ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATIKOS KATEDRA

Eglė Kilčiauskienė

Diskretus Oilerio sandaugų reikšmių pasiskirstymas kompleksinėje plokštumoje

Magistro darbas

Darbo vadovė
prof. dr. R. Kačinskaitė

Šiauliai, 2011

TURINYS

1. Įvadas

Dzeta funkcijomis yra vadinamos kompleksinio kintamojo $s = \sigma + it$ funkcijos tam tikroje pusplokštumėje apibrėžiamos Dirichlė eilutėmis. Kai kurios iš šių funkcijų gali būti išreiškiamos Oilerio sandauga. Pavyzdžiui: Rymano dzeta funkcija, Dirichlė L-funkcijos ir pan. Dzeta funkcijos analizinėje skaičių teorijoje atlieka svarbų vaidmenį.

Priminsime, kad viena iš svarbiausių ir žinomiausių dzeta funkcijų yra Rymano dzeta funkcija. Ji pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama taip:

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \quad p - \text{pirminis}$$

ir analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą. $\zeta(s)$ yra meromorfinė funkcija, taške $s = 1$ turi paprastąjį polių su reziduumu 1.

Dzeta funkcijų reikšmių pasiskirstymas yra pakankamai sudėtingas, tačiau tyrimui gali būti taikomi tikimybiniai metodai. Sprendžiama tokia problema: duota tam tikra aibė, kaip dažnai dzeta funkcijų reikšmės į ją patenka? Ši idėja priklauso H. Borui (Bohr), o pirmieji rezultatai gauti 1930 metais H. Boro ir B. Jeseno (Jessen) [2].

Tarkime, kad R yra uždaras kompleksinės plokštumos stačiakampis su kraštinėmis lygiagrečiomis koordinačių ašims. Tegul $L(T, R)$ yra aibės $\{t \in [0, T] : \log \zeta(\sigma + it) \in R\}$ Žordano matas.

A teorema ([2])**.** *Kai $\sigma > 1$, egzistuoja riba*

$$\lim_{T \to \infty} \frac{L(T, R)}{T} = W(R, \sigma),$$

kuri priklauso tik nuo σ ir R.

Daugelis matematikų pagerino ir apibendrino Boro-Jeseno tipo rezultatus. Iš jų galima paminėti B. Bagči (Bagchi), V. Boršeniusą (Borchsenius), D. Džoinerį (Joiner), P. D. T. A. Eliotą (Elliott), A. Gošą (Ghosh), K. Macumoto (Matsumoto), J. Štoidingą (Steuding), A. Vintnerį (Wintner) ir kitus. Dzeta funkcijų reikšmių pasiskirstymo tyrime dirba ir grupė lietuvių matematikų. Tai V. Garbaliauskienė, R. Garunkštis, J. Genys, R. Kačinskaitė, A. Laurinčikas, R. Macaitienė, E. Stankus, D. Šiaučiūnas, R. Štoiding ir kiti.

Boro-Jeseno tipo rezultatus galima užrašyti silpno tikimybinių matų konvergavimo terminais. $\mathfrak{B}(S)$ pažymėkime erdvės S Borelio aibių klasę ir tegul P_n bei P yra tikimybiniai matai $(S, \mathfrak{B}(S))$ erdvėje. Tada sakome, kad P_n silpnai konverguoja į P, kai $n \to \infty$, jei

$$\lim_{n\to\infty} \int_S f dP_n = \int_S f dP$$

kiekvienai realiai tolydžiai aprėžtai erdvės S funkcijai f.

Tegul

$$\nu_T(...) = \frac{1}{T} meas\{t \in [0, T] : ...\}, \quad T > 0;$$

čia vietoj daugtaškio įrašomos sąlygos, kurias tenkina t, o $meas\{A\}$ yra mačios aibės $A \subset \mathbb{R}$ Lebego matas. Tada Boro-Jeseno tipo rezultatą kompleksinėje plokštumoje $\mathbb{C}$ galima suformuluoti taip.

B teorema ([6]). *Tegul $\sigma > \frac{1}{2}$ yra fiksuotas. Tada $(\mathbb{C}, \mathfrak{B}(\mathbb{C}))$ erdvėje egzistuoja tikimybinis matas P_σ toks, kad matas, kai $T \to \infty$,*

$$\nu_T\{t \in [0, T] : \zeta(\sigma + it) \in A\}, \quad A \in \mathfrak{B}(\mathbb{C}),$$

silpnai konverguoja į P_σ.

Tolydžią ribinę teoremą silpno tikimybinių matų konvergavimo prasme Oilerio sandaugoms kompleksinėje plokštumoje įrodė J. Rašytė [8].

Oilerio sandaugos $L(s)$ yra apibrėžiamos taip

$$L(s) = e^{i\psi} \prod_p \frac{1}{(1 - \alpha_{1p} p^{-s})...(1 - \alpha_{dp} p^{-s})};$$

čia α_{jp} yra kompleksiniai skaičiai, $1 \le j \le d$, $d \in \mathbb{N}$, $d \ge 1$, $\psi \in \mathbb{R}$. Yra reikalaujama [3] straipsnyje, kad funkcija $L(s)$ tenkintų šias hipotezes.

1. Kiekvienam fiksuotam $\theta \in [0; \frac{1}{2})$

$$|\alpha_{jp}| \le p^\theta, \quad j = 1, ..., d.$$

2. Kiekvienam fiksuotam $\epsilon > 0$ teisingas įvertis

$$\sum_{p \le x} \sum_{j=1}^{d} |\alpha_{jp}|^2 = B(x^{1+\epsilon}).$$

3. Funkcija $L(s)$ yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą $\mathbb{C}$ kaip baigtinės eilės meromorfinė funkcija su baigtiniu skaičiumi polių tiesėje $\sigma = 1$. Oilerio sandaugos tenkina funkcinę lygtį

$$G(s)L(s) = \overline{G(\overline{1-s})} \cdot \overline{L(\overline{1-s})}.$$

Čia $G(s) = Q^s \prod_{h=1}^{m} \Gamma(\lambda_h s + \mu_h)$ su $Q > 0$, $\lambda_h > 0$, $\mathrm{Re}\mu_h \geq 0$, o $\Gamma(m)$ yra gama funkcija. Funkcija $L(s)$ yra holomorfinė, išskyrus baigtinį skaičių polių tiesėje $\sigma = 1$. Funkcinė lygtis yra normuojama taip, kad turėtų šaknį 1, o tai reiškia, kad $G(s)L(s)$ yra reali funkcija tiesėje $\sigma = \frac{1}{2}$. To reikia, nes Oilerio sandaugos apibrėžime yra daugiklis $e^{i\psi}$ [3].

4. Oilerio sandaugos $L(s)$ gali būti išreikštos Dirichlė eilutėmis

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b(n)}{n^s}, \tag{1}$$

kai koeficientai $b(n)$ tenkina lygybę

$$\sum_{p \leq x} \frac{b_n(p)\overline{b_k(p)}}{p} = \delta_{jk}\eta_j \log\log x + c_{jk} + B\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

su tam tikromis teigiamomis konstantomis $\eta_1, ..., \eta_N$ ir $x \geq 2$.

Iš 1–3 hipotezių seka, kad pusplokštumėje $\sigma > \theta + \frac{1}{2}$ funkcija $L(s)$ tenkina šias augimo sąlygas:

$$L(\sigma + it) = B|t|^2 \tag{2}$$

ir tam tikriems $\delta > 0$

$$\int_0^T |L(\sigma + it)|^2 dt = BT, \quad T \to \infty. \tag{3}$$

Mūsų magistro darbo tikslas įrodyti diskrečią ribinę teoremą Oilerio sandaugoms kompleksinėje plokštumoje, t. y. mes nagrinėsime šią funkciją, kai kompleksinio kintamojo menamoji dalis įgyja reikšmes iš tam tikros aritmetinės progresijos.

Tegul h yra teigiamas realus skaičius ir $N \in \mathbb{N}$. Pažymėkime

$$\mu_N(...) = \frac{1}{N+1}\sharp\{0 \leq k \leq N, ...\};$$

čia vietoje daugtaškio rašomos sąlygos, kurias tenkina k.

Kompleksinėje plokštumoje $\mathbb{C}$ vienetinį apskritimą pažymėkime γ, t. y. $\gamma = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$. Apibrėžiame begaliniamatį torą

$$\Omega = \prod_p \gamma_p;$$

čia $\gamma_p = \gamma$ visiems pirminiams p. Su sandaugos topologija ir pataškine daugyba toras Ω yra kompaktiška topologinė Abelio grupė. Todėl erdvėje $(\Omega, \mathfrak{B}(\Omega))$ galima apibrėžti tikimybinį Haro matą m_H, taip gaunant tikimybinę erdvę $(\Omega, \mathfrak{B}(\Omega), m_H)$. Tegul $\omega(p)$ yra $\omega \in \Omega$ projekcija į koordinatinę erdvę γ_p. Tuomet formule

$$\omega(m) = \prod_{p^\alpha \| m} \omega^\alpha(p)$$

funkciją $\omega(p)$ pratęsiame į natūraliųjų skaičių aibę $\mathbb{N}$; čia $p^\alpha \| m$ žymi, kad $p^\alpha | m$, bet $p^{\alpha+1} \nmid m$.

Pusplokštumėje $\sigma > \theta + 1$ (pagal 4 hipotezę) funkcija $L(s)$ gali būti išreikšta (1) absoliučiai konverguojančia Dirichlė eilute.

Kai $\sigma > \frac{1}{2}$, tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathfrak{B}(\Omega), m_H)$ apibrėžkime kompleksines reikšmes įgyjantį atsitiktinį elementą $L(\sigma, \omega)$ formule

$$L(\sigma, \omega) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b(m)\omega(k)}{m^\sigma} = \prod_{m=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{d} \left(1 - \frac{\alpha_{jp}\omega(p_m)}{p_m^\sigma}\right)^{-1}, \quad \omega \in \Omega. \tag{4}$$

Jo skirstinį pažymėkime P_L^h, t. y.

$$P_L^h(A) = m_H(\omega \in \Omega : L(\sigma, \omega) \in A), \quad A \in \mathfrak{B}(\mathbb{C}). \tag{5}$$

Tada pagrindinis mūsų darbo rezultatas yra tokia teorema.

Teorema. *Tarkime, kad Oilerio sandaugos $L(s)$ tenkina* 1–4 *hipotezes, o $h > 0$ yra fiksuotas skaičius toks, kad $\exp\{\frac{2\pi k}{h}\}$ būtų iracionalus su visais sveikaisiais $k \neq 0$. Tada pusplokštumėje $\sigma > \theta + \frac{1}{2}$, kai $N \to \infty$, tikimybinis matas*

$$P_N(A) = \frac{1}{N+1} \sharp\{0 \le k \le N : L(\sigma + ikh) \in A\}, \quad A \in \mathfrak{B}(\mathbb{C}),$$

silpnai konverguoja į matą P_L^h.

2. Diskreti ribinė teorema trigonometriniams polinomams

Pagrindiniam šio skyriaus teiginiui įrodyti, mums reikia tokių pagalbinių tvirtinimų.

Tegul γ yra vienetinis kompleksinės plokštumos apskritimas, o Q yra tikimybinis matas erdvėje $(\gamma^m, \mathfrak{B}(\gamma^m))$. Mato Q Furjė transformacija $g(k_1, ..., k_m)$ yra apibrėžiama lygybe

$$g(k_1, ..., k_m) = \int\limits_{\gamma^m} x_1^{k_1}...x_m^{k_m} dQ, \quad k_j \in \mathbb{Z}, \quad x_j \in \gamma, \quad j = 1, ..., m.$$

1 lema. *Tarkime Q_n yra tikimybinių matų erdvėje $(\gamma^m, \mathfrak{B}(\gamma^m))$ seka, o atitinkama jų Furje transformacijų seka $\{g_n(k_1, ..., k_m)\}$. Tegul kiekvienai sveikųjų skaičių aibei $(k_1, ..., k_m)$ egzistuoja riba*

$$g(k_1, ..., k_m) = \lim_{n \to \infty} g_n(k_1, ..., k_m).$$

Tada erdvėje $(\gamma^m, \mathfrak{B}(\gamma^m))$ egzistuoja tikimybinis matas Q toks, kad, kai $n \to \infty$, Q_n silpnai konverguoja į Q. Dar daugiau, $g(k_1, ..., k_m)$ yra mato Q Furjė transformacija.
Įrodymas. Tai tikimybinių matų kompaktiškose Abelio grupėse tolydumo teorema, o jos įrodymą galima rasti [5]. ▲

Tarkime, kad $u : S \to S_1$ yra mati funkcija. Tada kiekvienas tikimybinis matas P iš erdvės $(S, \mathfrak{B}(S))$ erdvėje $(S_1, \mathfrak{B}(S_1))$ indukuoja vienintelį tikimybinį matą Pu^{-1} apibrėžiamą lygybe

$$Pu^{-1}(A) = P(u^{-1}A), \quad A \in \mathfrak{B}(S_1).$$

2 lema. *Tarkime, kad $u : S \to S_1$ yra tolydi funkcija. Tada iš matų P_n silpno konvergavimo į P seka, kad $P_n u^{-1}$ silpnai konverguoja į Pu^{-1}, kai $n \to \infty$.*
Įrodymas. Tai 5.1 teorema iš [1]. ▲

Tarkime, kad

$$p_n(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k k^{-it}, \quad a_m \in \mathbb{C}$$

yra trigonometrinis polinomas. Erdvėje $(\mathbb{C}, \mathfrak{B}(\mathbb{C}))$ apibrėžkime tikimybinį matą

$$P_{N,p_n}(A) = \mu_N(p_n(mh) \in A), \quad A \in \mathfrak{B}(\mathbb{C}).$$

Nagrinėsime šio mato silpną konvergavimą, kai $N \to \infty$.

3 lema. *Erdvėje* $(\mathbb{C}, \mathfrak{B}(\mathbb{C}))$ *egzistuoja tikimybinis matas* P_{p_n} *toks, kad matas* P_{N,p_n}*, kai* $N \to \infty$*, silpnai konverguoja į* P_{p_n}.

Įrodymas. Tarkime, kad $p_1, p_2, ..., p_r$ yra skirtingi pirminiai skaičiai, kurie dalija $\prod\limits_{\substack{k=1\\ a_k\neq 0}}^{n} k$. Tegul Ω_n yra vienetinių apskritimų $\gamma_{pj} = \gamma$ sandauga visiems $j = 1, ..., n$, t. y.

$$\Omega_n = \prod_{j=1}^{n} \gamma_{pj}.$$

Apibrėžkime funkciją $u : \Omega_n \to \mathbb{C}$ formule

$$u(x_1, ..., x_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^\sigma} \left(\prod_{\substack{p_j^{\alpha_j} \nmid k,\\ j\leq n}} x_j^{\alpha_j} \right)^{-1}, \quad (x_1, ..., x_n) \in \Omega_n.$$

Tore Ω_n funkcija u yra tolydi ir

$$p_n(mh) = u(p_1^{imh}, ..., p_n^{imh}). \tag{6}$$

Sudarykime tikimybinį matą

$$Q_N(A) = \mu_N((p_1^{imh}, ..., p_n^{imh}) \in A), \quad A \in \mathfrak{B}(\Omega_n).$$

Mato Q_N Furjė transformacija $g_N(k_1, ..., k_n), k_j \in \mathbb{Z}, j = 1, ..., n$ yra apibrėžiama lygybe

$$g_N(k_1, ..., k_n) = \frac{1}{N+1} \sum_{m=0}^{N} \prod_{j=1}^{n} p_j^{imhk_j} = \frac{1}{N+1} \sum_{m=0}^{N} \exp\left\{ imh \sum_{j=1}^{n} k_j \log p_j \right\}.$$

Pirminių skaičių logaritmai virš racionaliųjų skaičių kūno yra tiesiškai nepriklausomi. Be to sandauga

$$\prod_{j=1}^{n} p_j^{k_j} = \exp\left\{ \sum_{j=1}^{n} k_j \log p_j \right\}$$

yra racionalus skaičius, o pagal pagrindinės teoremos (Teoremos) sąlygą $\exp\{\frac{2\pi k}{h}\}$ yra iracionalus skaičius su visais $k \neq 0$. Todėl turime

$$g_N(k_1,...,k_n) = \begin{cases} 1, & \text{kai} \quad (k_1,...,k_n) = (0,...,0), \\ \frac{1}{N+1}\frac{1-\exp\left\{i(N+1)h\sum\limits_{j=1}^{n}k_j\log p_j\right\}}{1-\exp\left\{ih\sum\limits_{j=1}^{n}k_j\log p_j\right\}}, & \text{kai} \quad (k_1,...,k_n) \neq (0,...,0). \end{cases}$$

Iš čia

$$g_N(k_1,...,k_n) \to \begin{cases} 1, & \text{kai} \quad (k_1,...,k_n) = (0,...,0), \\ 0, & \text{kai} \quad (k_1,...,k_n) \neq (0,...,0). \end{cases}$$

Tada pagal 1 lemą matas Q_N, kai $N \to \infty$, silpnai konverguoja į Haro matą m_{nH} erdvėje $(\Omega_n, \mathfrak{B}(\Omega_n))$. Atsižvelgiant į funkcijos u tolydumą ir (6) lygybę bei pritaikius 2 lemą gauname, kad matas P_{N,p_n}, kai $N \to \infty$ silpnai konverguoja į matą $P_{p_n} = m_{rH}u^{-1}$. ▲

Tarkime, kad $g(k), k \in \mathbb{N}, |g(k)| = 1$ yra pilnai multiplikatyvi funkcija, t. y. $g(k_1,k_2) = g(k_1)g(k_2)$. Apibrėžkime

$$p_n(t,k) = \sum_{k=1}^{n} a_k g(k) k^{-it}$$

ir tikimybinį matą

$$\tilde{P}_{N,p_n}(A) = \mu_N(p_n(mh,g) \in A), \quad A \in \mathfrak{B}(\mathbb{C}).$$

4 lema. *Tikimybiniai matai P_{N,p_n} ir $\tilde{P}_{N,p_n}$ abu silpnai konverguoja į tą patį matą, kai $N \to \infty$.*

Įrodymas. Apibrėšime funkciją $u_1 : \Omega_n \to \Omega_n$ formule

$$u_1(x_1,...,x_n) = (x_1 e^{-i\theta_1},...,x_n e^{-i\theta_r}),$$

kur $\theta_j = \arg g(p_j), j = 1,...,n$. Pagal 3 lemą tikimybiniai matai P_{N,p_n}ir $\tilde{P}_{N,p_n}$ silpnai konverguoja į atitinkamus matus $m_{rH}u^{-1}$ ir $m_{rH}\tilde{u}^{-1}$, kai

$$\tilde{u}(x_1,...,x_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k g(k) \left(\prod_{\substack{p_j^{\alpha_j} \| k, \\ j \leq n}} x_j^{\alpha_j} \right)^{-1}, \quad (x_1,...,x_n) \in \Omega_n.$$

Vadinasi,

$$\tilde{u}(x_1, ..., x_n) = \sum_{k=1}^{n} a(k) \left(\prod_{\substack{p_j^{\alpha_j} \| k, \\ j \le n}} x_j^{\alpha_j} e^{-i\alpha_j\theta_j} \right)^{-1} = u(u_1(x_1, ..., x_n)).$$

Kadangi Haro matas tore Ω_n yra invariantiškas postūmių atžvilgiu, tai

$$m_{nH}\tilde{u}^{-1} = m_{nH}(u(u_1))^{-1} = (m_{nH}u_1^{-1})u^{-1} = m_{nH}u^{-1}.$$

▲

3. Diskreti ribinė teorema absoliučiai konverguojančioms Dirichlė eilutėms

Diskrečios ribinės teoremos absoliučiai konverguojančioms Dirichlė eilutėms įrodymui reikės šių gerai žinomų pagalbinių teiginių.

Sakome, kad tikimybinių matų šeima $\{P\}$ erdvėje $(S, \mathfrak{B}(S))$ yra reliatyviai kompaktiška, jei kiekvienoje elementų iš $\{P\}$ sekoje yra silpnai konverguojantis posekis. Šeima $\{P\}$ yra suspausta, jei kiekvienam pakankamai mažam $\epsilon > 0$ egzistuoja kompaktiška aibė K tokia, kad $P(K) > 1 - \epsilon$ su visais matais iš $\{P\}$.

5 lema. *Jei tikimybinių matų šeima $\{P\}$ yra suspausta, tai ji yra reliatyviai kompaktiška.*

Įrodymas. Ši lema - gerai žinoma Prochorovo teorema; jos įrodymą galima rasti [1]. ▲

6 lema. *Visiems teigiamiems a ir b teisinga lygybė*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b-i\infty}^{b+i\infty}\Gamma(s)a^{-s}ds = e^{-a}.$$

Įrodymas. Lemos įrodymą galima rasti [6]. ▲

Tegul $(S; \rho)$ yra separabili metrinė erdvė, o Y_n, X_{1n}, X_{2n} – s-reikšmiai atsitiktiniai elementai apibrėžti erdvėje $(\widehat{\Omega}, F, \mathbb{P})$.

7 lema. *Tegul $X_{kn} \xrightarrow{D} X_k$, kai $n \to \infty$, su kiekvienu k ir $X_k \xrightarrow{D} X$, kai $k \to \infty$. Jei kiekvienam pakankamai mažam $\epsilon > 0$*

$$\lim_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\mathbb{P}\{\rho(X_{kn}, Y_n) \geq \epsilon\} = 0,$$

tai $Y_n \xrightarrow{D} X$, kai $n \to \infty$.

Įrodymas. Šios teoremos įrodymą galima rasti [1]. ▲

8 lema. $L(\sigma, \omega)$ *yra kompleksines reikšmes įgyjantis atsitiktinis elementas apibrėžtas tikimybinėje erdvėje* $(\Omega, \mathfrak{B}(\Omega), m_H)$.

Įrodymas. Įrodymą galima rasti [8]. ▲

Imkime $\sigma_1 > \frac{1}{2}$. Tegul

$$L_n(s) = e^{i\psi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b(m)}{m^s} \exp\left\{ -\left(\frac{m}{n}\right)^{\sigma_1} \right\}.$$

Tačiau, kadangi galioja 3 hipotezė, daugiklį $e^{i\psi}$ galime parinkti taip, kad $|e^{i\psi}| = 1$. Todėl

$$L_n(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b(m)}{m^s} \exp\left\{ -\left(\frac{m}{n}\right)^{\sigma_1} \right\}$$

ir ši eilutė absoliučiai konverguoja pusplokštumėje $\sigma > \theta + \frac{1}{2}$.

Tegul

$$l_n(s) = \frac{s}{\sigma_1} \Gamma\left(\frac{s}{\sigma_1}\right) n^s$$

ir

$$a_n(m) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} \frac{l_n(s) ds}{s m^s}.$$

Akivaizdu, kad

$$a_n(m) = B m^{-\sigma_1} \int_{-\infty}^{\infty} |l_n(\sigma_1 + it)| dt = B m^{-\sigma_1}.$$

Vadinasi, eilutė

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{b(m) a_n(m)}{m^s}$$

absoliučiai konverguoja pusplokštumėje $\sigma > \theta + \frac{1}{2}$. Iš kitos pusės, kadangi teisingas 6 lemos tvirtinimas, tai

$$a_n(m) = \exp\left\{ -\left(\frac{m}{n}\right)^{\sigma_1} \right\}.$$

Tarkime, kad $\sigma > \theta + \frac{1}{2}$ ir

$$L(\sigma, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b(m)\omega(m)}{m^\sigma}.$$

8 lemoje buvo įrodyta, kad $L(\sigma, \omega)$ yra kompleksines reikšmes įgyjantis atsitiktinis elementas apibrėžtas tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathfrak{B}(\Omega), m_H)$.

Tegul

$$\tilde{L}(s, \omega) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b(m)\omega(m)}{m^s} \exp\left\{ -\left(\frac{m}{n}\right)^{\sigma_1} \right\}, \quad \omega \in \Omega.$$

Apibrėžkime du tikimybinius matus

$$P_{N,n}(A) = \mu_N(L_n(\sigma + imh) \in A), \quad A \in \mathfrak{B}(\mathbb{C})$$

ir

$$\tilde{P}_{N,n}(A) = \mu_N(L_n(\sigma + imh, \omega) \in A), \quad A \in \mathfrak{B}(\mathbb{C}).$$

9 lema. *Tegul $\sigma > \theta + \frac{1}{2}$. Tada erdvėje $(\mathbb{C}, \mathfrak{B}(\mathbb{C}))$ egzistuoja tikimybinis matas P_n toks, kad, kai $N \to \infty$, abu matai $P_{N,n}$ ir $\tilde{P}_{N,n}$ silpnai į jį konverguoja.*

Įrodymas. Tegul

$$L_{n,M}(s) = \sum_{m=1}^{M} \frac{b(m)}{m^s} \exp\left\{-\left(\frac{m}{n}\right)^{\sigma_1}\right\},$$

$$L_{n,M}(s,\omega) = \sum_{m=1}^{M} \frac{b(m)\omega(m)}{m^s} \exp\left\{-\left(\frac{m}{n}\right)^{\sigma_1}\right\}, \quad \omega \in \Omega.$$

Erdvėje $(\mathbb{C}, \mathfrak{B}(\mathbb{C}))$ apibrėžkime atitinkamus tikimybinius matus

$$P_{N,n,M}(A) = \mu_N(L_{n,M}(\sigma + imh) \in A)$$

ir

$$\tilde{P}_{N,n,M}(A) = \mu_N(L_{n,M}(\sigma + imh, \omega) \in A).$$

Remiantis 4 lema abu tikimybiniai matai $P_{N,n,M}$ ir $\tilde{P}_{N,n,M}$ silpnai konverguoja į tą patį tikimybinį matą $P_{n,M}$, kai $N \to \infty$.

Įrodysime, kad tikimybinių matų šeima $\{P_{n,M}\}$ yra suspausta tam tikram fiksuotam n.

Tarkime θ yra erdvės $(\Omega_0, B(\Omega_0), \mathbb{P})$ atsitiktinis elementas, įgyjantis reikšmes kh, $k = 0, 1, ..., N$, ir

$$\mathbb{P}(\theta = kh) = \frac{1}{N+1}, \quad k = 0, 1, ..., N.$$

Paimkime

$$X_{N,n,M}(\sigma) = L_{n,M}(\sigma + i\theta).$$

Tada, remiantis 3 lema, gauname

$$X_{N,n,M} \xrightarrow[N\to\infty]{D} X_{n,M}; \tag{7}$$

čia $X_{n,M}$ yra kompleksines reikšmes įgyjantis atsitiktinis elementas su skirstiniu $P_{n,M}$.

Iš Čebyševo nelygybės kiekvienam $K > 0$ turime

$$\mathbb{P}(|X_{N,nM}(\sigma)| > K) \leq \frac{1}{(N+1)K} \sum_{k=0}^{N} L_{n,M}(\sigma + ikh). \tag{8}$$

Kadangi pusplokštumėje $\sigma > \theta + \frac{1}{2}$ eiutė $L_{1,n}(s)$ konverguoja absoliučiai, tai egzistuoja skaičius R toks, kad

$$\sup_{M \geq 1} \limsup_{N \to \infty} \frac{1}{K(N+1)} \sum_{k=0}^{N} |L_{n,M}(\sigma + ikh)| \leq \frac{R}{K} < \infty. \tag{9}$$

Imkime bet kokį pakankamai mažą teigiamą skaičių ϵ ir $K = \frac{R}{\epsilon}$. Tada iš (8) ir (9) nelygybių gauname

$$\limsup_{N \to \infty} \mathbb{P}(|X_{N,n,M}(\sigma)| > K) \leq \epsilon. \tag{10}$$

Nagrinėsime funkciją $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, apibrėžtą formule

$$u(z) = |z|, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Akivaizdu, kad funkcija u yra tolydi ir iš (7) sąryšio bei 2 lemos turime

$$|X_{N,n,M}(\sigma)| \xrightarrow[N \to \infty]{D} |X_{n,M}(\sigma)|.$$

Pastarasis sąryšis ir (10) duoda, kad

$$\mathbb{P}(|X_{n,M}(\sigma)| > K) \leq \epsilon. \tag{11}$$

Aibę K_ϵ apibrėžkime tokiu būdu

$$K_\epsilon = \{s \in \mathbb{C} : |z| \leq K\}.$$

Tada K_ϵ yra kompaktiška aibė ir, atsižvelgiant į (11) nelygybę, visiems $M \geq 1$ gauname

$$\mathbb{P}(X_{n,M}(\sigma) \in K_\epsilon) \geq 1 - \epsilon.$$

Kadangi matas $P_{n,M}$ yra atsitiktinio elemento $X_{n,M}$ skirstinys, tai visiems $M \geq 1$

$$P_{n,M}(K_\epsilon) \geq 1 - \epsilon.$$

O tai reiškia, kad tikimybinių matų šeima $\{P_{n,M}\}$ yra suspausta, o pagal Prochorovo teoremą (5 lemą) ji yra reliatyviai kompaktiška.

Iš $L_{n,M}(s)$ ir $L_n(s)$ apibrėžimų puspokštumėje $\sigma > \theta + \frac{1}{2}$ gauname, kad

$$\lim_{M \to \infty} L_{n,M}(s) = L_n(s).$$

Iš tiesų, kiekvienam $\epsilon > 0$ randame

$$\begin{aligned}
&\lim_{M\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \mu_N(|L_{n,M}(\sigma+ikh) - L_n(\sigma+ikh)| \geq \epsilon) \\
&\leq \lim_{M\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{\varepsilon(N+1)} \sum_{k=0}^{N} |L_{n,M}(\sigma+ikh) - L_n(\sigma+ikh)| = 0. \qquad (12)
\end{aligned}$$

Dabar tarkime, kad

$$X_{N,n}(\sigma) = L_n(\sigma+i\theta).$$

Atsižvelgiant į (12) sąryšį,

$$\lim_{M\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \mathbb{P}(|X_{N,n,M}(\sigma) - X_{N,n}(\sigma)| \geq \epsilon) = 0 \qquad (13)$$

kiekvienam $\epsilon > 0$.

Tegul $\{P_{n,M_1}\}$ yra sekos $\{P_{n,M}\}$ posekis toks, kad, kai $M_1 \to \infty$, $\{P_{n,M_1}\}$ silpnai konverguoja į P_n. Tada

$$X_{n,M_1} \xrightarrow[M_1\to\infty]{D} P_n. \qquad (14)$$

Žinoma, kad kompleksinė erdvė $\mathbb{C}$ yra separabili [4]. Tada iš (7), (13), (14) ir 7 lemos gauname

$$X_{N,n} \xrightarrow[N\to\infty]{D} P_n. \qquad (15)$$

Tai reiškia, kad egzistuoja matas P_n toks, kad matas $P_{N,n}$, kai $N \to \infty$, silpnai konverguoja į P_n. (15) sąryšis parodo, kad matas P_n nepriklauso nuo posekio $\{P_{n,M_1}\}$ parinkimo. Dar daugiau, mes turime, kad

$$X_{n,M} \xrightarrow[N\to\infty]{D} P_n. \qquad (16)$$

Pakartojus tą pačią argumentaciją elementams

$$\tilde{X}_{N,n,M}(\sigma,\omega) = L_{n,N}(\sigma+i\theta,\omega)$$

ir

$$\tilde{X}_{N,n}(\sigma,\omega) = L_n(\sigma+i\theta,\omega),$$

bei atsižvelgiant į (16) gauname, kad, kai $N \to \infty$, matas $\tilde{P}_{N,n}$, taip pat konverguoja į P_n. Lema įrodyta. ▲

4. Aproksimavimas pagal vidurkį

Šiame skyriuje $L(s)$ funkciją aproksimuosime pagal vidurkį. Tam bus reikalingos tokios lemos.

10 lema. *Tarkime T_0 ir $T \geq \delta > 0$ yra realieji skaičiai, $\mathfrak{F}$– intervalo $[T_0 + \frac{\delta}{2}, T_0 + T - \frac{\delta}{2}]$ baigtinė aibė. Tegul*

$$N_\delta(x) = \sum_{\substack{t \in \mathfrak{F} \\ |t-x|<\delta}} 1$$

ir $S(x)$– kompleksines reikšmes įgyjanti tolydi funkcija intervale $[T_0, T + T_0]$, turinti tolydžią išvestinę intervale $(T_0, T + T_0)$. Tada

$$\sum_{t \in \mathfrak{F}} N_\delta^{-1}(t)|S(t)|^2 \leq \frac{1}{\delta} \int_{T_0}^{T_0+T} |S(x)|^2 dx + \left(\int_{T_0}^{T_0+T} |S(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{T_0}^{T_0+T} |S'(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Įrodymas. Įrodymą galima rasti [7]. ▲

11 lema. *Tegul $T \to \infty$. Tada pusplokštumėje $\sigma > \theta + \frac{1}{2}$ teisingas įvertis*

$$\int_0^T |L'(\sigma + it)|^2 dt = BT.$$

Įrodymas. Įrodymas pateiktas [8]. ▲

12 lema. *Pusplokštumėje $\sigma > \theta + \frac{1}{2}$*

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} |L(\sigma + ikh) - L_n(\sigma + ikh)| = 0.$$

Įrodymas. Pusplokštumėje $\sigma > \theta + \frac{1}{2}$ eilutė

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{b(m)a_n(m)}{m^s}$$

konverguoja absoliučiai. Remiantis 4 hipoteze $\sigma + \sigma_1 > \theta + 1$, tada $L(s + z)$ šioje srityje galima išreikšti absoliučiai konverguojančia Dirichlė eilute. Vadinasi iš $a_n(m)$ apibrėžimo ir pastarojo fakto

$$L_n(s) \quad = \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b(m)}{m^s} \exp\left\{ -\left(\frac{m}{n}\right)^{\sigma_1} \right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b(m)}{m^{s+z}} l_n(z) \frac{dz}{z}$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty} L(s+z) l_n(z) \frac{dz}{z}.$$

Paskutiniame integrale pakeisime integravimo kontūrą. Iš reziduumų teoremos seka

$$L_n(s) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma_2-\sigma-i\infty}^{\sigma_2-\sigma+i\infty} L(s+z) l_n(z) \frac{dz}{z} + L(s), \tag{17}$$

čia $\sigma_2 > \theta + \frac{1}{2}$ ir $\sigma_2 < \sigma$. Pritaikius Koši formulę gauname

$$|L(\sigma + ikh) - L_n(\sigma + ikh)| \leq \frac{1}{2\pi\delta} \int\limits_{|z-\sigma|=\delta} |L(z + ikh) - L_n(z + ikh)||dz|.$$

Iš tiesų, pakankamai dideliam N

$$\frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} |L(\sigma + ikh) - L_n(\sigma + ikh)|$$
$$= \frac{B}{N+1} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2\pi\delta} \int\limits_{|z-\sigma|=\delta} |L(z + ikh) - L_n(z + ikh)||dz|$$
$$= \frac{B}{N+1} \int\limits_{|z-\sigma|=\delta} |dz| \sum_{k=0}^{2N} |L(\mathrm{Re} z + ikh) - L_n(\mathrm{Re} z + ikh)|$$
$$= o(1) + \frac{B}{N+1} \sup_{\substack{\sigma \\ s \in |z-\sigma|=\delta}} \sum_{k=0}^{2N} |L(\sigma + ikh) - L_n(\sigma + ikh)|. \tag{18}$$

Iš (17) lygybės turime

$$L(\sigma + ikh) - L_n(\sigma + ikh) = B \int\limits_{-\infty}^{\infty} |L(\sigma_2 + ikh + it)| l_n(\sigma_2 - \sigma + i\tau) d\tau + B.$$

Iš tiesų, parinkę $\tau_0 = \left[\frac{|\tau|}{h}\right]$, gauname

$$\frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{2N} |L(\sigma + ikh) - L_n(\sigma + ikh)|$$
$$= B \int\limits_{-\infty}^{\infty} |l_n(\sigma_2 - \sigma + i\tau)| \frac{1}{N+1} \sum_{k=-\tau_0}^{2N+\tau_0} |L(\sigma_2 + ikh)| d\tau + B.$$

Remiantis 10 ir 11 lemomis

$$\sum_{k=0}^{N}|L(\sigma+ikh)|^2 \leq \frac{1}{h}\int\limits_{k_0}^{Nh}|L(\sigma+it)|^2dt$$
$$+\left(\int\limits_{k_0}^{Nh}|L(\sigma+it)|^2dt\int\limits_{k_0}^{Nh}|L'(\sigma+it)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}} = BN.$$

Vadinasi,

$$\frac{1}{N+1}\sup_{\substack{\sigma\\ s\in L}}\sum_{k=0}^{2N}|L(\sigma+ikh)-L_n(\sigma+ikh)|$$
$$= B\sup_{\sigma}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|l_n(\sigma_2-\sigma+i\tau)|d\tau\left(\frac{1}{N+1}\sum_{k=-\tau_0}^{2N+\tau_0}|L(\sigma_2+ikh)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= B\sup_{\sigma}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|l_n(\sigma_2-\sigma+i\tau)|d\tau\frac{N+2\tau_0}{N+1}$$
$$= B\sup_{\sigma}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|l_n(\sigma_2-\sigma+i\tau)|d\tau(1+|\tau|).$$

Spindulius δ galime parinkti taip, kad $\sigma_2-\sigma\leq -c<0$. Tada gauname lygybę

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\sigma\leq -c}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|l_n(\sigma+it)|(1+|\tau|)d\tau = 0,$$

o tai baigia lemos įrodymą. ▲

5. Ergodiniai elementai

Tikimybinio mato identifikavimui reikalingi tam tikri faktai iš ergodinės teorijos.

Nagrinėkime aibę $a_h = \{p^{-ih}, p - \text{pirminis}\}$. Tore Ω_h apibrėžkime transformaciją $L_h(\omega)$ tokiu būdu $L_h(\omega) = a_h\omega$, $\omega \in \Omega$. Akivaizdu, kad L_h yra mati, matą išsauganti transformacija erdvėje $(\Omega, \mathfrak{B}(\Omega), m_H)$.

Aibė $A \in \mathfrak{B}(\Omega)$ yra vadinama invariantiška transformacijos L_h atžvilgiu, jeigu aibės A ir $A_h = L_h(A)$ skiriasi viena nuo kitos tik nuline m_H mačia aibe, t. y. $m_H(A \triangle A_h) = 0$ ($\triangle$ žymi simetrinį aibių skirtumą).

Įrodymui, kad transformacija L_h yra ergodinė, t. y. jos invariantiškų aibių σ-kūnas yra sudarytas tik iš aibių turinčių m_H-matą lygų 0 arba 1, reikia tokios lemos.

13 lema. *Tegul T yra mati, matą išsauganti ergodinė transformacija erdvėje $(\tilde{\Omega}, F, m)$. Tada kiekvienai funkcijai $f \in L^1(\Omega, F, m)$ beveik kiekvienam $\omega \in \tilde{\Omega}$ teisinga lygybė*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k\omega) = \mathbb{E}(f).$$

Įrodymas. Tai Birkhofo teorema, jos įrodymą galima rasti [9]. ▲

14 lema. *Transformacija L_h yra ergodinė.*

Šios lemos įrodymas sutampa su 3.6 iš teoremos [6] įrodymu.

15 lema. *Tarkime, kad $N \to \infty$ ir $\sigma > \theta + \frac{1}{2}$. Tada beveik visiems $\omega \in \Omega$ teisingas įvertis*

$$\sum_{k=0}^{N} |L(\sigma + ikh, \omega)|^2 = BN.$$

Įrodymas. Tegul

$$L_m(\sigma, \omega) = \frac{b(m)\omega(m)}{m^\sigma}, \quad m \in \mathbb{N}$$

ir

$$L_0(\sigma, \omega) = |L(\sigma, \omega)|^2.$$

Tada

$$L(\sigma, \omega) = \sum_{m=1}^{\infty} L_m(\sigma, \omega).$$

Kadangi atsitiktiniai elementai $L_k(\sigma, \omega)$ yra poromis ortogonalūs, tai

$$\mathbb{E}L_0(\sigma, \omega) = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{E}|L_k(\sigma, \omega)|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|b_k^2(m)|^2}{k^{2\sigma}} < \infty.$$

Galima pastebėti, kad

$$L_0(\sigma, L_h^k(\omega)) = |L(\sigma, a_{kh}(\omega)|^2 = |L(\sigma + ikh, \omega)|^2.$$

Pagal Birkhofo teoremą (13 lema) gauname, kad beveik visiems $\omega \in \Omega$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} L_0(\sigma, L_h^k(\omega)) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} |L(\sigma + ikh, \omega)|^2 = \mathbb{E}L_0(\sigma, \omega) < \infty.$$

Lema įrodyta. ▲

6. Teoremos įrodymas

Šiame skyriuje įrodysime pagrindinį darbo tvirtinimą.

Tarkime, kad S separabili metrinė erdvė su metrika ρ, o $Y_n, X_{1n}, X_{2n}, ...$ yra S-reikšmiai atsitiktiniai elementai apibrėžti tikimybinėje erdvėje (Ω, F, P).

16 lema. *Tarkime, kad $X_{k,n} \xrightarrow{D} X_k$, kai $n \to \infty$, kiekvienam k ir taip pat $X_k \xrightarrow{D} X$, kai $k \to \infty$. Jeigu kiekvienam $\epsilon > 0$ teisinga lygybė*

$$\lim_{k\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} P\{\rho(X_{kn}, Y_n) \geq \epsilon\} = 0,$$

tada $Y_n \xrightarrow{D} X$, $n \to \infty$.

Įrodymas. Tai yra 4.2 teorema iš [1]. ▲

Pažymėkime aibės Ω poaibį Ω_1 tokį, kad eilutė

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b(k)\omega(k)}{k^{\sigma+it}}, \quad \omega \in \Omega_1$$

konverguotų ir galiotų įvertis

$$\sum_{k=0}^{N} |L(\sigma + ikh, \omega)|^2 dt = BN, \tag{19}$$

kai $\sigma > \theta + \frac{1}{2}$. Atsižvelgiant į 8 ir 15 lemas turime, kad $m_H(\Omega_1) = 1$.

17 lema. *Tarkime, kad $\sigma > \theta + \frac{1}{2}$. Tada, kai $\omega \in \Omega_1$,*

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} |L(\sigma + ikh, \omega) - L_n(\sigma + ikh, \omega)| = 0.$$

Įrodymas. Šios lemos įrodymas atsižvelgiant į (19) įvertį yra panašus į 12 lemos įrodymą. ▲

Tarkime, kad $\omega \in \Omega_1$, ir apibrėžkime tikimybinį matą

$$\tilde{P}_N(A) = \mu_N(L(\sigma + ikh, \omega) \in A), \quad A \in \mathfrak{B}(\mathbb{C}).$$

18 lema. *Erdvėje $(\mathbb{C}, \mathfrak{B}(\mathbb{C}))$ egzistuoja tikimybinis matas P toks, kad, kai $N \to \infty$, abu matai P_N ir $\tilde{P}_N$ silpnai konverguoja į matą P.*

Įrodymas. Remsimės 9 lemos įrodymu. Pagal šią lemą, kai $N \to \infty$ abu matai

$P_{N,n}$ ir $\tilde{P}_{N,n}$ silpnai konverguoja į tą patį matą P_n. Įrodysime, kad tikimybinių matų šeima $\{P_n\}$ yra suspausta. Tegul

$$X_{N,n}(\sigma) = L_n(\sigma + i\theta).$$

Tada, kai $N \to \infty$,

$$X_{N,n} \xrightarrow{D} X_n; \tag{20}$$

čia X_n yra atsitiktinis dydis su pasiskirstymu P_n. Kadangi pusplokštumėje $\sigma > \theta + \frac{1}{2}$ eilutė $L_n(s)$ absoliučiai konverguoja, tai

$$\sup_{n \geq 1} \limsup_{N \to \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{\infty} |L_n(\sigma + ikh)| \leq R < \infty.$$

Jeigu paimsime $\epsilon > 0$ ir $K = \frac{R}{\epsilon}$, tada

$$\mathbb{P}(|X_{N,n}(\sigma)| > K) \leq \frac{1}{K(N+1)} \sum_{k=0}^{\infty} |L_n(\sigma + ikh)| \leq \epsilon$$

ir

$$\limsup_{N \to \infty} \mathbb{P}(|X_{N,n}(\sigma)| > K) \leq \epsilon.$$

Iš pastarosios nelygybės kartu su (20) sąryšiu išplaukia

$$\mathbb{P}(|X_n(\sigma)| > K) \leq \epsilon.$$

Pasinaudojus tais pačiais žymėjimais kaip ir 9 lemoje, matome, kad visiems $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(|X_n(\sigma)| \in K_\varepsilon) \geq 1 - \epsilon$$

arba

$$P_n(K_\varepsilon) \geq 1 - \epsilon.$$

Taigi įrodėme, kad tikimybinių matų šeima $\{P_n\}$ yra suspausta, o pagal Prochorovo teoremą (5 lema) ji yra reliatyviai kompaktiška. Vadinasi, egzistuoja posekis $\{P_{n_k}\} \subset \{P_n\}$ toks, kad P_{n_k}, kai $k \to \infty$, silpnai konverguoja į kurį nors matą P erdvėje $(\mathbb{C}, \mathfrak{B}(\mathbb{C}))$. Kitaip pasakius

$$X_n(s) \xrightarrow[N \to \infty]{D} P. \tag{21}$$

Atsižvelgiant į 10 lemą gauname, kad kiekvienam $\epsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \mu_N(|L(\sigma+ikh) - L_n(\sigma+ikh)| \geq \epsilon)$$
$$\leq \lim_{n\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{\varepsilon(N+1)} \sum_{k=0}^{N} (|L(\sigma+ikh) - L_n(\sigma+ikh)| = 0. \qquad (22)$$

Tegul

$$Y_N(\sigma) = L(\sigma + i\theta).$$

Tada iš (22) lygybės turime

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \mathbb{P}(|X_{N,n}(\sigma) - Y_N(\sigma)| \geq \epsilon) = 0. \qquad (23)$$

Tarkime, kad $\{P_{n_k}\}$ yra sekos $\{P_n\}$ silpnai į matą P konverguojantis posekis, kai $n_k \to \infty$. Tada

$$X_{n_k} \xrightarrow{D} P, \quad n_k \to \infty.$$

Iš (21), (23) ir 16 lemos seka

$$Y_N \xrightarrow{D} P, \quad N \to \infty. \qquad (24)$$

Tai reiškia, kad matas $\{P_n\}$ silpnai konverguoja į P, kai $N \to \infty$. (24) sąryšis parodo, kad P neprikauso nuo sekos n_k parinkimo, tai reiškia, kad

$$X_n \xrightarrow{D} P, \quad n \to \infty. \qquad (25)$$

Jeigu pritaikysime tuos pačius samprotavimus atsitiktiniams eementams

$$X_{N,n}(\sigma,\omega) = L_n(\sigma + i\theta, \omega), \quad \omega \in \Omega_1$$

ir

$$Y_N(\sigma,\omega) = L(\sigma + i\theta, \omega), \quad \omega \in \Omega_1$$

bei atsižvelgę į (25) sąryšį ir 13 lemą gautume, kad matas $\tilde{P}_N$, kai $N \to \infty$, taip pat silpnai konverguoja į matą P. Lema įrodyta. ▲

Teoremos įrodymas. Iš 8 lemos matome, kad lieka įrodyti, jog matai P ir P_L sutampa.

Tegul aibė $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{C})$ yra mato P tolydumo aibė. Remiantis 18 lema turime, kad

$$\lim_{N\to\infty} \mu_N(L(s+ikh,\omega) \in A) = P(A) \tag{26}$$

su visais $\omega \in \Omega_1$. Dabar fiksuokime aibę A, o tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathfrak{B}(\Omega), m_H)$ apibrėžkime atsitiktinį dydį $\eta(\omega)$ formule

$$\eta(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{kai} \quad L(\sigma,\omega) \in A, \\ 0, & \text{kai} \quad L(\sigma,\omega) \neq A. \end{cases}$$

Akivaizdu, kad dydžio η vidurkis yra

$$\mathbb{E}(\eta) = \int_\Omega \eta dm_H = m_H(\omega : L(\sigma,\omega) \in A) = P_L(A). \tag{27}$$

Iš kitos pusės, pagal 13 ir 15 lemas randame, kad

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} \eta(L_h^k(\omega)) = \mathbb{E}(\eta) \tag{28}$$

beveik visiems $\omega \in \Omega$. Iš η ir L_h apibrėžimų seka lygybė

$$\frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} \eta(L_h^k(\omega)) = \mu_N(L(\sigma+ikh,\omega) \in A).$$

Iš pastarosios bei (27)–(28) lygybių randame, kad beveik visiems $\omega \in \Omega$

$$\lim_{N\to\infty} \mu_N(L(\sigma+ikh,\omega) \in A) = P_L(A).$$

Atsižvelgiant į (26) gauname

$$P(A) = P_L(A)$$

kiekvienai mato P tolydumo aibei A. Todėl

$$P(A) = P_L(A)$$

visoms $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{C})$, nes tolydumo aibės sudaro apibrėžiančią klasę. Teorema įrodyta.

▲

Išvados

Tegul $s = \sigma + it$ yra kompleksinis kintamasis, o $L(s)$ - Oilerio sandaugos apibrėžiamos formule

$$L(s) = e^{i\psi} \prod_p \frac{1}{(1-\alpha_{1p}p^{-s})...(1-\alpha_{dp}p^{-s})},$$

kurios tenkina tam tikras hipotezes.

Magistro darbe yra įrodyta, kad funkcijai $L(s)$, kai ji tenkina tam tikras hipotezes, yra teisinga diskreti ribinė teorema tikimybinių matų silpno konvergavimo prasme kompleksinėje plokštumoje. Taip pat yra gauta mato išreikštinė forma.

Summary

Let $s = \sigma + it$ be a complex variable. The Euler products $L(s)$ is defined by the formula

$$L(s) = e^{i\psi} \prod_p \frac{1}{(1-\alpha_{1p}p^{-s})...(1-\alpha_{dp}p^{-s})},$$

where α_{jp} are complex numbers, $1 \leq j \leq d$, $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 1$, $\psi \in \mathbb{R}$, and p denotes the prime number. If the function $L(s)$ satisfies some additional hypotheses, then it converges for $\sigma > 1 + \theta$, $\theta \in [0; \frac{1}{2})$.

In Master work, we prove the discrete limit theorem in the sense of weakly convergent probability measures for the Euler products on the complex plane.

Let $h > 0$ be a fixed real number such that $\exp\{\frac{2\pi k}{h}\}$ is irrational number, $k \in \mathbb{Z} \setminus 0$. Then the probability measure

$$\frac{1}{N+1}\sharp\{0 \leq k \leq N : L(\sigma + ikh) \in A\}, \quad A \in \mathfrak{B}(\mathbb{C}),$$

weakly converges to the distribution of one explicitly given complex-valued random element as $N \to \infty$.

Literatūra

1. P. Billingsley, 1968, *Convergence of Probability Measures*, John Willey Sons, New York.

2. H. Bohr and B. Jessen, 1930, Über die Wertverteilung der Riemannshen Zeta-funktion, Erste Mitteilung, *Acta Math.* **58**, 1–35.

3. E. Bombieri and D.A. Hejhal, 1995, it On the distribution of zeros of linear combinations of Euler products, *Duke Math J.*, Vol. **80**, No. 3, 821–862.

4. B. Conway, 2000, *Functions of one Complex Variable (Second Edition)*, New York, Springer.

5.H. Heyer, 1977, *Probability Measures on Locally Compact Groups*, Springer-Verlag, Berlin.

6. A. Laurinčikas, 1996, *Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function*, Kluwer, Dordrecht.

7. H. L. Montgomery, 1971, *Topics in Multiplicative Number Theory*, Springer, Berlin.

8. J. Rašytė, 2010, *Oilerio sandaugų reikšmių pasiskirstymas kompleksinėje plokštumoje*, Šiaulių universitetas, Magistro darbas.

9. A. A. Tempelman, 1986, *Ergodic Theorems on Groups*, Vilnius, Mokslas.

Žymėjimai

k, l, m, n, j – natūralieji skaičiai

p – pirminis skaičius

$\mathbb{N}$ – natūraliųjų skaičių aibė

$\mathbb{Z}$ – sveikųjų skaičių aibė

$\mathbb{R}$ – realiųjų skaičių aibė

$\mathbb{C}$ – kompleksinių skaičių aibė

i – menamasis vienetas: $i = \sqrt{-1}$

$s = \sigma + it$ – kompleksinis kintamasis

$\mathrm{Re}s = \sigma$ – kompleksinio kintamojo s realioji dalis

$\mathrm{Im}s = t$ – kompleksinio kintamojo s menamoji dalis

$\#\{A\}$ – aibės A elementų skaičius

$\mu_N(...) = \frac{1}{N+1}\#\{0 \leq m \leq N : ...\}$ – vietoje daugtaškio įrašomos sąlygos, kurias tenkina m

$\xrightarrow{\mathcal{D}}$ – konvergavimas pagal skirstinį

$\mathcal{B}(S)$ – erdvės S Borelio aibių klasė

$\Gamma(s)$ – Oilerio gama funkcija pusplokštumėje $\sigma > 0$ apibrėžiama $\Gamma(s) = \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-x} x^{s-1} \mathrm{d}x$ ir analiziškai pratęsiama į visą s plokštumą

B – dydis apibrėžtas konstanta; „O“ didysis atitikmuo