ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATIKOS KATEDRA

Solveiga Remeikaitė

Ribinė teorema Rymano dzeta funkcijos Melino transformacijai

Magistro darbas

Darbo vadovas
Prof. habil. dr. A. Laurinčikas

Šiauliai, 2011

Turinys

Įvadas

Analizinėje skaičių teorijoje gana dažnai yra sutinkamos Melino (Mellin) transformacijos. Tegul $s = \sigma + it$ yra kompleksinis kintamasis. Tuomet funkcijos $f(x)$ Melino transformacija $F(s)$ yra apibrėžiama integralu

$$F(s) = M(f(x)) = \int_0^\infty f(x)x^{s-1}dx,$$

jeigu tas integralas egzistuoja. Dažnai nagrinėti funkciją $F(x)$ yra lengviau negu $f(x)$. Tuomet apvertimo formulė duoda funkcijos $f(x)$ išraišką, kuri leidžia nagrinėti pradinę funkciją $f(x)$. Priminsime apvertimo formulę. Tarkime, kad $f(x)$ yra aprėžtos variacijos funkcija kiekviename baigtiniame intervale, o sandauga $f(x)x^{\sigma-1}$ yra integruojama begaliniame intervale $(0;\infty)$. Tuomet funkcijos $F(s)$ apvertimo formulė turi pavidalą

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s)x^{-s}ds = \frac{1}{2\pi i}\lim_{T\to\infty}\int\limits_{\sigma-i\tau}^{\sigma+i\tau} F(s)x^{-s}ds.$$

Melino transformacijos yra ypač naudingos nagrinėjant dzeta funkcijų laipsninius momentus, pavyzdžiui, Rymano dzeta funkcijos $\zeta(s)$ kuri, pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama Dirichlė eilute

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^\infty \frac{1}{m^s}$$

ir yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus tašką $s = 1$, kuris yra paprastasis polius su reziduumu 1. Šiam tikslui patogu yra naudoti modifikuotąsias Melino transformacijas $\widetilde{F}(s)$, apibrėžiamas formule

$$\widetilde{F}(s) = \widetilde{M}(f(x)) = \int_1^\infty f(x)x^{-s}dx.$$

Šios transformacijos yra patogesnės, kadangi nekyla integralo konvergavimo problema taške $x = 0$. Tarp klasikinių ir modifikuotų Melino transformacijų yra glaudus ryšys. Tegul

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{x}\right), & \text{kai} \ \ 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{kai} \ \ x > 1. \end{cases}$$

Tuomet [4] straipsnyje buvo gauta, kad

$$\widetilde{M}(f(x)) = M\left(\frac{1}{x}\hat{f}(x)\right).$$

Taigi, modifikuotojų Melino transformacijos savybės išplaukia iš klasikinių Melino transformacijų savybių.

Tegul

$$I_k(T) = \int_0^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)\right|^{2k} dt, \quad k \geq 0,$$

yra Rymano dzeta funkcijos laipsniniai momentai. Kuriems nors $\sigma > \sigma_0(k)$ apibrėžiame funkcijos

$$\left|\zeta\left(\frac{1}{2} + ix\right)\right|^{2k}$$

modifikuotąją Melino transformaciją

$$\mathcal{Z}_k(s) = \int_1^\infty \left|\zeta\left(\frac{1}{2} + ix\right)\right|^{2k} x^{-s} dx.$$

Pirmoji buvo apibrėžta ir panaudota dzeta funkcijos teorijoje transformacija $\mathcal{Z}_2(s)$. Japonų matematikas Y. Motohašis (Y. Motohashi) funkciją $\mathcal{Z}_2(s)$ pritaikė [9] ketvirtojo momento $I_2(T)$ tyrimui. Sąryšis tarp $I_k(T)$ ir funkcijos $\mathcal{Z}_k(s)$ išplaukia iš Melino apvertimo formulės: jeigu $f(x)$ yra "pakankamai gera" funkcija, tai tuomet iš lygybės

$$\int_1^\infty f\left(\frac{x}{T}\right) \left|\zeta\left(\frac{1}{2} + ix\right)\right|^{2k} dx = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s) T^s \mathcal{Z}_k(s) ds$$

su $c > 1$ galime gauti informaciją apie $I_k(T)$. Funkcijos $\mathcal{Z}_2(s)$ tyrimai buvo tęsiami [4-8] darbuose, buvo gauti idomūs rezultatai. Straipsnyje [6] buvo pradėta nagrinėti funkcija $\mathcal{Z}_1(s)$. Kadangi yra teisingas įvertis

$$I_1(T) \ll T \log^2 T,$$

tai nesunku matyti, kad integralas, apibrėžiantis funkciją $\mathcal{Z}_1(s)$, konverguoja absoliučiai srityje $\sigma > 1$, todėl funkcija $\mathcal{Z}_1(s)$ yra analizinė pusplokštumėje $\{s \in \mathbb{C} : \sigma > 1\}$. Čia simbolis $f(x) \ll g(x)$, $g(x) > 0$, $x \in \mathbb{X}$, reiškia, kad egzistuoja tokia konstanta $c > 0$, su kuria visiems $x \in \mathbb{X}$ yra teisinga nelygybė

$$|f(x)| \leq cg(x).$$

Taigi, $f(x) \ll g(x)$ yra lygybės $f(x) = O(g(x))$ sinonimas.

Darbe [6] funkcija $\mathcal{Z}_1(s)$ buvo meramorfiškai pratęsta į sritį $\left\{s \in \mathbb{C} : \sigma > -\frac{3}{4}\right\}$. Taškas $s = 1$ yra jos antrosios eilės polius su reziduumu, lygiu

$$2\gamma_0 - \log 2\pi;$$

čia γ_0 yra Oilerio konstanta, tai yra,

$$\gamma_0 = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \log n\right) = 0,577... \quad .$$

Truputėlį vėliau funkcija $\mathcal{Z}_1(s)$ buvo meramorfiškai pratęsta į visą kompleksinę plokštumą su galimais poliais $s = -m$, $m \in \mathbb{N}$, pusplokštumėje $\{s \in \mathbb{C} : \sigma < 0\}$. Pagaliau M. Lukarinen (Lukkarinen) savo disertacijoje [8] įrodė, kad funkcija $\mathcal{Z}_1(s)$ srityje $\{s \in \mathbb{C} : \sigma < 0\}$ turi tiktai paprastuosius polius $s = -(2m - 1)$, $m \in \mathbb{N}$, ir jokių kitų ypatingų taškų neturi.

Minėtame [6] straipsnyje buvo gautas funkcijos įvertis,bei jos antrojo momento įvertis, būtent, jei $0 \leq \sigma \leq$, $t \geq t_0 > 0$, tai

$$\mathcal{Z}_1(\sigma + it) \ll_\varepsilon t^{1-\sigma+\varepsilon},$$

ir su visais $T \geq 1$

$$\int_1^T |\mathcal{Z}_1(\sigma+it)|^2 dt \ll_\varepsilon \begin{cases} T^{3-4\sigma+\varepsilon}, & \text{jei } 0 \leq \sigma \leq \frac{1}{2}, \\ T^{2-2\sigma+\varepsilon}, & \text{jei } \frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1. \end{cases}$$

Magistro darbo tikslas yra tikimybinės funkcijos $\mathcal{Z}_1(s)$ savybės. Primename, kad tikimybinių metodų taikymo idėją 20 a. trečiąjame dešimtmetyje pasiūlė H. Boras (Bohr). Šią idėją jis realizavo kartu su B. Jesenu (Jessen) [2] [3] darbuose. Vėliau Boro - Jeseno tyrimus tęsė visa eilė žinomų matematikų, tarp jų A. Vintneris (Wintner), A. Selbergas (Selberg), A. Gošas (Ghosh), D. Džoineris (Joyner), B. Bagčis (Bagchi), K. Macumotas (Matsumoto), J. Štoidingas (Steuding), E. Stankus, P. Elijotas (Elliott). Nemažą indėlį į šiuos tyrimus įnešė Vilniaus ir Šiaulių matematikai.

Tegul S yra metrinė erdvė, o $\mathcal{B}(S)$ yra šios erdvės Borelio aibių klasė. Tarkime, kad $P_n, n \in \mathbb{N}$, ir P yra tikimybiniai matai erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$. Primename, kad P_n, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į matą P, jei su kiekviena realia, aprėžta, tolydžia funkcija f erdvėje S

$$\lim_{n\to\infty} \int_S f dP_n = \int_S f dP.$$

Pagrindinis magistro darbo rezultatas tokia teorema.

Teorema. *Tarkime, kad $\sigma > \frac{1}{2}$. Tuomet erdvėje $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ egzistuoja toks tikimybinis matas P_σ, į kurį, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja tikimybinis matas*

$$P_{T,\sigma}(A) \overset{def}{=} \frac{1}{T} meas\{t \in [0, T] : \mathcal{Z}_1(\sigma+it) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}).$$

2. Ribinės teoremos integralams baigtiniame intervale

Tarkime, kad $a > 1$ ir $\sigma_1 > 1$ yra fiksuoti skaičiai. Visiems $x \geq 1$ ir $y \geq 1$ apibrėžiame

$$v(x,y) = \exp\left\{-\left(\frac{x}{y}\right)^{\sigma_1}\right\}.$$

Šiame skyrelyje įrodysime ribinę teoremą integralui

$$\mathcal{Z}_{1,a,y}(S) = \int_1^a \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+ix\right)\right|^2 v(x,y)x^{-s}dx.$$

Pirmiausia gausime ribinę teoremą torui

$$\Omega_a = \prod_{u\in[1,a]} \gamma_u.$$

Čia $\gamma_u = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\} \stackrel{def}{=} \gamma$ su visais $u \in [1,a]$. Kadangi vienetinis apskritimas kompleksinėje plokštumoje yra kompaktinė aibė, tai pagal Tichonovo teoremą [10] toras Ω_a yra kompaktinė topologinė Abelio grupė. Šios grupės dualioji arba charakterių grupė turi pavidalą

$$\bigoplus_{u\in[1,a]} \mathbb{Z}_u.$$

Čia $\bigoplus$ reiškia tiesioginę sumą, o $\mathbb{Z}_u = \mathbb{Z} = \{...-1,0,1...\}$ su visais $u \in [1,a]$. Todėl tikimybinio mato erdvėje $(\Omega_a, \mathcal{B}(\Omega_a))$ Furjė transformacija turi pavidalą

$$\int\limits_{\Omega_a} \prod_{u\in[1,a]} x_u^{k_u} d\mu,$$

čia $k_u \in \mathbb{Z}, x_u \in \gamma$, ir tik baigtinis skaičius skaičių k_u yra nelygūs nuliui.

Erdvėje $(\Omega_a, \mathcal{B}(\Omega_a))$ apibrėžiame tikimybinį matą

$$Q_T(A) = \frac{1}{T} meas\{t \in [0,T] : (u^{it} : u \in [1,a]) \in A\}.$$

2.1 teorema. *Erdvėje $(\Omega_a, \mathcal{B}(\Omega_a))$ egzistuoja toks tikimybinis matas Q, į kurį, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja Q_T.*

Įrodymas. Iš mato Q_T apibrėžimo ir ankstesnės pastabos apie tikimybinių matų erdvėje $(\Omega_a, \mathcal{B}(\Omega_a))$ Furjė transformacijas turime, kad mato Q_T Furjė transformacija $g_T(\{k_u : u \in [1, a]\})$ turi pavidalą

$$g_T(\{k_u : u \in [1,a]\}) = \int\limits_{\Omega_a} \prod_{u\in[1,a]} x_u^{k_u} dQ_T =$$

$$= \frac{1}{T}\int\limits_0^T \exp\left\{it \sum_{u\in[1,a]} k_u \log u\right\} dt =$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{kai} \sum\limits_{u\in[1,a]} k_u \log u = 0, \\ \frac{\exp\{iT \sum\limits_{u\in[1,a]} k_u \log u\} - 1}{iT \sum\limits_{u\in[1,a]} k_u \log u}, & \text{kai} \sum\limits_{u\in[1,a]} k_u \log u \neq 0. \end{cases} \tag{1}$$

Čia, kaip ir anksčiau tik baigtinis sveikųjų skaičius k_u skaičius yra nelygūs 0. Todėl iš (1) išplaukia, kad

$$\lim_{T\to\infty} g_T(\{k_u : u \in [1,a]\}) = \begin{cases} 1, & \text{kai} \sum\limits_{u\in[1,a]} k_u \log u = 0, \\ 0, & \text{kai} \sum\limits_{u\in[1,a]} k_u \log u \neq 0. \end{cases} \tag{2}$$

Gerai žinoma, kad iš Furjė transformacijų konvergavimo išplaukia atitinkamų matų silpnasis konvergavimas. Taigi, gavome, kad tikimybinis matas Q_T kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į tikimybinį matą Q erdvėje $(\Omega_a, \mathcal{B}(\Omega_a))$, apibrėžiamą Furjė transformacija

$$g(\{k_u : u \in [1,a]\}) = \begin{cases} 1, & \text{kai} \sum\limits_{u\in[1,a]} k_u \log u = 0, \\ 0, & \text{kai} \sum\limits_{u\in[1,a]} k_u \log u \neq 0. \end{cases} \tag{3}$$

Dabar suformuluosime pagrindinį šio skyrelio rezultatą - ribinę teoremą funkcijai $\mathbb{Z}_{1,a,y}(S)$.

2.2 teorema. *Erdvėje* $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ *egzistuoja toks tikimybinis matas* $P_{\sigma,a,y}$, *į kurį, kai* $T \to \infty$, *silpnai konverguoja tikimybinis matas*

$$P_{T,\sigma,a,y}(A) \stackrel{def}{=} \frac{1}{T} meas\{t \in [0,T] : \mathcal{Z}_{a,y}(\sigma + it) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}).$$

Teoremos įrodymą padalinsime į keletą lemų. Pirmiausia įrodysime ribinę teoremą integralinei sumai.

Intervalą $[1, a]$ taškais $1 = x_0 < x_1 < ... < x_n = a$ dalyjame į vienodo ilgio $\frac{a-1}{n}$ dalinius intervalus ir funkcijai $\left|\zeta\left(\frac{1}{2} + ix\right)\right|^2 v(x,y)x^{-s}$ apibrėžiame integralinę sumą

$$S_{1,n}(s) = S_{1,n,a,y}(s) = \sum_{j=1}^{n} \left|\zeta\left(\frac{1}{2} + ij\right)\right|^2 v(\zeta_j, y)\zeta_j^{-s} \triangle x_j,$$

kurioje $\zeta_j \in [x_{j-1}, x_j]$ ir $\triangle x_j = x_j - x_{j-1}$. Apibrėžiame tikimybinį matą

$$Q_{1,T,n}(A) = Q_{1,T,n,\sigma,a,y}(A) = \frac{1}{T} meas\{t \in [0,T] : S_{1,n}(\sigma + it) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}).$$

2.3 lema. *Erdvėje* $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ *egzistuoja toks tikimybinis matas* $Q_{1,n} = Q_{1,n,\sigma,a,y}$ *į kurį, kai* $T \to \infty$, *silpnai konverguoja matas* $Q_{1,T,n}$.

Įrodymas. Pradžioje priminsime vieną tikimybinių matų silpno konvergavimo savybę.

Tarkime, kad $(X_j, \mathcal{B}(X_j)), j = 1, 2$, yra dvi metrinės erdvės su jų Borelio aibių klasėmis, o $h : X_1 \to X_2$ yra $(\mathcal{B}(X_1), \mathcal{B}(X_2))$ mati funkcija, tai yra,

$$h^{-1}\mathcal{B}(X_2) \subset \mathcal{B}(X_1).$$

Tuomet tikimybinis matas P erdvėje $(X_1, \mathcal{B}(X_1))$ apibrėžia vienintelį tikimybinį matą erdvėje $(X_2, \mathcal{B}(X_2))$ formule

$$Ph^{-1}(A) = P(h^{-1}A), \quad A \in \mathcal{B}(X_2).$$

Be to, yra žinoma [1], kad jei P_n, $n \in \mathbb{N}$, ir P yra tikimybiniai matai erdvėje $(X_1, \mathcal{B}(X_1))$, P_n, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į P, o funkcija h yra tolydi, tai tuomet ir $P_n h^{-1}$, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į matą Ph^{-1}.

Dabar pradedame tiesioginį lemos įrodymą. Tarkime, kad funkcija $h_n : \Omega_a \to \mathbb{C}$ yra apibrėžta formule

$$h_n(y_x) = \sum_{j=1}^{n} \left| \zeta \left(\frac{1}{2} + i\xi_j \right) \right|^2 v(\xi_j, y) \xi_j^{-\sigma} y \zeta_j \triangle x_j, \quad y_x \in \Omega_a. \tag{4}$$

Tuomet funkcija h_n yra tolydi ir

$$h_n(x^{-it}) = S_{1,n}(\sigma + it).$$

Todėl $Q_{1,T,n} = Q_T h_n^{-1}$, čia Q_T yra tikimybinis matas iš (2.1) teoremos. Taigi, remdamiesi ankstesne pastaba ir funkcijos h_n tolydumu, gauname, kad matas $Q_{1,T,n}$, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į matą $P_n Q h_n^{-1}$ (Q yra ribinis matas 2.1 teoremoje).

Perėjimui nuo integralinės sumos $S_{1,n}(s)$ prie funkcijos $\mathcal{Z}_{1,a,y}$ naudosime tokią lemą.

2.4 lema. *Yra teisinga lygybė*

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T |S_{1,n}(\sigma + it) - \mathcal{Z}_{1,a,y}(\sigma + it)| dt = 0.$$

Įrodymas. Iš Koši nelygybės išplaukia, kad

$$\begin{aligned} &\frac{1}{T} \int_0^T |S_{1,n}(\sigma + it) - \mathcal{Z}_{1,a,y}(\sigma + it)| dt \ll \\ &\ll \left(\frac{1}{T} \int_0^T |S_{1,n}(\sigma + it) - \mathcal{Z}_{1,a,y}(\sigma + it)| dt \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{5}$$

Turime, kad

$$|S_{1,n}(\sigma + it) - \mathcal{Z}_{1,a,y}(\sigma + it)|^2 =$$

$$= (S_{1,n}(\sigma + it) - \mathcal{Z}_{1,a,y}(\sigma + it))(\overline{S_{1,n}(\sigma + it) - \mathcal{Z}_{1,a,y}(\sigma + it)}) =$$

$$= S_{1,n}(\sigma + it)\overline{S_{1,n}(\sigma + it)} - S_{1,n}(\sigma + it)\mathcal{Z}_{1,a,y}(\sigma + it) -$$

$$-\overline{S_{1,n}(\sigma+it)}\mathcal{Z}_{1,a,y}(\sigma+it)+\mathcal{Z}_{1,a,y}(\sigma+it)\overline{\mathcal{Z}_{1,a,y}(\sigma+it)}.$$

Iš integralinės sumos apibrėžimo išplaukia, kad

$$\frac{1}{T}\int_0^T S_{1,n}(\sigma+it)\overline{S_{1,n}(\sigma+it)}dt=$$

$$=\frac{1}{T}\int_0^T \Bigg(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+i\xi_j\right)\right|^2\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+i\xi_k\right)\right|^2 v(\xi_j,y)v(\xi_k,y)\times$$

$$\times\xi_j^{-\sigma-it}\xi_k^{-\sigma+it}\triangle x_j\triangle x_k\Bigg)dt=$$

$$=\frac{1}{T}\int_0^T \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+i\xi_j\right)\right|^2\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+i\xi_k\right)\right|^2 v(\xi_j,y)v(\xi_k,y)\times$$

$$\times(\xi_j\xi_k)^{-\sigma}\triangle x_j\triangle x_k\left(\frac{\xi_k}{\xi_j}\right)^{it}dt=$$

$$=\frac{1}{T}\int_0^T \Bigg(\sum_{j=1}^{n}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+i\xi_j\right)\right|^4 v^2(\xi_j,y)\xi_j^{-2\sigma}(\triangle x_j)^2dt+$$

$$+\frac{1}{T}\int_0^T \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+i\xi_j\right)\right|^2\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+i\xi_k\right)\right|^2 v(\xi_j,y)v(\xi_k,y)\times$$

$$\times(\xi_j\xi_k)^{-\sigma}\triangle x_j\triangle x_k\left(\frac{\xi_k}{\xi_j}\right)^{it}dt=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+i\xi_j\right)\right|^4 v^2(\xi_j,y)\xi_j^{-2\sigma}(\triangle x_j)^2+$$

$$+\frac{1}{T}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}{}_{j\neq k}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+i\xi_j\right)\right|^2\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+i\xi_k\right)\right|^2 v(\xi_j,y)v(\xi_k,y)\times$$

$$\times(\xi_j\xi_k)^{-\sigma}\triangle x_j\triangle x_k\frac{\left(\frac{\xi_j}{\xi_k}\right)^{iT}-1}{i\log\frac{\xi_j}{\xi_k}}.$$

Todėl

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T S_{1,n}(\sigma+it)\overline{S_{1,n}(\sigma+it)}dt=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+i\xi_j\right)\right|^4 v^2(\xi_j,y)\xi_j^{-2\sigma}(\triangle x_j)^2.$$

Kadangi $\triangle x_j=\frac{a-1}{n}$, tai iš čia gauname

$$\lim_{n\to\infty}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T S_{1,n}(\sigma+it)\overline{S_{1,n}(\sigma+it)}dt=0. \tag{6}$$

Analogiškai randame, kad

$$\lim_{n\to\infty}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \mathcal{Z}_{1,a,y}(\sigma+it)\overline{\mathcal{Z}_{1,a,y}(\sigma+it)}dt=0. \tag{7}$$

Kadangi iš Koši nelygybės turime, kad

$$\left|\frac{1}{T}\int_0^T S_{1,n}(\sigma+it)\overline{\mathcal{Z}_{1,a,y}(\sigma+it)}dt\right|\le$$

$$\le\left(\frac{1}{T}\int_0^T|S_{1,n}(\sigma+it)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{T}\int_0^T|\mathcal{Z}_{1,a,y}(\sigma+it)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}},$$

tai iš (5)-(7) išplaukia lemos tvirtinimas.

2.2 teoremos įrodymas. Pagal 2.3 lemą tikimybinis matas $Q_{1,T,n}$, kai $T\to\infty$ silpnai konverguoja į matą $Q_{1,n}$. Kurioje nors tikimybinėje ardvėje $(\Omega,\mathcal{B}(\Omega,P))$ apibrėžiame atsitiktinį dydį θ_T formule

$$P(\theta_T)=\frac{1}{T}\int_0^T I_A dt,\quad A\in\mathcal{B}(\mathbb{R});$$

čia I_A yra aibės A indikatorius, t.y.,

$$I_A(t)=\begin{cases}1, & \text{kai } t\in A,\\ 0, & \text{kai } t\notin A.\end{cases}$$

Apibrėžiame

$$U_{T,n}(\sigma) = S_{1,n}(\sigma + i\theta_T).$$

Tuomet 2.3 lemos turime, kad

$$U_{T,n}(\sigma) \xrightarrow[T\to\infty]{\mathcal{D}} U_n(\sigma), \tag{8}$$

nes atsitiktinių elementų konvergavimas pagal pasiskirstymą $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ yra ekvivalentus tų elementų pasiskirstymų silpnajam konvergavimui. Čia $U_n(\sigma)$ yra kompleksines reikšmes įgyjantis atsitiktinis dydis su pasiskirstymu $Q_{1,n}$.

Įrodysime, kad tikimybinių matų šeima $\{Q_{1,n} : n \in \mathbb{N}\}$ yra suspausta. Primename, kad tikimybinių matų erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$ šeima $\{P\}$ yra vadinama suspausta, jei kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuoja tokia erdvės S kompaktinė aibė $K = K(\varepsilon)$, kad su visais šeimos $\{P\}$ matais yra teisinga nelygybė

$$P(K) > 1 - \varepsilon.$$

Imame bet kokį teigiamą skaičių M. Tuomet iš Čebyševo tipo nelygybės gauname, kad

$$P(|U_{T,n}(\sigma)| > M) = \frac{1}{T} meas\{t \in [0,T] : |S_{1,n}(\sigma + it)| > M\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{TM} \int_0^T |S_{1,n}(\sigma + it)| dt.$$

Iš čia ir 2.4 lemos gauname

$$\begin{aligned}
&\limsup_{T\to\infty} P(|U_{T,n}(\sigma)| > M) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{TM} \int_0^T |S_{1,n}(\sigma + it)| dt \\
&\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{TM} \int_0^T |S_{1,n}(\sigma + it) - \mathcal{Z}_{1,a,y}(\sigma + it)| dt \\
&+ \sup_{n\in\mathbb{N}} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{TM} \int_0^T |\mathcal{Z}_{1,a,y}(\sigma + it)| dt
\end{aligned}$$

$$\ll \frac{1}{M} + \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{TM} \int_0^T |\mathcal{Z}_{1,a,y}(\sigma)| dt \le \frac{R_{1,\sigma,y}}{M} \tag{9}$$

su $R_{1,\sigma,y} < \infty$. Tarkime, kad $\varepsilon > 0$ yra bet koks skaičius. Tuomet, paėmę $M = M_\varepsilon = R_{1,\sigma,y}\varepsilon^{-1}$, iš (8) ir (9) randame, kad su visais $n \in \mathbb{N}$

$$P(|U_n(\sigma)| > M_\varepsilon) \le \varepsilon. \tag{10}$$

Tegul $K_\varepsilon > \{s \in \mathbf{C} : |s| \le M_\varepsilon\}$. Aibė K_ε yra aprėžta ir uždara, todėl ji yra kompaktinė erdvėje $\mathbb{C}$, ir iš (10) gauname, kad su visais $n \in \mathbb{N}$

$$P(U_n(\sigma) \in K_\varepsilon) \ge 1 - \varepsilon.$$

Pastaroji nelygybė yra ekvivalenti su visais $n \in \mathbb{N}$ nelygybei

$$Q_{1,n}(K_\varepsilon) \ge 1 - \varepsilon,$$

kuri reiškia tikimybinių matų šeimos $\{Q_{1,n} : n \in \mathbb{N}\}$ suspaustumą.

Mums bus reikalinga dar viena sąvoka. Tikimybinių matų šeima $\{P\}$ erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$ yra vadinama realiatyviai kompaktine, jeigu iš kiekvieno tos šeimos posekio galima išskirti silpnai konverguojantį posekį. Prochorovo teorema [1] tvirtina, kad jei tikimybinių matų šeima yra suspausta, tai ji yra realiatyviai kompaktinė. Todėl iš šeimos $\{Q_{1,n} : n \in \mathbb{N}\}$ suspaustumo išplaukia, kad egzistuoja toks posekis $\{Q_{1,n_k}\} \subset \{Q_{1,n}\}$, kuris, kai $k \to \infty$, silpnai konverguoja į kurį nors matą Q_1 erdvėje $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$. Pastarasis tvirtinimas yra ekvivalentus sąryšiui

$$U_{n,k}(\sigma) \xrightarrow[k\to\infty]{\mathcal{D}} Q_1. \tag{11}$$

Apibrėžiame

$$X_{T,a,y}(\sigma) = \mathcal{Z}_{1,a,y}(\sigma + i\theta_T).$$

Dar kartą pasinaudoję 2.4 lema ir Čebyševo nelygybe, gauname, kad su kiekvienu $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} P(|X_{T,a,y}(\sigma) - U_{T,n}(\sigma)| \geq \varepsilon)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\{t \in [0,T] : |S_{1,n}(\sigma+it) - \mathcal{Z}_{1,a,y}(\sigma+it)| \geq \varepsilon\}$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T_\varepsilon} \int_0^T |S_{1,n}(\sigma+it) - \mathcal{Z}_{1,a,y}(\sigma+it)| dt = 0$$

Iš čia, (8) (11) turime, kad yra išpildytos žemiau formuluojamos teoremos sąlygos (4.2 teorema iš [1]):

Tegul Y_n ir $X_{1n}, X_{2n}, ...$ yra S reikšmiai atsitiktiniai elementai, apibrėžti toje pačioje tikimybinėje erdvėje (Ω, A, P), o erdvė (S, ρ) yra separabili. Tegul su kiekvienu $k \in \mathbb{N}$

$$X_{kn} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} X_k$$

ir

$$X_k \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} X.$$

Jeigu su kiekvienu $\varepsilon > 0$

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P(\rho(Y_n, X_{kn}) \geq \varepsilon) = 0,$$

tai turime

$$Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} X.$$

Pasinaudoję šia teorema, gauname, kad

$$X_{T,a,y} \xrightarrow[T\to\infty]{\mathcal{D}} Q_1,$$

o pastarasis sąryšis yra ekvivalentus tikimybinio mato $P_{T,\sigma,a,y}$ silpnąjam konvergavimui, kai $T \to \infty$, į matą Q_1. Taigi, turime, kad tikimybinis matas $P_{\sigma,a,y}$ 2.2 teoremoje sutampa su matu Q_1.

3. Aproksimavimas absoliučiai konverguojančiu integralu

Tarkime, kad $\Gamma(s)$ yra Oilerio gama funkcija, kuri pusplokštumėje $\sigma > 0$ yra apibrėžiama integralu

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-u} u^{s-1} du$$

ir yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus taškus $s = -m$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, kurie yra paprastieji poliai, ir

$$Rez_{s=-m} \Gamma(s) = \frac{(-1)^m}{m!}.$$

Tegul $\sigma_1 > \frac{1}{2}$ yra fiksuotas skaičius,

$$l_y(s) = \frac{s}{\sigma_1} \Gamma\left(\frac{s}{\sigma_1}\right) y^s, \quad y \geq 1,$$

ir

$$\mathcal{Z}_{1,y}(s) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} \mathcal{Z}_1(s+z) l_y(z) \frac{dz}{z}, \quad \sigma > \frac{1}{2}.$$

Kadangi $\sigma + \sigma_1 > 1$ tai tiesėje $Rez = \sigma_1$ funkcija $\mathcal{Z}_1(s+z)$ užsirašo integralu

$$\mathcal{Z}_1(s+z) = \int_1^\infty \left|\zeta\left(\frac{1}{2} + ix\right)\right|^2 x^{-(s+z)} dx.$$

Tegul

$$a_y(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} \left|\zeta\left(\frac{1}{2} + ix\right)\right|^2 \frac{l_y(z) dz}{z x^z}.$$

Kadangi gama funkcijai yra teisingas įvertis

$$\Gamma(\sigma + it) \ll e^{-\frac{\pi}{2}|t|} |t|^{\sigma - \frac{1}{2}},$$

tai iš čia randame įvertį

$$a_y(x) \ll \left|\zeta\left(\frac{1}{2} + ix\right)\right|^2 x^{-\sigma_1} \int_{-\infty}^\infty |l_y(\sigma_1 + it)| dt \ll \zeta\left|\left(\frac{1}{2} + ix\right)\right|^2 x^{-\sigma_1},$$

nes integralas konverguoja.

Gerai žinoma [11], kad

$$\int_1^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+ix\right)\right|^2 dt \ll T\log T.$$

Todėl, kai $\sigma > \frac{1}{2}$,

$$\int_1^\infty \frac{a_y(x)}{x^s}dx \ll \int_1^\infty \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+ix\right)\right|^2 \frac{dx}{x^{\sigma+\sigma_1}} =$$

$$= \int_1^\infty \frac{1}{x^{\sigma+\sigma_1}} d\left(\int_1^x \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+iu\right)\right|^2 du\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{x^{\sigma+\sigma_1}}\int_1^x \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+iu\right)\right|^2 du\right)\Bigg|_1^\infty +$$

$$+(\sigma+\sigma_1)\int_1^\infty \left(\int_0^x \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+iu\right)\right|^2 du\right)\frac{dx}{x^{\sigma+\sigma_1+1}} \ll$$

$$\ll \frac{x\log x}{x^{\sigma+\sigma_1}}\Bigg|_1^\infty + (\sigma+\sigma_1)\int_1^\infty x\log x \frac{dx}{x^{\sigma+\sigma_1+1}} =$$

$$= 0 + (\sigma+\sigma_1)\int_1^\infty \frac{\log x dx}{x^{\sigma+\sigma_1}} < \infty,$$

nes $\sigma + \sigma_1 > 1$. Todėl galime sukeisti integravimo tvarką ir gauname, kad

$$\int_1^\infty \frac{a_y(x)dx}{x^s} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty}\left(\frac{l_y(z)}{z}\int_1^\infty \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+ix\right)\right|^2 \frac{dx}{x^{s+z}}\right)dz = \mathcal{Z}_{1,y}(s). \quad (12)$$

Iš funkcijos $a_y(x)$ apibrėžimo ir Melino formulės

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\Gamma(s)a^{-s}ds = e^{-a}, \quad c, a > 0,$$

išplaukia, kad

$$\int_1^\infty \frac{a_y(x)dx}{x^s} = \int_1^\infty \frac{\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+ix\right)\right|^2}{x^z} \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty} \left(\frac{z}{\sigma_1} \Gamma\left(\frac{z}{\sigma_1}\right) \left(\frac{y}{x}\right)^z dz \right) \right) dx$$

$$= \int_1^\infty \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+ix\right)\right|^2 x^{-s} \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty} \frac{z}{\sigma_1} \Gamma\left(\frac{z}{\sigma_1}\right) \left(\frac{x}{y}\right)^{-z} dz \right) dx =$$

$$= \int_1^\infty \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+ix\right)\right|^2 x^{-s} \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty} z\Gamma(z) \left(\left(\frac{x}{y}\right)^{\sigma_1}\right)^{-z} dz \right) dx =$$

$$= \int_1^\infty \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+ix\right)\right|^2 x^{-s} x^{-s} \exp\left\{ - \left(\frac{x}{y}\right)^\sigma \right\} dx =$$

$$= \int_1^\infty \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+ix\right)\right|^2 v(x,y) x^{-s} dx.$$

Iš čia, (12) ir integralo

$$\int_1^\infty \frac{a_y(x)dx}{x^s}$$

absoliutaus konvergavimo matome, kad integralas

$$\mathcal{Z}_{1,y}(s) = \int_1^\infty \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+ix\right)\right|^2 v(x,y) x^{-s} dx$$

konverguoja absoliučiai, kai $\sigma > \frac{1}{2}$.

3.1 teorema. *Tarkime, kad $\sigma > \frac{1}{2}$. Tuomet*

$$\lim_{y\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T |\mathcal{Z}_1(\sigma+it) - \mathcal{Z}_{1,y}(\sigma+it)| dt = 0.$$

Įrodymas. Naudosime funkcijos $\mathcal{Z}_{1,y}(s)$ išraišką, duotą (12) formule. Šioje formulėje integravimo tiesę stumiame į kairę, kad praeitume tašką $z = 0$. Tegul $\frac{1}{2} < \sigma_2 < \sigma$. Tuomet iš reziduumų teoremos ir (12) formulės gauname

$$\mathcal{Z}_{1,y}(s) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma_2-\sigma-i\infty}^{\sigma_2+\sigma-i\infty} \mathcal{Z}_1(s+z) l_y(z) \frac{dz}{z} + \mathcal{Z}_1(s) + Rez_{z=1-s} \mathcal{Z}_1(s+z) l_y(z) z^{-1}.$$

Iš čia randame, kad

$$\mathcal{Z}_1(\sigma+it)-\mathcal{Z}(\sigma+it)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_2-\sigma-i\infty}^{\sigma_2-\sigma+i\infty}\mathcal{Z}_1(s+z)l_y(z)\frac{dz}{z}-R(\sigma+it),$$

čia

$$R(s)=Rez_{z=1-s}\mathcal{Z}_1(s+z)l_y(z)z^{-1}.$$

Todėl po elementariųjų pertvarkymų randame, kad

$$\mathcal{Z}_1(\sigma+it)-\mathcal{Z}_{1,y}(\sigma+it)\ll$$
$$\ll\int_{-\infty}^{\infty}|\mathcal{Z}_1(\sigma_2+it+i\tau)||l_y(\sigma_2-\sigma+i\tau)|d\tau+|R(\sigma+it)|. \quad (13)$$

Kadangi į funkciją $l_y(s)$ įeina gama funkcija $\Gamma(s)$, o jai galioja įvertis

$$\Gamma(s)\ll e^{-c|t|},\quad c>0,$$

tai

$$\frac{1}{T}\int_0^T|R(\sigma+it)|dt=o(1),\quad T\to\infty.$$

Sugrįžę prie (13) formulės, iš čia turime, kad, kai $T\to\infty$,

$$\frac{1}{T}\int_0^T\left|\mathcal{Z}_1\left(\sigma+it\right)-\mathcal{Z}_{1,y}\left(\sigma+it\right)\right|dt\ll$$
$$\ll\int_{-\infty}^{\infty}\left|l_y\left(\sigma_2-\sigma+i\tau\right)\right|\left(\frac{1}{T}\int\limits_{-|\tau|}^{|\tau|+T}|\mathcal{Z}_1(\sigma+it)|dt\right)d\tau+o(1). \quad (14)$$

Iš įvade minėto funkcijos $\mathcal{Z}_1(\sigma+it)$ modulio kvadrato vidurkio įverčio gauname, kad srityje $\sigma>\frac{1}{2}$

$$\int_0^T|\mathcal{Z}_1(\sigma+it)|^2dt\ll T.$$

Iš čia ir Koši nelygybės išplaukia, kad

$$\int_0^T\left|\mathcal{Z}_1\left(\sigma_2+it\right)\right|dt\le\left(\int_0^T dt\int_0^T\left|\mathcal{Z}_1\left(\sigma_2+it\right)\right|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\ll\sqrt{T}\sqrt{T}=T.$$

Įstatę šį įvertį į (14), randame, kad

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{T}\int_0^T |\mathcal{Z}_1(\sigma+it)-\mathcal{Z}_{1,y}(\sigma+it)|dt \ll \\
&\ll \int_{-\infty}^{\infty}\left|l_y\left(\sigma_2-\sigma+it\right)\right|\frac{T+2|\tau|}{T}dt+o(1) \ll \\
&\ll \int_{-\infty}^{\infty}|l_y(\sigma_2-\sigma+it)|(1+|t|)dt+o(1).
\end{aligned} \tag{15}$$

Kadangi $\sigma_2-\sigma<0$, tai iš funkcijos $l_y(s)$ apibrėžimo išplaukia, kad

$$\lim_{y\to\infty}|l_y(\sigma_2-\sigma+it)|=0.$$

Todėl

$$\lim_{y\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|l_y(\sigma_2-\sigma+it)|(1+|t|)dt=0.$$

Iš čia ir (15) randame, kad

$$\lim_{y\to\infty}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T |\mathcal{Z}_1(\sigma+it)-\mathcal{Z}_{1,y}(\sigma+it)|dt \ll$$

$$\ll \lim_{y\to\infty}|l_y(\sigma_2-\sigma+it)(1+|t|)|dt=0.$$

Teorema įrodyta.

4. Ribinė teorema funkcijai $\mathcal{Z}_{1,y}(S)$

Šiame skyrelyje nagrinėsime tikimybinio mato

$$P_{T,\sigma,y}(A) \stackrel{def}{=} \frac{1}{T} meas\{t \in [0,T] : \mathcal{Z}_{1,y}(\sigma + it) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

silpnąjį konvergavimą, kai $T \to \infty$.

4.1 teorema. *Tarkime, kad $\sigma > \frac{1}{2}$. Tuomet erdvėje $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ egzistuoja toks tikimybinis matas $P_{\sigma,y}$, į kurį, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja tikimybinis matas $P_{T,\sigma,y}$.*

Įrodymas. Naudosime tą pačią schemą kaip ir 2.2 teoremos įrodyme. Pagal 2.2 teoremą tikimybinis matas $P_{T,\sigma,a,y}$, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į matą $P_{\sigma,a,y}$. Įrodysime, kad tikimybinių matų šeima $\{P_{\sigma,a,y}\}$ su kiekvienu fiksuotu y yra suspausta. Apibrėžiame

$$X_{T,a,y}(\sigma) = \mathcal{Z}_{1,a,y}(\sigma + i\theta_T),$$

čia θ_T yra toks pats atsitiktinis dydis kaip ir 2.2 teoremos įrodyme. Tegul $X_{a,y}(\sigma)$ yra kompleksinis atsitiktinis dydis, turintis pasiskirstymą $P_{\sigma,a,y}$. Tuomet iš 2.2 teoremos turime, kad

$$X_{T,a,y}(\sigma) \xrightarrow[T\to\infty]{\mathcal{D}} X_{a,y}(\sigma). \tag{16}$$

Imame bet kokį skaičių $M > 0$. Tuomet iš Čebyševo nelygybės išplaukia, kad

$$P(X_{T,a,y}(\sigma) \geq M) \leq \frac{1}{TM} \int_0^T |\mathcal{Z}_{1,a,y}(\sigma + it)| dt. \tag{17}$$

Jau 3.1 skyrelyje matėme, kad integralas, apibrėžiantis funkciją $\mathcal{Z}_{1,y}(S)$, konverguoja absoliučiai pusplokštumėje $\sigma > \frac{1}{2}$. Todėl

$$\sup_{a\geq 1} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T |\mathcal{Z}_{1,a,y}(\sigma + it)| dt \leq R < \infty. \tag{18}$$

Dabar tegul $M = M(\varepsilon) = R\varepsilon^{-1}$, o $\varepsilon > 0$ yra bet koks skaičius. Tuomet iš (17) ir (18) gauname, kad

$$\limsup_{T\to\infty} P(|X_{T,a,y}(\sigma)| > M(\varepsilon)) \le \frac{R}{M(\varepsilon)} = \frac{R}{R\varepsilon^{-1}} = \varepsilon. \tag{19}$$

Iš (16) sąryšio išplaukia sąryšis

$$|X_{T,a,y}(\sigma)| \xrightarrow[T\to\infty]{\mathcal{D}} |X_{a,y}(\sigma)|.$$

Todėl (19) nelygybė leidžia tvirtinti, kad

$$P(|X_{a,y}(\sigma)| > M(\varepsilon)) \le \varepsilon. \tag{20}$$

Apibrėžiame aibę $K_\varepsilon = \{s \in \mathbb{C} : |s| \le M(\varepsilon)\}$. Kadangi ši aibė yra aprėžta ir uždara, tai ji yra kompaktinė. Be to, iš (20) turime, kad su visais $a > 1$ yra teisinga nelygybė

$$P(X_{a,y}(\sigma) \in K_\varepsilon) \ge 1 - \varepsilon.$$

Pastaroji nelygybė ir atsitiktinio dydžio $X_{a,y}(\sigma)$ apibrėžimas su visais $a > 1$ duoda nelygybę

$$P_{\sigma,a,y}(K_\varepsilon) \ge 1 - \varepsilon.$$

Tai reiškia, kad matų šeima $\{P_{\sigma,a,y}\}$ yra suspausta. Todėl pagal Prochorovo teoremą ji yra realiatyviai kompaktinė. Vadinasi, egzistuoja toks posekis $\{P_{\sigma,a_k,y}\} \subset \{P_{\sigma,a,y}\}$, kad matas $P_{\sigma,a_k,y}$, kai $k \to \infty$, silpnai konverguoja į kurį nors matą $P_{\sigma,y}$ erdvėje $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$. Kitais žodžiais šį faktą galima užrašyti taip

$$X_{a_k,y}(\sigma) \xrightarrow[k\to\infty]{\mathcal{D}} P_{\sigma,y}. \tag{21}$$

Iš funkcijų $\mathcal{Z}_{1,a,y}(s)$ ir $\mathcal{Z}_{1,y}(s)$ apibrėžimų matome, kad srityje $\sigma > \frac{1}{2}$

$$\lim_{a\to\infty} \mathcal{Z}_{1,a,y}(s) = \mathcal{Z}_{1,y}(s).$$

Todėl šioje srityje su kiekvienu $\varepsilon > 0$

$$\lim_{a\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\{t \in [0,T] : |\mathcal{Z}_{1,a,y}(\sigma + it) - \mathcal{Z}_{1,y}(\sigma + it)| \geq \varepsilon\} \leq$$

$$\leq \lim_{a\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{\varepsilon T} \int_0^T |\mathcal{Z}_{1,a,y}(\sigma + it) - \mathcal{Z}_{1,y}(\sigma + it)| dt = 0.$$

Pažymėję $X_{T,y}(\sigma) = \mathcal{Z}_{1,y}(\sigma + i\theta_T)$, iš čia randame, kad

$$\lim_{a\to\infty} \limsup_{T\to\infty} P\left(|X_{T,a,y}(\sigma) - X_{T,a}(\sigma)| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

Iš čia (16), (21) ir 4.1 teoremos iš [1] gauname, kad

$$X_{T,y} \xrightarrow[T\to\infty]{\mathcal{D}} P_{\sigma,y},$$

o tai yra ekvivalentu teoremos tvirtinimui.

5. Pagrindinė teorema

Remdamiesi ankstesnių skyrelių rezultatais, šiame skyrelyje įrodysime pagrindinę magistro darbo teoremą apie funkcijos $\mathcal{Z}_1(s)$ ribinio pasiskirstymo egzistavimą.

5.1 teorema. *Tarkime, kad* $\sigma > \frac{1}{2}$. *Tuomet erdvėje* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ *egzistuoja toks tikimybinis matas* P_σ, *į kurį, kai* $T \to \infty$, *silpnai konverguoja tikimybinis matas*

$$P_{T,\sigma}(A) \stackrel{def}{=} \frac{1}{T} meas\{t \in [0,T] : \mathcal{Z}_1(\sigma + it) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}).$$

Įrodymas. Panašiai 4.1 teoremos įrodymui pirmiausia įrodysime, kad tikimybinių matų šeima $\{P_{\sigma,y}\}$ yra suspausta. Čia $P_{\sigma,y}$ yra ribinis matas 4.1 teoremoje. Naudosime tuos pačius žymenis kaip ir 4 skyrelyje.

Iš 4.1 teoremos turime, kad

$$X_{T,y}(\sigma) \xrightarrow[T\to\infty]{\mathcal{D}} X_y(\sigma), \tag{22}$$

čia $X_y(\sigma)$ yra kompleksinis atsitiktinis dydis, turintis pasiskirstymą $P_{\sigma,y}$. Kadangi integralas, apibrėžiantis funkciją $\mathcal{Z}_{1,y}(s)$, absoliučiai konverguoja srityje $\sigma > \frac{1}{2}$, tai

$$\sup_{y\geq 1} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T |\mathcal{Z}_{1,y}(\sigma + it)| dt \leq$$

$$\leq \sup_{y\geq 1} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left(\int_0^T |\mathcal{Z}_{1,y}(\sigma + it)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq R < \infty.$$

Tegul $\varepsilon > 0$ yra bet koks skaičius. Tuomet paėmę $M = M(\varepsilon) = R\varepsilon^{-1}$ analogiškai 4.1 teoremos įrodymui gauname, kad

$$\limsup_{T\to\infty} P(|X_{T,y(\sigma)}| > M) \leq \varepsilon.$$

Iš čia išplaukia, kad su visais $y > 1$

$$P_{\sigma,y}(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon.$$

Tai reiškia, kad matų šeima $\{P_{\sigma,y}\}$ yra suspausta. Todėl ji yra realiatyviai kompaktinė. Egzistuoja toks posekis $\{P_{\sigma,y_k}\} \subset \{P_{\sigma,y}\}$, kad P_{σ,y_k} , kai $k \to \infty$, silpnai konverguoja į kurį nors matą P_σ erdvėje $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$. Šis tvirtinimas yra ekvivalentus sąryšiui

$$X_{y_k}(\sigma) \xrightarrow[k\to\infty]{\mathcal{D}} P_\sigma. \tag{23}$$

Tegul $X_T(\sigma) = \mathcal{Z}_1(\sigma + i\theta_T)$. Iš 3.1 teoremos išplaukia, kad

$$\lim_{y\to\infty} \limsup_{T\to\infty} P(|X_{T,y}(\sigma) - X_T(\sigma)| \geq \varepsilon) =$$

$$= \lim_{y\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\,\{t \in [0,T] : |\mathcal{Z}_1(\sigma+it) - \mathcal{Z}_{1,y}(\sigma+it)| \geq \varepsilon\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{T\varepsilon} \int_0^T |\mathcal{Z}_1(\sigma+it) - Z_{1,y}(\sigma+it)|dt = 0.$$

Iš čia, (22), (23) ir iš 4.2 teoremos iš [1] gauname, kad

$$X_T(\sigma) \xrightarrow[T\to\infty]{\mathcal{D}} P_\sigma.$$

Iš atsitiktinio dydžio $X_T(\sigma)$ apibrėžimo išplaukia, kad pastarasis sąryšis yra ekvivalentus mato

$$\frac{1}{T} meas\{t \in [0,T] : \mathcal{Z}_1(\sigma+it) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

kai $T \to \infty$, silpnajam konvergavimui į matą P_σ.

Teorema įrodyta.

Literatūra

1. P. Billingsley, Convergence of probability measures, New York: John Wiley, 1968.

2. H. Bohr, B. Jessen, Über die Wertverteilung der Riemannschen Zetafunktion, Erste Mitteilung // Acta Math. 1930 V. 54. P. 1-35.

3. H. Bohr, B. Jessen, Über die Wertverteilung der Riemannschen Zetafunktion, Zweite Mitteilung // Acta Math. 1932 V. 58. P. 1-55.

4. A. Ivič,On some conjectures and results for the Riemann zeta-function and Hecke series // Acta Arith. 2001. V. 99. P. 115-145.

5. A. Ivič, On estimation of some Mellin transforms connected with the fourth moment of $|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)|$ // W. Schwarz, J. Steuding (eds.). Proc. ELAZ-Conference, 2004. Stuttgart: Franz Steiner Verl., 2006. P. 77-88.

6. A.Ivič, M. Jutila, Y. Motohashi, The Mellin transform of powers of the zeta-function // Acta Arith. 2002. V. 95. P. 305-342.

7. M. Jutila, The Mellin transform of the fourth power of Riemann's zeta-function // Proc. conf. analytic number theory with special emphasis on L-functions. Inst. Math. Sci., Chennai, India, 2004. P. 15-29.

8. M. Lukkarinen, The Mellin transform of the square of Riemann's zeta-function and Atkinson's formula: Dissertation. Univ. of Turku, 2004.

9. Y. Motohashi, Spectral theory of the Riemann zeta-function. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997.

10. V. Paulauskas, A. Račkauskas, Funkcinė analizė // Vaistų žinios, Vilnius, 2007.

11. E. C. Titchmarsh, The Theory of the Riemann Zeta Function // second edition revised by D. R. Heath-Brown, Oxford University Press, 1986.

Santrauka

Ribinė teorema Rymano dzeta funkcijos Melino transformacijai

Tegul $\zeta(s)$, $s=\sigma+it$, yra Rymano dzeta funkscija pusplokštumėje $\sigma>1$, apibrėžiama Dirihlė eilute

$$\zeta(s)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^s},$$

ir analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą.

Apibrėžkime modifikuotą Rymano dzeta funkcijos Melino transformacija

$$\mathcal{Z}_1(s)=\int_1^{\infty}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+ix\right)\right|^2 x^{-s}dx.$$

Pagrindinis magistro darbo rezultatas yra šis.

Tarkime, kad $\sigma>\frac{1}{2}$. Tada erdvėje $(\mathbb{C},\mathcal{B}(\mathbb{C}))$, egzistuoja tikimybinis matas P_σ toks, kad matas

$$\frac{1}{T}meas\{t\in[0,T]:\mathcal{Z}_1(\sigma+it)\in A\},\quad A\in\mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

silpnai konverguoja į P_σ, kai $T\to\infty$.

Čia $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ yra kompleksinės plokštumos $\mathbb{C}$ Borelio aibių klasė, o $meas\{A\}$ mačiosios aibės $A\subset\mathbb{R}$ Lebego matas.

Summary

A limit theorem for the Mellin transform of the Riemann zeta-function

Let $\zeta(s)$, $s = \sigma + it$, be the Riemann zeta-function defined, for $\sigma > 1$, by

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s},$$

and by analytic continuation elsewhere. We consider the modified Mellin transform

$$\mathcal{Z}_1(s) = \int_1^{\infty} \left|\zeta\left(\frac{1}{2} + ix\right)\right|^2 x^{-s} dx.$$

The main result of the master work is the following statement.

Suppose that $\sigma > \frac{1}{2}$. Then on $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$, there exists a probalilety measure P_σ suck that the measure

$$\frac{1}{T} meas\{t \in [0, T] : \mathcal{Z}_1(\sigma + it) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

converges weakly to P_σ as $T \to \infty$.

There $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ denotes the class of Borel sets of the complex plane $\mathbb{C}$, and meas $\{A\}$ stands for the Lebesgue measure of a measurable set $A \subset \mathbb{R}$.