

ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATIKOS KATEDRA

Darja Tarasova

Taškinių procesų lokalus asimptotinis normalumas

Bakalauro darbas

Darbo vadovas

doc. Vaidotas Kanišauskas

Šiauliai, 2012

TURINYS

ĮVADAS	3
1. TEORIJA	4
1.1. TAŠKINIAI PROCESAI	4
1.1.1. Atstatymo procesas	4
1.1.2. Nehomogeninis puasono procesas ir jo pavyzdžiai	6
1.2. REGULIARŪS STATISTINIAI EKSPERIMENTAI	7
1.2.1. Statistinių eksperimentų asimptotinės įverčių savybės	8
1.3. LOKALUS ASIMPTOTINIS NORMALUMAS	10
1.3.1. Nepriklausomi vienasrūšiai stebėjimai	10
2. GAUTI REZULTATAI	11
2.1. ATSTATYMO PROCESAS	11
2.1.1. Lokalus asimptotinis normalumas	12
2.2. NEHOMOGENINIS PUASONO PROCESAS	17
2.2.1. Lokalus asimptotinis normalumas	18
3. PAVYZDŽIAI	23
IŠVADOS	28
LITERATŪRA	29
Summary	30

IVADAS

Tikslas: įsisavinti lokalaus asimptotinio normalumo (LAN) sąvokas.

Uždavinys: rasti bendrąsias sąlygas, kada patenkinta LAN sąlyga

- a) atstatymo procesui,
- b) nehomogeniniam Puasono procesui.

Šiuolaikinei asimptotinei parametru įvertinimo ir hipotezių atskyrimo teorijai pradžią davė A. Valdas, išsakęs idėją apie tikimybinių matų šeimų aproksimavimą Gauso skirstiniu lokaliai asimptotinė prasme. Šią idėją toliau plėtojo Le Kamas, kuris įvedė lokalaus asimptotinio normalumo (LAN) apibrėžimą. Savo fundamentaliajame darbe, Le Kamas atskleidė glaudų ryšį tarp asimptotinės statistikos uždavinių ir tikėtinumo santykio logaritmo elgesio, didėjant stebėjimų apimčiai. Le Kamas, po jo ir J. Hajekas ir kiti autoriai nustatė, kad daugelis parametru įvertinimo ir hipotezių patikrinimo statistinių procedūrų svarbiausių išvadų seka iš tikėtinumo santykio logaritmo asimptotinio normalumo, esant artimoms hipotezėms. Kadangi šios išvados nepriklauso nuo stebėjimų prigimties, o tik nuo tikėtinumo santykio logaritmo elgesio, tai vieną kartą nustačius sąlygas, kurias turi tenkinti tikėtinumo santykis konkrečiuose statistiniuose modeliuose, belieka patikrinti jas. Tokios sąlygos nustatomos reguliarių statistinių eksperimentų normuotiems tikėtinumo santykiams ir lemiančios maksimalaus tikėtinumo ir Bajeso įverčių tolygų pagrįstumą, tolygų asimptotinį normalumą ir asimptotinį minimaksiškumą.

1. TEORIJA

1.1. TAŠKINIAI PROCESAI

1.1.1. Atstatymo procesas

Apibrėšime atstatymo procesą ir trumpai nusakysime žinomas jo savybes [2].

Apibrėžimas. Tegu tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ apibrėžta nepriklausomų to paties skirstinio atsitiktinių dydžių seka $\{X_n\} = X_1, X_2, \dots$ tokių, kad $X_i \geq 0$ su visais. Apibrėžiame atstatymo procesą $N(t)$ tokia formule:

$$N(t) = \begin{cases} 0, & t < X_1, \\ 1, & X_1 \leq t < X_1 + X_2, \\ \dots, \\ k, & X_1 + \dots + X_k \leq t < X_1 + \dots + X_{k+1}, \\ \dots \end{cases}$$

Atstatymo procesą galima užrašyti tokiu pavidalu:

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (T_n \leq t),$$

čia $T_n = \sum_{i=1}^n X_i$,

o $X_1, X_2, \dots, X_n$ - teigiami ir nepriklausomai vienodai pasiskirstę.

1.1.1. Teorema. Atstatymo proceso $N(t)$ skirstinys nusakomas formule:

$$P(N(t) = n) = F_n(t) - F_{n+1}(t), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

čia

$$F_n(t) = P\left(\sum_{i=1}^n X_i \leq t\right),$$

$$F_0(t) \equiv 1.$$

1 išvada. Eksponentinio atstatymo proceso tikimybė yra:

$$P(N(t) = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad n = 1, 2, \dots$$

2 išvada. Geometrinio atstatymo proceso tikimybė yra:

$$P(N(t) = n) = C_{[t]}^n p^n q^{[t]-n},$$

$$n = 1, 2, \dots$$

1.1.2. Teorema. *Teisinga formulė*

$$MN(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t).$$

1.1.3. Teorema. *Jei $0 < MX_i = a < \infty$, tai*

$$\frac{N(t)}{t} \xrightarrow{P} \frac{1}{a}, \quad t \rightarrow \infty.$$

1.1.4. Teorema. *Atstatymo proceso vidurkis $H(t) = MN(t)$ apskaičiuojamas pagal formulę*

$$H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t).$$

1.1.5. Teorema. *(Centrinė ribinė teorema) Jei $MX_1 = a < \infty$, $DX_1 = \sigma^2 < \infty$, tai*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P \left(\frac{N(t) - \frac{t}{a}}{\sqrt{\frac{t\sigma^2}{a^3}}} < x \right) = \Phi(x), \quad x \in R,$$

čia

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

1.1.6. Teorema. *(Didžiųjų skaičių dėsnis) Jei $0 < MX_1 = a < \infty$, tai*

$$P \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{a} \right) = 1.$$

1.1.2. Nehomogeninis puasono procesas ir jo pavyzdžiai

Apibrėžimas [2]. Atsitiktinis procesas $N(t)$ vadinamas nehomogeniniu Puasono procesu su intensyvumu $s(\theta, s)$, $\theta \in \Theta$, jei

$$P(N(t) = n) = \frac{\left(\int_0^t s(\theta, s) ds\right)^n}{n!} \cdot e^{-\int_0^t s(\theta, s) ds}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

kur $s(\theta, s)$ tokia, kad

$$S(\theta, t) = \int_0^t s(\theta, s) ds \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow \infty.$$

Tuomet,

$$P(N(t) = n) = \frac{(S_\theta(t))^n}{n!} \cdot e^{-S_\theta(t)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Nehomogeninis Puasono procesas, priklausomai nuo intensyvumo funkcijos, taikomas įvairiose fizikos srityse.

1. Nehomogeninis Puasono procesas $N(t)$ yra naudojamas lazerinėje fizikoje parametro θ perdavimui su tokia intensyvumo funkcija:

$$s_\theta(t) = \lambda(\theta, t) + \lambda, \quad 0 \leq t \leq T,$$

čia λ – foninis spinduliavimo intensyvumas, $\lambda(\theta, t)$ – lazerio moduliacijos intensyvumas.

2. Nehomogeninio Puasono procesas $N(t)$ yra naudojamas optinėje fizikoje su intensyvumo funkcija tokio pavidalo:

$$s_\theta(t) = \frac{1}{2}a(1 + \cos(\omega t + \psi)) + \lambda,$$

kur $\theta = (a, \omega, \psi, \lambda)$, a – amplitudė, ω – dažnis, ψ – intensyvumo fazė, $\lambda > 0$.

3. Tegul funkcija $f(t)$ yra dukart integruojama bet kuriame baigtiniame intervale ir $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$, $\theta \in (a, b)$, $0 < a < b < \infty$. Tada Nehomogeninio Puasono proceso $N(t)$ intensyvumo funkcija yra tokio pavidalo:

$$s_\theta(t) = \theta f(t) + \lambda, \quad \lambda > 0,$$

kur $\int_0^\infty f(t)^2 dt = \infty$, dažnai naudojama asimptotinių įverčių teorijoje.

1.2. REGULIARŪS STATISTINIAI EKSPERIMENTAI

Tarkime, kad $(\Omega, \mathcal{F}, P_\theta, \theta \in \Theta)$ yra tikimybinė erdvė, $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ – mati erdvė, $\mathcal{X}$ – matus atvaizdis iš $(\Omega, \mathcal{F})$ į $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, P^X – atsitiktinio elemento X tikimybiniis akirstinys, t.y.

$$P_\theta^X(A) = P_\theta\{\omega: X(\omega) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}.$$

Atsitiktinis elementas X vadinamas stebėjimais, $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ – imčių erdve, o apie elemento X skirstinį P_θ^X žinome tik tiek, kad jis priklauso skirstinių klasei $\{P_\theta^X, \theta \in \Theta\}$, sudarytai nors iš dviejų elementų.

1.2.1 Apibrėžimas [1]. Trejetas $\mathcal{E} = (\mathcal{X}, \mathcal{B}, P_\theta^X, \theta \in \Theta)$ vadinamas stebėjimų X indukuotu statistiniu eksperimentu.

Akivaizdu, kad tikimybinių erdvių šeima $(\Omega, \mathcal{F}, P_\theta)$ yra pagalbinis objektas ir gali būti apibrėžta įvairiais būdais. Natūralu už Ω imti $\mathcal{X}$, už $\mathcal{F}$ σ – algebrą $\mathcal{B}$ ir tarti, kad $P_\theta(A) = P_\theta^X(A)$, kai $A \in \mathcal{B}$ ir apibrėžti $X(x) = x$, kai $x \in \mathcal{X}$.

Pagrindinis parametrinės statistikos uždavinys yra daryti išvadas apie X tikimybinių skirstinį P_θ^X , remiantis stebėjimais X , iš anksto nežinant, kokia tikroji parametro θ reikšmė, tik žinant, kad ji priklauso tam tikrai atvirai ir iškilai aibei $\Theta \in R^k$, $k \geq 1$.

1.2.2. Apibrėžimas [1]. Tarkime, kad $(\mathcal{U}, \mathcal{A})$ – kita mati erdvė. Statistika vadinamas kiekvienas matus atvaizdis $T = T(X)$ iš $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ į $(\mathcal{U}, \mathcal{A})$.

Tuo atveju, kada $\mathcal{U} = \Theta$, o $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\Theta)$ ($\mathcal{B}(\Theta)$ – Θ poaibių σ -algebra), statistika $T = T(X)$ vadinama parametro θ įverčiu ir dažnai žymima $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X)$.

1.2.3. Apibrėžimas [1]. Statistinis eksperimentas $\mathcal{E} = (\mathcal{X}, \mathcal{B}, P_\theta^X, \theta \in \Theta)$ vadinamas dominuojamu (mato Q^X), jei egzistuoja σ – baigtinis matas Q^X toks, kad $P_\theta^X \ll Q^X$ (absoliučiai tolydus mato Q atžvilgiu) su visais $\theta \in \Theta$.

Tarkime, kad statistinis eksperimentas $\mathcal{E} = (\mathcal{X}, \mathcal{B}, P_\theta^X, \theta \in \Theta)$, $\Theta \subset R^k$, $k \geq 1$ dominuojamas mato Q^X . Pažymėkime

$$Z(\theta, x) = \frac{dP_\theta^X}{dQ^X}(x), \quad x \in \mathcal{B}.$$

1.2.4. Apibrėžimas [1]. Statistika $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X)$ vadinama parametro θ maksimalaus tikėtumo įverčiu, jei

$$Z(\hat{\theta}, X) = \sup_{\theta \in \bar{\Theta}} Z(\theta, X),$$

čia $\bar{\Theta}$ – aibės Θ uždarinys.

1.2.1. Statistinių eksperimentų asimptotinės įverčių savybės

Bendrosios sąlygos, lemiančios universalių statistinių eksperimentų asimptotines įverčių savybes [1].

1A. Tikimybinių matų šeima $\{P_\theta^t, \theta \in \Theta\}$ tolygiai bet kuriame kompakte $K \subset \Theta$ tenkina lokalaus asimptotinio normalumo sąlygą, t.y. tam tikrai neišsigimusiai matricai $\varphi_t(\theta)$, kiekvienam kompaktui $K \subset \Theta$ ir bet kurioms sekoms $\{\theta_n\}$, $\{t_n\}$ ir $\{u_n\}$ tokioms, kad $\theta_n \in K$, $\theta_n + \varphi_{t_n}(\theta_n)u_n \in K$ visiems n ir $t_n \rightarrow \infty$ ir $u_n \rightarrow u \in R^k$, kai $n \rightarrow \infty$, teisinga pereinamybė

$$Z_{t_n, \theta_n}(u_n) = \exp \left\{ u_n' \eta_{t_n, \theta_n} - \frac{1}{2} |u_n|^2 + r_{t_n}(u_n, \theta_n) \right\},$$

kur

$$\mathcal{L} \left(\eta_{t_n, \theta_n} \middle| P_{\theta_n}^{t_n} \right) \Rightarrow \mathcal{N}(0, I_k), \quad n \rightarrow \infty$$

$$P_{\theta_n}^{t_n} - \lim_{n \rightarrow \infty} r_{t_n}(u_n, \theta_n) = 0,$$

o I_k – vienetinė $k \times k$ matrica.

2A. Matrica $\varphi_t(\theta)$ tokia, kad su bet kuriuo kompaktu $K \subset \Theta$

a) $\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in K} |\varphi_t(\theta)| = 0,$

b) tolygiai pagal $\theta_1, \theta_2 \in K$ egzistuoja riba

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t^{-1}(\theta_2) \varphi(\theta_1) = B(\theta_1, \theta_2),$$

kurioje matrica $B(\theta_1, \theta_2)$ tolydi pagal θ_1 .

3A. Su bet kuriuo kompaktu $K \subset \Theta$ egzistuoja konstantos $\alpha > k, m \geq \alpha, a = a(K) \geq 0,$

$B = B(K) > 0$ tokios, kad su kiekvienu $R > 0$ ir $t \geq t_0 = t_0(K)$

$$|u_2 - u_1|^{-\alpha} \mathbb{E}_\theta \left| [Z_{t,\theta}(u_2)]^{\frac{1}{m}} - [Z_{t,\theta}(u_1)]^{\frac{1}{m}} \right|^m \leq B(1 + R^\alpha),$$

visiems $\theta \in K, u_1, u_2 \in U_{\theta,t}$, kai $|u_1| \leq R, |u_2| \leq R$.

4A. Bet kuriam kompaktui $K \subset \Theta$ egzistuoja konstantos $c = c(K) > 0, \gamma = \gamma(K) > 0,$

$t_0 = t_0(K) > 0$ tokios, kad visiems $t \geq t_0, \theta \in K$ ir $u \in U_{\theta,t}$

$$\mathbb{E}_\theta [Z_{t,\theta}(u)]^{\frac{1}{4}} \leq \exp\{-c|u|^\gamma\}.$$

1.2.1. Teorema. Tarkime, kad patenkintos 1A-4A sąlygos, išskyrus sąlygą b) iš 2A. Tada kiekvienam kompaktui $K \subset \Theta$, maksimalaus tikėtinumo įverčiui (MTI) $\hat{\theta}_t$ galioja tvirtinimai:

a) tolygiai pagal $\theta \in K$

$$P_\theta^t - \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\theta}_t = 0;$$

b) tolygiai pagal $\theta \in K$

$$\mathcal{L}(\varphi_t^{-1}(\theta)(\hat{\theta}_t - \theta) | P_\theta^t) \Rightarrow \mathcal{N}(0, I_k), \quad t \rightarrow \infty;$$

c) bet kuriai funkcijai $l(x): R^k \rightarrow R$, turinčiai polinominę mažorantę, tolygiai pagal $\theta \in K$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_\theta l(\varphi_t^{-1}(\theta)(\hat{\theta}_t - \theta)) = \mathbb{E} l(\eta),$$

čia η – k -matis atsitiktinis vektorius toks, kad

$$\mathcal{L}(\eta|P) \Rightarrow \mathcal{N}(0, I_k).$$

Jei kartu patenkinta ir sąlyga b) iš 2A, tai įvertis $\hat{\theta}_t$ – asimptotiškai efektyvus aibėje K atžvilgiu nuostolių funkcijos $l_t(x) = l(\varphi_t^{-1}(\theta_0)x)$, $t \in R_+$ kiekvienam $\theta_0 \in K$ ir $l \in W_p$, kur W_p žymima klasė nuostolių funkcijų $w(u)$, apibrėžtų aibėje $\Theta \subset R^k$ tokių, kad $w(u) > 0$, $w(0) = 0$ ir $w(-u) = w(u)$.

1.3. LOKALUS ASIMPTOTINIS NORMALUMAS

1.3.1. Nepriklausomi vienaarūšiai stebėjimai

1.3.1. Teorema [1]. Jei ε_i – reguliarūs Θ -e eksperimentai ir $I(\theta) \neq 0$, nes $\theta \in \Theta$, tai normuotas tikėtinumo santykis $Z_{n,\theta}(u)$ gali būti užrašytas tokiu pavidalu:

$$\hat{Z}_{n,\theta} = \exp \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \left(\frac{d \ln f(x_j; \theta)}{d\theta}, u \right) - \frac{1}{2} (I(\theta)u, u) + \hat{\psi}_n(u, \theta) \right\},$$

čia $P_\theta^n \{(\hat{\psi}_n(u, \theta)) > \varepsilon\} \rightarrow 0$, kai $n \rightarrow \infty$, kiekvienam $n \in R^1$ ir $\varepsilon > 0$, o

$$\mathcal{L} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \frac{d \ln f(x_j; \theta)}{d\theta} \middle| P_\theta^n \right) \sim N(0, I(\theta)),$$

kur $I(\theta) = \int \frac{df}{d\theta}(x; \theta) \left(\frac{df}{d\theta}(x, \theta) \right)^T f^{-1}(x, \theta) d(dx)$, $\{x: f(x, \theta) \neq 0\}$.

Tegu $\{X^\varepsilon, U^\varepsilon, P_\theta^{(\varepsilon)}, \theta \in \Theta\}$ – statistinių eksperimentų šeima, o X^ε – atitinkamas stebėjimas. Kaip paprastai, santykį $\frac{dP_{\theta_2}^{(\varepsilon)}}{dP_{\theta_1}^{(\varepsilon)}}(X^\varepsilon)$ – absoliučiai tolydžios mato $P_{\theta_2}^{(\varepsilon)}$ komponentės išvestinė pagal $P_{\theta_1}^{(\varepsilon)}$ ant stebėjimo X^ε , vadinsime tikėtinumo santykiu.

Apibrėžimas [1]. Šeima $P_\theta^{(\varepsilon)}$ vadinama lokaliai asimptotiškai normalia (LAN) taške $t \in \Theta$, kai $\varepsilon \rightarrow 0$, jei tam tikrai neišsigimusiai $k \times k$ matricai $\varphi(\varepsilon) = \varphi(\varepsilon, t)$ ir bet kuriam $u \in R^k$ galioja pavaizdavimas

$$Z_{\varepsilon,t}(u) = \frac{dP_{t+\varphi(\varepsilon)u}^{(\varepsilon)}}{dP_t^{(\varepsilon)}}(X^\varepsilon) = \exp\left\{u^T \Delta_{\varepsilon,t} - \frac{1}{2}|u|^2 + \psi_\varepsilon(u, t)\right\},$$

čia $\mathcal{L}(\Delta_{\varepsilon,t} | P_t^{(\varepsilon)}) \rightarrow N(0, I)$, kai $\varepsilon \rightarrow 0$, I – vienetinė $k \times k$ matrica ir bet koks $n \in R^k$.

2. GAUTI REZULTATAI

2.1. ATSTATYMO PROCESAS

Bendrosios sąlygos:

G1 sąlyga. Funkcija $h(\theta, \omega_t)$ tolydžiai diferencijuojama pagal θ ir išvestinė lygi

$$\dot{\psi}(\theta, \omega_t) \in L_2[0, T].$$

G2 sąlyga. Visiems $\theta \in \Theta$ Fišerio informacija $I_T(\theta)$ teigiamai apibrėžta ir

$$I_T(\theta) \rightarrow \infty, \text{ kai } T \rightarrow \infty.$$

Be to, egzistuoja tokia konstanta $C_0 > 0$, kad

$$\left| \frac{\varphi_T(\theta_0)}{\varphi_T(\theta)} \right| < C_0, \quad \text{visiems } T > 0, \quad \theta, \theta_0 \in \Theta.$$

G3 sąlyga. Egzistuoja tokia funkcija $\lambda(T) \rightarrow \infty$, kai $T \rightarrow \infty$, kad

- $\lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in \Theta} \sup_{\substack{|u| < \lambda(T) \\ u \in u_{\theta,T}}} \varphi_T(\theta) \left(E_\theta \int_0^T [\psi(\theta_u, \omega_t) - \psi(\theta, \omega_t)]^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = 0,$
- $\lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in \Theta} \sup_{|u|+|v| < \lambda(T)} \varphi_T(\theta)^4 E_\theta \left| \frac{h(\theta_u, \omega_t)}{h(\theta, \omega_t)} \right|^4 h(\theta_v, \omega_t) dt = 0.$

2.1.1. Lokalus asimptotinis normalumas

2.1.1. Teorema [4]. Jei atliekamos G1-G3 sąlygos, tai matų šeima $\{P_\theta^t, \theta \in \Theta\}$, kai $T \rightarrow \infty$ tolygiai pagal $\theta \in K$ lokaliai asimptotiškai normali aibėje Θ su normuojančia funkcija $\varphi_T(\theta)$ ir

$$\Delta_T(\theta, X_T) = \varphi_T(\theta) \int_0^T \frac{\dot{h}(\theta, \omega_t)}{h(\theta, \omega_t)} dM(t),$$

t.y. galioja pavaizdavimas

$$Z_T(u) = \exp \left\{ u \Delta_T(\theta, X_T) - \frac{1}{2} u^2 + f_T(\theta, u, X_T) \right\},$$

čia tolygiai pagal $\theta \in K$

$$P_\theta - \lim_{T \rightarrow \infty} f_T(\theta, u, X_T) = 0,$$

$$\Delta_T(\theta, X_T) \Rightarrow N(0, 1), \text{ kai } T \rightarrow \infty.$$

Irodymas.

Pritaikę pažymėjimus

$$M(t) = X_t - \int_0^t h(\theta, \omega_t) dt \text{ ir}$$

$$\theta_u = \theta + \varphi_T(\theta)$$

ir panaudojus G1 sąlygą, galime užrašyti

$$\ln Z_T(u) = \int_0^T \ln \frac{h(\theta_u, \omega_t)}{h(\theta, \omega_t)} dM(t) - \int_0^T \left[h(\theta_u, \omega_t) - h(\theta, \omega_t) - h(\theta, \omega_t) \cdot \ln \frac{h(\theta_u, \omega_t)}{h(\theta, \omega_t)} \right] dt.$$

Skaičiuojame skirtumą:

$$I_T = \int_0^T \left[\ln \frac{h(\theta_u, \omega_t)}{h(\theta, \omega_t)} - u \varphi_T(\theta) \frac{\dot{h}(\theta, \omega_t)}{h(\theta, \omega_t)} \right] dM(t),$$

kur

$$\ln \frac{h(\theta_u, \omega_t)}{h(\theta, \omega_t)} = \ln h(\theta_u, \omega_t) - \ln h(\theta, \omega_t) = \int_{\theta}^{\theta_u} \frac{\dot{h}(x)}{h(x)} d(x),$$

$$\int_{\theta}^{\theta_u} \frac{\dot{h}(x)}{h(x)} = (\theta_u - \theta) \frac{\dot{h}(\xi, \omega_t)}{h(\xi, \omega_t)},$$

o tai tas pats kaip $u\varphi_T(\theta) \frac{\dot{h}(\theta, \omega_t)}{h(\theta, \omega_t)}$.

Įsitikinimui

$$\int_{\theta}^{\theta_u} ds = \theta_u - \theta = \theta + u\varphi_T(\theta) - \theta = u\varphi_T(\theta),$$

kur $\theta_u = \theta + u\varphi_T(\theta)$.

Pritaikę Čebyševio nelygybę $P_{\theta}^T(|X| > \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}|X|^2}{\varepsilon^2}$ ir martingalų savybę, gausime:

$$\begin{aligned} P_{\theta}^T\{|I_T| > \varepsilon\} &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E}_{\theta} \int_0^T \left[\ln \frac{h(\theta_u, \omega_t)}{h(\theta, \omega_t)} - u\varphi_T(\theta) \frac{\dot{h}(\theta, \omega_t)}{h(\theta, \omega_t)} \right]^2 \cdot h(\theta, \omega_t) dt = \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E}_{\theta} \int_0^T \left[\sqrt{h(\theta, \omega_t)} \ln \frac{h(\theta_u, \omega_t)}{h(\theta, \omega_t)} - (\theta_u - \theta) \frac{\dot{h}(\theta, \omega_t)}{\sqrt{h(\theta, \omega_t)}} \right]^2 dt \end{aligned}$$

Kadangi funkcija $h(\theta, \omega_t)$ teigiama ir absoliučiai tolydi pagal θ , tai funkcija $\ln h(\theta, \omega_t)$ taip pat absoliučiai tolydi ir kai $u > 0$, galime užrašyti:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_{\theta} \int_0^T \left[\sqrt{h(\theta, \omega_t)} \ln \frac{h(\theta_u, \omega_t)}{h(\theta, \omega_t)} - (\theta_u - \theta) \frac{\dot{h}(\theta, \omega_t)}{\sqrt{h(\theta, \omega_t)}} \right]^2 dt = \\ &= \mathbb{E}_{\theta} \int_0^T \left\{ \int_{\theta}^{\theta_u} \left[\frac{\sqrt{h(\theta, \omega_t)} \dot{h}(y, \omega_t)}{h(y, \omega_t)} - \frac{\dot{h}(\theta, \omega_t)}{\sqrt{h(\theta, \omega_t)}} \right] dy \right\}^2 dt = \end{aligned}$$

laikome, jog $\psi(\theta, \omega_t) = 2\sqrt{h(\theta, \omega_t)}$, o $\dot{\psi}(\theta, \omega_t) = \frac{\dot{h}(\theta, \omega_t)}{\sqrt{h(\theta, \omega_t)}}$,

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E}_\theta \int_0^T \left\{ \int_\theta^{\theta_u} \left[\dot{\psi}(y, \omega_t) \sqrt{\frac{h(\theta, \omega_t)}{h(y, \omega_t)}} - \dot{\psi}(\theta, \omega_t) \right] dy \right\}^2 dt \leq \\
&\leq u \varphi_T(\theta) \mathbb{E}_\theta \int_\theta^{\theta_u} \left\{ \int_0^T \left[\dot{\psi}(y, \omega_t) \sqrt{\frac{h(\theta, \omega_t)}{h(y, \omega_t)}} - \dot{\psi}(\theta, \omega_t) \right]^2 dt \right\} dy \leq \\
&\leq u^2 \varphi_T(\theta)^2 \sup_{|\theta-y| < \varphi_T(\theta)u} \mathbb{E}_\theta \int_0^T \left[\dot{\psi}(y, \omega_t) \sqrt{\frac{h(\theta, \omega_t)}{h(y, \omega_t)}} - \dot{\psi}(\theta, \omega_t) \right]^2 dt \leq
\end{aligned}$$

čia, pasinaudoję elementaria nelygybe $(a+b)^2 = 2a^2 + 2b^2$, gausime

$$\begin{aligned}
&\leq 2u^2 \varphi_T(\theta)^2 \left(\sup_{|\theta-y| < \varphi_T(\theta)u} \mathbb{E}_\theta \int_0^T [\dot{\psi}(y, \omega_t) - \dot{\psi}(\theta, \omega_t)]^2 dt + \right. \\
&\quad \left. + \sup_{|\theta-y| < \varphi_T(\theta)u} \mathbb{E}_\theta \int_0^T \left[\dot{\psi}(y, \omega_t) \left(\sqrt{\frac{h(\theta, \omega_t)}{h(y, \omega_t)}} - 1 \right) \right]^2 dt \right).
\end{aligned}$$

Kadangi mes neturime $a - b$ išraiškos, tai įvedame $a - c + c - b = (a - c) + (c - b)$.

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}(y, \omega_t) \sqrt{\frac{h(\theta, \omega_t)}{h(y, \omega_t)}} &= \psi(y, \omega_t) \frac{\sqrt{h(\theta, \omega_t)} - \sqrt{h(y, \omega_t)}}{\sqrt{h(y, \omega_t)}} = \\
&= \dot{\psi}(y, \omega_t) \frac{\sqrt{h(\theta, \omega_t)}}{\sqrt{h(y, \omega_t)}} - \dot{\psi}(y, \omega_t) \sqrt{\frac{h(y, \omega_t)}{h(y, \omega_t)}},
\end{aligned}$$

kur $\sqrt{\frac{h(y, \omega_t)}{h(y, \omega_t)}} = 1 = c$. Todėl $c - b = \dot{\psi}(y, \omega_t) - \dot{\psi}(\theta, \omega_t)$.

$$= 2u^2 \varphi_T(\theta)^2 \sup_{\varphi_T^{-1}(\theta) |\theta-y| < \lambda(T)} \int_0^T [\dot{\psi}(y, \omega_t) - \dot{\psi}(\theta, \omega_t)]^2 dt +$$

$$+2u^2\varphi_T(\theta)^2 \sup_{|\theta-y|<\varphi_T(\theta)u} \mathbb{E}_\theta \int_0^T \left[\dot{\psi}(y, \omega_t) \sqrt{\frac{h(\theta, \omega_t)}{h(y, \omega_t)}} - 1 \right]^2 dt.$$

Dešinėje pusėje, pirmasis sumavimo narys, pagal G3 sąlygą, artėja į nulį tolygiai pagal $\theta \in K$, kai $T \rightarrow \infty$. Įrodysime tai:

$$\varphi_T(\theta) = \left\{ \int_0^T \frac{\dot{h}(\theta, \omega_t)^2}{h(\theta, \omega_t)} dt \right\}^{-1} = \left\{ \int_0^T \frac{1}{h(\theta, \omega_t)} dt \right\}^{-1} = \frac{h(\theta, \omega_t)}{T}$$

Akivaizdu, jog kai $T \rightarrow \infty$, pirmasis sumavimo narys artės į nulį.

Įvertinsime antrąjį narį:

$$\begin{aligned} & 2u^2\varphi_T(\theta)^2 \sup_{|\theta-y|<\varphi_T(\theta)u} \mathbb{E}_\theta \int_0^T \left[\dot{\psi}(y, \omega_t) \sqrt{\frac{h(\theta, \omega_t)}{h(y, \omega_t)}} - 1 \right]^2 dt = \\ & = 2u^2\varphi_T(\theta)^2 \sup_{|\theta-y|<\varphi_T(\theta)u} \mathbb{E}_\theta \int_0^T \left[\frac{\dot{h}(\theta, \omega_t)}{h(y, \omega_t)} \left(\sqrt{h(\theta, \omega_t)} - \sqrt{h(y, \omega_t)} \right) \right]^2 dt. \end{aligned}$$

Įrodome kaip gavome šitoki pavidalą:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(y, \omega_t) \sqrt{\frac{h(\theta, \omega_t)}{h(y, \omega_t)}} - 1 &= \frac{\dot{h}(y, \omega_t)}{\sqrt{h(y, \omega_t)}} \cdot \frac{\sqrt{h(\theta, \omega_t)} - \sqrt{h(y, \omega_t)}}{\sqrt{h(y, \omega_t)}} = \\ &= \frac{\dot{h}(\theta, \omega_t)}{h(y, \omega_t)} \left(\sqrt{h(\theta, \omega_t)} - \sqrt{h(y, \omega_t)} \right). \end{aligned}$$

Pasinaudosime tuo, kad jei $g(y) > 0$ ir $\sqrt{g(y)}$ absoliučiai tolydi intervale $[\alpha, \beta]$, tai

$$\sqrt{g(\beta)} - \sqrt{g(\alpha)} = \int_\alpha^\beta \frac{\dot{g}(y)}{2\sqrt{g(y)}} dy.$$

Kadangi $\sqrt{h(\theta, \omega_t)}$ absoliučiai tolydi pagal θ , tai galime užrašyti:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_\theta \varphi_T(\theta)^2 \int_0^T \left[\frac{\dot{h}(\theta, \omega_t)}{h(y, \omega_t)} \left(\sqrt{h(\theta, \omega_t)} - \sqrt{h(y, \omega_t)} \right) \right]^2 dt = \\
& = \varphi_T(\theta)^2 \mathbb{E}_\theta \int_0^T \left[\frac{\dot{h}(\theta, \omega_t)}{h(y, \omega_t)} \int_y^\theta \frac{\dot{h}(z, \omega_t)}{2\sqrt{h(z, \omega_t)}} dz \right]^2 dt \leq \\
& \leq \varphi_T(\theta)^4 \sup_{\varphi_T^{-1}(\theta) |\theta - z| < \lambda(T)} \mathbb{E}_\theta \int_0^T \left[\frac{\dot{h}(\theta, \omega_t)}{h(y, \omega_t)} \frac{\dot{h}(z, \omega_t)}{2\sqrt{h(z, \omega_t)}} \right]^2 dt \leq
\end{aligned}$$

remiantis Koši-Buniakovskio nelygybe

$$EUV \leq (EU^2 EV^2)^{\frac{1}{2}} \leq EU^2 EV^2,$$

kur EU^2 pasižymėsime $\varphi_T(\theta)^2$, o EV^2 - $\mathbb{E}_\theta \int_0^T \left[\frac{\dot{h}(\theta, \omega_t)}{h(y, \omega_t)} \int_y^\theta \frac{\dot{h}(z, \omega_t)}{2\sqrt{h(z, \omega_t)}} dz \right]^2$, galime rašyti toliau

$$\leq \sup_{\varphi_T^{-1}(\theta) |\theta - z| < \lambda(T)} \left\{ \mathbb{E}_\theta \varphi_T(\theta)^4 \int_0^T \left[\frac{\dot{h}(y, \omega_t)}{h(y, \omega_t)} \right]^4 h(z, \omega_t) dt \times \mathbb{E}_\theta \varphi_T(\theta)^4 \int_0^T \frac{\dot{h}(z, \omega_t)^4}{h(z, \omega_t)^3} dt \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Kai atliekama G3 sąlyga, abi šios dalys konverguoja į nulį tolygiai pagal $\theta \in K$.

Irodymas baigtas.

2.2. NEHOMOGENINIS PUASONO PROCESAS

Bendrosios sąlygos:

K1 sąlyga. Visiems $\theta, \theta_0 \in \Theta$, kai $T < \infty$,

$$\int_0^T S(\theta, t)S(\theta_0, t)^{-1}dt < \infty.$$

Funkcija $S(\theta, t)$ absoliučiai tolydi pagal θ su visais $t \geq 0$ ir išvestinė lygi

$$\dot{\psi}_T(\theta) \in L_2[0, T],$$

su visais $\theta \in \Theta$ ir $T < \infty$.

K2 sąlyga. Funkcija $\varphi_T(\theta) \rightarrow 0$, kai $T \rightarrow \infty$. Be to, egzistuoja tokia konstanta $C_0 > 0$, kad

$$\varphi_T(\theta) \leq C_0 \varphi_T(\theta_0).$$

K3 sąlyga. Egzistuoja toks $\delta \in (0, 1)$, kad

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{\theta} \sup_{|\theta - y| < \varphi_T^\delta} \varphi_T(\theta) \|\dot{\psi}_T(y) - \dot{\psi}_T(\theta)\| = 0.$$

K4 sąlyga. Egzistuoja toks $\delta \in (0, 1)$, kad

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{\theta} \sup_{|\theta - z| + |\theta - y| < \varphi_T^\delta} \varphi_T^4(\theta) \int_0^T \left[\frac{\dot{S}(y, t)}{S(y, t)} \right]^4 S(z, t) dt = 0.$$

2.2.1. Lokalus asimptotinis normalumas

2.2.1. Teorema [5]. Jei išpildytos K1-K4 sąlygos, tai matų šeima $\{P_\theta^t, \theta \in \Theta\}$, kai $T \rightarrow \infty$ tolygiai pagal $\theta \in K$, lokaliai asimptotiškai normali Θ -aibėje su normuojančia funkcija $\varphi_T(\theta)$ ir

$$\Delta_T(\theta, X_T) = \varphi_T(\theta) \int_0^T \frac{\dot{s}(\theta, \omega_t)}{s(\theta, \omega_t)} dM(t),$$

t.y., galioja pavaizdavimas

$$Z_T(u) = \exp \left\{ u \Delta_T(\theta, X_T) - \frac{1}{2} u^2 + g_T(\theta, u, X_T) \right\},$$

čia tolygiai pagal $\theta \in K$

$$P_\theta - \lim_{T \rightarrow \infty} g_T(\theta, u, X_T) = 0,$$

$$\Delta_T(\theta, X_T) \Rightarrow N(0, 1), \text{ kai } T \rightarrow \infty.$$

Irodymas.

Pritaikę pažymėjimus

$$M(t) = X_t - \int_0^t s(\theta, \omega_t) dt \text{ ir}$$

$$\theta_u = \theta + \varphi_T(\theta),$$

bei remdamiesi K1 sąlyga, galime užrašyti

$$\ln Z_T(u) = \int_0^T \ln \frac{s(\theta_u, \omega_t)}{s(\theta, \omega_t)} dM(t) - \int_0^T \left[s(\theta_u, \omega_t) - s(\theta, \omega_t) - s(\theta, \omega_t) \cdot \ln \frac{s(\theta_u, \omega_t)}{s(\theta, \omega_t)} \right] dt.$$

Skačiuojame skirtumą:

$$I_T = \int_0^T \left[\ln \frac{s(\theta_u, \omega_t)}{s(\theta, \omega_t)} - u \varphi_T(\theta) \frac{\dot{s}(\theta, \omega_t)}{s(\theta, \omega_t)} \right] dM(t),$$

kur

$$\ln \frac{s(\theta_u, \omega_t)}{s(\theta, \omega_t)} = \ln s(\theta_u, \omega_t) - \ln s(\theta, \omega_t) = \int_{\theta}^{\theta_u} \frac{\dot{s}(x)}{s(x)},$$

$$\int_{\theta}^{\theta_u} \frac{\dot{s}(x)}{s(x)} = (\theta_u - \theta) \frac{\dot{s}(\xi, \omega_t)}{s(\xi, \omega_t)}.$$

o tai lygu $u\varphi_T(\theta) \frac{\dot{s}(\theta, \omega_t)}{s(\theta, \omega_t)}$.

Pritaikykime Čebyšovo nelygybę $P_{\theta}^T(|X| > \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}|X|^2}{\varepsilon^2}$ ir martingalų savybę

$\left(\int_0^T f(t) dM(t)\right)^2 = \int_0^T f(t)^2 S(t) dt$. Tada bet kokiam $\varepsilon > 0$ gausime

$$\begin{aligned} P_{\theta}^T\{|I_T| > \varepsilon\} &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^T \left[\ln \frac{s(\theta_u, \omega_t)}{s(\theta, \omega_t)} - u\varphi_T(\theta) \frac{\dot{s}(\theta, \omega_t)}{s(\theta, \omega_t)} \right]^2 \cdot s(\theta, \omega_t) dt = \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^T \left[\sqrt{s(\theta, \omega_t)} \ln \frac{s(\theta_u, \omega_t)}{s(\theta, \omega_t)} - (\theta_u - \theta) \frac{\dot{s}(\theta, \omega_t)}{\sqrt{s(\theta, \omega_t)}} \right]^2 dt. \end{aligned}$$

Kadangi funkcija $s(\theta, \omega_t)$ teigiama ir absoliučiai tolydi pagal θ , tai funkcija $\ln s(\theta, \omega_t)$ taip pat absoliučiai tolydi pagal θ ir kai $u > 0$, galime užrašyti:

$$\begin{aligned} &\int_0^T \left[\sqrt{s(\theta, \omega_t)} \ln \frac{s(\theta_u, \omega_t)}{s(\theta, \omega_t)} - (\theta_u - \theta) \frac{\dot{s}(\theta, \omega_t)}{\sqrt{s(\theta, \omega_t)}} \right]^2 dt = \\ &= \int_0^T \left\{ \int_{\theta}^{\theta_u} \left[\frac{\sqrt{s(\theta, \omega_t)} \dot{s}(y, \omega_t)}{s(y, \omega_t)} - \frac{\dot{s}(\theta, \omega_t)}{\sqrt{s(\theta, \omega_t)}} \right] dy \right\}^2 dt = \end{aligned}$$

laikome, jog $\psi(\theta, \omega_t) = 2\sqrt{s(\theta, \omega_t)}$, o $\dot{\psi}(\theta, \omega_t) = \frac{\dot{s}(\theta, \omega_t)}{\sqrt{s(\theta, \omega_t)}}$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^T \left\{ \int_{\theta}^{\theta_u} \left[\dot{\psi}(y, \omega_t) \sqrt{\frac{s(\theta, \omega_t)}{s(y, \omega_t)}} - \dot{\psi}(\theta, \omega_t) \right] dy \right\}^2 dt \leq \\
&\leq u \varphi_T(\theta) \int_{\theta}^{\theta_u} \left\{ \int_0^T \left[\dot{\psi}(y, \omega_t) \sqrt{\frac{s(\theta, \omega_t)}{s(y, \omega_t)}} - \dot{\psi}(\theta, \omega_t) \right]^2 dt \right\} dy \leq \\
&\leq u^2 \varphi_T(\theta)^2 \sup_{|\theta-y| < \varphi_T(\theta)u} \int_0^T \left[\dot{\psi}(y, \omega_t) \sqrt{\frac{s(\theta, \omega_t)}{s(y, \omega_t)}} - \dot{\psi}(\theta, \omega_t) \right]^2 dt \leq
\end{aligned}$$

čia, pasinaudoję elementaria nelygybe $(a + b)^2 = 2a^2 + 2b^2$, gausime

$$\begin{aligned}
&\leq 2u^2 \varphi_T(\theta)^2 \left(\sup_{|\theta-y| < \varphi_T(\theta)u} \int_0^T [\dot{\psi}(y, \omega_t) - \dot{\psi}(\theta, \omega_t)]^2 dt + \right. \\
&\quad \left. + \sup_{|\theta-y| < \varphi_T(\theta)u} \int_0^T \left[\dot{\psi}(y, \omega_t) \left(\sqrt{\frac{s(\theta, \omega_t)}{s(y, \omega_t)}} - 1 \right) \right]^2 dt \right) =
\end{aligned}$$

kadangi mes neturime $a - b$ išraiškos, tai įvedame $a - c + c - b = (a - c) + (c - b)$

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}(y, \omega_t) \sqrt{\frac{s(\theta, \omega_t)}{s(y, \omega_t)}} &= \dot{\psi}(y, \omega_t) \frac{\sqrt{s(\theta, \omega_t)} - \sqrt{s(y, \omega_t)}}{\sqrt{s(y, \omega_t)}} = \\
&= \dot{\psi}(y, \omega_t) \frac{\sqrt{s(\theta, \omega_t)}}{\sqrt{s(y, \omega_t)}} - \dot{\psi}(y, \omega_t) \sqrt{\frac{s(y, \omega_t)}{s(y, \omega_t)}}
\end{aligned}$$

kur $\sqrt{\frac{s(y, \omega_t)}{s(y, \omega_t)}} = 1 = c$. Todėl $c - b = \dot{\psi}(y, \omega_t) - \dot{\psi}(\theta, \omega_t)$.

$$= 2u^2 \varphi_T(\theta)^2 \sup_{\varphi_T^{-1}(\theta)|\theta-y| < \lambda(T)} \int_0^T [\dot{\psi}(y, \omega_t) - \dot{\psi}(\theta, \omega_t)]^2 dt +$$

$$+2u^2\varphi_T(\theta)^2 \sup_{|\theta-y|<\varphi_T(\theta)u} \int_0^T \left[\dot{\psi}(y, \omega_t) \sqrt{\frac{s(\theta, \omega_t)}{s(y, \omega_t)}} - 1 \right]^2 dt.$$

Pirmasis sumavimo narys, pagal K2 ir K3 sąlygą, artėja į nulį tolygiai pagal $\theta \in K$, kai $T \rightarrow \infty$.

Irodysime tai:

$$\varphi_T(\theta) = \left\{ \int_0^T \frac{\dot{s}(\theta, \omega_t)^2}{s(\theta, \omega_t)} dt \right\}^{-1} = \left\{ \int_0^T \frac{1}{s(\theta, \omega_t)} dt \right\}^{-1} = \frac{s(\theta, \omega_t)}{T}.$$

Akivaizdu, jog kai $T \rightarrow \infty$, pirmasis sumavimo narys artės į nulį.

Ivertinsime antrąjį narį:

$$\begin{aligned} & 2u^2\varphi_T(\theta)^2 \sup_{|\theta-y|<\varphi_T(\theta)u} \int_0^T \left[\dot{\psi}(y, \omega_t) \sqrt{\frac{s(\theta, \omega_t)}{s(y, \omega_t)}} - 1 \right]^2 dt = \\ & = 2u^2\varphi_T(\theta)^2 \sup_{|\theta-y|<\varphi_T(\theta)u} \int_0^T \left[\frac{\dot{s}(\theta, \omega_t)}{s(y, \omega_t)} (\sqrt{s(\theta, \omega_t)} - \sqrt{s(y, \omega_t)}) \right]^2 dt. \end{aligned}$$

Irodome kaip gavome šitokį pavidalą:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(y, \omega_t) \sqrt{\frac{s(\theta, \omega_t)}{s(y, \omega_t)}} - 1 &= \frac{\dot{s}(y, \omega_t)}{\sqrt{s(y, \omega_t)}} \cdot \frac{\sqrt{s(\theta, \omega_t)} - \sqrt{s(y, \omega_t)}}{\sqrt{s(y, \omega_t)}} = \\ &= \frac{\dot{s}(\theta, \omega_t)}{s(y, \omega_t)} (\sqrt{s(\theta, \omega_t)} - \sqrt{s(y, \omega_t)}). \end{aligned}$$

Pasinaudosime tuo, kad jei $g(y) > 0$ ir $\sqrt{g(y)}$ absoliučiai tolydi intervale $[\alpha, \beta]$, tai

$$\sqrt{g(\beta)} - \sqrt{g(\alpha)} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\dot{g}(y)}{2\sqrt{g(y)}} dy.$$

Kadangi $\sqrt{s(\theta, \omega_t)}$ absoliučiai tolydi pagal θ , tai galime užrašyti:

$$\varphi_T(\theta)^2 \int_0^T \left[\frac{\dot{s}(\theta, \omega_t)}{s(y, \omega_t)} (\sqrt{s(\theta, \omega_t)} - \sqrt{s(y, \omega_t)}) \right]^2 dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \varphi_T(\theta)^2 \int_0^T \left[\frac{\dot{s}(\theta, \omega_t)}{s(y, \omega_t)} \int_y^\theta \frac{\dot{s}(z, \omega_t)}{2\sqrt{s(z, \omega_t)}} dz \right]^2 dt \leq \\
&\leq \varphi_T(\theta)^4 \sup_{\varphi_T^{-1}(\theta)|\theta-z|<\lambda(T)} \int_0^T \left[\frac{\dot{s}(\theta, \omega_t)}{s(y, \omega_t)} \frac{\dot{s}(z, \omega_t)}{2\sqrt{s(z, \omega_t)}} \right]^2 dt \leq
\end{aligned}$$

remiantis Koši-Buniakovskio nelygybe

$$EUV \leq (EU^2 EV^2)^{\frac{1}{2}} \leq EU^2 EV^2,$$

kur EU^2 pasižymėsime $\varphi_T(\theta)^2$, o EV^2 - $\int_0^T \left[\frac{\dot{s}(\theta, \omega_t)}{s(y, \omega_t)} \int_y^\theta \frac{\dot{s}(z, \omega_t)}{2\sqrt{s(z, \omega_t)}} dz \right]^2$, galime rašyti toliau

$$\leq \sup_{\varphi_T^{-1}(\theta)|\theta-z|<\lambda(T)} \left\{ \varphi_T(\theta)^4 \int_0^T \left[\frac{\dot{s}(y, \omega_t)}{s(y, \omega_t)} \right]^4 s(z, \omega_t) dt \times \varphi_T(\theta)^4 \int_0^T \frac{\dot{s}(z, \omega_t)^4}{s(z, \omega_t)^3} dt \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Iš šios nelygybės, pagal K4 sąlygą išplaukia, kad antrasis sumavimo narys artėja į nulį tolygiai pagal $\theta \in K$.

Irodymas baigtas.

3. PAVYZDŽIAI

1 PAVYZDYS. Kai $X_i \sim \text{Exp}(\theta)$, atstatymo procesas $N(t)$ virsta homogeniniu Puasono procesu su parametrais θt . Turime procesą $s(\theta, t) = \theta$.

Kompensatorius: $A(\theta, t) = \theta t$.

Tikriname K1 sąlygą, t.y. turime įsitikinti, kad visiems $\theta, \theta_0 \in \Theta$, kai $T < \infty$,

$$\int_0^T S(\theta, t) S(\theta_0, t)^{-1} dt < \infty.$$

Ir funkcija $s(\theta, t) = \theta$ absoliučiai tolydi pagal θ , o išvestinė $\dot{\psi}(\theta, t) \in L_2[0, T]$. $L_2[0, T]$ žymėsime aibę visų funkcijų $f \in L_2[0, T]$, $f \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$ tokių, kad

$$E \int_0^T f^2(t) dt < \infty.$$

Pasižymime, kad $s(\theta, t) = \theta$, $s(\theta_0, t) = \theta_0$. Skačiuojame:

$$\int_0^T S(\theta, t) S(\theta_0, t)^{-1} dt = \int_0^T \left(\theta \cdot \frac{1}{\theta_0} \right) dt = \frac{T\theta}{\theta_0}.$$

Akivaizdu, kai $T < \infty$, tai $\frac{T\theta}{\theta_0} < \infty$. Tikriname antrąją sąlygos dalį. Ieškome išvestinės $\dot{\psi}(\theta, t)$:

$$\dot{\psi}(\theta, t) = \frac{\dot{s}(\theta, t)}{\sqrt{s(\theta, t)}} = \frac{s'(\theta, t)}{\sqrt{s(\theta, t)}} = \frac{1}{\sqrt{\theta}}.$$

Toliau tikriname, ar $\frac{1}{\sqrt{\theta}} \in L_2[0, T]$:

$$\int_0^T \left(\frac{1}{\sqrt{\theta}} \right)^2 dt = \int_0^T \frac{1}{\theta} dt = \frac{T}{\theta}.$$

Matome, kai $T < \infty$, tai ir išvestinė $\dot{\psi}(\theta, t) < \infty$. Įrodėme K1 sąlygą.

K2 sąlyga. Randame $\varphi_T(\theta)$ ir $\varphi_T(\theta_0)$:

$$\varphi_T(\theta) = \left\{ \frac{\dot{s}(\theta, t)^2}{s(\theta, t)} dt \right\}^{-1} = \left\{ \int_0^T \frac{1^2}{\theta} dt \right\}^{-1} = \left(\frac{T}{\theta} \right)^{-1} = \frac{\theta}{T},$$

$$\varphi_T(\theta_0) = \left\{ \frac{\dot{s}(\theta_0, t)^2}{s(\theta_0, t)} dt \right\}^{-1} = \left\{ \int_0^T \frac{1^2}{\theta_0} dt \right\}^{-1} = \left(\frac{T}{\theta_0} \right)^{-1} = \frac{\theta_0}{T}.$$

Akivaizdu, kai $T \rightarrow \infty$, $\varphi_T(\theta) \rightarrow 0$. Toliau ieškome ar $\varphi_T(\theta) \leq C_0 \varphi_T(\theta_0)$:

$$\frac{\varphi_T(\theta)}{\varphi_T(\theta_0)} \leq C_0,$$

$$\frac{\theta}{T} \cdot \frac{T}{\theta_0} = \frac{\theta}{\theta_0}.$$

Matome, kad $\frac{\theta}{\theta_0}$ yra konstanta. Vadinasi, egzistuoja toks $C_0 > 0$, kad $\frac{\theta}{\theta_0} \leq C_0$. K2 sąlyga įrodyta

K3 sąlyga. $\lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{\theta} \sup_{|\theta - y| < \varphi_T^\delta} \varphi_T(\theta) \|\dot{\psi}_T(y) - \dot{\psi}_T(\theta)\| = 0$.

Pasižymime:

$$\dot{\psi}_T(\theta, \omega_t) = \frac{1}{\sqrt{\theta}}, \quad \dot{\psi}_T(y, \omega_t) = \frac{1}{\sqrt{y}},$$

$$\|\dot{\psi}_T(y) - \dot{\psi}_T(\theta)\| = \left(\int_0^T [\dot{\psi}_T(y, \omega_t) - \dot{\psi}_T(\theta, \omega_t)]^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Todėl,

$$\begin{aligned} \varphi_T(\theta) \|\dot{\psi}_T(y) - \dot{\psi}_T(\theta)\| &= \frac{\theta}{T} \left(\int_0^T \left[\frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{\theta}} \right]^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\theta}{T} \cdot \frac{\theta - 2\sqrt{\theta y} + y}{\theta y} \cdot \sqrt{T} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{T}} \cdot \frac{\theta - 2\sqrt{\theta y} + y}{y}. \end{aligned}$$

Matome, kai $T \rightarrow \infty$, reiškinys bus lygus nuliui. Sąlyga įrodyta.

K4 sąlyga. $\lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{\theta} \sup_{|\theta-z|+|\theta-y| < \varphi_T^{\delta}} \varphi_T^4(\theta) \int_0^T \left[\frac{\dot{S}(y, t)}{S(y, t)} \right]^4 S(z, t) dt = 0$

Pasižymime:

$$\dot{S}(y, t) = 1, \quad S(y, t) = y, \quad S(z, t) = z.$$

Skaičiuojame:

$$\varphi_T^4 \int_0^T \left[\frac{\dot{S}(y, t)}{S(y, t)} \right]^4 S(z, t) dt = \left(\frac{\theta}{T} \right)^4 \int_0^T \left[\frac{1}{y} \right]^4 z dt = \frac{\theta^4}{T^4} \cdot \frac{1}{y^4} \cdot z \int_0^T dt = \frac{\theta^4 z}{T^3 y^4}.$$

Akivaizdu, T artėjant į begalybę, reiškinys bus lygus nuliui. Sąlyga įrodyta.

2 PAVYZDYS. Turime atstatymo procesą $h(\theta, t) = \theta k(t)$. Kompensatorius lygus

$$A(\theta, t) = \theta \int_0^t k(L_s) ds, \quad L_s = s - T_{N(s-)}.$$

Tikriname 1G sąlygą. Pasižymime:

$$\dot{h}(\theta, t) = k(t), \quad \dot{\psi}(\theta, t) = \frac{k(t)}{\sqrt{\theta k(t)}} = \sqrt{\frac{k(t)}{\theta}}.$$

Tikriname, ar $\sqrt{\frac{k(t)}{\theta}} \in L_2[0, T]$, kur

$$L_2[0, T] = \mathbb{E} \int_0^T f^2(t) dt < \infty.$$

$$\mathbb{E} \int_0^T f^2(t) dt = \mathbb{E} \int_0^T \left(\sqrt{\frac{k(t)}{\theta}} \right)^2 dt = \mathbb{E} \int_0^T \frac{k(L_s)}{\theta} ds = \frac{1}{\theta} \mathbb{E} \int_0^T k(L_s) ds \sim T \cdot \frac{b}{a}, \quad \text{kai } T \rightarrow \infty.$$

G1 sąlyga įrodyta.

Tikriname G2 sąlygą:

$$I_T(\theta) = \mathbb{E} \int_0^T \dot{\psi}(\theta, L_s)^2 ds = \mathbb{E} \int_0^T \frac{k(L_s)}{\theta} ds = \frac{1}{\theta} \int_0^T k(L_s) ds = \frac{Tb}{\theta a},$$

nes

$$\mathbb{E} \int_0^T k(L_s) ds = \mathbb{E} \sum_{k=1}^{N(T-)} \int_0^{x_i} k(s) ds + \int_0^{T-T_{N(T-)}} k(s) ds \sim \mathbb{E} N(T) \cdot \mathbb{E} \int_0^{x_1} k(s) ds \sim \frac{T}{a} \cdot b, \text{ kai } T \rightarrow \infty,$$

kur $a = \mathbb{E} X_1$, $b = \mathbb{E} \int_0^{x_1} k(s) ds$.

Sąlygos pirmoji dalis įrodyta.

Tikriname G2 sąlygos antrąją dalį.

$$\varphi_T(\theta) = \frac{1}{\sqrt{I_T(\theta)}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{Tb}{\theta a}}},$$

$$\left| \frac{\varphi_T(\theta_0)}{\varphi_T(\theta)} \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{\frac{Tb}{\theta_0 a}}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{Tb}{\theta a}}}{1} \right| = \sqrt{\frac{Tb}{\theta a} \cdot \frac{\theta_0 a}{Tb}} = \sqrt{\frac{\theta_0}{\theta}}.$$

Akivaizdu, kad santykis $\sqrt{\frac{\theta_0}{\theta}}$ yra konstanta. Vadinasi, egzistuoja toks $C_0 > 0$, kad $\sqrt{\frac{\theta_0}{\theta}} < C_0$.

Įrodyta, kad patenkinta G2 sąlyga.

Tikrinsime G3 sąlygą. Neprarasdami bendrumo, galime užrašyti

$$\varphi_T(\theta) = T^{-\frac{1}{2}}.$$

Pasižymime:

$$\dot{\psi}(\theta_u, \omega_t) = \sqrt{\frac{k(\omega_t)}{\theta_u}}, \dot{\psi}(\theta, \omega_t) = \sqrt{\frac{k(\omega_t)}{\theta}}.$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in \Theta} \sup_{\substack{|u| < \lambda(T) \\ u \in u_{\theta, T}}} \varphi_T(\theta) \left(E_{\theta} \int_0^T [\dot{\psi}(\theta_u, \omega_t) - \dot{\psi}(\theta, \omega_t)]^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

$$\begin{aligned} \varphi_T(\theta) \left(E_{\theta} \int_0^T [\dot{\psi}(\theta_u, \omega_t) - \dot{\psi}(\theta, \omega_t)]^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} &= T^{-\frac{1}{2}} \left(E_{\theta} \int_0^T \left[\sqrt{\frac{k(\omega_t)}{\theta_u}} - \sqrt{\frac{k(\omega_t)}{\theta}} \right]^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= T^{-\frac{1}{2}} \left(E_{\theta} \int_0^T \left[\frac{k(\omega_t)}{\theta_u} - 2 \sqrt{\frac{k(\omega_t)}{\theta_u}} \sqrt{\frac{k(\omega_t)}{\theta}} + \frac{k(\omega_t)}{\theta} \right] dt \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= T^{-\frac{1}{2}} \left(E_{\theta} \int_0^T k(\omega_t) \left(\frac{\theta - 2\sqrt{\theta\theta_u} + \theta_u}{\theta\theta_u} \right) dt \right)^{\frac{1}{2}} = T^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\theta - 2\sqrt{\theta\theta_u} + \theta_u}{\theta\theta_u} E_{\theta} \int_0^T k(\omega_t) dt} \sim T \cdot c, \end{aligned}$$

$$\text{kur } \frac{\theta - 2\sqrt{\theta\theta_u} + \theta_u}{\theta\theta_u} \rightarrow 0, \text{ o } c = \frac{b}{a}.$$

Matome, kai $T \rightarrow \infty$, reiškinys artės į nulį. Įrodėme pirmąją sąlygos G3 dalį. Tikriname antrąją.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in \Theta} \sup_{|u|+|v|<\lambda(T)} \varphi_T(\theta)^4 E_{\theta} \left| \frac{\dot{h}(\theta_u, \omega_t)}{h(\theta, \omega_t)} \right|^4 h(\theta_v, \omega_t) dt = 0.$$

Pasižymime:

$$\dot{h}(\theta_u, \omega_t) = k(\omega_t), \quad h(\theta, \omega_t) = \theta k(\omega_t), \quad h(\theta_v, \omega_t) = \theta_v k(\omega_t).$$

$$\begin{aligned} \left(T^{-\frac{1}{2}} \right)^4 E_{\theta} \int_0^T \left| \frac{k(\omega_t)}{\theta k(\omega_t)} \right|^4 \theta_v k(\omega_t) dt &= T^{-2} E_{\theta} \int_0^T \left(\frac{1}{\theta} \right)^4 \theta_v k(\omega_t) dt = \\ &= \frac{1}{T^2} \frac{\theta_v}{\theta^4} E_{\theta} \int_0^T k(\omega_t) dt \sim \frac{1}{T} \cdot d, \end{aligned}$$

kur $d = \text{const.}$ Akivaizdu, kai $T \rightarrow \infty$, tai ir reiškinys bus lygus nuliui.

Sąlyga G3 patenkinta.

IŠVADOS

Darbe nustatytos bendrosios sąlygos, prie kurių būtų patenkintas lokalus asimptotinis normalumas nagrinėjamiems taškiniais procesams, t.y. atstatymo ir nehomogeniniam Puasono procesui.

LITERATŪRA

1. V. Kanišauskas, *Atsitiktinių procesų asimptotinis parametrų įvertinimas ir paprastų hipotezių atskyrimas*: Daktaro disertacija. Vilnius, 1998.
2. А.А. Боровков, Теория вероятностей. Москва: Наука, 1976.
3. И.А. Ибрагимов, Р.С. Хасьминский, *Асимптотическая теория оценивания*. Москва: Наука, 1979.
4. В.Канишаускас, Асимптотическое оценивание параметров мультивариантных точечных процессов. *Lietuvos Matematikos rinkinys*, 1997, nr. 37, p. 467-482.
5. Ю.А. Кутоянц, Оценивание параметров случайных процессов, Изд-во АН.Арм.ССР, Ереван, 1980.

Summary

The purpose of this work is to determine general conditions for local asymptotic normality to be assured.

The point processes (renewal process and non-homogenous Poisson process) and their properties are examined in the first part of work. Then the conditions for the local asymptotic normality have been investigated. In the second part of work it is shown how these conditions are satisfied in the cases of the renewal process and non-homogenous Poisson process.

To prove the validity of conditions for local asymptotic normality to be assured, some examples were inspected.