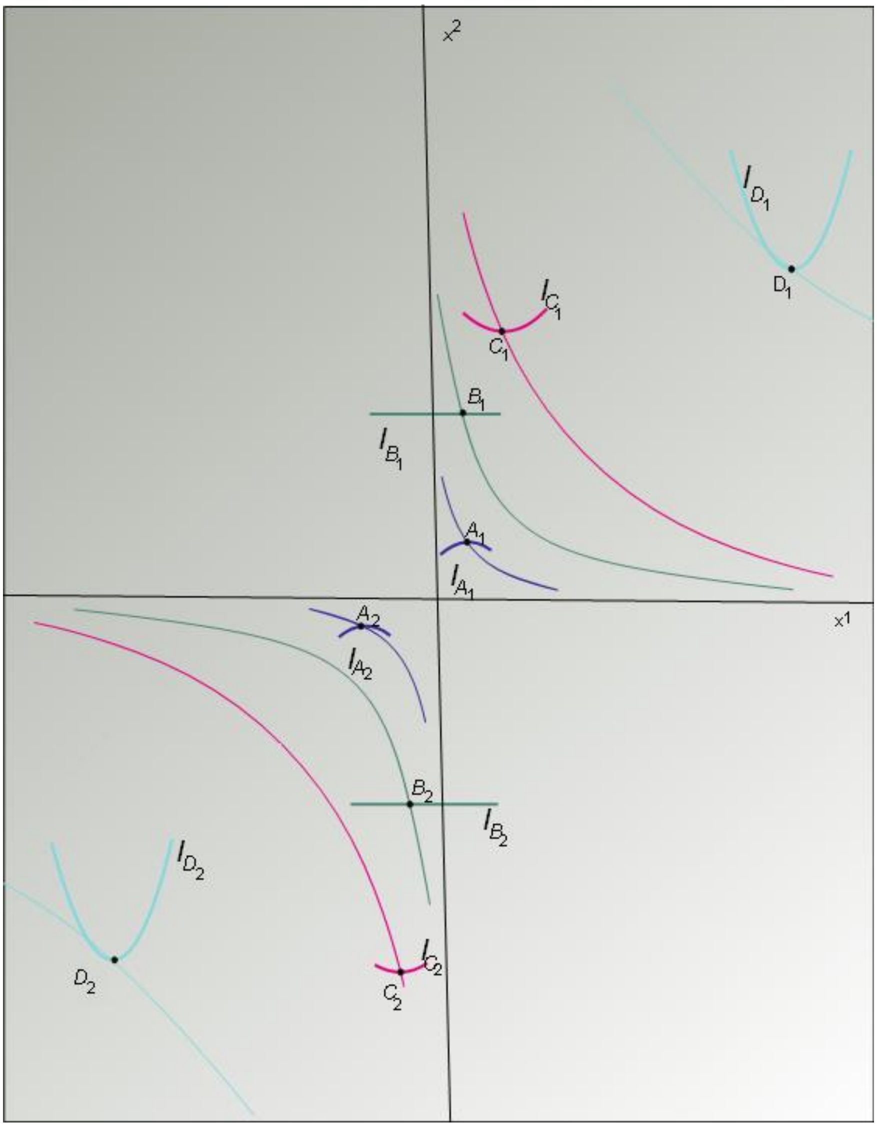
$$\xi^i \left(-f_3 \rho_1 \quad \rho \quad -f_1\right)\frac{1}{k}, \quad \eta_j \left(\omega f_1 f_2 + f_3 \quad \omega f_2^{\,2} - 1 \quad \omega f_2 f_3 + \omega f_1\right)\frac{\varepsilon}{k}, \tag{4.3}$$

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 + \sigma f_1^{\,2} & \sigma f_1 f_2 & \sigma f_1 f_3 \\ \sigma f_1 f_2 & 1 + \sigma f_2^{\,2} & \sigma f_2 f_3 \\ \sigma f_1 f_3 & \sigma f_2 f_3 & \sigma + \sigma f_3^{\,2} \end{pmatrix},$$

$k = \sqrt{|M|}, M = f_1^2 + f_2^2 + \sigma\left(f_3^2 + 1\right), \sigma = \pm 1, \omega = \pm 1, \rho = \omega\sigma = \pm 1, \varepsilon = \pm 1.$

Hiperpaviršiaus $M_3 \subset T(E_2)$ (4.1) geometrinė prasmė bazėje E_2 — kreivių I_M laukas. Kiekviename Euklido plokštumos taške M_0, kurio koordinatės reperio $R = \left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ atžvilgiu yra x_0^1, x_0^2, indikatrisės I_0 lygtis yra $X^2 - x_0^2 = f\left(x_0^1, x_0^2, X^1 - x_0^1\right)$. Reperio $R_0 = \left(M_0, \vec{i}, \vec{j}\right)$ atžvilgiu tos kreivės lygtis yra $y^2 = f\left(x_0^1, x_0^2, y^1\right)$. Čia x^1, x^2 — kintamo indikatrisės I_0 taško N koordinatės reperio R atžvilgiu, y^1, y^2 — taško N koordinatės reperio R_0 atžvilgiu.

Pirmajame paveiksle pateiktas Euklido plokštumoje indikatrisių laukas, kurį apibrėžia liečiamosios sluoksniuotės $T(E_2)$ hiperpaviršius $x^4 = \left(x^3\right)^2 \ln\left(x^1 x^2\right)$. Indikatrisių egzistavimo sritis: $x^1 x^2 > 0$. Indikatrisės yra parabolės, kurios hiperbolės $x^1 x^2 = c = const$ taškuose yra „vienodos“.



1 pav.

Tirsime (φ,ξ,η,g)-struktūros (4.3) savybes. Tam tikslui randame kovektoriaus η kovariantines išvestines $\nabla_i\eta_j = \partial_i\eta_j - \Gamma_{ij}^k\eta_k$. Panaudoję (4.3)$_3$ ir (3.2) išraiškas, kai $n = 2,$ $a,b,... = 1,\ p,q,... = 1,2,\ i,\ j = 1,2,3,$ apskaičiuojame

$$\Gamma_{ij}^k\eta_k = \frac{f_1 f_{ij}}{M}\cdot\frac{\varepsilon}{k}(\omega f_1 f_2 + f_3) + \frac{f_2 f_{ij}}{M}\cdot\frac{\varepsilon}{k}\left(\omega f_2^2 - 1\right) + \frac{\sigma f_3 f_{ij}}{M}\cdot\frac{\varepsilon\omega}{k}(f_2 f_3 + f_1) =$$
$$= \frac{f_{ij}}{k^3}\left(\omega f_1^2 + f_1 f_3 + \omega f_2^3 - f_2 + \rho f_2 f_3^2 + \rho f_1 f_3\right).$$

Įrodysime, jog skliaustuose esantis reiškinys lygus $M\omega f_2$.

►Skiriame du atvejus.

I. Tarkime, jog $\rho = -1$, tuomet $\omega\sigma = -1$. Tuomet

$$\omega f_1^2 + f_1 f_3 + \omega f_2^3 - f_2 - f_2 f_3^2 - f_1 f_3 = f_2\omega\left(f_1^2 + f_2^2 - \omega f_3^2 - \omega\right) = \omega f_2 M.$$

II. Jei $\rho = 1$, tuomet $f_2 = f_1 f_3$, $\omega\sigma = 1$. Iš čia

$$\omega f_1^2 + f_1 f_3 + \omega f_2^3 - f_2 + f_2 f_3^2 + f_1 f_3 = f_2\omega\left(f_1^2 + f_2^2 + \sigma f_3^2 + \sigma\omega\right) = \omega f_2 M. ◄$$

Taigi $\Gamma_{ij}^k\eta_k = \dfrac{\varepsilon\omega f_2 f_{ij} M}{k^3} = \dfrac{\omega f_2 f_{ij}}{k}$.

Dabar galime rasti tenzorių $\nabla_i\eta_j = \partial_i\eta_j - \Gamma_{ij}^k\eta_k$.

$$\nabla_1\eta_1 = \frac{\varepsilon}{k^3}(\omega f_{11} f_2 + \omega f_1 f_{21} + f_{31})M - (\omega f_1 f_2 + f_3)\frac{M_1}{2} - \frac{\omega f_2 f_{11}}{k} =$$
$$= \frac{\varepsilon}{k^3}\left[(\omega f_1 f_{21} + f_{31})M - (\omega f_1 f_2 + f_3)(f_1 f_{11} + f_2 f_{21} + \sigma f_3 f_{31})\right],$$

$$\nabla_2\eta_1 = \frac{\varepsilon}{k^3}\left[(\omega f_1 f_{22} + f_{32})M - (\omega f_1 f_2 + f_3)(f_1 f_{12} + f_2 f_{22} + \sigma f_3 f_{32})\right],$$

$$\nabla_3\eta_1 = \frac{\varepsilon}{k^3}\left[(\omega f_1 f_{23} + f_{33})M - (\omega f_1 f_2 + f_3)(f_1 f_{13} + f_2 f_{23} + \sigma f_3 f_{33})\right],$$

$$\nabla_1\eta_2 = \frac{\varepsilon}{k^3}\left[\omega f_2 f_{21} M - \left(1 - \omega f_2^2\right)(f_1 f_{11} + f_2 f_{21} + \sigma f_3 f_{31})\right],$$

$$\nabla_2\eta_2 = \frac{\varepsilon}{k^3}\left[\omega f_2 f_{22} M - \left(1 - \omega f_2^2\right)(f_1 f_{12} + f_2 f_{22} + \sigma f_3 f_{32})\right],$$

$$\nabla_3\eta_2 = \frac{\varepsilon}{k^3}\left[\omega f_2 f_{23} M - \left(1 - \omega f_2^2\right)(f_1 f_{13} + f_2 f_{23} + \sigma f_3 f_{33})\right],$$

$$\nabla_1\eta_3 = \frac{\omega\varepsilon}{k^3}\left[(f_3 f_{21} + f_{11})M - (f_2 f_3 + f_1)(f_1 f_{11} + f_2 f_{21} + \sigma f_3 f_{31})\right],$$

$$\nabla_2\eta_3 = \frac{\omega\varepsilon}{k^3}\left[(f_3 f_{22} + f_{12})M - (f_2 f_3 + f_1)(f_1 f_{12} + f_2 f_{22} + \sigma f_3 f_{23})\right],$$

$$\nabla_3\eta_3 = \frac{\omega\varepsilon}{k^3}\left[\left(f_3 f_{23} + f_{13}\right)M - \left(f_2 f_3 + f_1\right)\left(f_1 f_{13} + f_2 f_{23} + \sigma f_3 f_{33}\right)\right].$$

Trumpai šias išraiškas galima užrašyti pavidalu:

$$\nabla_i\eta_1 = \frac{\varepsilon}{k^3}\left[\left(\omega f_1 f_{2i} + f_{3i}\right)M - \frac{1}{2}\eta_1^{/} M_i\right],$$

$$\nabla_i\eta_2 = \frac{\varepsilon}{k^3}\left[\omega f_2 f_{2i} M - \frac{1}{2}\eta_2^{/} M_i\right], \tag{4.4}$$

$$\nabla_i\eta_3 = \frac{\varepsilon\omega}{k^3}\left[\left(f_3 f_{2i} + f_{1i}\right)M - \frac{\omega}{2}\eta_3^{/} M_i\right],\ i = 1, 2, 3,$$

$$M_i = \frac{\partial M}{\partial x^i},\ \eta_i^{/} = \eta_i \cdot \varepsilon k,\ k = \sqrt{M},\ M = f_1^2 + f_2^2 + \sigma f_3^2 + \sigma,\ \varepsilon = \operatorname{sgn} M = \pm 1.$$

Kai $n = 2$, kovektorius η kontaktiškumo sąlyga (3.8) įgyja pavidalą $\eta \wedge d\eta \neq 0$ arba

$$\eta_1\left(\partial_2\eta_3 - \partial_3\eta_2\right) + \eta_2\left(\partial_3\eta_1 - \partial_1\eta_3\right) + \eta_3\left(\partial_1\eta_2 - \partial_2\eta_1\right) \neq 0. \tag{4.5}$$

Ateityje bus naudingas tenzorius $\varphi_{ik} = \varphi_i^k g_{kj}$, kurį randame iš $(4.3)_{1,4}$ išraškų:

$$\left(\varphi_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \omega f_1 & \sigma \\ \omega f_1 & f_2(\omega + \sigma) & \sigma f_3 \\ \omega & \omega f_3 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

Bendru atveju nagrinėti hiperpaviršių savybes yra sudėtinga, todėl nagrinėkime atskirus atvejus.

I. Tyrinėsime hiperpaviršius $M_3 \subset T(E_2)$, kurių geometrinė prasmė — „vienodų“ indikatrisių laukas. Šiuo atskiru atveju hiperpaviršiaus lygtis yra $x^4 = f\left(x^3\right)$.

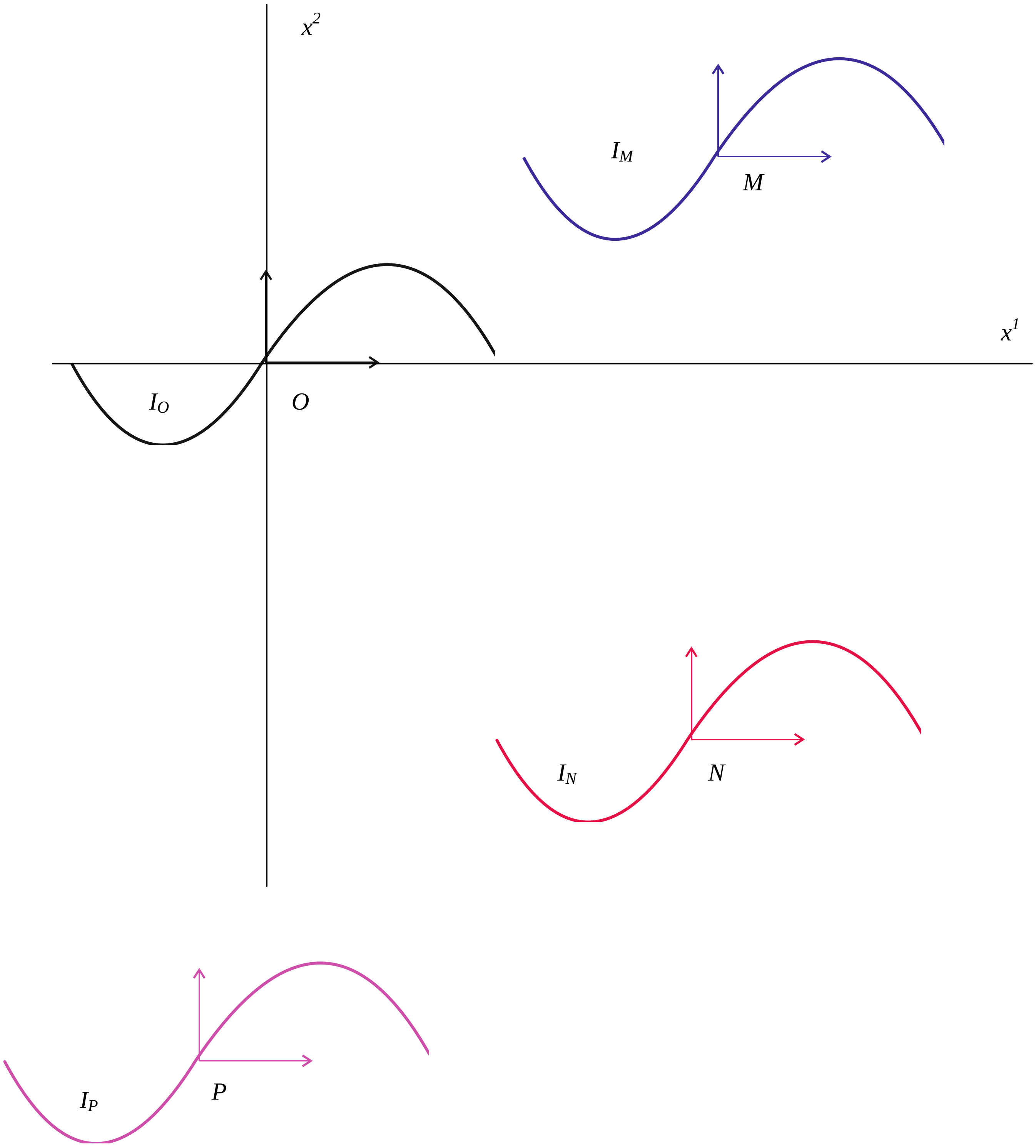
Atliekant Euklido plokštumos E_2 lygiagretųjį postūmį vektorium $\overrightarrow{MN}$, indikatrisė I_M atvaizduojama į indikartrisę I_N.

Antrajame paveiksle pavaizduotas „vienodų“ sinusoidžių laukas, atitinkantis liečiamosios sluoksniuotės $T(E_2)$ hiperpaviršių $x^4 = \sin\left(x^3\right)$.

Nagrinėjamos funkcijos $f\left(x^3\right)$ dalinės išvestinės yra tokios:

$$f_1 = f_2 = f_{2i} = f_{1i} = 0,\ f_3 = f^{/},\ f_{33} = f^{//},\ i = 1, 2, 3. \tag{4.7}$$

Hiperpaviršiuje $x^4 = f\left(x^3\right)$ (φ, ξ, η, g)-struktūra (3.10) turi pavidalą



2 pav.

$$\left(\varphi_i^j\right)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dfrac{1}{1+\left(f'\right)^2} \\ 0 & 0 & \dfrac{f'}{1+\left(f'\right)^2} \\ \omega & \omega f' & 0 \end{pmatrix}, \quad \left(\xi^j\right)=\left(-\rho f' \quad \rho \quad 0\right)\frac{1}{k},$$

$$\left(\eta_i\right)=\left(f' \quad -1 \quad 0\right)\frac{\varepsilon}{k}, \quad \left(g_{ij}\right)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma\left(1+\left(f'\right)^2\right) \end{pmatrix}, \tag{4.8}$$

$$k=\sqrt{1+\left(f'\right)^2}, \ \varepsilon=\sigma=\pm 1, \ \left(\varphi_{ij}\right)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma \\ 0 & 0 & \sigma f' \\ \omega & \omega f' & 0 \end{pmatrix}.$$

Ištirsime šios struktūros savybes.

Pirmiausiai iš (4.4) ir (4.7) formulių surandame kovektoriaus η kovariantines išvestines:

$$\nabla_3\eta_1=\frac{\varepsilon}{k^3}\left[f''\sigma\left(1+\left(f'\right)^2\right)-\sigma\left(f'\right)^2 f''\right]=\frac{f''}{k^3},$$

$$\nabla_3\eta_2=\frac{\varepsilon}{k^3}\left(\sigma f' f''\right)=\frac{f' f''}{k^3}. \tag{4.9}$$

Kitos išvestinės $\nabla_i\eta_j=0.$ Iš čia ir (3.9) išraškų randame būtinas ir pakankamas sąlygas, kad kovektorius η būtų gradientas:

$$\nabla_1\eta_3-\nabla_3\eta_1=\partial_1\eta_3-\partial_3\eta_1=\frac{-f''}{k^3}=0, \ \nabla_2\eta_3-\nabla_3\eta_2=\frac{f' f''}{k^3}=0,$$

t.y. $f''=0,$ arba $f=cx^3+d$, $c=const$, $d=const.$

Analogiškai iš (3.13) ir (4.7) lygybių išplaukia būtina ir pakankama sąlyga, kad ξ būtų Kilingo vektorius: $f''=0.$

Ši sąlyga būtina ir pakankama, kad (φ,ξ,η,g)-struktūra (4.8) būtų normalioji, t.y. kad $\nabla_i\eta_j+\rho\nabla_j\eta_i=0.$

Rasime struktūros (4.8) integruojamumo kriterijų. Įrodysime, jog jis yra $f''=0.$

► Skirsime du atvejus.

1. $\rho=1$. Tuomet homogeninėse $(3.4)_1$ formulėse vietoje $h_{ij}=\dfrac{-\varepsilon f_{ij}}{k}$ įrašę f_{ij}, imdami $i=j=3,$ turime , jog lygybė

$$f_{33}+\omega\left(f_{3i}\xi^i\eta_3+f_{3i}\xi^i\eta_3-\lambda\eta_3\eta_3\right)=0$$

galioja tada ir tik tada, kai $f_{33} = f^{//} = 0$. Kai $f^{//} = 0$, visos likusios (3.4)$_1$ lygybės virsta tapatybėmis.

2. $\rho = 1$. Naudodami (3.5) formules ir h_{ij} pakeisdami f_{ij}, turime, jog kai $i = 1, k = 3$, lygybė $f_{1j}\varphi_3^j - f_{3j}\varphi_1^j + \omega\eta_1\varphi_3^e f_{em}\xi^m - \eta_3\varphi_1^e f_{em}\xi^m = 0$ galioja tada ir tik tada, kai $-\dfrac{f_{33}}{1+\left(f^{/}\right)^2} + \dfrac{\omega f^{/}\varepsilon}{k}\cdot 0 - 0 = 0,$ t.y. kai $f_{33} = f^{//} = 0$.

Kai $f^{//} = 0$, visos likusios (3.5)$_1$ lygybės virsta tapatybėmis. ◄

Įrodysime, jog 1-forma η (4.8)$_3$ yra kontaktinė tada ir tik tada, kai $f^{//} \neq 0.$

► Apskaičiuojame formulės (4.5) kairiąją pusę. Kadangi Kristofelio simboliai simetriški, iš (4.9) turime, jog

$$\eta_1(\partial_2\eta_3 - \partial_3\eta_2) + \eta_2(\partial_3\eta_1 - \partial_1\eta_3) + \eta_3(\partial_1\eta_2 - \partial_2\eta_1) = \eta_1(\nabla_2\eta_3 - \nabla_3\eta_2) + \eta_2(\nabla_3\eta_1 - \nabla_1\eta_3) +$$
$$+\eta_3(\nabla_1\eta_2 - \nabla_2\eta_1) = \frac{f^{/}\varepsilon}{k}\left(-\frac{f^{/}f^{//}}{k^3}\right) - \frac{f^{//}}{k^3}\cdot\frac{\varepsilon}{k} = \frac{-\varepsilon f^{//}\left(1+\left(f^{/}\right)^2\right)}{k^4} = \frac{-\varepsilon f^{//}}{1+\left(f^{/}\right)^2}.$$

Šis reiškinys lygus 0 tada ir tik tada, kai $f^{//} = 0$.◄

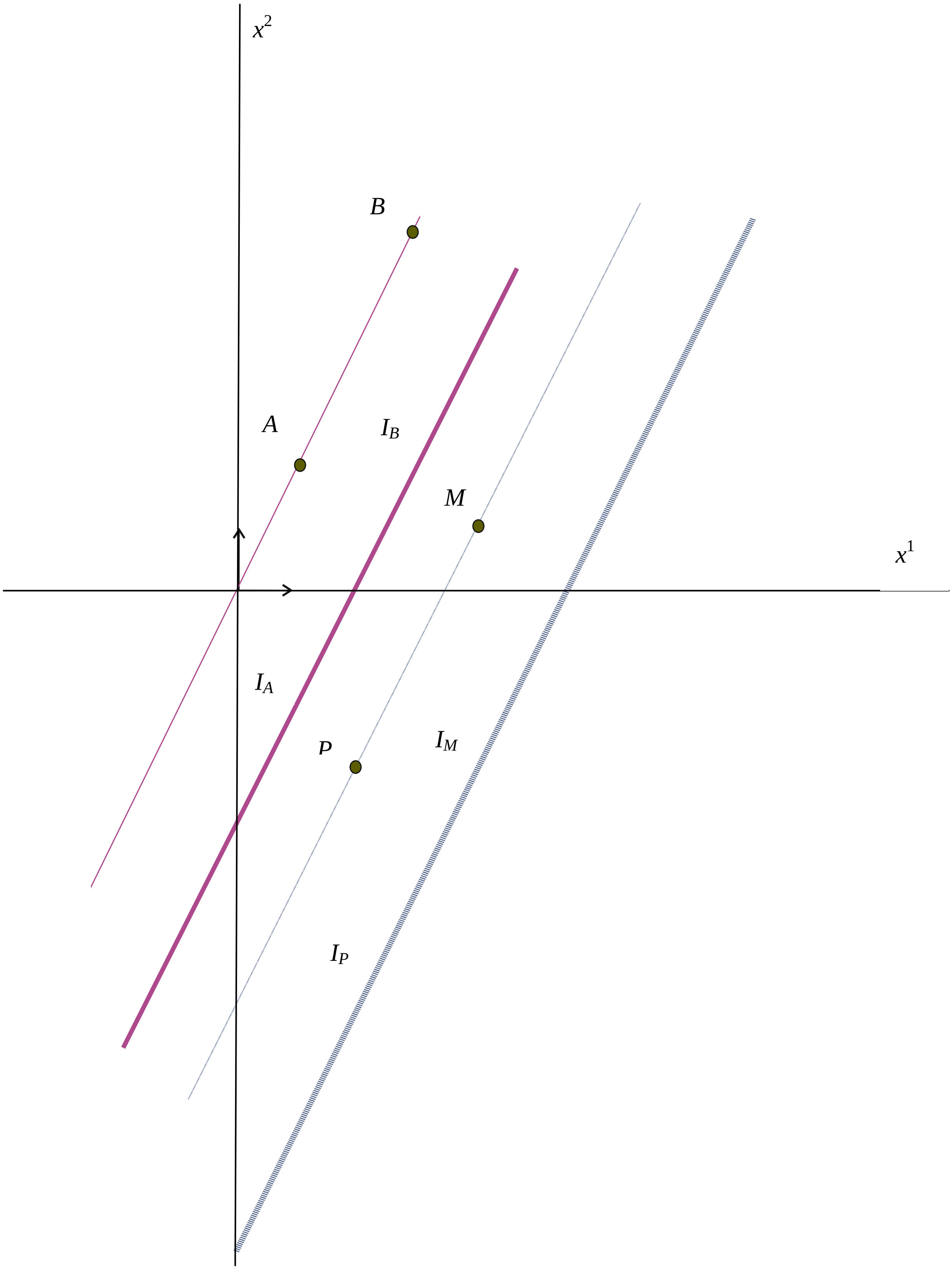
Tuo būdu įrodytas teiginys.

Teorema 5. *Hiperpaviršiuje $M_3 \subset T(E_2)$, kurio geometrinė prasmė bazėje E_2 yra „vienodų“ indikatrisių laukas, indukuotoji (φ, ξ, η, g)-struktūra (4.8) tenkina vieną iš ekvivalenčių salygų:*

1. *struktūra yra normalioji;*
2. *struktūra yra integruojamoji;*
3. *kovektorius η nėra kontaktinis (jis yra gradientas);*
4. *vektorius $\vec{\xi}$ yra Kilingo vektorius;*
5. *kovektorius η yra kovariantiškai pastovus*

tada ir tik tada, kai funkcija $f(x^3)$, apibrėžianti hiperpaviršių M_3, yra tiesinė ($f^{//} = 0$), t.y. kai hiperpaviršius yra hiperplokštuma, kurios lygtis yra $x^4 = cx^3 + d$, $c = const$, $d = const$.

Toks indikatrisių laukas pavaizduotas 3 paveiksle. Čia $c = 2,\ d = -4$. Lygiagretaus postūmio $\overrightarrow{AM}$ metu taško A indikatrisė pereina į taško M indikatrisę. Indikatrisės taške $M(x^1, x^2)$ lygtis reperio R atžvilgiu yra $X^2 - x^2 = 2\left(X^1 - x^1\right) - 4$, todėl tiesės $x^2 - 2x^1 - 4 = b = const$ taškuose indikatrisės sutampa. Pvz., tiesės $PM : x^2 = 2x^1 - 7$ taškuose indikatrisės sutampa $(c = -11)$.



3 pav.

Tarkime, jog $f^{//} \neq 0$, t.y. struktūra (4.8) yra kontaktinė. Ar gali ji būti beveik Sasakio struktūra $(\rho = -1)$ arba beveik para-Sasakio struktūra $(\rho = 1)$, tenkinanti sąlygą (žr. (3.10) ir (3.14) formules)

$$\nabla_i \eta_j + \rho \nabla_j \eta_i = 2\alpha \varphi_{ij}, \ \alpha = const \neq 0, \ \varphi_{ij} = \rho \varphi_{ji}. \qquad (4.10)$$

Iš (4.8), (4.9), (4.10) formulių, kai $i = 1$, $j = 3$, gauname būtiną sąlygą

$$0 + \rho \frac{f^{//}}{\left(1 + \left(f^{/}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 2\alpha\sigma, \text{ arba } \frac{f^{//}}{\left(1 + \left(f^{/}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 2\alpha\omega.$$

Ši sąlyga ir pakankama, kad galiotų (4.10) lygybė. Tuo būdu įrodyta

Teorema 6. *Hiperpaviršiuje M_3, kurio lygtis yra $x^4 = f(x^3)$, indukuotoji (φ, ξ, η, g)-struktūra (4.8) yra elipsinio $(\omega = -1)$ arba hiperbolinio $(\omega = 1)$ tipo beveik Sasakio struktūra $(\rho = -1)$ arba beveik para-Sasakio struktūra $(\rho = 1)$ tada ir tik tada, kai vieno kintamojo x^3 funkcija f tenkina diferencialinę lygtį*

$$\frac{f^{//}}{\left(1 + \left(f^{/}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 2\alpha\omega, \ \alpha = const \neq 0, \ \omega = \pm 1.$$

Ši struktūra negali būti nei Sasakio, nei para-Sasakio struktūra, nes $\nabla_i \eta_j \neq \alpha \varphi_{ij}$. Pvz., jei $i = 1$, $j = 3$, dešinioji pusė $\alpha\sigma \neq 0$, o kairioji lygi 0.

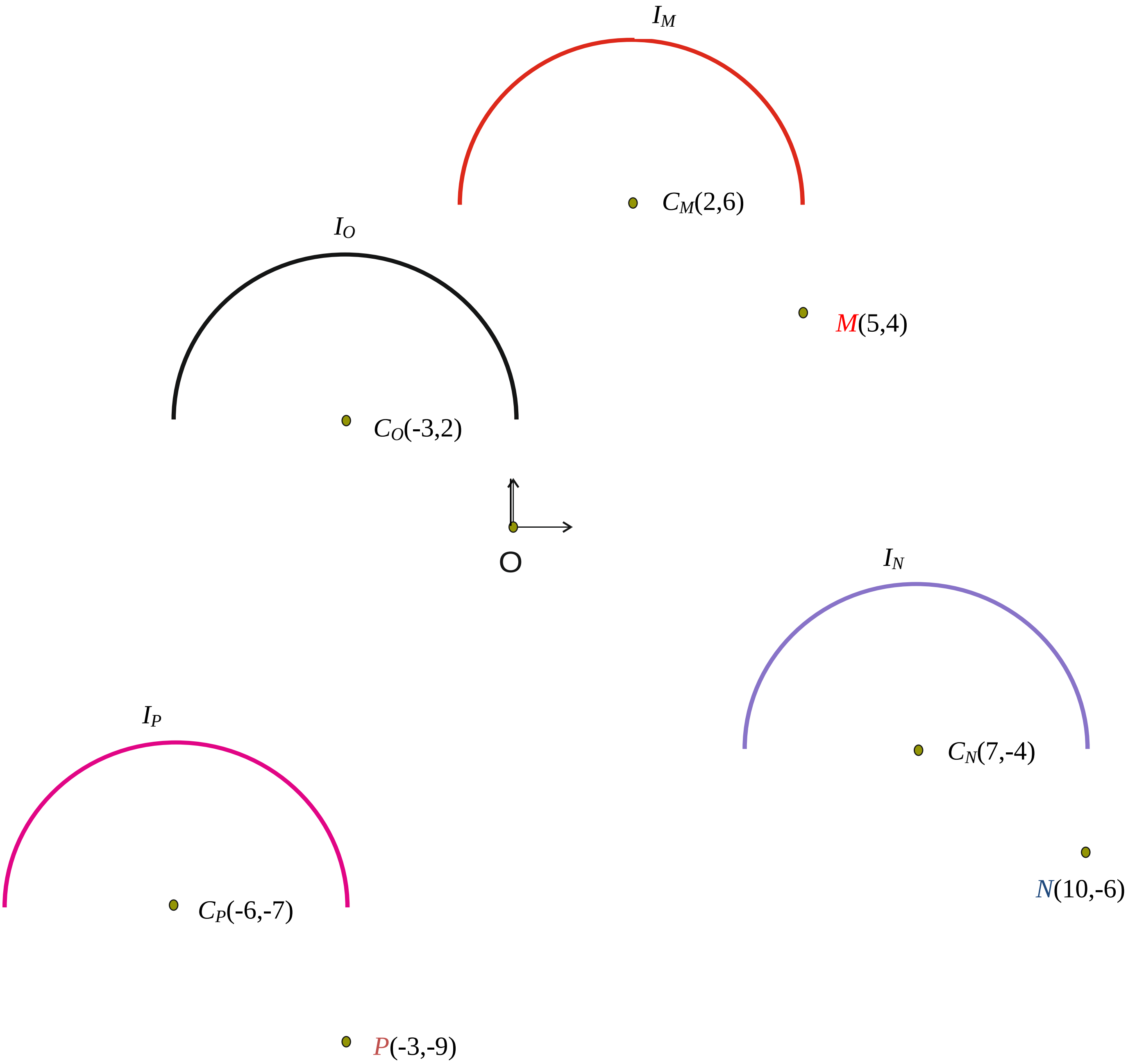
Šeštojoje teoremoje pateiktos lygties bendrasis sprendinys yra

$$f = -\frac{1}{2\omega\alpha} \sqrt{1 - \left(2\omega\alpha x^3 + b\right)^2} + c, \ c, b = const, \ \alpha = const \neq 0, \ \omega = \pm 1,$$

todėl hiperpaviršius $M_3 \subset T(E_2)$, kurio išreikštinė lygtis yra

$$x^4 = -\frac{1}{2\omega\alpha} \sqrt{1 - \left(2\omega\alpha x^3 + b\right)^2} + c, \qquad (4.11)$$

turi beveik Sasakio struktūrą, kai $\omega = -1$, ir para-Sasakio struktūrą, kai $\omega = 1$. Liečiamosios sluoksniuotės $T(E_2)$ hipercilindras (4.11) apibrėžia Euklido plokštumoje „vienodų" pusapskritimių lauką. Bet kurio taško $M\left(x^1, x^2\right)_{(0,i,j)}$ indikatrisės I_M centras yra taškas yra $C\left(-\frac{b}{2\omega\alpha}, c\right)_{\left(M, \vec{i}, \vec{j}\right)}$, o spindulys $r = \frac{1}{|2\omega\alpha|}$. Ketvirtajame paveiksle pavaizduotas toks laukas, kai $\omega = 1$, $\alpha = -\frac{1}{6}$, $b = 1$, $c = 2$, koordinatės nurodytos reperio $R = \left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ atžvilgiu.



4 pav.

II. Tirsime elipsinio tipo $(\omega = -1)$ arba hiperbolinio $(\omega = 1)$ *A*-erdvės $(\rho = -1)$ $T(E_2)$ hipersferą S_3, duotą neišreikštine lygtimi $(x^1)^2 + (x^2)^2 - \sigma(x^3)^2 - \sigma(x^4)^2 = c \neq 0$, arba jos pusę, duotą išreikštine lygtimi

$$x^4 = f(x^1, x^2, x^3) = \sqrt{c\sigma - (x^3)^2 - \sigma(x^1)^2 - \sigma(x^2)^2} \geq 0, \tag{4.12}$$

$$c\sigma - (x^3)^2 - \sigma(x^1)^2 - \sigma(x^2)^2 \geq 0,\ \sigma = \rho\omega = \pm 1.$$

Apskaičiuojame funkcijos *f* dalines išvestines:

$$f_1 = \frac{-\sigma x^1}{f},\ \ f_2 = \frac{-\sigma x^2}{f},\ f_3 = \frac{-x^3}{f},\ f_{11} = \frac{-\sigma f^2 - (x^1)^2}{f^3},\ f_{12} = \frac{-x^1 x^2}{f^3},$$

$$f_{13} = \frac{-\sigma x^1 x^3}{f^3},\ f_{23} = \frac{-\sigma x^2 x^3}{f^3},\ f_{33} = \frac{-f^2 - (x^3)^2}{f^3},\ M = \frac{c}{f^2},\ k = \frac{\sqrt{|c|}}{f}, \tag{4.13}$$

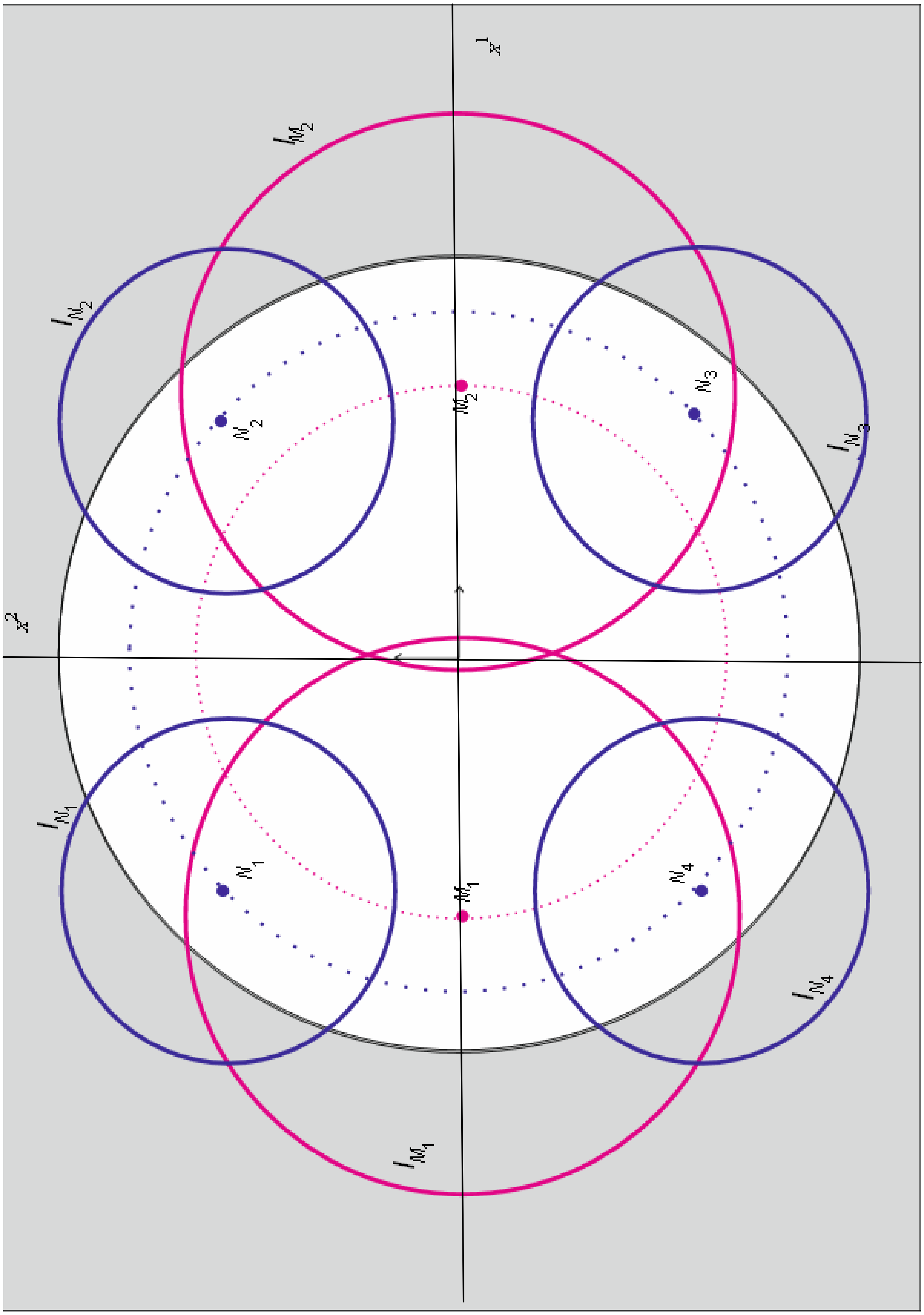
$$M_1 = \frac{2c\sigma x^1}{f^4},\ M_2 = \frac{2c\sigma x^2}{f^4},\ M_3 = \frac{2cx^3}{f^4},\ M_i = \frac{\partial M}{\partial x^i},\ \varepsilon = \operatorname{sgn} M = \operatorname{sgn} c = \pm 1.$$

Įrašę (4.13) išraiškas į (4.4) formules, randame sferai S_3 kovektoriaus η kovariantines išvestines. Pvz., $\nabla_1\eta_1 = 0$, $\nabla_1\eta_2 = -\nabla_2\eta_1 = \dfrac{\varepsilon c\sigma x^1}{f\sqrt{|c|}^3}$,.... Iš (4.6) matricos matome, jog $\varphi_{11} = 0$, $\varphi_{12} = \omega f_1 = \dfrac{x^1}{f}$,.... Iš čia galioja (3.11) ir (3.15) lygybės: $\nabla_i\eta_j = \alpha\varphi_{ij}$, $\alpha = \dfrac{\sigma}{\sqrt{|c|}}$. Vadinasi, struktūra hipersferoje S_3 yra Sasakio struktūra. Žinoma [1], jog ji yra kontaktinė metrinė, normalioji, tačiau neintegruojamoji struktūra.

Teorema 7. *Euklido plokštumos E_2 liečiamojo pluošto $T(E_2)$ hipersfera (4.12) turi elipsinio $(\omega = -1)$ arba hiperbolinio $(\omega = 1)$ tipo beveik Sasakio struktūrą.*

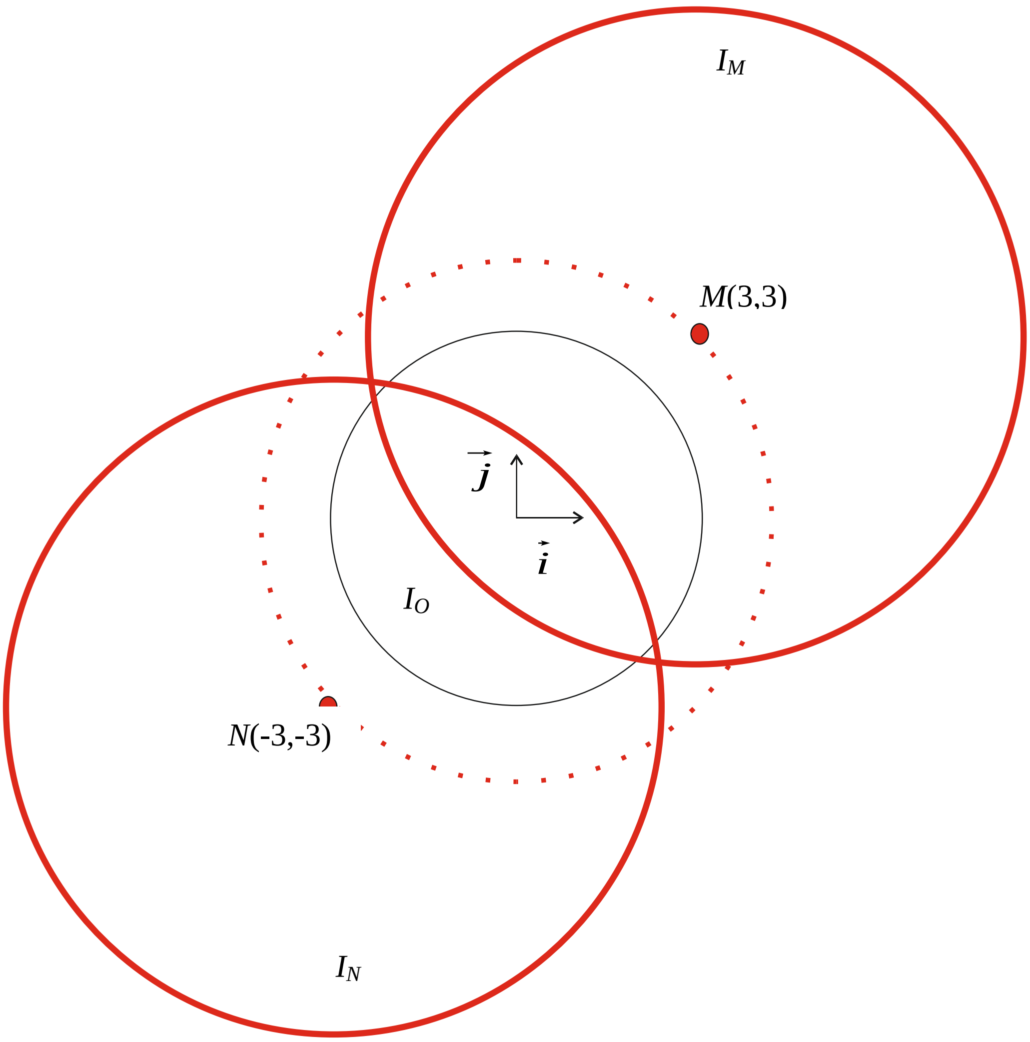
Pavyzdžiai.

1. Hipersferos $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 = r^2$, turinčios elipsinio tipo $(\omega = -1)$ I rūšies $(\rho = -1)$ (φ, ξ, η, g)-struktūrą (2.10) apibrėžtas skritulinių indikatrisių laukas pavaizduotas 5 paveiksle $(r = 6)$. Euklido plokštumos E_2 apskritimo $\omega(O, r)$ $(x^1)^2 + (x^2)^2 - r^2 = 0$ išorėje indikatrisės neegzistuoja. Apskritimų $(x^1)^2 + (x^2)^2 = d^2 < r^2$ taškuose *M* indikatrisės yra „vienodi“ apskritimai, kurių centras yra *M* , o spindulys lygus $\sqrt{r^2 - d^2}$. Taškui *M* artėjant prie apskritimo ω, indikatrisių spinduliai artėja į 0. Didžiausią spindulį *r* turi indikatrisė I_0.



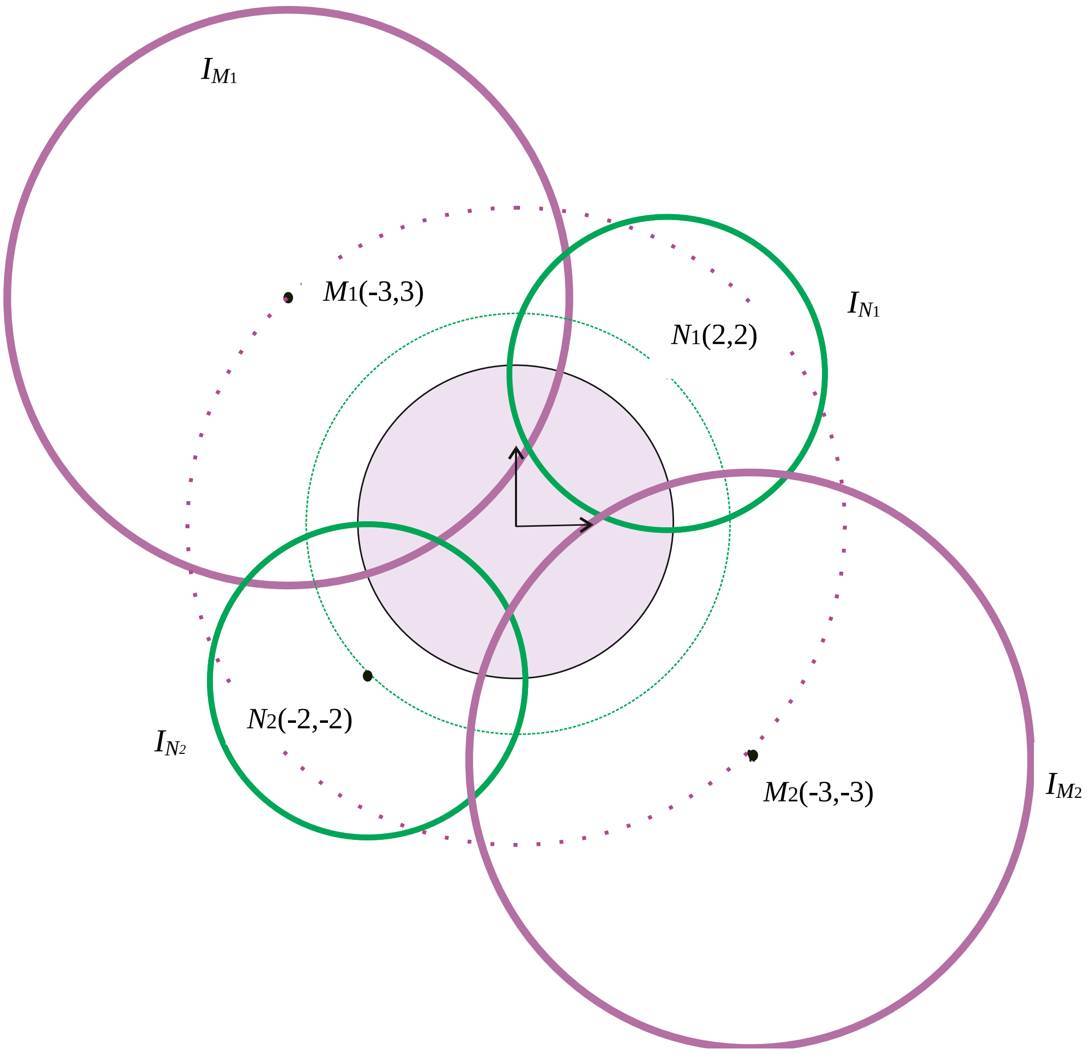
5 pav.

2. Hipersfera $(x^1)^2+(x^2)^2-(x^3)^2-(x^4)^2=-r^2$, turi hiperbolinio tipo $(\omega=1)$ I rūšies $(\rho=-1=\sigma)$ (φ,ξ,η,g)-struktūrą. Ši hipersfera bazėje E_2 apibrėžia indikatrisių lauką, kuris pavaizduotas 6 paveiksle. Indikatrisės egzistuoja visoje plokštumoje E_2, apskritimų $(x^1)^2+(x^2)^2=d^2$ taškuose indikatrisės yra „vienodi" apskritimai. Kai $d\to\infty$, šių apskritimų spinduliai $\sqrt{r^2+d^2}$ begalo didėja. Taške O $(d=0)$ indikatrisė turi mažiausią spindulį r, kuris paveiksle lygus 3.



6 pav.

3. Pseudohipersfera $(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 - (x^4)^2 = r^2$ turi taip pat hiperbolinio tipo II rūšies Sasakio struktūrą. Jai atitinkantis indikatrisių laukas pavaizduotas 7 paveiksle. Indikatrisės egzistuoja skritulio $(x^1)^2 + (x^2)^2 = r^2$ išorėje. Apskritimų $(x^1)^2 + (x^2)^2 = d^2 > r^2$ taškuose M indikatrisės „vienodi" apskritimai, kurių centras yra taškuose M , o spinduliai lygus $\sqrt{d^2 - r^2}$. Jei $d \to \infty$, šie spinduliai be galo didėja. Kai taškas M artėja prie skritulio, indikatrisių spinduliai artėja į 0.



7 pav.

III. Tarkime, jog bazėje E_2 duotas apskritimas ω. Koordinačių sistemos pradžią O patalpiname apskritimo centre. Jei apskritimo spindulys lygus r, tada šio apskritimo lygtis yra $(x^1)^2 + (x^2)^2 = r^2$. Kiekvienam plokštumos E_2 taškui $M(x^1, x^2)$ priskirkime poliarę P_M, t.y. tiesę $X^1x^1 + X^2x^2 = r^2$. Poliaritetas pavaizduotas 8 paveiksle. Čia (X^1, X^2) yra kintamo poliarės taško koordinatės reperio $(O, \vec{i}, \vec{j})$ atžvilgiu. Reperio $(M, \vec{i}, \vec{j})$ atžvilgiu šios poliarės lygtis turės pavidalą

$$(Y^1 + x^1)x^1 + (Y^2 + x^2)x^2 = r^2 \text{ arba } Y^1x^1 + Y^2x^2 = r^2 - d^2,$$

kur $d = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}$ yra atstumas nuo taško M iki koordinačių pradžios.

Poliarių laukui, arba poliaritetui, atitinkantis hiperpaviršius liečiamojoje sluoksniuotėje $T(E_2)$ yra

$$x^4x^2 + x^1x^3 = r^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 \text{ arba}$$

$$x^4 = f(x^1, x^2, x^3) = \frac{r^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - x^1x^3}{x^2}. \tag{4.14}$$

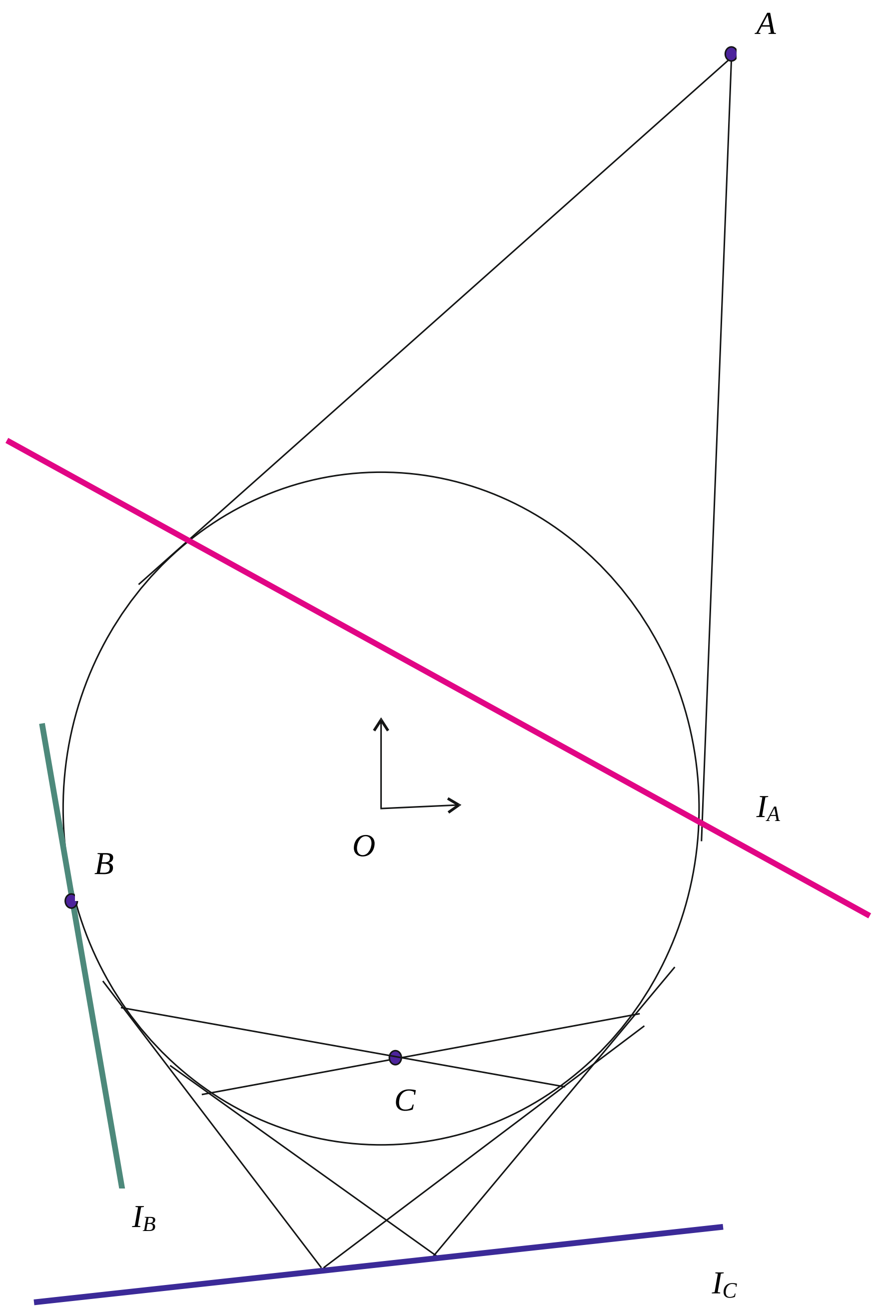
Funkcijos (4.14) dalinės išvestinės yra tokios:

$$f_1 = \frac{-2x^1 - x^3}{x^2},\ f_2 = \frac{-r^2 + (x^1)^2 - (x^2)^2 + x^1x^3}{(x^2)^2},\ f_3 = \frac{-x^1}{x^2},\ f_{11} = \frac{-2}{x^2},$$

$$f_{12} = \frac{2x^1 + x^3}{(x^2)^2},\ f_{13} = \frac{-1}{x^2},\ f_{22} = \frac{2(r^2 - (x^1)^2 - x^1x^3)}{(x^2)^3},\ f_{23} = \frac{x^1}{(x^2)^2},\ f_{33} = 0. \tag{4.15}$$

Kadangi $f_2 \neq f_1 f_3$, nagrinėsime atvejį, kai $\rho = \sigma\omega = -1$.

Ištirsime poliaritetui atitinkamo hiperpaviršiaus (4.14) savybes. Įrodysime, jog šiame hiperpaviršiuje indukuojasi kontaktinė elipsinio $(\omega = -1)$ arba hiperbolinio $(\omega = 1)$ tipo I rūšies $(\rho = -1)$ (φ, ξ, η, g)-struktūra, kuri nėra normalioji ir nėra integruojamoji.



8 pav.

► 1.Paimkime, vieną kurį nors hiperpaviršiaus (4.14) tašką, pvz., $N\left(x^1 = 0, x^2 = 1, x^3 = 0, x^4 = r^2 - 1\right)$. Tame taške (4.15) išvestinės turi pavidalą:

$$f_1 = 0,\ f_2 = -r^2 - 1,\ f_3 = 0,\ f_{11} = -2,$$

$$f_{12} = 0,\ f_{13} = -1,\ f_{22} = 2r^2,\ f_{23} = 0,\ f_{33} = 0\ . \tag{4.16}$$

Taške N struktūriniai tenzoriai φ, ξ, η tokie:

$$\left(\varphi_i^j\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \omega & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \left(\xi^j\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{k},$$

$$\left(\eta_i\right) = \left(0 \quad \omega\left(r^2 + 1\right)^2 - 1 \quad 0\right)\frac{\varepsilon}{k}, \tag{4.17}$$

$$k = \sqrt{|M|},\ M = \left(r^2 + 1\right)^2 + \sigma \neq 0,\ \sigma = -\omega = \pm 1.$$

Pritaikę (4.4) ir (4.17) formules randame

$$\nabla_3 \eta_3 = \frac{\omega\varepsilon}{k^3}\left[\left(f_{23} f_3 + f_{13}\right)M - \left(f_2 f_3 + f_1\right)\left(f_1 f_{13} + f_2 f_{23} + \sigma f_3 f_{33}\right)\right] = \frac{-\omega\varepsilon M}{k^3} \neq 0\,.$$

Pagal struktūros normalumo kriterijų (3.7) struktūra nėra normalioji.

2. Apskaičiuokime taške N reiškinį $\gamma = h_{1e}\varphi_3^e + \omega\eta_1\varphi_3^e h_{eb}\xi^b$. Pritaikę (3.1), (4.16) ir (4.17) formules randame

$$\gamma = \mu\left[\left(f_{11}\varphi_3^1 + f_{12}\varphi_3^2 + f_{13}\varphi_3^3\right) + \omega\eta_1\varphi_3^e f_{eb}\xi^b\right] = -2\omega\mu \neq 0\,.$$

Taigi integruojamumo būtina ir pakankama sąlyga $(3.5)_2$ nėra tenkinama.

3. Kovektoriaus η kontaktiškumas nepriklauso nuo nenulinio daugiklio $k\varepsilon$. Vadinasi, kontaktiškumo būtinoje ir pakankamoje sąlygoje (3.10) galima vietoje η_i imti $\eta_i^{/} = \varepsilon k\eta_i,\ k\varepsilon \neq 0$.

Kadangi taške N $\partial_1\eta_3^{/} - \partial_3\eta_1^{/} = \omega f_{21} f_3 + \omega f_{11} - \omega f_1 f_{23} - f_{33} = -2\omega \neq 0$, ir $\eta_2^{/} = \omega\left(r^2 + 1\right)^2 - 1 \neq 0$, tai $\eta_1^{/}\left(\partial_2\eta_3^{/} - \partial_3\eta_2^{/}\right) + \eta_2^{/}\left(\partial_1\eta_3^{/} - \partial_3\eta_1^{/}\right) + \eta_3^{/}\left(\partial_1\eta_2^{/} - \partial_2\eta_1^{/}\right) =$ $= 0 + \eta_2^{/} \cdot 2\omega + 0 = 2\omega\eta_2^{/} \neq 0$. Taigi (φ, ξ, η, g)-struktūra hiperpaviršiuje (4.14) yra kontaktinė. ◄

Teorema 8. *Euklido plokštumos E_2 poliaritetas apskritimo $\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 = r^2$ atžvilgiu liečiamojoje sluoksniuotėje $T(E_2)$ apibrėžia hiperpaviršių (4.14) turintį kontaktinę, nenormaliąją ir neintegruojamąją elipsinio $(\omega = -1)$ arba hiperbolinio $(\omega = 1)$ tipo I rūšies $(\rho = -1)$ (φ, ξ, η, g)-struktūrą (4.3).*

IV. Panagrinėkime liečiamojo pluošto $T(E_2)$ hiperpaviršių

$$x^4 = A(x^1, x^2)x^3 + B(x^1, x^2), \tag{4.18}$$

kurio geometrinė prasmė bazėje yra tiesinių indikatrisių laukas. Tarp šių hiperpaviršių ieškosime turinčių normaliąją ir integruojamąją abiejų tipų $(\omega = \pm 1)$ I rūšies $(\rho = -1)$ (φ, ξ, η, g)-struktūrą (4.3).

Randame funkcijos (4.18) dalines išvestines:

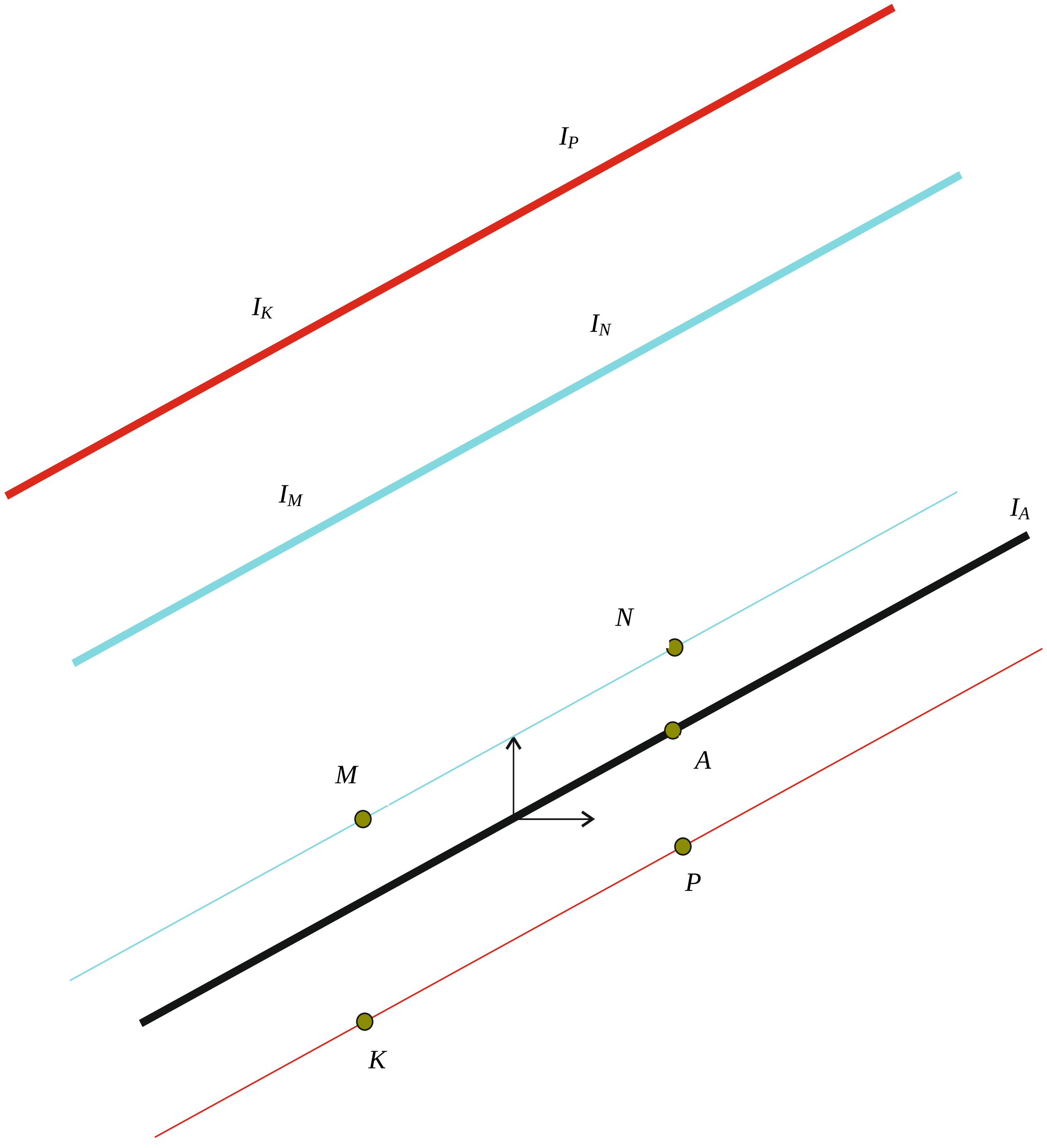
$$f_p = A_p x^3 + B_p, \quad f_3 = A, \quad f_{33} = 0, \quad f_{pq} = A_{pq} x^3 + B_{pq}, \quad f_{3p} = A_p,$$

$$A_p = \frac{\partial A}{\partial x^p}, \quad B_p = \frac{\partial B}{\partial x^p}, \quad A_{pq} = \frac{\partial^2 A}{\partial x^p \partial x^q}, \quad B_{pq} = \frac{\partial^2 B}{\partial x^p \partial x^q} \quad p, q = 1, 2. \tag{4.19}$$

Taikome kriterijų (3.12), tik vietoje h_{ij} rašome $f_{ij} = k\varepsilon h_{ij}$. Iš (4.19) išraiškų ir pertvarkyto kriterijaus $f_{ij} = \Theta \eta_i \eta_j$, $\Theta = \varepsilon\omega\lambda k$, $\lambda = -\omega h_{ij}\xi^i \xi^j$, išplaukia, kad $\eta_3 = 0$. Bet tada $f_{3i} = 0$, t.y. $f_3 = A = const$. Kai $\eta_3 = 0$, t.y. kai $f_2 f_3 + f_1 = 0$, gauname, jog $B_2 A + B_1 = 0$. Iš čia $B = F(-Ax^1 + x^2)$, kur F yra bet kuri vieno kintamojo funkcija. Šių sąlygų pakanka, kad hiperpaviršius turėtų normaliąją ir integruojamąją abiejų tipų $(\omega = \pm 1)$ I rūšies $(\rho = -1)$ (φ, ξ, η, g)-struktūrą.

Teorema 9. *Hiperpaviršiuje $M_3 \subset T(E_2)$, kurio geometrinė prasmė bazėje E_2 — bet koks tiesinių indikatrisių laukas, indukuotoji elipsinio $(\omega = -1)$ arba hiperbolinio $(\omega = 1)$ tipo I rūšies $(\rho = -1)$ (φ, ξ, η, g)-struktūra (4.3) yra normalioji ir integruojamoji tada ir tik tada, kai hiperpaviršiaus lygtis turi pavidalą $x^4 = Ax^3 + F(-Ax^1 + x^2)$, $A = const$, F – bet kuri vieno kintamojo $x^2 - Ax^1$ funkcija.*

Tokį hiperpaviršių atitinkantis indikatrisių laukas sudarytas iš lygiagrečių tiesių. Tiesės $-Ax^1 + x^2 = d = c\ o\ n$ taškuose, indikatrisės sutampa. Devintajame paveiksle pavaizduotas tiesinių indikatrisių laukas, kai $A = \dfrac{1}{2}$, $F(z) = 4z^2$. Tiesės MN taškams indikatrisės sutampa ($d = 1$).



9 pav.

V. Nagrinėsime Euklido plokštumos $E_2\left(x^1, x^2\right)$ liečiamąją sluoksniuotę $T(E_2)\left(x^1, x^2, x^3, x^4\right)$, kaip elipsinio (hiperbolinio) tipo *B*-erdvę. Tai reiškia, kad (4.2) - (4.6) formulėse $\rho = \omega\sigma = 1$, $\omega = \sigma$. Kadangi hiperpaviršių $x^4 = f\left(x^1, x^2, x^3\right)$ normalizuosime normaliniu beveik kontaktiniu vektoriumi, tai turi galioti sąlyga (2.4) ir iš jos išplaukiančios lygybės:

$$\begin{aligned} f_2 &= f_1 f_3, \\ f_{23} &= f_{13} f_3 + f_1 f_{33}, \\ f_{21} &= f_{11} f_3 + f_1 f_{13}, \\ f_{22} &= f_{11} f_3^2 + 2 f_{13} f_1 f_3 + f_{33} f_1^2, \\ M &= f_1^2 + f_2^2 + \sigma\left(f_3^2 + 1\right) = \left(f_1^2 + \sigma\right)\left(f_3^2 + 1\right). \end{aligned} \tag{4.20}$$

Esant sąlygoms (4.20), $\rho = 1$, $n = 2$, (φ, ξ, η, g)-struktūra (4.3) įgauna paprastesnį pavadalą.

$$\left(\varphi_i^j\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{-\omega f_2}{f_3^2 + 1} & \dfrac{\omega f_1}{f_3^2 + 1} & \dfrac{1}{f_3^2 + 1} \\ \dfrac{f_1\left(1 - \omega f_2^2\right)}{M} & \dfrac{f_2\left(f_3^2 + \omega f_1^2 + 2\right)}{M} & \dfrac{\sigma f_3\left(1 - \omega f_2^2\right)}{M} \\ \dfrac{1}{f_1^2 + \sigma} & \dfrac{f_3}{f_1^2 + \sigma} & -\dfrac{f_2}{f_1^2 + \sigma} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} &\xi^i \begin{pmatrix} \dfrac{-f_3}{k} & \dfrac{1}{k} & \dfrac{-f_1}{k} \end{pmatrix}, \; k = \sqrt{(f_3^2 + 1)\left|f_1^2 + \sigma\right|}, \\ &\eta_j \left(\varepsilon f_3\left(\omega f_1^2 + 1\right) \quad \varepsilon\left(\omega f_2^2 - 1\right) \quad \varepsilon f_1\left(1 + f_3^2\right)\varepsilon\right)\frac{1}{k}, \\ &\varepsilon = \operatorname{sgn}\left(f_1^2 + \sigma\right) = \pm 1, \omega = \sigma. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Rasime (φ, ξ, η, g)-struktūros (4.21) integruojamumo būtiną ir pakankamą sąlygą.

Apskaičiuosime afinoriaus φ Nijenhuis‘o tenzorių. Po ilgų, elementarių skaičiavimų pritaikę (3.3), (4.21), (4.20) formules turime, jog

$$\begin{aligned} N_{13}^1 &= \varphi_1^1 \partial_1 \varphi_3^1 + \varphi_1^2 \partial_2 \varphi_3^1 + \varphi_1^3 \partial_3 \varphi_3^1 - \varphi_3^1 \partial_1 \varphi_1^1 - \varphi_3^2 \partial_2 \varphi_1^1 - \varphi_3^3 \partial_3 \varphi_1^1 - \varphi_1^1\left(\partial_1 \varphi_3^1 - \partial_3 \varphi_1^1\right) - \\ &- \varphi_3^3\left(\partial_1 \varphi_3^3 - \partial_3 \varphi_1^3\right) - \varphi_2^1\left(\partial_1 \varphi_3^2 - \partial_3 \varphi_1^2\right) = \frac{f_3\left(2 - \omega f_1^2\right)\left[f_{11}\left(1 + f_3^2\right)^2 - \omega f_{33}\left(f_1^2 + \sigma\right)^2\right]}{\left(1 + f_3^2\right)^2\left(f_1^2 + \sigma\right)^2} = \\ &= \frac{f_3\left(2 - \omega f_1^2\right)}{M^2} R, \quad R = f_{11}\left(1 + f_3^2\right)^2 - \omega f_{33}\left(f_1^2 + \omega\right)^2. \end{aligned}$$

Analogiškai randamos kitos Nijenhuis‘o tenzoriaus koordinatės.

$$N_{13}^3 = \frac{-f_1}{M^2} R, \; N_{13}^2 = \frac{f_3^2 + f_1^2 + \sigma}{M^2} R, \; N_{12}^1 = \frac{f_1^2\left(2 - f_3^2\right)}{M^2} R, \ldots,$$

trumpiau, $N_{ij}^k = \lambda_{ij}^k R$, kur tarp λ_{ij}^k yra nelygių 0.

Iš čia išplaukia, jog (φ, ξ, η, g)-struktūra (4.21) yra integruojamoji tada ir tik tada, kai $R = 0$.

Rasime būtiną ir pakankamą sąlygą, kad kovektorius η būtų gradientas, t.y. kad $\partial_i \eta_j - \partial_j \eta_i = 0$. Iš (4.21) ir (4.20) analogiškai randame

$$\partial_1 \eta_2 - \partial_2 \eta_1 = \frac{f_1}{k^3} R, \; \partial_1 \eta_3 - \partial_3 \eta_1 = \frac{-R}{k^3}, \; \partial_2 \eta_3 - \partial_3 \eta_2 = \frac{-f_3 R}{k^3}.$$

Matome, jog 1-forma η yra gradientas tada ir tik tada, kai $R = 0$.

Toliau galima surasti tenzorių $S_{ij}^k = N_{ij}^k + \xi^k \left(\partial_i \eta_j - \partial_j \eta_i\right) = 0$. Nesunku įrodyti, jog $S_{ij}^k = \mu_{ij}^k R$, kur visi μ_{ij}^k negali būti lygūs 0. Taigi normalumo būtina ir pakankama sąlyga yra $R = 0$.

Teorema 10. *Elipsinio* $(\omega = \sigma = -1)$ *arba hiperbolinio* $(\omega = \sigma = 1)$ *tipo II rūšies* $(\rho = 1)$ (φ, ξ, η, g)*-struktūrai (4.21) hiperpaviršiuje* $M_3 \subset T(E_2)$ *galioja ekvivalenčios sąlygos:*

1) *struktūra yra integruojamoji* $\left(N_{ij}^k = 0\right)$*;*

2) *struktūra yra normalioji* $\left(S_{ij}^k = 0\right)$*;*

3) *1-forma* η *- uždara* $\left(\partial_i \eta_j - \partial_j \eta_i = \nabla_i \eta_j - \nabla_j \eta_i = 0\right)$*;*

4) *struktūra yra nekontaktinė* $\left(\eta_1 \left(\partial_2 \eta_3 - \partial_3 \eta_2\right) + \eta_2 \left(\partial_1 \eta_3 - \partial_3 \eta_1\right) + \eta_3 \left(\partial_1 \eta_2 - \partial_2 \eta_1\right) = 0\right)$*;*

5) *hiperpaviršių apibrėžianti funkcija* $f\left(x^1, x^2, x^3\right)$ *tenkina diferiancialinių lygčių sistemą:*

$$f_2 = f_1 f_3, \tag{4.22}$$

$$f_{11}\left(1 + f_3^2\right)^2 - \omega f_{33}\left(f_1^2 + \omega\right)^2 = 0.$$

Ši teorema elipsinio tipo $(\omega = -1)$ II rūšies $(\rho = 1)$ struktūroms buvo įrodyta autorės bakalauro darbe.

Pateiksime du (4.22) lygčių sistemos sprendinius, t.y. pavyzdžius hiperpaviršių $M_3 \subset T(E_2)$, turinčių abiejų tipų II rūšies (φ, ξ, η, g)-struktūrą su išvardintomis teoremoje 10 savybėmis.

1. Hiperplokštumą $x^4 = cx^3 + ax^1 + acx^2 + d$ apibrėžianti funkcija f tenkina (4.22) sąlygas, nes $f_2 = ac = f_1 f_2$, $f_{11} = f_{33} = 0$.

Hiperplokštumą atitinkančios indikatrisės — lygiagrečios tiesės, kurios tiesės l: $ax^1 + acx^2 + d = b = const$ taškuose yra „vienodos“. Beje, indikatrisės statmenos tiesėms l. Tiesių t: $(a-c)x^1 + (ac+1)x^2 + d = b = const$ taškuose indikatrisės sutampa. 10 paveiksle pavaizduotas indikatrisių laukas, kurį apibrėžia hiperplokštuma $x^4 = x^3 + 2x^1 + 2x^2 - 5$.

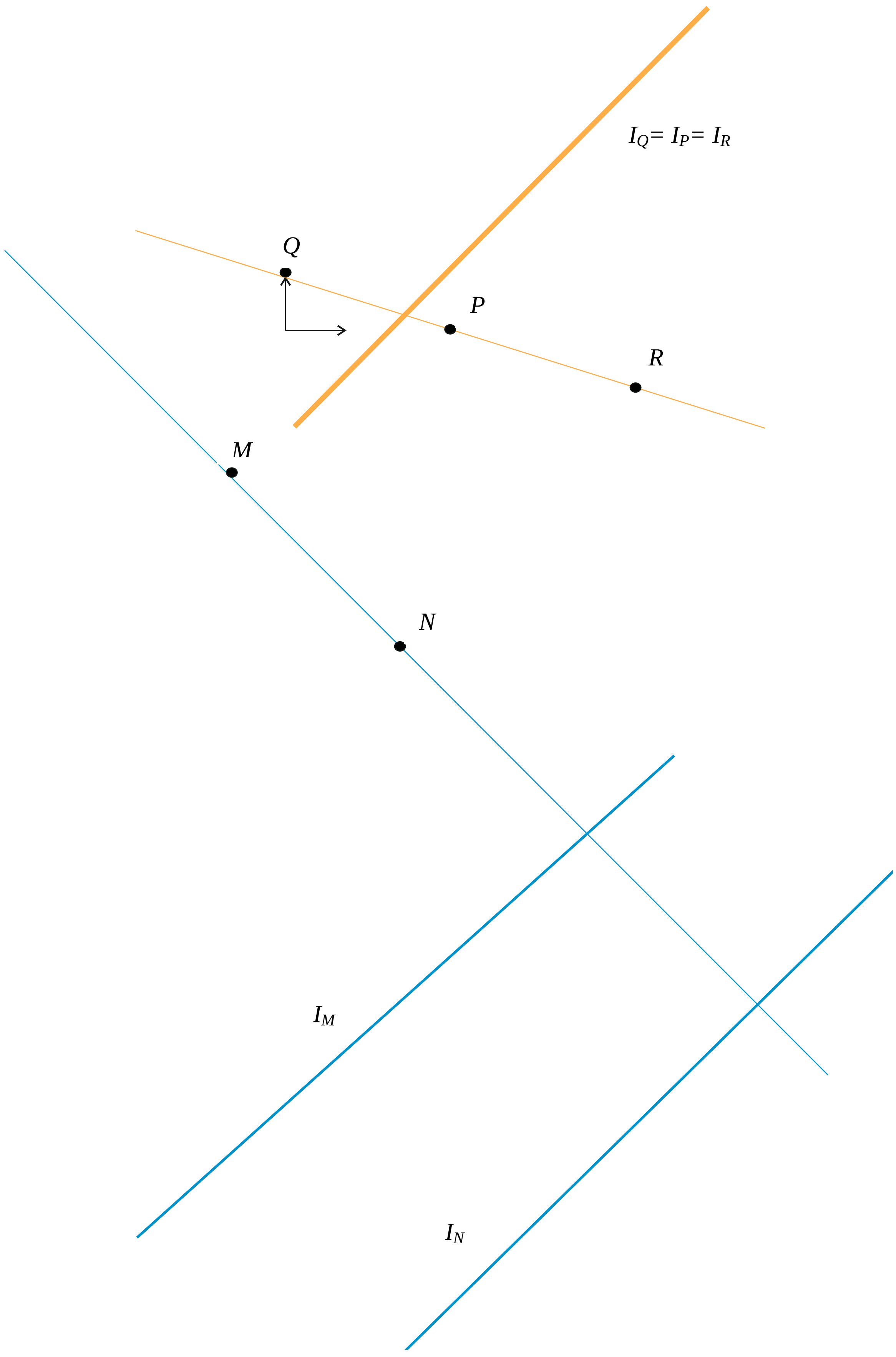
2. Izotropinis kūgis $(x^4 - d)(x^2 - b) + (x^1 - a)(x^3 - c) = 0$ metrikos $F_{\alpha\beta} = F_\alpha^\gamma G_{\beta\gamma} = F_{\beta\alpha}$ atžvilgiu, kurio viršūnė yra $V(a,b,c,d)$, taip pat tenkina 10 teoremos sąlygas. Kadangi funkcijos $x^4 = \frac{-(x^1 - a)(x^3 - c)}{x^2 - b} + d$ išvestinės yra:

$$f_1 = \frac{-(x^3 - c)}{x^2 - b},\ f_3 = \frac{-(x^1 - c)}{x^2 - b},\ f_2 = \frac{(x^1 - a)(x^3 - c)}{(x^2 - b)^2} = f_1 f_3,\ f_{11} = 0,\ f_{33} = 0,$$

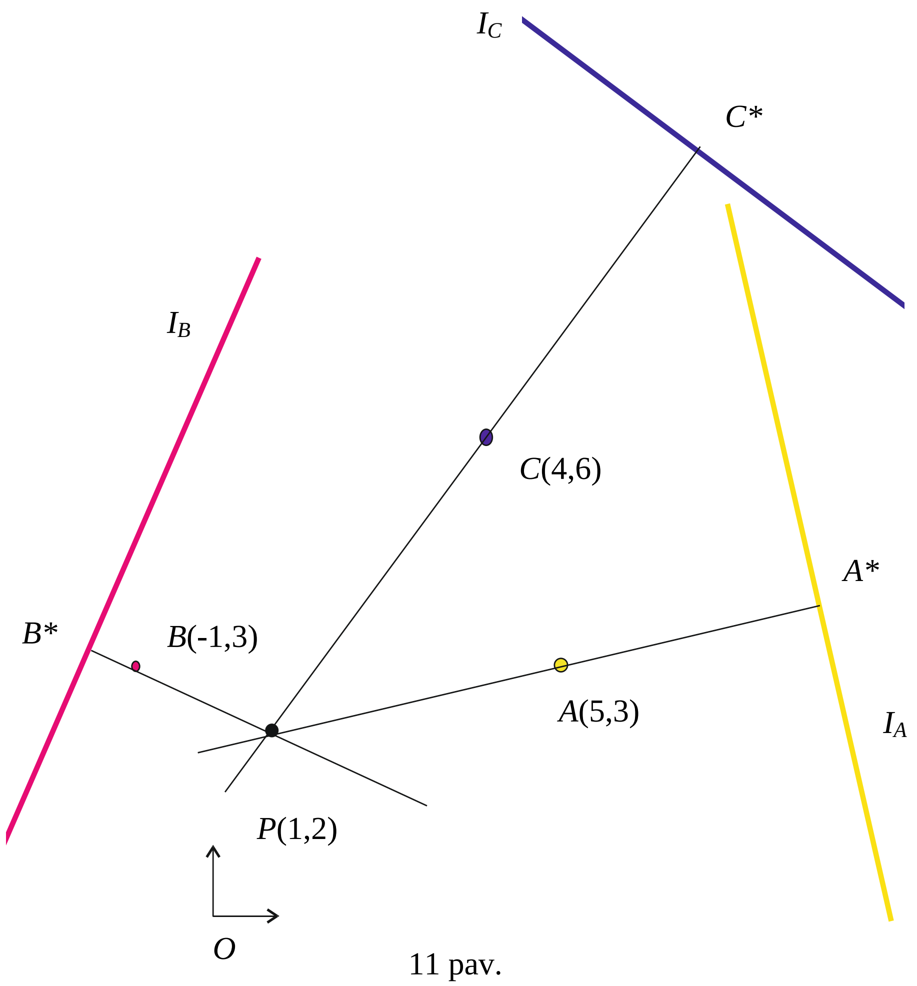
tai matome, jog jos tenkina (4.22) sąlygas, t.y. kūgis turi normaliąją, integruojamąją, nekontaktinę abiejų tipų II rūšies (φ, ξ, η, g)-struktūrą.

Liečiamojo pluošto $T(E_2)$ izotropinio kūgio metrikos $F_{\alpha\beta} = F_\alpha^\gamma G_\beta$ atžvilgiu geometrinė prasmė bazėje E_2 yra tiesinių indikatrisių laukas (11 pav.). Kiekvieno taško $M(x^1, x^2) \in E_2$ indikatrisė I_M yra statmena tiesei PM ir nutolusi nuo taško M atstumu $MM^* = \frac{|c(x^1 - a) + d(x^2 - b)|}{PM}$, čia $P(a,b) \in E_2$. Vienuoliktajame paveiksle pavaizduotas izotropiniam kūgiui atitinkantis tiesinių indikatrisių laukas, kai $a = 1, b = 2, c = 3, d = 4.$ Jei $a = b = c = d = 0$, izotropiniam kūgiui atitinkame indikatrisių lauke (12 pav.) kiekvieno taško M indikatrisė I_M eina per tašką M ir statmena tiesei OM, t.y. I_M liečia apskritimą $\omega(O, OM)$.

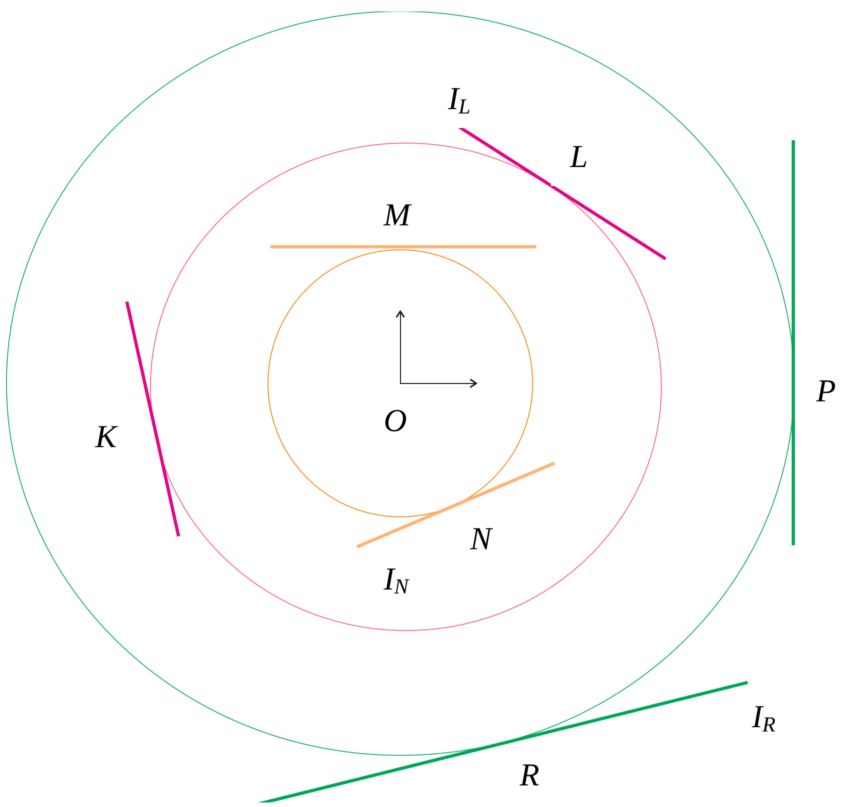
Pateikėme visų tipų ir rūšių beveik kontaktinių metrinių liečiamojo pluošto $T(E_2)$ hiperpaviršių su įvairiomis savybėmis pavyzdžių ir išaiškinome tų hiperpaviršių geometrinę prasmę bazėje E_2.



10 pav.



11 pav.



12 pav.

IŠVADOS

Pradedant nuo japonų matematikų darbų [5-7] iki šių dienų beveik kontaktinės metrinės struktūros įvairių šalių matematikų buvo analizuojamos, apibendrinamos, kuriami jų analogai. Kadangi šios struktūros turi panašių bruožų, visas žinomas struktūras galima nagrinėti kompleksiškai, pažymint jų bendrumą.

Darbe tos struktūros nagrinėjamos *n*-mačiu atveju ir specialiose daugdarose, būtent, Euklido *n*-matės erdvės E_n liečiamosios sluoksniuotės $T(E_n)$ hiperpaviršiuose M_{2n-1}. Geometriškesni, apčiuopiamesni rezultatai gaunami 2-mačiu atveju.

Darbo rezultatai:

1. Surasta elipsinio ir hiperbolinio tipo I ir II rūšies beveik kontaktinė metrinė struktūra (φ, ξ, η, g) Euklido *n*-matės erdvės liečiamojo pluošto $T(E_n)$ hiperpaviršiuose M_{2n-1}, nuormalizuotuose normaliniu vektoriumi.
2. Ištirtos šios struktūros savybės: normalumas, kontaktiškumas, integruojamumas ir kitos.
3. Pateikti hiperpaviršių $M_{2n-1} \subset T(E_n)$ su įdomiomis savybėmis pavyzdžių ir išaiškinta jų geometrinė prasmė bazėje E_n.
4. Bendroji teorija pritaikyta atvejui $n = 2$. Rasti visų tipų ir rūšių (φ, ξ, η, g)-struktūrų savybių kriterijai. Tai antros eilės diferencialinės lygtys su dalinėmis išvestinėmis trijų kintamųjų funkcijos, apibrėžiančios hiperpaviršių $M_3 \subset T(E_2)$, atžvilgiu.
5. Rasti atskiri šių diferencialinių lygčių sprendiniai, tuo būdu įrodytas visų nagrinėjamų struktūrų egzistavimas.
6. Išaiškinta nagrinėjamų hiperpaviršių $M_3 \subset T(E_2)$ geometrinė prasmė Euklido plokštumoje E_2. Tai kreivių (indikatrisių) laukas.
7. Pateikta 12 indikatrisių laukų, kuriems atitinkami $T(E_2)$ hiperpaviršiai M_3 turi įvairių tipų ir rūšių (φ, ξ, η, g)-struktūrą su mus dominančiomis savybėmis.

STRUCTURE AND GEOMETRIC MEANING OF HYPERSURFACES IN TANGENT BUNDLE OF EUCLIDEAN SPACE

SUMMARY

The aim of the master work is to investigate almost contact metric structures (φ, ξ, η, g) of two type (elliptic and hyperbolic) and of two kind (I and II) together. Generalized (φ, ξ, η, g)-structure originates in normalized hypersurfaces $M_{2n\text{-}1}$ of tangent bundle $T(E_n)$. Geometric meaning of $M_{2n\text{-}1} \subset T(E_n)$ in Euclidean space E_n is a field of hypersurfaces I_M , $M \in E_n$, so called indicatrixes.

In the work, the generalized (φ, ξ, η, g)-structures in normalized hypersurfaces $M_{2n\text{-}1} \subset T(E_n)$ are found and its properties are investigated. Geometric meaning in basis E_n of some interesting hypersurfaces (hypersphere, hyperplane, hypercone,…) is explained.

Great attention is paid to case n=2. Necessary and sufficient conditions of normality, integrability, contacty,… of the (φ, ξ, η, g)-structure in hypersurfaces $M_3 \subset T(E_2)$ are found. It is differential equations for function of three variables defining hypersurface. Partial solutions of the equations are obtained, so existence of almost contact metric hypersurfaces having investigated properties is proved. In Euclidean plane E_2, 12 fields of indicatrixes (curves) corresponding to almost contact metric hypersurfaces $M_3 \subset T(E_2)$ with concerning properties are presented.

Results of the work reflect in 10 proved theorems.

LITERATŪRA

1. Baškienė A., *Tenzorinės struktūros*, Šiauliai, 2006. 212 p. ISBN 9986-38-655-1.
2. Baškienė A., Beveik kontaktinių struktūrų paraboliniai analogai, *Liet. Matem. Rink.*, 2001, T. 41, Spec nr., , p. 233-238.
3. Boothby W. M, Wang H. C., On contact manifold, *Ann. of Math.* ,68(1958), p. 721-734.
4. Kravčenkaitė D., Baškienė A., Beveik kontaktinės metrinės struktūros elipsinio tipo *B*-erdvių hiperpaviršiuose, *Jaunųjų mokslininkų darbai,* **3(24)**, Šiauliai, 2009, p.168-171.
5. Sasaki S., On differentiable manifolds with certain structure which are closely related to almost contact structure, I. *Tohoku Math. J.* , **12**(1960), p. 459–476.
6. Sato I., On a structure similar to almost contact structures, *Tensor,* **30(3)** (1976), 219–224.
7. Tashiro Y., On contact structure of hypersurfaces in complex manifolds I., *Tohoku Math. J.* 15 (1963), p. 62-78.
8. Tripathi M., Shukla S., On submanifolds of Lorentzian almost paracontact manifold, *Publ. Math. Debrecen*, 2001, 59(3-4), p. 327-338.
9. Башкене А., Почти контактные метрические гиперповерхности касательного расслоения риманова пространства, *Liet. Matem. Rink*., 1984, 24, Nr. 2, p. 30-18.
10. Башкене А., Эллиптические почти параконтактные метрические гиперповерхности в $T(V_n)$, *Liet. Matem. Rink.* 1986, 26, Nr. 1.p**.** 3 – 14.
11. Башкене А., Почти параконтактные метрические гиперповерхности касательного расслоения риманова пространства, *БАК, Сердика*, 1987, T. 13, c. 155-165.
12. Башкене А., Вопросы теории гиперповерхностей касательного расслоения двумерного риманова многообразия, *Liet. Matem. Rink.*, 1982, 22, Nr. 1, p. 25-39.
13. Крищюнайте А., Об условиях нормальности и интегрируемости почти контактных структур на гиперповерхностях комплексного и двойного пространства, *Уч. зап. Казанского ун-та*, 1968, 128, Nr. 3, p. 55 – 75.