ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

MATEMATIKOS KATEDRA

Algirdas Makulavičius

Diskrečioji ribinė teorema su svoriu Hurvico dzeta funkcijai su algebriniu iracionaliuoju parametru

Magistro darbas

Magistro darbo vadovas
Prof. dr. R. Kačinskaitė

Šiauliai

2012

Turinys

1 Įvadas

Analizinėje skaičių teorijoje svarbų vaidmenį atlieka dzeta funkcijos. Tai kompleksinio kintamojo $s = \sigma + it$ funkcijos, kurios tam tikroje pusplokštumėje yra apibrėžiamos Dirichlė eilutėmis. Labiausiai žinoma dzeta funkcija yra Rymano dzeta funkcija

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s},$$

kuri apibrėžiama pusplokštumėje $\sigma > 1$. Be to, kai $\sigma > 1$, ji yra išreiškiama Oilerio sandauga

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1};$$

čia p yra pirminis skaičius. Funkcija $\zeta(s)$ yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą $\mathbb{C}$, o taškas $s = 1$ yra jos paprastasis polius su reziduumu 1.

Vienas iš Rymano dzeta funkcijos apibendrinimų yra Hurvico dzeta funkcija $\zeta(s, \alpha)$ su fiksuotu parametru α, $0 < \alpha \leq 1$. Pusplokštumėje $\sigma > 1$ ji yra apibrėžiama eilute

$$\zeta(s, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m + \alpha)^s}$$

ir analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus paprastąjį polių su reziduumu 1 taške $s = 1$. Kai parametras $\alpha = 1$, Hurvico dzeta funkcija tampa Rymano dzeta funkcija, o kai $\alpha = \frac{1}{2}$,

$$\zeta\left(s, \frac{1}{2}\right) = 2^s L\left(s, \chi\right);$$

čia $L(s, \chi)$ yra Dirichlė L funkcija, χ – charakteris mod 2. Bendru atveju funkcija $\zeta(s, \alpha)$ neturi išraiškos Oilerio sandauga pagal pirminius skaičius.

Hurvico dzeta funkcijos $\zeta(s, \alpha)$ statistinės savybės priklauso nuo parametro α prigimties. Paprasčiausias atvejis – kai α yra transcendentusis arba racionalusis skaičius.

Hurvico dzeta funkcijos asimtotinį elgesį galima aprašyti ribinėmis teoremomis silpno tikimybinių matų konvergavimo prasme įvairiose erdvėse. Tolydžios ribinės teoremos racionaliojo arba transcendenčiojo parametro α atžvilgiu įrodė A. Laurinčikas ir R. Garunkštis [10].

Priminsime, kad tolydžiomis ribinėmis teoremomis yra vadinamos ribinės teoremos, kai nagrinėjamas tikimybinis matas yra apibrėžiamas $\zeta(\sigma + it, \alpha)$

arba $\zeta(\sigma + i\tau, \alpha)$ postūmiais; čia t arba τ kinta tolydžiai intervale $[0, T]$, o $T > 0$. Jei α yra transcendentusis, tai sistema $\{\log(m + \alpha) : m = 0, 1, 2...\}$ yra tiesiškai nepriklausoma virš racionaliųjų skaičių lauko $\mathbb{Q}$.

Kai parametras α yra algebrinis iracionalusis skaičius, situacija yra ženkliai sudėtingesnė. Tolydžias ribines teoremas Hurvico dzeta funkcijai $\zeta(s, \alpha)$ su tokiu parametru įrodė A. Laurinčikas ir J. Štaudingas [11], [12].

Taip pat galima įrodyti diskrečiąsias ribines teoremas dzeta funkcijoms. Šiuo atveju kompleksinio kintamojo menamoji dalis t arba τ įgyja reikšmes iš tam tikros diskrečiosios aibės, pavyzdžiui, iš tam tikros aritmetinės progresijos su fiksuotu teigiamu žingsniu h.

Diskrečiąja ribinę teoremą kompleksinėje plokštumoje Hurvico dzeta funkcijai $\zeta(s, \alpha)$ su algebriniu iracionaliuoju parametru α įrodė R. Kačinskaitė ir A. Laurinčikas [8].

Tegul $h > 0$ yra fiksuotas. $\mathcal{B}(S)$ pažymėkime metrinės erdvės S Borelio aibių klasę. Kai $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tegul

$$\mu_N(...) = \frac{1}{N+1} \sum_{\substack{l=1 \\ ...}}^{N} 1;$$

čia daugtaškio vietoje yra įrašomos sąlygos, kurias turi tenkinti l.

J. V. S. Kasels įrodė [2], kad algebriniam irocionaliajam α sistemos

$$L(\alpha) := \{\log(m + \alpha) : m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

51 procentas elementų yra tiesiškai nepriklausomi virš $\mathbb{Q}$. Tegul šios sistemos maksimalus tiesiškai nepriklausomas poaibis yra $I(\alpha)$. Pareikalaukime, kad $I(\alpha) \neq L(\alpha)$ (priešingu atveju turėtume tą patį, ką ir esant α transcendenčiajam). $L(\alpha)$ ir $I(\alpha)$ skirtumą pažymėkime $D(\alpha)$. Akivaizdu, kad kiekvienam elementui $d_m \in D(\alpha)$ sistema $\{d_m\} \cup I(\alpha)$ yra tiesiškai priklausoma virš racionaliųjų skaičių kūno $\mathbb{Q}$. Todėl egzistuoja baigtinis elementų $i_{m_1}, ..., i_{m_n} \in I(\alpha)$ skaičius toks, kad tam tikriems $k_0(m), ..., k_n(m) \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$

$$k_0(m) d_m + k_1(m) i_{m_1} + ... + k_n(m) i_{m_n} = 0.$$

Iš čia gauname

$$m + \alpha = (m_1 + \alpha)^{-\frac{k_1(m)}{k_0(m)}} ... (m_n + \alpha)^{-\frac{k_n(m)}{k_0(m)}} \tag{1}$$

Dabar tegul

$$\mathcal{M}(\alpha) = \{m \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \log(m + \alpha) \in I(\alpha)\}$$

ir

$$\mathcal{N}(\alpha) = \{m \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \log(m+\alpha) \in D(\alpha)\}.$$

Sakykime, kad γ yra vienetinis apskritimas kompleksinėje ploštumoje, t. y. $\gamma = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$. Apibrėžkime torą

$$\Omega = \prod_{m \in \mathcal{M}(\alpha)} \gamma_m;$$

čia $\gamma_m = \gamma$ visiems $m \in \mathcal{M}(\alpha)$. Kadangi apskritimas γ yra kompaktas, tai toras Ω yra kompaktinė topologinė Abelio grupė. Galime apibrėžti tikimybinę erdvę $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$; čia m_H yra Haro matas erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$. $\omega(m)$ pažymėkime elemento ω iš Ω projekciją į koordinatinę erdvę γ_m, $m \in \mathcal{M}(\alpha)$.

Jeigu $m \in \mathcal{N}(\alpha)$ ir teisingas (1) sąryšis, $\omega(m)$ apibėžkime taip

$$\omega(m) = \omega(m_1)^{-\frac{k_1(m)}{k_0(m)}} ... \omega(m_n)^{-\frac{k_n(m)}{k_0(m)}};$$

čia imamos tik pagrindinės šaknų reikšmės. Tada funkcijos $\omega(m)$ yra apibrėžtos visiems $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pastebėkime, kad atsitiktiniai kintamieji $\omega(m)$, apibrėžti kaip projekcijos (jei $m \in \mathcal{M}(\alpha)$ arba $m \in \mathcal{N}(\alpha)$), yra poromis ortogonalūs Haro mato m_H atžvilgiu.

Kai $\sigma > \frac{1}{2}$, tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$ apibrėžkime kompleksines reikšmes įgyjantį atsitiktinį elementą $\zeta(\sigma, \alpha, \omega)$ formule

$$\zeta(\sigma, \alpha, \omega) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\omega(m)}{(m+\alpha)^{\sigma}}.$$

Taip galima padaryti remiantis Rademačerio teorema apie poromis ortogonalius atsitiktinius kintamuosius [9].

Egzistuoja A. Dubicko hipotezė [4], kuri teigia, kad yra tokių algebrinių iracionaliųjų skaičių α, kad sandauga

$$\prod_{m=0}^{\infty} (m+\alpha)^{k_m}$$

būtų iracionali, kai kiekviename rinkinyje $\underline{k} = (k_0, k_1, ...)$ tik baigtinis skaičius sveikųjų k_m nėra nuliai. Algebrinių iracionaliųjų skaičių aibę, kurie tenkina tokią savybę, pažymėkime $\mathcal{D}$.

A teorema ([8]). *Tarkime, kad α yra algebrinis iracionalusis skaičius, priklausantis klasei $\mathcal{D}$, o $h > 0$ yra fiksuotas toks skaičius, kad* $\exp\left\{\frac{2\pi}{h}\right\}$ *būtų racionalusis. Tegul $\sigma > \frac{1}{2}$. Tuomet tikimybinis matas*

$$\mu_N(\zeta(\sigma + ilh, \alpha) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

kai $N \to \infty$, silpnai konverguoja į atsitiktinio elemento $\zeta(\sigma, \alpha, \omega)$ skirstinį.

Mano darbo tikslas – apibendrinti A teoremą, t. y. įrodyti diskrečiąją ribinę teoremą su svoriu kompleksinėje plokštumoje Hurvico dzeta funkcijai $\zeta(s, \alpha)$ su algebriniu iracionaliuoju parametru α.

Tegul $w(x)$ yra realioji baigtinės variacijos intervale $[0, \infty)$ funkcija tokia, kad

$$U = U(N, w) = \sum_{l=0}^{N} w(l) \to \infty,$$

kai $N \to \infty$.

Tarkime, kad

$$\mu_{N,w}(A) = \frac{1}{U} \sum_{\substack{l=0 \\ \zeta(s+ilh,\alpha)\in A}}^{N} w(l), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}).$$

Įrodysime tikimybinio mato

$$P_{N,w}(A) = \mu_{N,w}(\zeta(\sigma + ilh, \alpha) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}), \quad \sigma > \frac{1}{2}$$

kai $N \to \infty$ silpną kovergavimą.

Tarkime, kad pusplokštumėje $\sigma > \frac{1}{2}$ ir realiajam τ yra teisingas įvertis

$$\int_{\tau}^{T+\tau} w(t-\tau)|\zeta(\sigma + it, \alpha)|^2 dt = O(T(1 + |\tau|)). \tag{2}$$

1 teorema. *Tegul α yra algebrinis iracionalusis, priklausantis $\mathcal{D}$ klasei, skaičius. Tarkime $h > 0$ yra fiksuotas skaičius toks, kad $\exp\left\{\frac{2\pi}{h}\right\}$ yra racionalusis, bei galioja (2) sarysis. Kai $\sigma > \frac{1}{2}$, erdvėje $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ egzistuoja tikimybinis matas P į kurį, kai $N \to \infty$, silpnai konverguoja tikimybinis matas $P_{N,w}$.*

2 Hurvico dzeta funkcija $\zeta(s, \alpha)$

2.1 Tam tikri faktai apie $\zeta(s, \alpha)$ funkciją

Funkciją $\zeta(s, \alpha)$ pradėjo nagrinėti A. Hurvicas 1882 m. straipsnyje „*Einige Eigenschaften der Dirichletschen Funktionen $F(s) = \sum \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^s}$, die bei der Bestimmung der Klassenzahlen binärer quadratischer Formen auftreten*“ [5].

Pusplokštumėje $\sigma > 1$ Hurvico dzeta funkcija $\zeta(s, \alpha)$ su fiksuotu parametru α, $0 < \alpha \leq 1$, yra apibrėžiama Dirichlė eilute

$$\zeta(s, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m + \alpha)^s}.$$

Funkcija $\zeta(s, \alpha)$ yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą su paprastuoju poliumi taške $s = 1$ su reziduumu 1. Šio taško aplinkoje jos skleidinys Lorano eilutė yra toks

$$\zeta(s, \alpha) = \frac{1}{(s-1)} + \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m(\alpha)(s-1)^m;$$

čia koeficentai $\gamma_m(\alpha)$ yra

$$\gamma_m(\alpha) = \frac{(-1)^m}{m!} \lim_{N \to \infty} \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{\log^m(n + \alpha)}{n + \alpha} - \frac{\log^{m+1}(N + \alpha)}{m + 1} \right).$$

Hurvico dzeta funkcija tenkina funkcinę lygtį

$$\zeta(s, \alpha) = \frac{2\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{s-1}} \left(\sin \frac{\pi s}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi m \alpha}{m^{1-s}} + \cos \frac{\pi s}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi m \alpha}{m^{1-s}} \right),$$

$\sigma < 0$; čia $\Gamma(s)$ yra Oilerio gama funkcija.

H. Davenportas ir H. Heilbronas įrodė [3], kad kiekvienam teigiamam skaičiui ε Hurvico dzeta funkcijos nuliai priklauso juostai $1 < \sigma < 1 + \sigma$, jei $0 < \alpha < 1$ ir $\alpha \neq \frac{1}{2}$.

Šiame skyriuje panaudota informacija yra iš A. Ivičiaus monografijos [7].

2.2 Trumpai apie $\zeta(s, \alpha)$ funkcijos autorių

Paminėsime keletą žodžių apie $\zeta(s, \alpha)$ funkcijos autorių Adolfą Hurvicą.

A. Hurvicas – žinomas Vokietijos matematikas, vienas iš skaičių teorijos kūrėjų. Jis gavo reikšmingų rezultatų algebrinėje skaičių teorijoje. Pavyzdžiui, sveikųjų kvaternionų faktorizavimo teorijoje [6], kuri buvo pritaikyta sprendžiant sveikojo skaičiaus užrašymo keturių kvadratų suma problemą. A. Hurvicas buvo vienas iš matematikų, dirbusių Rymano paviršiaus teorijoje ir įtakojusią algebrinių kreivių fundamentalius rezultatus. Kaip pavyzdį galima paminėti Hurvico automorfizmų teoremą.

A. Hurvicas gimė 1859 m. kovo 26 d. Hildesheime, Hanoverio karalystėje (dabar žemutinė Saksonija), Vokietijoje. 1877 m. įstojo į Miuncheno universitetą, kur lankė K. Vejerštraso ir L. Kronekerio paskaitas. 1887 m. apgynė daktaro disertaciją apie elipsines modulines funkcijas. 1884 m. žymaus matematiko F. Lindemano kvietimu atvyko dirbti į Kionigsbergo (Karaliaučiaus) universitetą, kur susitiko su D. Hilbertu ir H. Minkovskiu. 1892 m. tapo Ciuricho valstybinio politechnikumo vadovu. Čia išbuvo iki gyvenimo pabaigos. Mirė 1919 m. lapkričio 18 d. Ciuriche, Šveicarija [16].

3 Pagalbiniai rezultatai

Ribinių teoremų įrodymui reikalingos gerai žinomos lemos ir teoremos. Šiame skyriuje jas suformuluosime kaip lemas, nurodydami šaltinius, kur jas galima rasti su įrodymais. Taip pat pateiksime kai kurių sąvokų apibrėžimus.

Priminsime, kad gama funkcija $\Gamma(s)$ pusplokštumėje $\sigma > 0$ yra apibrėžiama integralu

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx.$$

1 lema (Melino atvirkštinė formulė). *Visiems teigiamiems a ir b teisinga lygybė*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \Gamma(s) a^{-s} ds = e^{-a}.$$

Tai – 5.4.1 lema iš [9].

2 lema (reziduumų teorema). *Jei funkcija $f(s)$ yra analizinė uždaroje srityje $\overline{D}$ išskyrus baigtinį skaičių izoliuotųjų ypatingųjų taškų $s_1, s_2, ..., s_n$ srities D viduje, tai*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\delta D} = \sum_{k=1}^{n} Res_{s=s_k} f(s).$$

Tai – 5.10 teorema iš [15].

3 lema (Koši integralinė formulė). *Jei funkcija $f(s)$ yra vienareikšmė ir analizinė srityje G, o $\mathcal{L}$ yra uždaroji ištiesinamoji Žordano kreivė, priklausanti sričiai G kartu su vidine sritimi D, tai*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{L}} \frac{f(s)ds}{s-a} = \begin{cases} f(a), & kai \quad a \in D, \\ 0, & kai \quad a \in G \backslash \overline{D}. \end{cases}$$

Tai – 3.12 teorema iš [15].

4 lema (Galagherio lema). *Tegul T_0 ir $T \geq \delta > 0$ yra realieji skaičiai, $\mathbb{T}$ yra baigtinė aibė iš intervalo $[T_0 + \frac{\delta}{2}, T_0 + T - \frac{\delta}{2}]$, o*

$$N_\delta(x) = \sum_{\substack{t \in \mathbb{T} \\ |t-x|<\delta}}^{N} 1.$$

Tarkime, kad $S(x)$ yra tolydi kompleksines reikšmes įgyjanti funkcija intervale $[T_0, T+T_0]$, turinti tolydžią išvestinę intervale $(T_0, T+T_0)$. Tada

$$\sum_{t\in\mathbb{T}} N_\delta^{-1}(t)|S(t)|^2 \leq \frac{1}{\delta}\int_{T_0}^{T_0+T} |S(x)|^2 dx + \left(\int_{T_0}^{T_0+T} |S(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{T_0}^{T_0+T} |S^{'}(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Lemos įrodymą galima rasti [14], 1.4 lema.

Tarkime, kad S yra topologinė erdvė, o $\mathcal{B}(S)$ pažymėkime erdvės S Borelio aibių klasę, t. y. Borelio kūnas (laukas) generuojamas visų erdvės S atvirų aibių sistemų. Tada kiekvienas matas klasėje $\mathcal{B}(S)$ yra vadinamas Borelio matu.

Tarkime $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ yra tikimybinė erdvė, o $(S, \mathcal{B}(S))$ yra metrinė erdvė su jos Borelio aibių klase.

Apibrėžimas. Tarkime, turime funkciją $X : \Omega \to S$. Jei $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\} \in \mathcal{F}$ visiems $A \in \mathcal{B}(S)$, tada X yra vadinamas S–reikšmiu atsitiktiniu elementu, apibrėžtu tikimybinėje ardvėje $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Apibrėžimas. S–reikšmio atsitiktinio elemento X skirstiniu yra vadinamas tikimybinis matas P apibrėžtas erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$ toks, kad

$$P(A) = P(X^{-1}A) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}$$

visoms $A \in \mathcal{B}(S)$.

5 lema (Čebyšovo nelygybė). *Tegul X yra realiąją reikšmę įgyjantis atsitiktinis dydis, $u : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ yra neigiama funkcija ir $a > 0$. Tada*

$$P\{\omega \in \Omega : u(X) \geq a\} \leq \frac{1}{a}\mathbb{E}u(X).$$

Tai – 3.7 lema iš [15].

Tegul P_n ir P yra tikimybiniai matai erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$.

Apibrėžimas. Sakome, kad P_n, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į P, jeigu

$$\int_S f dP_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_S f dP$$

kiekvienai realiajai, apibrėžtai funkcijai f erdvėje S.

Apibrėžimas. Aibė $A \in \mathcal{B}(S)$ yra vadinama mato P tolydumo aibe, jeigu $P(\partial A) = 0$.

Silpno konvergavimo tyrimui dažnai naudojama tokia teorema.

6 lema. *P_n silpnai konverguoja į P tada ir tik tada, kai iš bet kokio posekio $\{P_{n'}\}$ galime išskirti posekį $\{P_{n''}\}$ tokį, kad $P_{n''}$ silpnai konverguotų į P.* Tai 2.3 teorema iš [1] arba 1.1.9 teorema iš [9].

Apibrėžimas. Atsitiktinių elementų seka $\{X_n\}$ konverguoja pagal skirstinį į atsitiktinį elementą X, kai $n \to \infty$, jei elementų X_n skirstiniai silpnai konverguoja į elemento X skirstinį (žymime $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$)

Tegul S yra separabili metrinė erdvė, kurioje apibrėžta metrika ρ, o $Y_n, X_{1n}, X_{2n}, ...$ yra S–reikšmiai atsitiktiniai elementai apibrėžti erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

7 lema. *Tarkime, kad $X_{kn} \xrightarrow{\mathcal{D}} X_k$, kai $n \to \infty$, kiekvienam k ir $X_k \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, kai $k \to \infty$. Jeigu kiekvienam $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\{\rho(X_{kn}, Y_n) \geq \varepsilon\} = 0,$$

tada $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, $n \to \infty$

Tai 4.2 teorema iš [1].

Tarkime, kad S_1 ir S_2 yra dvi metrinės erdvės. Nagrinėkime funkciją $u : S_1 \to S_2$. Tegul P yra tikimybinis matas erdvėje $(S_1, \mathcal{B}(S_1))$. Tuomet šis matas indukuoja erdvėje $(S_2, \mathcal{B}(S_2))$ vienintelį tikimybinį matą Pu^{-1}, kuris apibrėžiamas lygybe

$$Pu^{-1}(A) = P(u^{-1}A), \quad A \in \mathcal{B}(S_2).$$

Apibrėžimas. Funkcija $u : S_1 \to S_2$ yra tolydi, jeigu $u^{-1}G_1$ yra atvira erdvėje S_1 kiekvienai atvirai aibei $G_1 \in S_2$.

8 lema. *Tegul $u : S_1 \to S_2$ yra tolydusis atvaizdis ir P_n silpnai konverguoja į P, kai $n \to \infty$. Tada ir $P_n u^{-1}$ silpnai konverguoja į Pu^{-1}.*

Tai atskiras 5.1 teoremos iš [1] atvejis arba 1.1.16 teorema iš [9].

γ pažymėkime vienetinį kompleksinės plokštumos $\mathbb{C}$ apskritimą, t. y. $\gamma = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$. Tegul Q yra tikimybinis matas apibrėžtas erdvėje $(\gamma^m, \mathcal{B}(\gamma^m))$.

Apibrėžimas. Tikimybinio mato Q Furjė transformacija $g(k_1, ..., k_m)$ apibrėžiama formule

$$g(k_1, ..., k_m) = \int_{\gamma^m} x_1^{k_1} \dots x_m^{k_m} dQ;$$

čia $k_j \in \mathbb{Z}$, $x_j \in \gamma$, $j = 1, ..., m$.

9 lema. *Tegul $\{Q_n\}$ yra tikimybinių matų erdvėje $(\gamma^m, \mathcal{B}(\gamma^m))$ seka, o $\{g_n(k_1, ..., k_m)\}$ – atitinkamų Furjė tranformacijų seka. Pareikalaukime, kad kiekvienai sveikųjų skaičių sekai $(k_1, ..., k_m)$ egzistuotų riba*

$$g(k_1, ..., k_m) = \lim_{n\to\infty} \{g_n(k_1, ..., k_m)\}.$$

Tada erdvėje $(\gamma^m, \mathcal{B}(\gamma^m))$ egzistuoja tikimybinis matas Q toks kad, kai $n \to \infty$, tikimybinis matas Q_n silpnai konverguoja į Q. Be to, $g(k_1, ..., k_m)$ yra mato Q Furjė tranformacija.

Teoremos įrodymą galima rasti [9] monografijoje, 1.3.19 teorema.

Tegul

$$\Omega = \prod_p \gamma_p;$$

čia $\gamma_p = \gamma$ kiekvienam pirminiam p. Su sandaugos topologija ir pataškine daugyba Ω yra kompaktiška topologinė Abelio grupė.

Tegul Q yra tikimybinis matas erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$.

Apibrėžimas. Mato Q Furjė transformacija $g(\underline{k})$ yra apibrėžiama formule

$$g(\underline{k}) = \int_\Omega \prod_p x_p^{k_p} dQ;$$

čia $\underline{k} = (k_2, k_3, ...)$ ir tik baigtinis skaičius sveikųjų k_p nėra nuliai, $x_p \in \gamma$, p – pirminis.

10 lema. *Tegul $\{Q_n\}$ yra tikimybinių matų erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ seka, o $\{g_n(k)\}$ – atitinkamų Furjė tranformacijų seka. Tarkime, kad kiekvienam vektoriui $\underline{k}$ egzistuoja riba*

$$g(\underline{k}) = \lim_{n\to\infty} g_n(\underline{k}).$$

Tada erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ egzistuoja tikimybinis matas Q, toks kad matas Q_n silpnai konverguoja į matą Q. Be to $g(\underline{k})$ yra mato Q Furjė tranformacija.

Šios teoremos įrodymą galime rasti [9], 1.3.21 teorema.

Apibrėžimas. Tikimybinių matų šeima $\{P\}$ erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$ yra vadinama reliatyviai kompaktiška, jeigu bet kokia šeimos $\{P\}$ seka turi silpnai konverguojantį posekį.

Apibrėžimas. Erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$ apibrėžtų tikimybinių matų šeima $\{P\}$ yra vadinama suspausta, jeigu bet kokiam $\varepsilon > 0$ egzistuoja kompaktiška aibė K tokia, kad $P(K) > 1 - \varepsilon$ visiems P iš $\{P\}$.

11 lema. *Jei tikimybinių matų šeima $\{P\}$ yra suspausta, tai ji yra realiatyviai kompaktiška.*

12 lema. *Tegul S yra separabili pilna metrinė erdvė. Jei tikimybinių matų šeima $\{P\}$ erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$ yra reliatyviai kompaktiška, tai ji yra suspausta.*

11 ir 12 lemos yra Prochorovo teoremos, kurių įrodymus galima rasti [1] arba 1.1.12 ir 1.1.13 teoremos iš [9].

4 Diskrečioji ribinė teorema su svoriu Hurvico dzeta funkcijai su algebriniu iracionaliuoju parametru

Šiame skyriuje įrodysime pagrindinį mūsų magistro darbo rezultatą – diskrečiąją ribinę teoremą su svoriu Hurvico dzeta funkcijai $\zeta(s,\alpha)$ su algebriniu iracionaliuoju parametru α, $0 < \alpha \leq 1$ kompleksinėje plokštumoje.

4.1 Teorema tore

Apibrėžkime tikimybinį matą

$$Q_{N,w}(A) = \mu_{N,w}\left(\left((m+\alpha)^{-ilh} : m \in \mathcal{M}(\alpha)\right) \in A\right), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}).$$

2 teorema. *Tegul α ir h yra tokie pat kaip ir* 1 teoremoje*. Erdvėje* $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ *egsituoja tikimybinis matas Q_w toks, kad matas $Q_{N,w}$ silnai konverguoja į Q_w, kai $N \to \infty$.*

Įrodymas. Duali grupė Ω yra izomorfinė

$$\bigoplus_{m \in \mathcal{M}(\alpha)} \mathbb{Z}_m;$$

čia $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}$ visiems $m \in \mathcal{M}(\alpha)$. Elementas

$$\underline{k} = \{k_m : m \in \mathcal{M}(\alpha)\} \in \bigoplus_{m \in \mathcal{M}(\alpha)} \mathbb{Z}_m$$

atvaziduojamas į Ω pagal formulę

$$\omega \to \omega^{\underline{k}} = \prod_{m \in \mathcal{M}(\alpha)} \omega^{k_m}(m), \quad \omega \in \Omega;$$

čia tik baigtinis skaičius sveikųjų k_m yra nenuliai. Mato $Q_{N,w}$ Furjė tranformacija $g_N(\underline{k})$ turi pavidalą

$$g_N(\underline{k}) = \int_\Omega \prod_{m \in \mathcal{M}(\alpha)} \omega^{k_m}(m) dQ_{N,w};$$

čia $\underline{k} = \{k_m : m \in \mathcal{M}(\alpha)\}$ ir, kaip anksčiau, baigtinis skaičius k_m yra nenuliai. Vadinasi,

$$g_N(\underline{k}) \;=\; \frac{1}{U}\sum_{l=0}^{N} w(l) \prod_{m \in \mathcal{M}(\alpha)} (m+\alpha)^{-ik_m lh}$$

$$= \quad \frac{1}{U}\sum_{l=0}^{N} w(l)\exp\left\{-ilh\sum_{m\in\mathcal{M}(\alpha)} k_m \log(m+\alpha)\right\}. \tag{3}$$

Kadangi sistema $I(\alpha)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš racionaliųjų skaičių lauko $\mathbb{Q}$, α yra iš $\mathcal{D}$ klasės ir $w(l)$ yra aprėžtos variacijos funkcija, iš (3) išplaukia

$$g_N(\underline{k}) = \begin{cases} 1, & \text{jei } \underline{k} = \underline{0}, \\ O\left(U\left|\sum_{m\in\mathcal{M}(\alpha)} k_m \log(m+\alpha)\right|\right)^{-1}, & \text{jei } \underline{k} \neq \underline{0}. \end{cases} \tag{4}$$

Vadinasi,

$$\lim_{N\to\infty} g_N(\underline{k}) = \begin{cases} 1, & \text{jei } \underline{k} = \underline{0}, \\ 0, & \text{jei } \underline{k} \neq \underline{0}. \end{cases}$$

Kadangi $g_N(\underline{k})$ konverguoja į Haro mato m_H Furjė transformaciją, tai teoremos tvirtinimas seka iš 10 lemos.

4.2 Teorema absoliučiai konverguojančioms eilutėms

Tegul $\sigma_1 > \frac{1}{2}$. Pažymėkime

$$l_n(s,\alpha) = \frac{s}{\sigma_1}\Gamma\left(\frac{s}{\sigma_1}\right)(n+\alpha)^s, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\};$$

čia $\Gamma(s)$ yra Oilerio gama funkcija. Pusplokštumėje $\sigma > \frac{1}{2}$ apibrėžkime

$$\zeta_n(s,\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} \zeta(s+z,\alpha) l_n(s,\alpha)\frac{dz}{z} \tag{5}$$

ir

$$a_n(m,\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} \frac{l_n(s,\alpha)}{(m,\alpha)^s}\frac{ds}{s}. \tag{6}$$

Pasinaudojus Melino atvirkštinę formulę (1 lema) gauname, kad

$$a_n(m,\alpha) = \exp\left(-\left(\frac{m+\alpha}{n+\alpha}\right)^{\sigma_1}\right).$$

Iš $a_n(m,\alpha)$ apibrėžimo seka, kad teisingas įvertis

$$a_n(m,\alpha) \ll \frac{1}{(m+\alpha)^{\sigma_1}},$$

o eilutė

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_n(m,\alpha)}{(m+\alpha)^s}$$

pusplokštumėje $\sigma > \frac{1}{2}$ konverguoja absoliučiai.

Iš $\zeta_n(s,\alpha)$ apibrėžimo ir aukščiau pateiktų svarstymų gauname, kad

$$\zeta_n(s,\alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_n(m,\alpha)}{(m+\alpha)^s} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\exp\left(-\left(\frac{m+\alpha}{n+\alpha}\right)^{\sigma_1}\right)}{(m+\alpha)^s}.$$

Erdvėje $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ apibrėžkime tikimybinį matą

$$P_{N,n,w}(A) = \mu_{N,w}(\zeta_n(s+ilh,\alpha) \in A), \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}).$$

3 teorema. *Tarkime, kad yra išpildomos* 1 teoremos *sąlygos. Tada erdvėje* $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ *egzistuoja tikimybinis matas* $P_{n,w}$ *toks kad, kai* $N \to \infty$, *į jį silpnai konverguoja matas* $P_{N,n,w}$.

Įrodymas. Funkcija $u : \Omega \to \mathbb{C}$ apibrėžiama formule

$$u(\{\omega(m) : m \in \mathcal{M}(\alpha)\}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\omega(m) \exp\left(-\left(\frac{m+\alpha}{n+\alpha}\right)^{\sigma_1}\right)}{(m+\alpha)^s}.$$

u yra tolydi, nes paskutinė eilutė konverguoja tolygiai pagal ω pusplokštumėje $\sigma > \frac{1}{2}$. Be to,

$$u\left(((m+\alpha)^{-ilh} : m \in \mathcal{M}(\alpha))\right) = \zeta_n(\sigma + it, \alpha).$$

Pagal 8 lemą pastarasis sąryšis parodo, kad $P_{N,n,w} = Q_{N,w}u^{-1}$, čia $Q_{N,w}$ yra 3 teoremoje esantis matas. Vadinasi, kai $N \to \infty$, matas $P_{N,n,w}$ silpnai konverguoja į $Q_{N,w}u^{-1}$. Teorema įrodyta.

4.3 Aproksimavimas vidurkiu

Perėjimui nuo absoliučiai konverguojančios eilutės prie funkcijos $\zeta(s,\alpha)$, reikalinga funkcijos $\zeta(s,\alpha)$ aproksimacija vidurkiu absoliučiai konverguojančia eilute $\zeta_n(s,\alpha)$.

4 teorema. *Tegul* α*,* h *ir* $w(l)$ *yra tokie pat kaip ir* 1 teoremoje*. Tada*

$$\lim_{n\to\infty}\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{U}\sum_{l=0}^{N} w(l)\,|\zeta(s+ilh,\alpha)-\zeta_n(s+ilh,\alpha)|=0.$$

Įrodymas. Tegul σ_1 yra toks pat kaip ir 4.2 skyriuje. Iš 2 lemos, kai $\sigma>\sigma_1$, turime

$$\zeta_n(s,\alpha)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1-\sigma-i\infty}^{\sigma_1-\sigma+i\infty}\zeta(s+z,\alpha)l_n(z,\alpha)\frac{dz}{z}+\zeta(s,\alpha)+\frac{l_n(1-s,\alpha)}{1-s}. \quad (7)$$

Kai $\delta<\sigma-\sigma_1$, apskritimas $|z-\sigma|=\delta$ priklauso pusplokštumei $\sigma>\frac{1}{2}$. Iš 3 lemos turime

$$|\zeta(\sigma+it,\alpha)-\zeta_n(\sigma+it,\alpha)|\le\frac{1}{2\pi\delta}\int_{|z-\sigma|=\delta}|\zeta(z+it,\alpha)-\zeta_n(z+it,\alpha)|\,|dz|.$$

Iš (7) formulės gauname įvertį

$$\begin{aligned}&\zeta(\sigma+it,\alpha)-\zeta_n(\sigma+it,\alpha)\\&\quad\ll+\int_{-\infty}^{+\infty}|\zeta(\sigma_1+it+i\tau,\alpha)l_n(\sigma_1-\sigma+i\tau,\alpha)|\,|d\tau|+\left|\frac{l_n(1-\sigma-it,\alpha)}{1-\sigma-it}\right|.\end{aligned}$$

Iš čia ir (2) įverčio išplaukia

$$\begin{aligned}&\frac{1}{U}\sum_{l=0}^{N}w(l)|\zeta(\sigma+ilh,\alpha)-\zeta_n(\sigma+ilh,\alpha)|\\&\quad\ll\int_{-\infty}^{+\infty}l_n(\sigma_1-\sigma+i\tau,\alpha)|\left(\frac{1}{U}\sum_{l=0}^{N}w(l-\tau)|\zeta(\sigma_1+ilh+i\tau,\alpha)|\right)d\tau\\&\quad+o(1).\end{aligned}\quad (8)$$

Funkcijos $\zeta(s,\alpha)$ vidurkis yra aprėžtas pusplokštumėje $\sigma>\frac{1}{2}$. [13] darbe (4 lema) buvo įrodyta, kad teisingas įvertis

$$\frac{1}{T}\int_0^T|\zeta'(\sigma+it,\alpha)|^2dt\ll 1.$$

Pritaikius 4 lemą gauname įvertį

$$\frac{1}{U}\sum_{l=0}^{N} w(l)|\zeta(\sigma_1+ilh+i\tau,\alpha)|$$
$$\ll \left(\frac{1}{U}\sum_{l=0}^{N} w(l)|\zeta(\sigma_1+ilh+i\tau,\alpha)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \ll 1+|\tau|.$$

Tada (8) sąryšio dešinė pusė

$$\ll \int_{-\infty}^{+\infty} |l_n(\sigma_1-\sigma+i\tau,\alpha)|(1+|\tau|)d\tau. \tag{9}$$

Kadangi $\sigma_1-\sigma<0$, iš $l_n(s,\alpha)$ apibrėžimo turime

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |l_n(\sigma_1-\sigma+i\tau,\alpha)|(1+|\tau|)d\tau = 0.$$

Pastarasis sąryšis kartu su (9) įverčiu užbaigia teoremos įrodymą.

4.4 Pagrindinės teoremos įrodymas

3 teoremoje įrodyta, kad, kai $N \to \infty$, tikimybinis matas $P_{N,n,w}$ silpnai konverguoja į $P_{n,w}$. Įrodysime, kad tikimybinių matų šeima $\{P_{n,w}\}$ yra suspausta, t. y., kad visiems $\varepsilon > 0$ egzistuoja kompaktiškas poaibis K toks, kad $P_{n,w}(K) \geq 1 - \varepsilon$ visiems $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Tegul $M > 0$ bet koks skaičius. Pritaikę 5 lemą gauname

$$\begin{aligned} P_{N,n,w}(\{z \in \mathbb{C} : |z| > M\}) &= \mu_{N,w}(|\zeta_n(\sigma + ilh, \alpha)| > M) \\ &\leq \frac{1}{MU} \sum_{l=0}^{N} w(l)|\zeta_n(\sigma + ilh, \alpha)|. \end{aligned} \tag{10}$$

Iš 4 teoremos ir (2) įverčio

$$\begin{aligned} &\sup_{n\in\mathbb{N}} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{U} \sum_{l=0}^{N} w(l)\, |\zeta(\sigma + ilh, \alpha)| \\ &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{U} \sum_{l=0}^{N} w(l)\, |\zeta(\sigma + ilh, \alpha) - \zeta_n(\sigma + ilh, \alpha)| \\ &\quad + \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{U} \sum_{l=0}^{N} w(l)\, |\zeta(\sigma + ilh, \alpha)| \,. \end{aligned} \tag{11}$$

Pagal 4 lemą, (10) ir (11) sąryšius gauname

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \limsup_{N\to\infty} P_{N,n,w}(\{z \in \mathbb{C} : |z| > M\}) \leq C. \tag{12}$$

Dabar tegul $\varepsilon > 0$ yra laisvai pasirinktas skaičius ir $M = \frac{C}{\varepsilon}$. Tada iš (12) turime

$$\limsup_{N\to\infty} P_{N,n,w}(\{z \in \mathbb{C} : |z| > M\}) \leq \varepsilon. \tag{13}$$

Mato $P_{N,n,w}$ silpnas konvergavimas į matą $P_{n,w}$, kai $N \to \infty$, duoda, kad tikimybinis matas

$$\mu_{N,\omega}(|\zeta_n(\sigma + ilh, \alpha)| \in A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

silpnai konverguoja į matą $P_{n,w}u^{-1}$; čia funkcija $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ yra apibrėžta formule $u(z) = |z|$.

(13) nelygybei pritaikius 7 lemą, gauname

$$P_{n,w}(\{z \in \mathbb{C} : |z| > M\})$$

$$\begin{aligned}
&\leq \liminf_{N\to\infty} P_{N,n,w}(\{z \in \mathbb{C} : |z| > M\}) \\
&\leq \limsup_{N\to\infty} P_{N,n,w}(\{z \in \mathbb{C} : |z| > M\}) \leq \varepsilon
\end{aligned} \tag{14}$$

visiems $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Dabar tegul

$$K_\varepsilon(\{z \in \mathbb{C} : |z| > M\}) \,.$$

Aibė K_ε yra kompaktas, o iš (14) nelygybės

$$P_{n,w}(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$$

visiems $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. O tai reiškia, kad šeima $\{P_{n,\omega} : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ yra suspausta. Pagal 11 lemą ji yra reliatyviai kompaktiška.

Tikimybinėje erdvėje $(\Omega_0, \mathcal{B}(\Omega_0), \mathcal{P})$ apibrėžkime diskretųjį atsitiktinį kintamąjį $\Theta_{N,w}$ formule

$$\mathcal{P}(\Theta_{N,w} = hl) = \frac{w(l)}{U}, \quad l = 0, 1, ...N.$$

Tegul $X_{N,n,w}(\sigma) = \zeta_n(\sigma + i\Theta_{N,w}, \alpha)$. Tada

$$\mathcal{P}(X_{N,n,w}(\sigma) \in A) = \frac{1}{U} \sum_{l=0}^{N} w(l), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

o pagal 3 teoremą

$$X_{N,n,w} \xrightarrow[N\to\infty]{D} X_{n,w}; \tag{15}$$

čia $X_{n,w}$ yra kompleksinės reikšmės įgyjantis atsitiktinis elementas su pasiskirstymu $P_{n,w}$.

Iš $\{P_{n,w} : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ reliatyvaus kompaktiškumo išplaukia egzistavimas posekio n_1, tokio, kad $P_{n_1,w}$ silpnai konverguoja į tam tikrą tikimybinį matą P erdvėje $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$, kai $n_1 \to \infty$, t. y.

$$X_{n_1,w} \xrightarrow[n_1\to\infty]{D} P. \tag{16}$$

Apibrėžkime dar vieną kompleksines reikšmes įgyjantį atsitiktinį elementą

$$X_{N,w} = \zeta_n(\sigma + i\Theta_{N,w}, \alpha).$$

Tada pagal 4 teoremą randame, kad kiekvienam $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \mathcal{P}(|X_{N,w} - X_{N,n,w}| \geq \varepsilon)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{U} \sum_{\substack{l=0 \\ |X_{N,n,w}-X_{N,w}|\geq\varepsilon}}^{N} w(l)$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{\varepsilon U} \sum_{l=0}^{N} w(l)|X_{N,w} - X_{N,n,w}| = 0. \tag{17}$$

Iš (15)–(17) sąryšių ir 7 lemos

$$X_{N,w} \xrightarrow[n_1\to\infty]{D} P.$$

Tai yra ekvivalentu mato $P_{n,w}$ silpnam konvergavimui į matą P, kai $n \to \infty$.

Teorema įrodyta.

5 Išvados

Magistro darbe nagrinėjamos Hurvico dzeta funkcijos $\zeta(s, \alpha)$, $s = \sigma + it$, su algebriniu iracionaliuoju parametru α, $0 < \alpha \leq 1$, diskretusis reikšmių pasiskirstymas. Tegul parametras α priklauso klasei D , h yra teigiamas fiksuotas skaičius toks, kad $\exp\left\{\frac{2\pi}{h}\right\}$ yra racionalusis, bei galioja tam tikri įverčiai svorio funkcijai $w(x)$. Tada įrodome, kad funkcijai $\zeta(s, \alpha)$ teisinga diskrečioji ribinė teorema tikimybinių matų silpno konvergavimo prasme kompleksinėje plokštumoje $\mathbb{C}$. Įrodytas ribinio mato egzistavimas.

6 Santrauka

Darbe nagrinėjamos Hurvico dzeta funkcijos $\zeta(s,\alpha)$, $s = \sigma + it$ su algebriniu iracionaliuoju parametru α, $0 < \alpha \leq 1$ diskretusis reikšmių pasiskirstymas.

Įrodyta, jog funkcijai $\zeta(s,\alpha)$ galioja diskrečioji ribinė teorema su svoriu kompleksinėje plokštumoje $\mathbb{C}$.

Tegul $w(x)$ yra realioji baigtinės variacijos intervale $[0,\infty)$ funkcija tokia, kad

$$U = U(N,w) = \sum_{m=0}^{N} w(l) \to \infty, \quad N \to \infty.$$

Tegul parametras α priklauso klasei D, tenkinančiai Dubicko hipotezę, o aritmetinės progresijos žingsnis $h > 0$ yra toks, kad $\exp\left\{\frac{2\pi}{h}\right\}$ būtų racionalusis skaičius.

Darbe yra įrodoma diskrečioji ribinė teorema su svoriu silpno tikimybinių matų konvergavimo prasme Hurvico dzeta funkcija $\zeta(s,\alpha)$ su algebriniu iracionaliuoju parametru α, $0 < \alpha \leq 1$ kompleksinėje plokštumoje.

Pareikalaukime, kad α ir h tenkintų aukščiau minėtas salygas. Tada, kai $\sigma > \frac{1}{2}$, tikimybinis matas

$$\frac{1}{U} \sum_{\substack{l=0 \\ \zeta(s+ilh,\alpha)\in A}}^{N} w(l), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

kai $N \to \infty$, silpnai konverguoja į tam tikrą erdvėje $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ egzistuojantį tikimybinį matą.

7 Summary

Master's work is devoted to the investigation of value distribution of Hurwitz zeta-function $\zeta(s,\alpha)$, $s = \sigma + it$ with algebraic irrational parameter α, $0 < \alpha \leq 1$. It is proved that for the function $\zeta(s,\alpha)$ valid discrete limit theorem with weight in the complex plane.

Let $w(x)$ be a function of banded variation on $[0,\infty)$ such that

$$U = U(N,w) = \sum_{m=0}^{N} w(l) \to \infty, \quad N \to \infty.$$

Suppose that parameter α belongs to the class D satisfying Dubickas conjecture. Let step of arithmetical progression $h > 0$ be such that $\exp\left\{\frac{2\pi}{h}\right\}$ will be rational number.

In this work if is proved a weighted discrete limit theorem in the since of the weakly convergent probability measures for the Hurwitz zeta-function $\zeta(s,\alpha)$ with algebraic irrational parameter α, $0 < \alpha \leq 1$ in the complex plane.

Suppose that α and h satisfied above mentioned conditions. Then, for $\sigma > \frac{1}{2}$, on $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ there exists a probability measure P such that the measure

$$\frac{1}{U} \sum_{\substack{l=0 \\ \zeta(s+ilh,\alpha)\in A}}^{N} w(l), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

converges weakly to P as $N \to \infty$.

Literatūra

[1] P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, John Wiley, New York, 1968.

[2] J. W. S. Cassels, Footnote to a note of Davenport and Heilbronn, *J. London Math. Soc.*, **36**, 171–184 (1961).

[3] H. Davenport, H. Heilbron, On the zeros of certain Dirichlet series, *J. London, Math. Soc.,* **11**, 181–185 (1936).

[4] P. Drungilas, A. Dubickas, A multiplicative dependence of shifted algebraic numbers, *Coloq. Math.*, **96**(1), 75–81 (2003).

[5] A. Hurwitz, Einige Eigenschaften der Dirichletschen Funktionen $F(x) = \sum \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^s}$, die bei der Bestimmung der Klassenzahlen binärer quadratischer Formen auftreten, *Schlömilch Z.*, **XXVII**, 86–102 (1882) = *Zeitschrift Math. Physik*, **27**, 86–101 (1889).

[6] A. Hurwitz, On the number theory of quaternions, (Über die Zahlentheorie der Quaternionen), *Gott. Nachr.*, 314–340 (1896).

[7] A. Ivič, *The Riemann Zeta-Function, Theory and Applications*, Dover Publications, Mineola, New York, 1985.

[8] R. Kačinskaitė, A. Laurinčikas, A discrete limit theorem on the complex plane for the Hurwitz zeta-function with an algebraic irrational parameter, *Annales Univ. Sci. Budapest. Sect Comp.*, **29**, 25–38 (2008).

[9] A. Laurinčikas, *A Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1996.

[10] A. Laurinčikas, R. Garunkštis, *The Lerch Zeta-Function*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 2002.

[11] A. Laurinčikas, J. Steuding, A limit theorem for the Hurwitz zeta-function with algebraic irrational parameter, *Arch. Math.*, **85**, 419–432 (2005).

[12] A. Laurinčikas, J. Steuding, A limit theorem in the space of analitic funkctions parameter, *Annales Univ. Sci, Butapest, Sect. Comp,* **27**, 15–30 (2007).

[13] A. Makulavičius, *Hurvico dzeta funkcijos aproksimavimas pagal vidurkį absoliučiai konverguojančiomis Dirichlė eilutėmis*, Bakalauro darbas, Šiaulių universitetas, Šiauliai, 2007.

[14] H. L. Montgomery, *Topics in Multiplicative Number Theory*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1971.

[15] A. Nagelė, L. Papreckienė, *Kompleksinio kintamojo funkcijų teorija*, Žara, Vilnius, 1996.

[16] http://en.wikipedia.org/wiki/AdolfHurwitz (žiūrėta 2012-03-02).

Žymėjimai

p	– pirminis skaičius
k, l, m, n, j	– natūralieji skaičiai
$\mathbb{N}$	– natūraliųjų skaičių aibė
$\mathbb{Z}$	– sveikųjų skaičių aibė
$\mathbb{R}$	– realiųjų skaičių aibė
$\mathbb{C}$	– kompleksinių skaičių aibė
i	– menamasis vienetas: $i = \sqrt{-1}$
$s = \sigma + it$	– kompleksinis kintamasis
$\mathrm{Re} s = \sigma$	– realioji s dalis
$\mathrm{Im} s = t$	– menamoji s dalis
$A \times B$	– aibių A ir B Dekarto sandauga
A^m	– m aibių A Dekarto sandauga
$\mathrm{meas}\{A\}$	– aibės A Lebego matas
$\mu_N(...) = \frac{1}{N+1}\#\{0 \leq m \leq N : ...\}$	– vietoje daugtaškio rašomos sąlygos, kurias tenkina m
$\xrightarrow{\mathcal{D}}$	– konvergavimas pagal skirstinį
$\mathcal{B}(S)$	– erdvės S Borelio aibių klasė
$\Gamma(s)$	– Oilerio gama funkcija pusplokštumėje $\sigma > 0$ apibrėžiama $\Gamma(s) = \int\limits_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx$ ir analiziškai pratęsiama į visą s plokštumą
EX	– atsitiktinio elemento X vidurkis
B	– dydis aprėžtas konstanta, "O didysis" atitikmuo
$\zeta(s)$	– Rymano dzeta funkcija pusplokštumėje $\sigma > 1$ apibrėžiama $\zeta(s) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}$ ir analiziškai pratęsiama į visą $\mathbb{C}$