VILNIAUS UNIVERSITETAS

TATJANA BAKŠAJEVA

ASIMPTOTINIAI PASISKIRSTYMAI EVENSO FORMULĖS ATŽVILGIU

Daktaro disertacijos santrauka
Fiziniai mokalai, matematika (01 P)

Vilnius, 2013

Disertacija rengta 2007 - 2012 metais Vilniaus universitete.

Mokslinis vadovas:
prof. habil. dr. Eugenijus Manstavičius (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Disertacija ginama Vilniaus universiteto matematikos mokslo krypties taryboje:

Pirmininkas:

- prof. dr. Gediminas Stepanauskas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Nariai:

- prof. dr. Aleksandras Krylovas (Mykolo Romerio universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)
- prof. habil. dr. Kęstutis Kubilius (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)
- prof. dr. Roma Kačinskaitė (Šiaulių universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)
- dr. Vytas Zacharovas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Oponentai:

- doc. dr. Jolita Norkūnienė (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)
- prof. dr. Jonas Šiaulys (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Disertacija bus ginama viešame Matematikos mokslo krypties tarybos posėdyje 2013 m. kovo 22 d. 14 val. Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultete, Šaltinių g. 4.
Adresas: Naugarduko 24, LT-03225 Vilnius, Lietuva.

Disertacijos santrauka išiuntinėta 2013 m. vasario mėn.
Su disertacija galima susipažinti Vilniaus universiteto bibliotekoje (Universiteto g. 3, LT-01513, Vilnius, Lietuva).

VILNIUS UNIVERSITY

TATJANA BAKŠAJEVA

ASYMPTOTIC DISTRIBUTIONS RELATED TO THE EWENS SAMPLING FORMULA

Summary of the doctoral dissertation
Physical sciences, mathematics (01 P)

Vilnius, 2013

The scientific work was carried out in 2007 - 2012 at Vilnius University.

Scientific Supervisor

Prof. Dr. Habil. Eugenijus Manstavičius (Vilnius University, Physical Sciences, Mathematics – 01P).

The dissertation is defended in the Council of Mathematics of Vilnius Unversity:

Chairman:

- Prof. Dr. Gediminas Stepanauskas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P)

Members:

- Prof. Dr. Aleksandras Krylovas (Mykolas Romeris University, Physical sciences, Mathematics – 01P)
- Prof. Dr. Habil. Kęstutis Kubilius (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P)
- Prof. Dr. Roma Kačinskaitė (Šiauliai University, Physical sciences, Mathematics – 01P)
- Dr. Vytas Zacharovas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P)

Opponents:

- Doc. Dr. Jolita Norkūnienė (Vilnius Gediminas Technical University, Physical sciences, Mathematics – 01P)
- Prof. Dr. Jonas Šiaulys (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P)

The dissertation will be defended at the public meeting of the Council of Scientific Field of Mathematics on March 22, 2013, at 2 p. m. at the Faculty of Mathematics and Informatics of Vilnius University, Šaltinių st. 4.

Address: Naugarduko st. 24, LT-03225 Vilnius, Lithuania.

The summary of the doctoral dissertation was distributed in February, 2013.

The dissertation is available at the Library of Vilnius University (Universiteto str. 3, LT-01513 Vilnius, Lithuania).

1 Disertacinio darbo aprašymas

1.1 Tyrimo objektas

Disertacijoje nagrinėjamas silpnasis adityviųjų funkcijų, apibrėžtų simetrinėje grupėje, skirstinių konvergavimas Evenso tikimybinio mato atžvilgiu.

1.2 Aktualumas

Tyrimo objektas ir nagrinėjamos problemos priskirtinos tikimybinei kombinatorikai. Tai yra svarbi šiuolaikinės matematikos šaka. Ji taikoma kompiuterių teoriniame moksle, statistikinėje fizikoje, matematinėje genetikoje ir kitose srityse, kuriose galima rasti dideles kombinatorinių struktūrų klases. Susidūrus su problema apie kokio išskirtinio objekto egzistavimą tam tikroje klasėje, labai patogu toje klasėje įvesti tikimybinį matą. Tada pakanka parodyti, kad nagrinėjamo objekto tikimybė yra teigiama. Toliau daroma išvada, kad toks objektas egzistuoja. Kai klasės galios neįmanoma aprėpti kompiuteriu ir tiksliais metodais nesugebame aprašyti atskirų elementų, tada vienintelis būdas sužinoti reikalingą informaciją apie "tipinį" klasės objektą yra jo atsitiktinis išrinkimas ir aprašymas tikimybiniais dėsniais.

Pastaruoju metu yra labai išaugęs susidomėjimas atsitiktinėmis kombinatorinėmis struktūromis, ypač tomis, kurias galima išskaidyti. Tarp jų žinomiausias ir svarbiausias pavyzdys yra keitiniai. Šiame darbe mes analizuojame keitinius, kurie pagal apibrėžimą yra baigtinės aibės bijekcijos į ją pačią. Visi baigtinės aibės keitiniai sudaro simetrinę grupę. Keitinys gali būti išskaidytas į ciklus. Pastarųjų ilgių kartotinumai sudaro vadinamąjį ciklų vektorių, užkoduojantį pačias svarbiausias keitinio savybes. Joms atskleisti yra apibrėžiamos adityviosios ir multiplikatyviosios funkcijos. Jeigu keitinys išrenkamas atsitiktinai, tada minėtos funkcijos tampa priklausomų atsitiktinių dydžių (a.d.) sumomis ir sandaugomis. Šiuo atžvilgiu mūsų darbo uždaviniai gali būti priskirti tikimybių teorijai.

Paminėsime porą taikomųjų pavyzdžių. Pirmiausia, konkrečios adityviosios funkcijos gerai aproksimuoja keitinio eilės simetrinėje grupėje logaritmą. Tai aktualu algebroje, ypač Galua teorijoje. Antra, tam tikri fizikos reiškiniai yra modeliuojami panaudojant atsitiktines unitariąsias matricas. Keitinių matricos, atitinkančios simetrinę grupę, priklauso šiai klasei. Realiosios ir menamosios jų charakteristinių polinomų logaritmo dalys taip pat yra adityviosios funkcijos. Be to, daug pėdsakų tipo funkcionalų, apibrėžtų tikrinių reikšmių aibėje, taip pat yra panašaus pobūdžio. Šiame darbe nagrinėjame adityviųjų funkcijų, apibrėžtų simetrinėje grupėje, asimptotinius skirstinius, kai grupės eilė neaprėžtai didėja. Grupėje yra apibrėžtas svorinis tikimybinis matas, kuris vadinamas Evenso tikimybiniu matu (ETM). Todėl tyrimų reikšmė dar labiau padidėja, ypač pastebėjus, kad tarpusavyje jungtinių keitinių klasė gali būti sutapatinama su visiems jiems vienodu ciklų vektoriumi. Be to šios klasės tikimybė lygi vieno vektoriaus, imamo iš tam tikros vektorių su neneigiamomis koordinatėmis aibės, tikimybei, kurią 1972 m. apibrėžė W.J. Ewens. Ji vadinama Evenso atrankos formule (EAF). Pastaroji formulė buvo įvesta genetikoje modeliuoti populiacijos mutaciją. Šiandien ji vaidina svarbų vaidmenį ir kitose matematinės statistikos srityse. Taigi keitinių tikimybinė teorija ETM atžvilgiu glaudžiai siejasi su moderniais taikomaisiais uždaviniais.

Matematikai svarbus ir kitas aspektas. Adityviųjų funkcijų, apibrėžtų simetrinėje grupėje, reikšmių pasiskirstymo teorija turi daug bendro su tikimybine skaičių teorija. Šių abiejų teorijų plėtotė prasidėjo beveik tuo pačiu metu, bet pastaroji yra pažengusi šiek tiek toliau. Disertacijai buvo keliama labai aktuali užduotis – užpildyti esamas tikimybinės kombinatorikos spragas.

1.3 Tyrimo tikslai ir uždaviniai

Disertacijos tikslas yra išnagrinėti adityviųjų funkcijų, apibrėžtų simetrinėje grupėje, reikšmių skirstinius ir nustatyti bendras sąlygas, kurioms esant pasiskirstymo funkcijos silpnai konverguoja į ribinį dėsnį. Konkrečiau, mes sprendžiame tokius uždavinius:

- Ištirti visiškai adityvių funkcijų, apibrėžtų simetrinėje grupėje, skirstinių Evenso tikimybinio mato atžvilgiu silpnąjį konvergavimą.
- Nustatyti ciklų su apribotais ilgiais skaičiaus skirstinių konvergavimo būtinas ir pakankamas sąlygas.
- Gauti multiplikatyviųjų funkcijų, apibrėžtų adicinėje pusgrupėje $\mathbf{Z}_+^n$, vidurkių Evenso atrankos formulės atžvilgiu apatinius įverčius.
- Ištirti galimų ribinių dėsnių klasę.
- Gauti adityviųjų funkcijų, apibrėžtų simetrinėje grupėje, faktorialinių momentų išraiškas.

1.4 Metodai

Analizuodami iškeltas problemas ir uždavinius, mes taikome bendrus tikimybių teorijos, tikimybinės kombinatorikos metodus ir kombinatorinių struktūrų asimptotinę teoriją. Adityviųjų funkcijų skirstinių silpnojo konvergavimo įrodymai remiasi faktorialinių momentų formulėmis ir savybėmis. Koncentracijos funkcijos ir vadinamųjų uodegų tikimybių įvertinimai taip pat labai svarbūs. Generuojančių funkcijų metodas yra viena iš pagrindinių daugelių įrodymų techninė priemonė. Metodologija, kurios efektyvumas pasitvirtino tikimybinėje skaičių teorijoje, yra pritaikyta ir šiame darbe.

1.5 Ginami teiginiai

- Visiškai adityvių funkcijų, apibrėžtų simetrinėje grupėje, skirstinių silpnojo konvergavimo į ribinį dėsnį teiginiai.
- Multiplikatyviųjų funkcijų, apibrėžtų adicinėje pusgrupėje $\mathbf{Z}_+^n$, vidurkių Evenso atrankos formulės atžvilgiu apatinieji įverčiai.
- Adityviųjų funkcijų, apibrėžtų simetrinėje grupėje, asimptotinių skirstinių Evenso tikimybinio mato atžvilgiu klasės ir jų pavyzdžių analizė.
- Adityviųjų funkcijų laipsninių ir faktorialinių momentų formulės ir savybės.

1.6 Naujumas

Visi pateikti rezultatai yra nauji. Jie praplečia, apibendrina ir papildo iki šiol daugelių autorių gautus rezultatus, susijusius su atsitiktiniais keitiniais. Jie užpildo egzistuojančias tikimybinės kombinatorikos spragas ir priartina ją prie pastaraisiais metais pasiekto tikimybinės skaičių teorijos lygio. Gauti rezultatai buvo aprobuoti vietinėse ir tarptautinėse konferencijose ir išdėstyti straipsniuose.

1.7 Padėka

Norėčiau išreikšti nuoširdžią padėką savo moksliniam vadovui profesoriui Eugenijui Manstavičiui už jo pastovų konsultavimą, globojimą ir pagalbą, vertingus pasiūlymus ir patarimus, motyvaciją ir rūpestį per mano septynerius studijų metus. Taip pat labai norėčiau padėkoti mano draugei Jelenai Salnikovai ir vyrui Aleksejui Bakšajevui už palaikymą, paskatinimą ir naudingus patarimus; mano šeimai už supratimą, pagalbą ir kantrybę.

2 Pagrindiniai disertacijos rezultatai

2.1 Trumpa literatūros apžvalga ir sprendžiamos problemos

Pradėkime nuo pagrindinių apibrėžimų ir žymėjimų.

Tegul $\mathbf{S}_n$ yra keitinių σ simetrinė grupė. Kiekvienas keitinys $\sigma \in \mathbf{S}_n$ išreiškiamas nepriklausomų ciklų κ_i sandauga

$$\sigma = \kappa_1 \cdots \kappa_w, \tag{2.1}$$

čia $w = w(\sigma)$ yra ciklų skaičius, $k_j(\sigma) \geq 0$ – ciklų ilgio j skaičius (2.1) skaidinyje, $1 \leq j \leq n$, ir $\bar{k}(\sigma) := (k_1(\sigma), \ldots, k_n(\sigma))$. Tada

$$\ell(\bar{k}(\sigma)) := 1k_1(\sigma) + \cdots + nk_n(\sigma) = n. \tag{2.2}$$

Vektorius $\bar{k}(\sigma)$ vadinamas keitinio σ *ciklų vektoriumi.* Tolygusis tikimybinis matas simetrinėje grupėje $\mathbf{S}_n$ apibrėžiamas taip:

$$\nu_n(\ldots) = (n!)^{-1}|\{\sigma \in \mathbf{S}_n : \ldots\}|.$$

Pirmieji tikimybiniai rezultatai apie atsitiktinius keitinius buvo gauti V. Gončarov 1942-1944 m. darbuose [9], [10]. Jis taikė generuojančių funkcijų metodą. Tegul ξ_j, $j \geq 1$, yra nepriklausomi Puasono atsitiktiniai dydžiai, apibrėžti kokioje nors tikimybinėje erdvėje su parametrais $E\xi_j = 1/j$. Jis įrodė, kad keitinio, turinčio struktūrą $\bar{k}(\sigma) = \bar{s}$, tikimybė išreiškiama sąlygine tikimybe

$$\nu_n\big(\bar{k}(\sigma) = \bar{s}\big) = P\big(\bar{\xi} = \bar{s} | \ell(\bar{\xi}) = n\big), \quad \bar{s} \in \mathbf{Z}_+^n.$$

Žinomiausias jo rezultatas - centrinė ribinė teorema keitinio ciklų skaičiui.

Gončarovo teorema. *Turime*

$$\big(w(\sigma) - \log n\big)/\sqrt{\log n} \overset{d}{\Rightarrow} \mathcal{N}(0,1).$$

Čia $\mathcal{N}(0,1)$ yra standartinis Gauso atsitiktinis dydis.

Atsitiktinių keitinių teoriją taip pat plėtojo W. Feller [6], L. Moser ir M. Wyman [23], S.W. Golomb [7] (kartu su kitais autoriais [8]), A. Rènyi [24], P.Erdős ir P. Turán [4], L.A. Shepp ir S.P. Lloyd [25]. Rusų autoriai V.F. Kolchin, B.A. Sevastyanov ir V.P. Chistyakov savo ir kitų rezultatus apibendrino knygose [11]–[13].

E. Manstavičius [15] 1996 m. pradėjo nagrinėti realiųjų adityviųjų funkcijų reikšmių integralinius pasiskirstymo dėsnius. Tokia funkcija $h : \mathbf{S}_n \to \mathbf{R}$ yra išreiškiama tiesine kombinacija

$$h(\sigma) = \sum_{j=1}^{n} a_j k_j(\sigma), \quad \sigma \in \mathbf{S}_n, \tag{2.3}$$

čia $a_j \in \mathbf{R}$. Dabar ji vadinama *visiškai adityvia funkcija.* Paprasčiausias tokios funkcijos pavyzdys yra ciklų skaičius $w(\sigma)$. Kalbėdami apie funkcijų seką ir norėdami akcentuoti priklausomybę nuo n, pridėsime indeksą n.

Pagrindinė problema, kurią savo darbe [15] iškėlė E. Manstavičius, gali būti suformuluota taip:

Esant kokioms būtinoms ir pakankamoms sąlygoms dažniai $\nu_n(h_n(\sigma) - A(n) < x)$, čia $A(n)$ yra parenkama centravimo seka, silpnai konverguoja į ribinį pasiskirstymo dėsnį.

Disertacijoje mes sprendžiame šį uždavinį bendresnių tikimybinių matų atžvilgiu. Darbo motyvacija yra pagrįsta ne tik noru apibendrinti anksčiau minėtų matematikų rezultatus. Pastaruoju metu ypač didelis platesnės teorijos poreikis kilo nagrinėjant atsitiktinių keitinių matricas. Naujausi jų tyrimai patvirtino būtinybę plėtoti adityviųjų funkcijų reikšmių, apibrėžtų simetrinėje grupėje, skirstinių teoriją svorinių matų atžvilgiu. Žinomiausiu iš jų tapo ETM, jo atžvilgiu formuluojami visi darbo teiginiai.

Įvesime keletą papildomų žymenų. Tegul $\theta > 0$ yra fiksuotas parametras. ETM simetrinėje grupėje $\mathbf{S}_n$ yra apibrėžiamas formule

$$\nu_{n,\theta}(A) = \frac{1}{\theta^{(n)}} \sum_{\sigma \in A} \theta^{w(\sigma)}, \quad A \subset \mathbf{S}_n,$$

čia $x^{(n)} := x(x+1)\cdots(x+n-1)$ ir $x^{(0)} = 1$ žymime augančius faktorialus. Turime

$$\nu_{n,\theta}(\bar{k}(\sigma) = \bar{s}) := \mathbf{1}\big\{\ell(\bar{s}) = n\big\} \frac{n!}{\theta^{(n)}} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\theta}{j}\right)^{s_j} \frac{1}{s_j!}. \tag{2.4}$$

Pastebėkime, kad dešinėje pusėje esantis dydis yra vektoriaus iš aibės $\ell^{-1}(n) := \{\bar{s} \in \mathbf{Z}_+^n : \ \ell(\bar{s}) = n\}$ tikimybė, kurią įvedė J.W. Ewens [5]. Kitaip tariant, jis apibrėžė skirstinį

$$P_{n,\theta}(\{\bar{s}\}) := \frac{n!}{\theta^{(n)}} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\theta}{j}\right)^{s_j} \frac{1}{s_j!}, \quad \bar{s} \in \ell^{-1}(n), \tag{2.5}$$

kuris dabar žinomas kaip *Evenso atrankos formulė* (EAF).

Analizuodami atsitiktinių keitinių statistikas, išreiškiamas per $\bar{k}(\sigma)$, mes galime nagrinėti atitinkamas atsitiktinių vektorių $\bar{s} \in \ell^{-1}(n)$ statistikas EAF atžvilgiu (2.5).

Adityviųjų funkcijų reikšmių pasiskirstymas ETM atžvilgiu buvo nagrinėjamas, taikant analizinius ir tikimybinius metodus. Pirmi rezultatai nustatant būtinas ir pakankamas konvergavimo sąlygas priklauso G.J. Babu ir E. Manstavičiui [2], kurie tyrinėjo funkcines ribines teoremas. Vienamatėse ribininėse teoremose vis dar reikia apsiriboti atskiromis klasėmis arba reikalauti papildomų išankstinių sąlygų.

Panaši padėtis yra tikimybinėje skaičių teorijoje. Tačiau pastaraisiais metais J. Šiauliui (žr. [26]–[31]) pavyko sukurti metodą, kuriuo buvo galima gauti bendrų ribinių teoremų sveikareikšmių aritmetinių funkcijų atveju. Idėjos buvo toliau išplėtotos kartu su G. Stepanausku [32]–[36]. Savo ruožtu E. Manstavičiui pavyko tai pritaikyti atsitiktiniams keitiniams, imamiems su vienoda tikimybe (žr. [20]–[22]). Pagrindinis mūsų darbo tikslas – toliau pažengti šiuo keliu nagrinėjant sveikareikšmes adityviąsias funkcijas simėtrinėje grupėje ETM atžvilgiu.

2.2 Rezultatų aprašymas

Pirmos dvi disertacijos dalys skirtos rezultatams, kurie yra labiau pagalbiniai, bet ne mažiau svarbūs ir reikalingi įrodinėjant pagrindines teoremas. Taigi pirmame skyriuje mes pateikiame bendras visiškai ir stipriai adityvių funkcijų faktorialinių ir laipsninių momentų išraiškas ir jų įverčius.

Tegul visiškai adityvios funkcijos su $a_j \in \mathbf{R}$ momentas yra $\mathbf{E}_{n,\theta} h(\sigma)$, čia $\mathbf{E}_{n,\theta}$ pažymėtas vidurkis $\nu_{n,\theta}$ atžvilgiu. Darbe gauta tokia laipsninių momentų išraiška:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{n,\theta} h(\sigma)^k = \hat{\beta}_{nk,\theta} \quad &:= \sum_{u=1}^{k} \theta^u \sum_{r_1+\cdots+r_u=k} \binom{k-1}{r_1-1} \cdots \binom{k-r_1-\cdots-r_{u-1}-1}{r_u-1} \\ &\times \sum_{j_1+\cdots+j_u \le n} \frac{a_{j_1}^{r_1} \cdots a_{j_u}^{r_u}}{j_1 \cdots j_u} \psi_n(n-j_1-\cdots-j_u), \end{aligned} \tag{2.6}$$

čia

$$\psi_n(l) := \frac{n!}{\theta^{(n)}} \frac{\theta^{(l)}}{l!}.$$

Čia ir toliau $r_1, r_2, \ldots \in \mathbf{N}$ ir $1 \le j_1, j_2, \ldots \le n$.

Analogiškai visiškai adityvių funkcijų su $a_j \in \mathbf{R}$ faktorialinių momentų $\mathbf{E}_{n,\theta} h(\sigma)_{(k)}$ išraiška yra tiesiog modifikuota (2.6) formulė, kur daugyba $a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_u}^{r_u}$ yra pakeista į $a_{j_1(r_1)} \ldots a_{j_u(r_u)}$. Faktorialinius momentus toliau žymėsime $\hat{\gamma}_{nk,\theta}$.

Antrame disertacijos skyriuje yra gauti multiplikatyviųjų funkcijų, apibrėžtų adicinėje pusgrupėje $\mathbf{Z}_+^n$, vidurkių EAF atžvilgiu apatinieji ir viršutinieji įverčiai. Šis uždavinys yra susijęs su mažojo rėčio problema. Priminkime keletą svarbių apibrėžimų.

Atvaizdis $G : \mathbf{Z}_+^n \to \mathbf{C}$, $G(\bar{0}) = 1$, vadinamas *multiplikatyviąja funkcija*, jeigu $G(\bar{s}+\bar{t}) = G(\bar{s})G(\bar{t})$ kiekvienai porai $\bar{s}, \bar{t} \in \mathbf{Z}_+^n$ tokiai, kad $\bar{s} \perp \bar{t}$. Jeigu $\bar{e}_j := (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, čia vienintelis vienetas stovi j-ojoje vietoje, tada

$$G(\bar{k}) = \prod_{j \le n} G(k_j \bar{e}_j) =: \prod_{j \le n} g_j(k_j).$$

Jeigu $g_j(k) = g_j(1) =: g_j$ visiems $k \ge 1$ ir $j \le n$, funkcija G vadinama *stipriai* multiplikatyvia ir, analogiškai, jeigu $g_j(k) = g_j^k$ ir $0^0 := 1$, tada G vadinama *visiškai* multiplikatyvia. Atitinkamai pažymėkime ką tik įvestų multiplikatyviųjų funkcijų aibes $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_s$, ir $\mathfrak{M}_c$. Jeigu $G \in \mathfrak{M}$, tada jos vidurkis $P_{n,\theta}$ atžvilgiu yra

$$\begin{aligned} M_{n,\theta}(G) \quad &:= \sum_{\bar{k} \in \Omega(n)} G(\bar{k}) P_{n,\theta}(\bar{k}) = \frac{n!}{\theta^{(n)}} \sum_{\bar{k} \in \Omega(n)} \prod_{j \le n} \left(\frac{\theta}{j}\right)^{k_j} \frac{g_j(k_j)}{k_j!} \\ &= \frac{n!}{\theta^{(n)}} [x^n] Z_\theta(x; G), \end{aligned} \tag{2.7}$$

čia

$$Z_\theta(x; G) = \prod_{j \ge 1} \left(1 + \sum_{r \ge 1} \left(\frac{\theta}{j}\right)^r \frac{g_j(r)}{r!} x^{jr}\right)$$

ir $[x^n]Z(x)$ pažymėtas n-asis formalios laipsninės eilutės $Z(x)$ koeficientas. Mes taip pat tariame, kad $M_{0,\theta}(G) \equiv 1$ kiekvienam $G \in \mathfrak{M}$.

Darbe $M_{n,\theta}(G)$ įvertintas tolygiai atžvilgiu G priklausančio tam tikram $\mathfrak{M}$ poklasiui. Šį klausimą rutuliojo E. Manstavičius [18]. Kai $G \in \mathfrak{M}_c$ ir $0 < \theta^- \le g_j \le \theta^+$, jis įrodė, kad

$$M_{n,1}(G) \asymp \exp\left\{ \sum_{j \le n} \frac{g_j - 1}{j} \right\}, \quad n \ge 1, \tag{2.8}$$

čia simbolyje $\asymp$ esančios konstantos priklauso tik nuo θ^- ir θ^+. Pastebėkime, kad bendru atveju apatinis rėžis (2.8) yra neteisingas, jeigu $G(\bar{k})$ pakankamai dažnai igyja nulio reikšmę. Gilesnis rezultatas atveju, kai $G(\bar{k}) \in \{0,1\}$ buvo gautas kituose jo darbuose (žr. [16] ir [17]). Disertacijoje mes jį išplečiame.

Pradėkime nuo lengvesnės suvidurkinto vidurkio

$$\widetilde{M}_{n,\theta}(G) := \frac{1}{\Gamma_{n,\theta}} \sum_{0 \le m \le n} \frac{\theta^{(m)}}{m!} M_{m,\theta}(G) \tag{2.9}$$

vertinimo problemos, čia

$$\Gamma_{n,\theta} := \sum_{0 \le m \le n} \frac{\theta^{(m)}}{m!} = \frac{n^\theta}{\Gamma(\theta+1)}\Big(1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big), \quad n \ge 1, \quad \theta^{(0)} = 1.$$

Teorema 2.1 *Tegul $\theta > 0$ ir $G \in \mathfrak{M}_s$ yra apibrėžta seka $0 \le g_j \le 1$, čia $1 \le j \le n$. Tada*

$$\widetilde{M}_{n,\theta}(G) \asymp \exp\Big\{\theta \sum_{j \le n} \frac{g_j - 1}{j}\Big\}.$$

Pagrindinis nagrinėjamų multiplikatyviųjų funkcijų vidurkių rezultatas yra pateikiamas šioje teoremoje.

Teorema 2.2 *Tegul $\theta \ge 1$ ir $G \in \mathfrak{M}_s$ yra apibrėžta seka $0 \le g_j \le 1$, čia $1 \le j \le n$. Jeigu*

$$\sum_{j \le n} \frac{1 - g_j}{j} \le K \tag{2.10}$$

kokiam nors $K > 0$, tada egzistuoja teigiamos konstantos c_0 ir c ir funkcija $\mathcal{N} : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{N}$ tokia, kad

$$\Upsilon(K) := \inf\{M_{n,\theta}(G) : n \ge \mathcal{N}(K)\} \ge c_0 \exp\{-\mathrm{e}^{cK}\}. \tag{2.11}$$

Sekančiame disertacijos skyriuje analizuojame visiškai adityvias funkcijas su $a_j := a_{nj} \in \{0,1\}$ ir $\theta > 0$. Tokiu atveju funkcija $h(\sigma)$ yra tiesiog ciklų su apribotais ilgiais skaičius ir jos faktorialinių momentų išraiška turi pavidalą

$$\hat{\gamma}_{nk,\theta} := \theta^k \sum_{j_1 \le n}^{*} \frac{1}{j_1} \cdots \sum_{j_k \le n}^{*} \frac{1}{j_k} \mathbf{1}\{j_1 + \cdots + j_k \le n\} \psi_n(n - j_1 - \cdots - j_k).$$

Teorema 2.3 *Tegul $h_n(\sigma)$ yra visiškai adityvių funkcijų seka su $a_{nj} \in \{0,1\}$ ir $\theta > 0$. Dažniai $V_{n,\theta}(x) := \nu_{n,\theta}(h_n(\sigma) < x)$ silpnai konverguoja į ribinį dėsnį tada ir tik tada, jeigu egzistuoja tokios baigtinės ribos*

$$\lim_{n \to \infty} \hat{\gamma}_{nm,\theta} =: \hat{\gamma}_{m,\theta} \tag{2.12}$$

kiekvienam $m \in \mathbf{N}$. Be to, jeigu sąlyga (2.12) tenkinama, tada ribinio dėsnio charakteristinė funkcija turi pavidalą

$$1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\hat{\gamma}_{m,\theta}}{m!} (\mathrm{e}^{it} - 1)^m, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Pirmi bendri rezultatai, kai parametras $\theta = 1$ buvo gauti E. Manstavičiaus [15], [20], [21]. Autorius išanalizavo konvergavimą į Puasono ir išsigimusį taške nulis dėsnius ir nustatė būtinas ir pakankamas sąlygas, su kuriomis pasiskirstymo funkcijos $V_{n,1}(x)$ silpnai konverguoja į ribinius dėsnius. Mūsų Teorema 2.3 apibendrina minimus rezultatus, kai $\theta > 0$ ir $a_{nj} \in \{0,1\}$. Dažnių

$V_{n,\theta}(x)$ ribinio dėsnio egzistavimas išplaukia iš rezultato, pateikto straipsnyje [19], bet papildomai mes nustatome faktorialinių momentų konvergavimą.

Išigimusio ribinio dėsnio atveju mums pavyko gauti gana bendrą rezultatą. Jį suformuluosime panaudodami Lévy atstumo tarp atsitiktinio dydžio $h(\cdot)$ ir konstantų aibės sąvoką:

$$L(h;\nu_{n,\theta}) := \inf\bigl\{\varepsilon + \nu_{n,\theta}(|h(\sigma)-a|\geq\varepsilon)\colon\; a\in\mathbf{R}, \varepsilon>0\bigr\}.$$

Tegul $u\vee v := \max\{u,v\}$, $u\wedge v := \min\{u,v\}$ ir $u^\circ := 1\wedge|u|\operatorname{sgn} u$, jeigu $u,v\in\mathbf{R}$,

$$U_n(h,\lambda) := \sum_{j\leq n}\frac{\theta}{j}\bigl(a_{nj}-\lambda j\bigr)^{\circ 2}\psi_n(n-j)$$

ir $U_n(h) = \min\{U_n(h,\lambda)\colon\; \lambda\in\mathbf{R}\}$. Žymuo $\ll$ naudojamas kaip $\mathrm{O}(\cdot)$ analogas, be to, įeinančios konstantos gali priklausyti nuo θ.

Teorema 2.4 *Jeigu $\theta\geq 1$ ir $h(\sigma)$ yra visiškai adityvi funkcija, tada*

$$L(h;\nu_{n,\theta}) \leq 2\bigl(1\wedge(2U_n(h))^{1/3}\bigr)$$

ir

$$U_n(h) \ll (1/n)\vee L(h;\nu_{n,\theta})$$

visiems $n\geq 1$.

Darbe mes atsakome į klausimą apie išsigimusio ribinio dėsnio egzistavimą.

Corollary 2.1 *Tegul $\theta\geq 1$ ir $h_n(\sigma)$ yra visiškai adityvios funkcijos, apibrėžtos per $\{a_j := a_{nj}\}$, $j\leq n$. Pasiskirstymo funkcijos $\nu_{n,\theta}\bigl(h_n(\sigma)-A(n)<x\bigr)$ konveguoja į išsigimusį taške nulis ribinį dėsnį tada ir tik tada, jeigu*

$$\sum_{j<n}\frac{(a_j-\lambda j)^{\circ 2}}{j}\psi_n(n-j) = \mathrm{o}(1)$$

kažkokiems $\lambda=\lambda_n\in\mathbf{R}$ ir

$$\alpha(n) = n\lambda + \sum_{\substack{j<n\\ |a_j-\lambda j|<1}}\frac{\theta(a_j-\lambda j)}{j}\psi_n(n-j) + \mathrm{o}(1).$$

Pastaroji išvada apibendrina E. Manstavičiaus 2005 m. rezultatą, gautą atveju, kai $\theta=1$.

Tikriausiai pirmas teoremos 2.4 teiginys gali būti įrodytas adityviosioms funkcijoms, kai $\theta>0$. Tam pakanktų pritaikyti metodiką, naudojamą skaičių teorijoje (žr. [3]). Kitą netiesioginę galimybę gauti viršutinius įverčius suteikia nelygybė

$$\nu_{n,\theta}\bigl(|h(\sigma)-a|\geq u\bigr) \ll P^{1\wedge\theta}P\bigl(|X_1+\cdots+X_n\geq u/3\bigr) + \mathbf{1}\{\theta<1\}n^{-\theta},$$

čia $a\in\mathbf{R}$ ir $u\geq 0$ yra bet kokie. Pastaroji nelygybė įrodyta E. Manstavičiaus ir G.J. Babu darbe [2]. Panaudokime ją, kai $\theta<1$. Pažymėkime

$$\widetilde{U}_n(h) := \min_\lambda\sum_{j\leq n}\frac{(a_j-\lambda j)^{\circ 2}}{j}.$$

Teorema 2.5 *Tegul $\theta < 1$ ir $h_n(\sigma)$ yra visiškai adityvios funkcijos. Tada*

$$L(h;\nu_{n,\theta}) \ll \widetilde{U}_{n,\theta}^{\theta/(2\theta+1)}(h) + n^{-\theta}. \tag{2.13}$$

Teoremose 2.3 ir 2.5 galime pastebėti tam tikrą analogiją tarp adityviųjų funkcijų simetrinėje grupėje $\mathbf{S}_n$ ir nepriklausomų atsitiktinių dydžių sumų.

Dažnių $V_{n,\theta}(x)$ silpnojo konvergavimo į neišsigimusį ribinį dėsnį būtinų ir pakankamų sąlygų nustatymas yra sudėtingesnis klausimas. Tai mes demonstruojame penktame skyriuje. Čia nagrinėjame silpnąjį visiškai adityvių funkcijų su $a_j \in \mathbf{Z}$ skirstinių konvergavimą į Puasono ribinį dėsnį. Iš pradžių įveskime keletą žymenų.

$$a_j(m) = \begin{cases} a_j & if \;\; 0 \le a_j \le m, \\ m & if \;\; a_j > m, \\ 0 & if \;\; a_j < 0 \end{cases} \tag{2.14}$$

ir pažymėkime nupjautines visiškai adityvias funkcijas

$$h(\sigma;m) := \sum_{j=1}^{n} a_j(m)k_j(\sigma).$$

Pagrindinis šio skyriaus rezultatas yra tokia teorema.

Teorema 2.6 *Tegul $h_n(\sigma)$ yra visiškai adityvių funkcijų seka su $a_j := a_{nj} \in \mathbf{Z}$, $j \le n$, ir $\theta \ge 1$. Pasiskirstymo funkcijos $V_{n,\theta}(x)$ silpnai konverguoja į ribinį Puasono dėsnį su parametru $\mu > 0$ tada ir tik tada, jeigu*

$$(i) \sum_{\substack{j \le n \\ a_j \le -1}} \frac{\theta}{j}\psi_n(n-j) = o(1), \tag{2.15}$$

$$(ii) \lim_{m\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathbf{E}_n h_n(\sigma;m)_{(l)} = \lim_{m\to\infty} \liminf_{n\to\infty} \mathbf{E}_n h_n(\sigma;m)_{(l)} = \mu^l \tag{2.16}$$

kiekvienam fiksuotam $l \in \mathbf{N}$.

Pirmi rezultatai apie Puasono ribinio dėsnio su parametru $\mu > 0$ egzistavimą, kai $\theta = 1$, priklauso E. Manstavičiui. Remdamasis tikimybinės skaičių teorijos idėjomis, kurias savo darbuose ([26]–[29]) pasiūlė J. Šiaulys, jis pastebėjo netikėtą faktą (žr. 3 teoremą , [22]). Ilgų ciklų įtaka turi būti eliminuojama. Vadinasi, naudodami ciklus su ilgiais iš intervalo $[\varepsilon n, n]$, mes negausime Puasono dėsnio, kai $a_{nj} \in \{0,1\}$. Kai a_j yra neaprėžti, situacija keičiasi. Tą demonstruodami, mes pateikiame bendresnį negu E. Manstavičiaus [19] sukonstruotą pavyzdį.

Teiginys 1. *Tegul $\mu \le -\log(1 - v_\theta(1))$, čia*

$$v_\theta(x) := \theta \int_{1/2}^{x} (1-u)^{\theta-1} \frac{du}{u}.$$

Įveskime seką $1/2 = d_0 < d_1 < \cdots$, kad

$$v_\theta(d_m) = \mathrm{e}^{-\mu} \sum_{k=1}^{m} \frac{\mu^k}{k!}, \quad m \in \mathbf{N},$$

ir imkime $a_j = m$, jeigu $nd_{m-1} < j \leq nd_m$, o $a_j = 0$ – kitais atvejais. Jei $h_n(\sigma)$ yra visiškai adityvių funkcijų seka, apibrėžta per šias a_j, tada jos reikšmių ribinis skirstinys yra Puasono su parametru μ.

Pateiksime kitą pavyzdį, kuris susijęs su quasi-Puasono skirstiniu. M. Lugo straipsnyje [14], analizuodamas atvejį, kai $\theta = 1$, nagrinėja ciklų skaičiaus su ilgiais tarp γn ir δn keitinyje, kurio eilė yra n, ribinį pasiskirstymą. Tegul $1/(k+1) \leq \gamma < \delta \leq 1/k$, kai $k \in \mathbf{N}$. Toks skirstinys turi baigtinę atramą $\{0, 1, \ldots, k\}$ ir k faktorialinių momentų, lygių Puasono pasiskirstymo su parametru $\log \delta/\gamma$ momentams. Evenso skirstinio atveju, kai $\theta \neq 1$, M. Lugo netgi iškėlė hipotezę [14].

Hipotezė 15. *Vidutinis ciklų su ilgiais iš $[\gamma n, \delta n]$ skaičius eilės n Evenso skirstinio keitinyje yra*

$$\lambda = \int_\gamma^\delta \frac{1}{x}(1-x)^{\theta-1}dx,$$

kai $n \to \infty$. Be to, kai $1/(k+1) \leq \gamma < \delta < 1/k$ kažkokiam teigiamajam sveikajam k, ciklų skaičiaus pasiskirstymas konverguoja į quasi-Puasono(k, λ) skirstinį.

Primename, kad atsitiktinis dydis X turi quasi-Puasono(r, λ), $r \in \mathbf{N}$, $\lambda \in (0, 1]$, skirstinį, jeigu $\mathbf{E}X_{(k)} = \lambda^k$, kai $k = 0, 1, \ldots, r$ ir X reikšmės yra iš aibės $\{0, 1, \ldots, r\}$. Jeigu $r = 1$, turime Bernulio pasiskirstymą. Poskyryje 6.3 atlikti skaičiavimai rodo, kad vidurkio formulės dešiniojoje pusėje trūksta daugiklio θ. Daug svarbesnis pastebėjimas yra tai, kad ribinis dėsnis yra visai netoks, kai $\theta \neq 1$. Iš tikrųjų, ribinis skirstinys egzistuoja, bet jis nėra quasi-Puasono.

Paskutiniame disertacijos skyriuje, be jau anksčiau nagrinėtų, analizuojami pasiskirstymai, kurie gali būti ribiniai 2.3 teoremoje. Ribinio pasiskirstymo faktorialiniai momentai turi tenkinti nelygybę $\hat{\gamma}_{k,\theta} \leq \hat{\gamma}_{1,\theta}^k$ kiekvienam $k \in \mathbf{N}$. Remiantis šiuo faktu, tokie pasiskirstymai kaip Puasono mišinys, binominis ir geometrinis nepriklauso ribinių dėsnių klasei. Iš tikrųjų, tokį paprastą tikrinimo kriterijų pastebėjo ir pritaikė skaičių teorijoje J. Šiaulys ir G. Stepanauskas [35], kurių idėja mes pasinaudojome.

Išvados

- Adityviųjų funkcijų, apibrėžtų simetrinėje grupėje, momentų Evenso tikimybinio mato atžvilgiu nagrinėjimas yra galimas panaudojant nepriklausomų atsitiktinių dydžių sumų sąlyginius momentus.
- Multiplikatyviųjų funkcijų, apibrėžtų adicinėje puspgrupėje $\mathbf{Z}_+^n$, vidurkių Evenso atrankos formulės atžvilgiu tikslūs įverčiai gali būti gauti taikant išplėtotą tikimybinėje skaičių teorijoje mažojo rėčio metodą.
- Silpnasis atsitiktinių keitinių ciklų skaičiaus su apribotais ilgiais skirstinių Evenso tikimybinio mato atžvilgiu konvergavimas ekvivalentus visų faktorialinių momentų konvergavimui.
- Sveikareikšmių adityviųjų funkcijų skirstinių silpnasis konvergavimas į Puasono dėsnį ekvivalentus visų atitinkamos nupjautinės funkcijos faktorialinių momentų konvergavimui.
- Adityviųjų funkcijų ribinių skirstinių klasei priklauso Puasono, quasi-Puasono, Bernulio skirstiniai, tačiau neišsigimęs Puasono mišinys, binominis ir geometrinis dėsniai nepriklauso.
- Metodologinės idėjos, išplėtotos tikimybinėje skaičių teorijoje, gali būti panaudotos tiriant atsitiktinius keitinius.

Aprobacija

Konferencijos

- 50 - oji Lietuvos matematikų draugijos konverencija, Vilnius, 2009, *"Atsitiktinių struktūrų komponenčių skaičiaus aproksimacija Puasono dėsniu".*
- 51 - oji Lietuvos matematikų draugijos konverencija, Vilnius, 2010, *"Adityviosios funkcijos simetrinėje grupėje ir jų faktorialiniai momentai".*
- 10 - oji Tikimybių teorijos ir matematinės statistikos tarptautinė Vilniaus konferencija, Vilnius (Lietuva), 2010, *"Additive functions on the symmetric group and their factorial moments".*
- 52 - oji Lietuvos matematikų draugijos konverencija, Vilnius, 2011, *"Adityviosios funkcijos simetrinėje grupėje".*
- 27th Journees Arithmetiques, Vilnius (Lithuania), 2011, *"On additive functions defined on the symmetric group".*

Disertacijos rezultatai taip pat buvo pristatyti Vilniaus universiteto matematikos ir informatikos fakulteto Tikimybių teorijos ir skaičių teorijos katedros seminaruose.

Pagrindinės publikacijos

Pagrindiniai disertacijos rezultatai yra publikuoti išvardintuose straipsniuose:

- T. Kargina, Additive functions on permutations and the Ewens probability, *Šiauliai Mathematical Seminar*, 2(10), 33-41 (2007).
- T. Kargina, Asymptotic distributions of the number of restricted cycles in a random permutation, *Liet. matem. rink. LMD darbai*, 50, 420-425 (2009).
- T. Kargina, Additive functions on the Symmetric group and their factorial moments, *10th Vilnius International conference on Probability Theory and Mathematical Statistics*, Abstracts, p. 181, Vilnius (Lithuania), 2010.
- T. Kargina, E. Manstavičius, Multiplicative functions on $\mathbf{Z}_+^n$ and the Ewens Sampling Formula, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, B34, 137-151 (2012).
- T. Kargina, E. Manstavičius, The law of large numbers with respect to Ewens probability, *Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp.*, 40, 2013.

Summary

In the thesis the examining problems of random permutations are attributed to the probabilistic combinatorics. Obtained results describe asymptotical distributions of completely additive functions values defined on a symmetric group with respect to Ewens probability measure, if the group order unbounded increases. Power and factorial moments formulae of additive functions are derived. There are established necessary and sufficient conditions under which the distributions of a number of cycles with restricted lengths obey the limit probability laws. The convergence to the Poisson, quasi-Poisson, Bernoulli, binomial and other distributions, defined on the positive whole - number set are exhaustively investigated. The results are generalized on the class of whole - number completely additive functions. The general weak law of large numbers is proved in the thesis, necessary and sufficient existence conditions, under which the distributions of the sequences of additive functions converge to the degenerate at the point zero limit law are established.

Examining problems are related to the probability tasks of the vectors, which have whole - numbered nonnegative coordinates. The mean values of multiplicative functions defined on those vectors' additive semigroup with respect to the Ewens measure, called Ewens Sampling Formula, and investigated. Lower and upper sharp estimates are obtained. From the latter results follow important probabilities' properties of random permutations without some cycles.

In the dissertation the methods of factorial moments and other combinatorial and probabilistic methods are developed.

References

[1] R. Arratia, A.D. Barbour and S. Tavaré. Logarithmic Combinatorial Structures: a Probabilistic Approach, EMS Monographs in Mathematics, EMS Publishing House, Zürich, 2003.

[2] G.J. Babu and E. Manstavičius. Brownian motion for random permutations, *Sankhyā: The Indian J.Satist.*, 61(3), 312 – 327, 1999.

[3] A. Biró, T. Szamuely. A Turán-Kubilius inequality with multiplicative weights, *Acta Math. Hungar.*, 70, 39 – 56, 1996.

[4] P. Erdös and P. Turán. On some problems of a statistical group theory I. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 4, 175 – 186, 1965.

[5] W.J. Ewens, The sampling theory of selectively neutral alleles. *Theor. Pop. Biol.* 3, 87 – 112, 1972.

[6] W. Feller. The fundamental limit theorems in probability, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 51, 800 - 832, 1945.

[7] S.W. Golomb, Random permutations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 70, 747, 1964.

[8] S.W. Golomb, L.R. Welch and R.M. Goldstein. *Cycles from nonlinear shift registers Progress*, Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, Pasadena, Calif., 20 – 389, 1959.

[9] V.L. Goncharov. On the field of combinatory analysis, *Dokl. Akad. Nauk*, 35(2), 299 – 301, 1942.

[10] V.L. Goncharov. Some facts from combinatorics. *Izvestia Akademii Nauk SSSR, Ser. Mat.*, 8, 3 – 48, 1944.

[11] V.F. Kolchin. Random mappings. *Optimization Software, Inc., distributed by Springer-Verlag, New York*, 1986.

[12] V.F. Kolchin. Random Graphs, *Number 53 in Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, Cambridge,* 1999.

[13] V.F. Kolchin, B.A. Sevastyanov and V.P. Chistyakov. Random Allocations, *Halsted Press, Washington,* 1978.

[14] M. Lugo. The number of cycles of specified normalized length in permutations, *arXiv:0909.2909vI*, [math.CO], 16 Sep.2009.

[15] E. Manstavičius. Additive and multiplicative functions on random permutations, *Lith. Math. J.*, 36(4), 400 – 408, 1996.

[16] E. Manstavičius. On random permutations without cycles of some lengths, *Period. Math. Hungar.*, 40, 37 – 44, 2001.

[17] E. Manstavičius. On the probability of combinatorial structures without some components, *Number Theory for the Millennium*, M.A. Bennett *et al* Eds, A.K. Peters, Natick, 2, 387 – 401, 2002.

[18] E. Manstavičius. Mappings on decomposable combinatorial structures: analytic approach, *Combinatorics, Probab. Computing*, 11, 61 – 78, 2002.

[19] E. Manstavičius. Functional limit theorem for sequences of mappings on the symmetric group, *Anal. Probab. Methods in Number Theory*, TEV, Vilnius, 175 – 187, 2002.

[20] E. Manstavičius. The Poisson distribution for the linear statistics on random permutations, *Lith. Math. J.*, 45(4), 434 – 446, 2005.

[21] E. Manstavičius. Discrete limit laws for additive functions on the symmetric group, *Acta Math. Univ. Ostraviensis*, 13, 47 – 55, 2005.

[22] E. Manstavičius. Asymptotic value distribution of additive function defined on the symmetric group, *Ramanujan J.*, 17, 259 – 280, 2008.

[23] L. Moser and M. Wyman. Asymptotic development of the Stirling numbers of the first kind, *Journal of the London Mathematical Society*, 33, 133 - 146, 1958.

[24] A. Rènyi. On the outliers of a series of observations, *A Magyar Tudomrànyos Akadrèmia Matematikai rès Fizikai Tudomrànyok Osztràlyrànak Közlemťenyei*, 12, 105 - 121, 1962. Reprinted in Selected papers of Alfrrèd Rrènyi, *Published by Akadrèmiai Kiadrò*, 3, 50 - 65, 1976.

[25] L.A. Shepp and S.P. Lloyd. Oredered cycle lengths in a random permutation, *Transactions of the American Mathematical Society*, 121, 340 - 357, 1966.

[26] J. Šiaulys. The von Mises theorem in number theory, *New Trends in Probability and Statistics. Vol. 2. Analytic and Probabilistic Methods in Number Theory*, F.Schweiger and E.Manstavičius (Eds.), VSP, Utrecht/TEV, Vilnius, 293 – 310, 1992.

[27] J. Šiaulys. Convergence to the Poisson law. II. Unbounded strongly additive functions, *Lith. Math. J.*, 36(3), 393 – 404, 1996.

[28] J. Šiaulys. The Poisson distribution for large prime numbers, *Transactions of the XXXVIII Conference of the Lithuanian Mathematical Society*, Technika, Vilnius, 50 – 55, 1997.

[29] J. Šiaulys. Convergence to the Poisson law. III. Method of moments, *Lith. Math. J.*, 38(4), 374 – 390, 1998.

[30] J. Šiaulys. On the distributions of additive functions, *Lietuvos Matematikų Draugijos Mokslo Darbai*, 3: Special Issue of *Liet. Matem. Rink.*, 104 – 109, 1999.

[31] J. Šiaulys. Factorial moments of distributions of additive functions, *Lith. Math. J.*, 40(4), 389 – 508, 2000.

[32] J. Šiaulys and G. Stepanauskas. The factorial moments of additive functions with rational argument, *J. Aust. Math. Soc.*, 81, 425 – 440, 2006.

[33] J. Šiaulys and G. Stepanauskas. Poisson distribution for a sum of additive functions, *Acta Appl. Math.*, 97, 269 – 279, 2007.

[34] J. Šiaulys and G. Stepanauskas. Poisson distribution for a sum of additive functions on shifted primes, *Acta Arithm.*, 130, 403 – 414, 2007.

[35] J. Šiaulys and G. Stepanauskas. Some limit laws for strongly additive prime indicators, *Šiauliai Math. Seminar*, 3(11), 235 – 246, 2008.

[36] J. Šiaulys and G. Stepanauskas. Binomial limit law for additive prime indicators, *Lith. Math. J.*, 51(4), 562 – 572, 2011.

Trumpos žinios apie autorę

Gimimo data ir vieta

1982 metų balandžio 21 diena, Ignalina (Lietuva).

Išsilavinimas

- 1988-2000. Visagino "Atgimimo" gimnazija (Lietuva).
- 2000-2004. Matematikos bakalauro diplomas, Matematikos ir Informatikos fakultetas, Vilniaus universitetas.
- 2004-2006. Matematikos magistro diplomas, Matematikos ir Informatikos fakultetas, Vilniaus universitetas.
- 2006-2007. Verslo vadybos spec. kurso diplomas, Ekonomikos fakultetas, Vilniaus universitetas (*išlaikyti egzaminai ir priimta į verslo vadybos magistrantūrą*).
- 2007-2012. Matematikos doktorantūros studijos, Matematikos ir informatikos fakultetas, Vilniaus universitetas (*2011-2012 akadėminės atostogos dėl vaiko priežiūros*).