

Vilniaus universitetas
Fizikos fakultetas
Teorinės fizikos ir astronomijos institutas

Justas Kvedaravičius

**ERDVINIO RINKĖJO MODELIO SU KONKURUOJANČIA DINAMIKA
APROKSIMAVIMAS VIENMATE FOKERIO-PLANKO LYGTIMI**

Magistro studijų baigiamasis darbas

Teorinės fizikos ir astrofizikos programa

Studentas
Leista gintis
Darbo vadovas
Instituto atstovas

Justas Kvedaravičius
2024-05-22
dr. Aleksejus Kononovičius
prof. dr. Egidijus Anisimovas

Vilnius 2024

Turinys

1	Įvadas	3
2	Literatūros apžvalga	4
2.1	Izingo modelis	4
2.1.1	Izingo modelio paradigma	4
2.1.2	Glauber ir Kawasaki dinamika	5
2.1.3	Konkuruojanti dinamika Izingo modelyje	6
2.2	Rinkėjo modelis	9
2.2.1	Klasikinis rinkėjo modelis	9
2.2.2	Erdvinis rinkėjo modelis ir konkuruojanti dinamika	12
2.2.3	Rangų dinamika erdviniame rinkėjo modelyje	13
2.3	Vienmatis stochastinis procesas	15
2.3.1	Aprašymas Fokerio-Planko lygtimi	15
2.3.2	Pirmojo kirtimo ir grįžimo laikai	16
3	Tyrimo metodika	19
3.1	Gillespie algoritmas stochastinių vyksmų modeliavimui	19
3.2	Naivus Beta binominio skirstinio aproksimacijos algoritmas	19
3.3	Aproksimacija vienmačiu stochastiniu procesu	20
4	Rezultatai	22
4.1	Agentų populiacijos skirstiniai nekonkuruojančios dinamikos atveju	22
4.2	Agentų populiacijos skirstinių priklausomybė nuo modelio spartų konkuruojančios dinamikos atveju	23
4.3	Kramers-Moyal koeficientų verčių nustatymas	27
4.4	Konkuruojančios dinamikos erdviniame rinkėjo modelyje aproksimacija vienmačiu stochastiniu procesu	29
4.5	Erdvinio rinkėjo modelio rango-dydžio skirstiniai	32
4.6	Erdvinio rinkėjo modelio rangų dinamikos aproksimacija vienmačiu stochastiniu procesu	33
4.7	Pirmojo grįžimo laikai konkuruojančios ir rangų dinamikos atvejais	35
5	Išvados	37
6	Pristatymai konferencijose ir parama tyrimui	38
	Santrauka	39
	Summary	40
	Literatūra	41

1 Įvadas

Fizikiniai socialinių sistemų modeliai siekia aprašyti realius socialinius procesus panaudodami agentais paremtą modeliavimą. Jeigu daromos prielaidos apie socialinių agentų esmines savybes yra pernelyg reduktyvios - modelio rezultatų palyginimas su empiriniais duomenimis tampa keblus. Dauguma dabartinių nuomonių dinamikos modelių nėra validuoti empiriniais duomenimis [1]. Rezultatų palyginamumui pagerinti kai kurie autoriai sėkmingai pritaikė idėją vietoje laikinio sistemos modeliavimo pasitelkti erdvinį modeliavimą [2, 3], pavyzdžiui, migraciją arba kasdienį mobilumą. Empiriniai duomenys pasižymi didesne erdvinį vienetų įvairove ir skyra (aplinkės, miestai, gatvės ir pan.) lyginant su laikinių vienetų įvairove. Pavyzdžiui, reguliarūs rinkimai vyksta viso labo kas kelerius metus ir tokios laiko eilutės turi tik iki keliolikos taškų.

Poreikis validuoti modelius remiantis empiriniais duomenis sukelia iššūkių dėl duomenų įvairovės problemos. Nuomonių dinamika pasireiškia sistemose, kurios tarpusavyje nėra paprastai palyginamos, pavyzdžiui, demokratiniuose procesuose, socialiniuose tinkluose, Eurovizijos balsavimuose ir panašiai. Nors šiose sistemose naudojami įverčiai (dydžiai) tiesiogiai nesilygina, iš daugelio dalykų galima sudaryti palyginamus rango-dydžio sąrašus. Jei rangai kinta laike - galima analizuoti jų laikinę dinamiką [4, 5]. Kai kuriems empiriniams duomenims rangų dinamiką galima modeliuoti kaip vienmatį stochastinį procesą - vieno rango kitimas laike gali suteikti pakankamai informacijos apibūdinti visos sistemos dinamikai.

Šiame tyrime išplečiamas ir analizuojamas erdvinis rinkėjo modelis su dviem fundamentaliais fizikiniais nuomonių dinamikos procesais - būsenos kitimo ir vietų apsikeitimo vyksmais. Modelį yra sudėtinga modeliuoti skaitmeniškai, todėl yra prasminga ieškoti jo aproksimacijų. **Šio tyrimo tikslas** - Erdvinio rinkėjo modelio su konkuruojančia dinamika aproksimavimas vienmačiu Markovo procesu. Tikslui įgyvendinti keliami uždaviniai:

1. Nustatyti erdvinio rinkėjo modelio su konkuruojančia dinamika stacionarųjų skirstinį absoliučios ir santykinės populiacijų atžvilgiu.
2. Nustatyti kada erdvinio rinkėjo modelio su konkuruojančia dinamika stacionarus skirstinys gali būti aproksimuojamas Beta arba Beta-binominiu skirstiniu.
3. Nustatyti vienmatės Fokerio-Planko lygties formą, kuri galėtų būti naudojama kaip erdvinio rinkėjo modelio su konkuruojančia dinamika aproksimacija.
4. Patikrinti ar erdvinio rinkėjo modelio su konkuruojančiu dinamika pirmo grįžimo laikų skirstinys turi panašią formą kaip visi vienmatės difuzijos procesai.

2 Literatūros apžvalga

2.1 Izingo modelis

2.1.1 Izingo modelio paradigma

Izingo modelio paradigma yra plačiai panaudota formuluojant pagrindinius sociofizikos modelius [6] - sukiniai ir jų sąveika yra paprasčiausia sudėtingesnių agentų sistemos aproksimacija. Paties modelio koncepcija yra nesudėtinga - tai sukinių, galinčių įgyti dvi vertes, gardelė d dimensijose. Nustatant, kad sukinių vertės gali būti lygios $s_i = \pm 1$, galima apibrėžti sistemos Hamiltonianą:

$$H = -J \sum_{\{i,j\}} s_i s_j, \quad (1)$$

čia sumavimas vyksta per artimiausių kaimynų rinkinį. Dydis J šiuo atveju yra sukinių sąveikos energijos konstanta ir jos ženklas nulemia ar sukinių sąveika yra feromagnetinė, ar antiferomagnetinė.

Šis paprastas sąveikos mechanizmas Izingo modeliui suteikia trijų tipų dinamikas - superkritinę, subkritinę ir kritinę [7]. Superkritinė dinamika modelis pasižymi aukštesnėje nei kritinės temperatūros srityje $T > T_C$ ir sistema būna nuostovioje netvarkingoje konfigūracijoje. Subkritinė dinamika vyksta esant $T < T_C$ ir yra kokybiškai panaši į tvarkingą sistemos būseną nulinėje temperatūroje. O tuo tarpu kritinė dinamika pasireiškia tik vienoje temperatūroje $T = T_C$. Feromagnetinėms medžiagoms kritinės temperatūros taškas žinomas Kiuri temperatūros pavadinimu.

Kritinės temperatūros taške sistemoje pasireiškia skalės invariantiškumas [8]. Sistemos tvarkos parametrų vertės, pavyzdžiui, vidutinė magnetizacija, šioje srityje kinta kaip laipsninės funkcijos:

$$m = \frac{M}{N} \propto (T_C - T)^\gamma, \quad (2)$$

čia m žymi sistemos sukinių vidutinę magnetizaciją, M žymi absoliučiąją magnetizaciją, N yra sukinių skaičius, T_C yra kritinio taško temperatūros vertė, o γ yra kritinė eksponentė. Skalės invariantiškumas reiškia tai, jog pakeitus sistemos mastelį (stebėjimo skyrą) tvarkos parametrų vertės nepakinta.

Kritiniame taške esant skalės invariantiškumui susiformuoja įvairių dydžių domenai, priešingai negu $T \neq T_C$ atvejais. Superkritiniu (feromagnetinių sąveikų) atveju susidaro vienas didelis domenas, o subkritiniu atveju dideli domenai nesusiformuoja dėl triukšmingo sukinių verčių kitimo. Dažnai norint įvertinti susidarančių domenų dydį skaičiuojama koreliacijos funkcija [7–9]. Ši funkcija įvertina sukinių verčių tarpusavio priklausomybę, o tai iš esmės yra statistinis domenų dydžio įvertinimas.

Verta pastebėti, kad toliau aprašoma dinamikų implementacija Monte Carlo skaitiniu metodu yra apibendrinama kaip diskretaus laiko simuliacija ir skirsis nuo kito (Gillespie) metodo naudojamo modeliuoti erdviniam rinkėjo modeliui. Pastarasis yra vadinamas tolydaus laiko metodu.

2.1.2 Glauber ir Kawasaki dinamika

Izingo modelį analitiškai spręsti yra sudėtinga (ir aukštesnėms dimensijoms neįmanoma), todėl modelio dinamika dažniau simuliuojama skaitmeniškai. Vienas būdų tai atlikti - Monte Carlo skaitmeniniu eksperimentu pagal Glauber, Metropolisio, Kawasaki, Wolff, Swendsen-Wang ar kitą algoritmą [9]. Glauber (Metropolisio) ir Kawasaki algoritmai yra tiesioginiai būsenos kitimo ir vietų apskeitimų algoritmų apibrėžimai, todėl norint nagrinėti tokių procesų konkuruojančią dinamiką verta juos pristatyti detaliau.

Siekiant gauti sistemos būsenų pasiskirstymą atitinkantį Bolcmano dėsnį (šiuo atveju dėl to, kad nagrinėjama Izingo modelio sistema yra šiluminė), būtina nustatyti ergodiškumo ir detalaus balanso sąlygas [9]. Ergodiškumo sąlyga nurodo, jog bet kuri sistemos konfigūracija turi būti pasiekama per baigtinį Monte Carlo žingsnių skaičių. Detalus balansas yra sistemos buvimo pusiausvyroje sąlyga:

$$p_{\mu}P(\mu \rightarrow \nu) = p_{\nu}P(\nu \rightarrow \mu), \quad (3)$$

kur μ, ν žymi dvi skirtingas būsenas, p tų būsenų tikimybę, o P žymi šuolių tarp nurodytų būsenų tikimybes. Tai taip pat galima interpretuoti kaip tikimybės srovių būsenų erdvėje tvermės dėsnį [7]. Kadangi sistemos modeliavimui aktualu įvertinti šuolių tarp būsenų tikimybes, laikykime jas susidedančias iš sukinio parinkimo (angl. *selection*) g ir šuolio priėmimo (angl. *acceptance*) A tikimybių:

$$P(\mu \rightarrow \nu) = g(\mu \rightarrow \nu)A(\mu \rightarrow \nu). \quad (4)$$

Metropolisio algoritme perėjimas iš vienos būsenos į kitą atliekamas taip: su tikimybe g pasirenkamas gardelės sukinys ir įvertinama jo sąveikos energija su artimiausiais kaimyniniais sukiniais. Jeigu sukinio vertės pakeitimas sumažintų sistemos energiją, toks žingsnis visuomet priimamas. Kitu atveju pokytis priimamas su perėjimo tikimybe proporcinga Bolcmano skirstiniui [9]:

$$A(\mu \rightarrow \nu) = \begin{cases} e^{-\beta(E_{\nu}-E_{\mu})} & \text{jeigu } E_{\nu} - E_{\mu} > 0, \\ 1 & \text{priešingu atveju.} \end{cases} \quad (5)$$

Metropolisio algoritmo atveju yra parinktos efektyviausios šuolio tarp būsenų priėmimo tikimybės vertės skaitmeninei simuliacijai. Dažnai literatūroje analiziniam nagrinėjimui naudojamos Glauber šuolių tarp būsenų priėmimo tikimybės vertės [7, 8, 10]:

$$A(\mu \rightarrow \nu) = \frac{1}{2} \left(1 - \tanh \frac{\beta(E_{\nu} - E_{\mu})}{2} \right). \quad (6)$$

Ši išraiška gaunama iš detalaus balanso lygties (3) į ją įstačius Bolcmano tikimybės būti atitinkamoje μ ir per vienu žingsniu skirtingą ν būsenas [7]. Eksponentinė šios išraiškos forma yra tokia:

$$A(\mu \rightarrow \nu) = \frac{e^{-\beta(E_{\nu}-E_{\mu})}}{1 + e^{-\beta(E_{\nu}-E_{\mu})}}. \quad (7)$$

Abiem pavienio sukinio apvertimo (angl. *single spin-flip*) dinamikos atvejais sukinio pasirinkimo

tikimybę galima nustatyti nepriklausomą nuo konfigūracijos. Tokiu atveju kiekvienam gardelės sukiniui parinkimo tikimybė lygi:

$$g(\mu \rightarrow \nu) = \frac{1}{N}, \quad (8)$$

kur N žymi sukinių skaičių gardelėje. Tokiu atveju (4) lygtį įstačius į (3) lygties detalaus balanso sąlygą šuolių tarp būsenų tikimybių santykis priklausys tik nuo (5) ir (6) lygčių išraiškų.

Priešingai negu iki šiol nagrinėtas sukinių vertę keičiantis sąveikos mechanizmas, Kawasaki dinamika skirta modeliuoti kitokio pobūdžio reiškinius, pavyzdžiui, stiklines (angl. *glassy*) sistemas arba gardelėje esančias dujas (angl. *lattice gas*) [9]. Pagrindinis tokių sistemų skirtumas nuo Izingo pagal Glauber ar Metropolio interpretaciją yra tai, kad dalelės nekeičia savo būsenos (pvz., magnetinėje sistemoje įmagnetėjimas išliktų pastovus). Sukiniai nekeičia savo verčių, bet priešingų verčių sukiniai susikeičia vietomis.

Panašiai kaip Glauber dinamikos atveju, šiai dinamikai galima sukonstruoti šuolių tarp būsenų tikimybes pagal (6) lygties formą, tačiau su papildomu nariu leidžiančiu sąveiką tik tarp skirtingas vertes turinčių sukinių [7]. Vienmačiu atveju:

$$A(\mu \rightarrow \nu) = \frac{1}{2} \left(1 - (s_{i-2}s_{i-1} + s_i s_{i+1}) \cdot \tanh \frac{\beta(E_\nu - E_\mu)}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} (1 - s_{i-1} s_i), \quad (9)$$

kur s_i ir s_{i+1} žymi du kaimyninius sukinius, tarp kurių vyksta sąveika. Ieškant modeliavimui patogių Metropolio tipo šuolių tarp būsenų išraiškų, galima naudoti (5) lygtyje žinomas išraiškas.

Paprasčiausiu atveju Kawasaki dinamika gali vykti tarp dviejų kaimyninių sukinių. Tačiau tokio difuzinio proceso modeliavimas pakankamai lėtas, tad kitas būdas yra kiekvieno Monte Carlo žingsnio metu pasirinkti bet kuriuos du skirtingų verčių sukinius ir pagal tas pačias šuolių tarp būsenų priėmimo tikimybes įvykdyti apkeitimą. Sukinių pasirinkimo tikimybės tokiu atveju išlieka identiškos šuoliui į ir iš būsenos, tad ergodiškumo sąlyga lieka išpildyta [9].

Kawasaki interpretacijoje magnetizacija, kaip ir temperatūra, laikoma modelio parametru. Todėl ši interpretacija dar yra vadinama pastovaus tvarkos parametru (angl. *conserved-order-parameter*) Izingo modeliu.

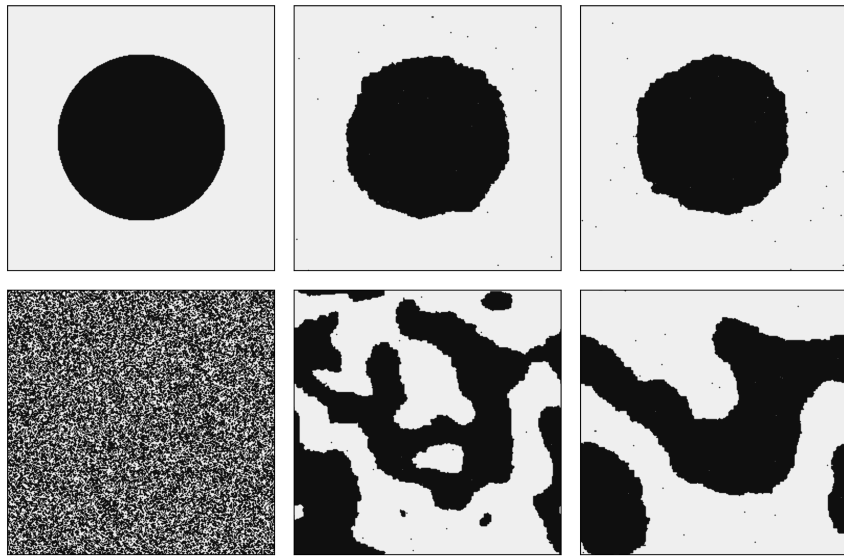
2.1.3 Konkuruojanti dinamika Izingo modelyje

Praeitame skyriuje nagrinėtos Metropolio ir (lokali) Kawasaki dinamikos Izingo modelyje apsiribojo sąveika tarp artimiausių sukinių gardelėje. Izingo modelio dinamika pasikeičia įskaitant sukinių sąveiką su antrais artimiausiais kaimynais gardelėje. Šitoks modelio pakeitimas kartais literatūroje pavadinamas konkuruojančios dinamikos Izingo modeliu, o jo Hamiltonianas gaunamas papildžius sąveikos narį:

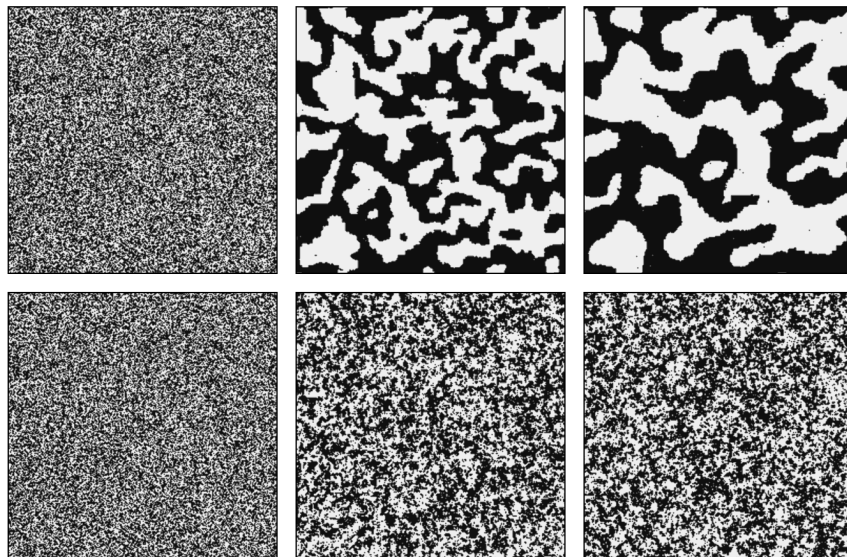
$$H = -J_1 \sum_{\{i,j\}} s_i s_j - J_2 \sum_{\{i,k\}} s_i s_k, \quad (10)$$

kur J_1 žymi sąveikos energiją tarp artimiausių sukinių, o J_2 tarp antrų artimiausių sukinių. Sumavimas atitinkamai vyksta tarp pirmos arba antros eilės artimiausių kaimynų.

Jeigu (10) lygtyje sąveika tarp abiejų eilių kaimynų išlieka feromagnetinė, modelio dinamika yra



1 pav. Izingo modelio pagal Metropolisio interpretaciją konfigūracijos laiko t momentais 1, 256 ir 1024 (atitinkamai 1, 2 ir 3 stulpeliai). Gardelės dydis 256×256 , vienas laiko momentas lygus 256^2 įvykių, per kuriuos gali pasikeisti vieno sukiniio vertė. Pirmoje eilutėje pavaizduota Izingo modelio pradinės lašo būsenos optimizacija link minimalios energijos. Antroje eilutėje pavaizduota evoliucija nuo atsitiktinės konfigūracijos. Sistemos temperatūra $T = T_0$. Čia $T_0 = J/k_B$, J yra sąveikos energija, o k_B yra Bolcmano konstanta.



2 pav. Izingo modelio pagal Kawasaki interpretaciją konfigūracijos laiko momentais $t = 1, 256$ ir 1024 (atitinkamai 1, 2 ir 3 stulpeliai). Pirmoje eilėje konfigūracijos, kai temperatūra $T = T_0$ ir $T = 3T_0$ antroje eilėje. Čia $T_0 = J/k_B$, J yra sąveikos energija, o k_B yra Bolcmano konstanta.

kokybiškai panaši į (2.1.2) skyriuje aprašytą, t.y. pasižymi perėjimu iš feromagnetinės būsenos į paramagnetinę didėjant temperatūrai. Kitais atvejais, bent vienai iš sąveikų esant antiferomagnetinei, sistemos dinamika kinta ir galimi skirtingų konfigūracijų energijų minimumai, atskirti laisvosios energijos barjerai [11]. Tokios sistemos stabilių ir metastabilių būsenų skaičius didėja įtraukiant sukinių sąveikas su vis didesnių eilių kaimynais.

Šiame modelyje konkuruojanti dinamika vis dar yra vieno - Glauber ar Metropolisio - tipo. Tikslus jos pavadinimas gali būti konkuruojančios sąveikos Izingo modeliu, kadangi konkuruoja skirtingų eilių sąveikos, o ne skirtingi savo fizikine prasme procesai. Siekiant į modelį įvesti Kawasaki tipo dinamiką toks formalizmas nepatogus, taigi dažniau sutinkamas konkuruojančių dinamikų būdas. Šiuo būdu pasirenkama tikimybė p , su kuria sistemos gardelė atnaujinama pagal vieną (pavyzdžiui, Metropolisio) dinamiką, ir tikimybė $1 - p$, su kuria gardelė atnaujinama pagal antrąją dinamiką. Tikimybės p ir dinamikų tipų pasirinkimas iš esmės nulemia modelio fazinę erdvę ir pusiausvyrumą [12–15].

Taip sudarytų dviejų konkuruojančių dinamikų varomos sistemos evoliucija gali būti nagrinėjama pagrindine kinetine lygtimi:

$$\frac{d}{dt}S(v, t) = \sum_{\mu'} (S(\mu', t)P_t(\mu' \rightarrow v) - S(v, t)P_t(v \rightarrow \mu')), \quad (11)$$

kur $S(v, t)$ žymi tikimybę laiko momentu t sistemą rasti konfigūracijoje v , o $P_t(\mu' \rightarrow v)$ žymi šuolių iš būsenos μ' į būseną v tikimybę per laiko vienetą. Šioje lygtyje sumavimas yra per visas galimas sistemos būsenas. Dydis P_t susideda iš dviejų pasirinktų konkuruojančių dinamikų:

$$P_t(v \rightarrow \mu') = pP_{t,A}(v \rightarrow \mu') + (1 - p)P_{t,B}(v \rightarrow \mu'), \quad (12)$$

čia A ir B gali žymėti tokio pačio tipo dinamikas, pavyzdžiui, Glauber ir Glauber, [12] arba skirtingo tipo, Glauber ir Kawasaki [13–15]. Nors A ir B būtų tos pačios dinamikos, tačiau tai vis tiek skirtųsi nuo konkuruojančių sąveikų Izingo modelio. Konkuruojančios dinamikos modelio savybės yra nulemiamos (12) lygtyje apibrėžtų šuolių tarp būsenų tikimybių greičių $P_{t,A}$ ir $P_{t,B}$ išraiškomis. Vieną iš šių dydžių galima nustatyti tokį, kuris atitiktų pasirinktą dinamiką prie begalinės temperatūros. Iš esmės tai vieną iš procesų paverčia energijos šaltiniu, o pati sistema su šiuo šaltiniu veikia kaip su begalinės šiluminės talpos termostatu. Begalinės temperatūros Kawasaki dinamikos atveju šis procesas įneša energiją į sistemą ir nekeičia tvarkos parametro (magnetizacijos).

Tokios nepusiausvyros feromagnetinės sistemos fazinė erdvė pasikeičia priklausomai nuo to ar energiją įnešančio proceso šuolio tarp būsenų tikimybės priklauso nuo tikimybės p . Šiems dydžiams esant priklausomiems, kritinio sistemos temperatūros taško vertė yra priklausoma nuo dinamikos pasirinkimo tikimybės p [14]. Atitinkamai nuo šios tikimybės vertės kritiniame taške vyksta pirmos arba antros eilės fazinis virsmas.

Platesnis šios fazinės erdvės ištyrimas antiferomagnetinės ir feromagnetinės sukinių sąveikos modeliams yra atliktas [13] autorių darbe. Šiame tyrime įvedamas santykis tarp tikimybių pasirinkti

Glauber ar Kawasaki žingsį, kurį čia žymėsime R , o jo matematinė forma:

$$R = \frac{1-p}{p}, \quad (13)$$

kur p žymi tikimybę pasirinkti Metropolisio žingsnį. Feromagnetinio Izingo modelio fazinė erdvė pagal T ir R vaizduoja slenkantį kritinės temperatūros tašką bei nykstančią feromagnetinę sritį. Kai R vertė šiek tiek didesnė už 1 ($p > 0.5$), feromagnetinę sritį pakeičia paramagnetinė sistemos būseną. Kita vertus R reikšmei esant lygiai 2 ($p \approx 0.33$) sistemos konfigūracija visoms temperatūros vertėms pavirsta antiferomagnetine.

Antiferomagnetinio konkuruojančios dinamikos Izingo modelio fazinė erdvė kinta panašiai, tačiau būsenas skiriančios kreivės skiriasi kokybiškai. Esant labai mažoms R vertėms antiferomagnetinės būsenos sritis išnyksta ir modelis yra paramagnetinėje būsenoje.

Sistemos konfigūraciją apibūdinančios būsenos priklausomybė nuo p kartu reiškia, jog šis dydis nulemia ir sukinių koreliaciją. Panašus rezultatas gaunamas nagrinėjant Izingo modelio pagrindinę kinetinę lygtį kvantiniame aprašyme ir įskaitant tolimąją sukinių sąveiką [15]. Šiuo atveju tai reiškia, jog sukinių sąveika neatmetama ir tolimesniems nei tik tarp artimiausiųjų kaimynų. Tokio uždavinio sprendimu gaunama, jog koreliacijos funkcija ir tvarkos parametras (magnetizacija) priklauso nuo p . Šis rezultatas gautas dydžiams T ir p esant nepriklausomiems.

2.2 Rinkėjo modelis

2.2.1 Klasikinis rinkėjo modelis

Originalus rinkėjo modelis buvo pasiūlytas [16] kaip konkurencijos tarp dviejų rūšių modelis. Vėliau panašus modelis buvo pasiūlytas [17] ekonominėms sistemoms modeliuoti, bet vedant analogiją su skruzdžių kolonijos elgsena. Dėka šių darbų šiuo metu rinkėjo modelį labiausiai tikėtina sutikti sociofizikos arba statistinės fizikos literatūroje [6, 7]. Statistinės fizikos literatūroje pabrėžiama Izingo paradigma - sąveikos tarp sukinių mechanizmas [6–8]. Šį modelį galima įsivaizduoti kaip Izingo modelį gardelėje su šiek tiek pakeistomis (atsitiktinio pobūdžio) sąveikos taisyklėmis, taigi modelį galima skaitmeniškai modeliuoti diskretaus laiko algoritmais, kaip ir Izingo modelio atveju. Kita vertus sociofizikoje sutinkama rinkėjo modelio dinamika yra aprašoma šuolių tarp būsenų spartomis, pavyzdžiui, [3, 18–20]. Su tokiu aprašymu patogiu atsiriboti nuo išskirtinai lokalių sąveikų ir specifinės gardelės geometrijos, galima simuliuoti modelio dinamiką tolydaus laiko eksperimentu. Šiame skyriuje toliau pateiksime abudu aprašymo būdus.

Sukininio rinkėjo modelio sąveikos taisyklės panašios į ląstelinio automato sistemos (angl. *cellular automaton*) taisykles. Perėjimas iš vienos sistemos būsenos į kitą atliekamas taip: iš pradžių gardelėje pasirenkamas atsitiktinis sukinyš ir vienas iš jo artimiausių kaimynų. Tuomet pirmasis pasirinktas sukinyš nusikopijuoja pasirinkto kaimyno būseną. Taigi pirmasis sukinyš gali pakeisti savo būseną į priešingą arba likti toje pačioje. Bendru atveju įvykio, kurio metu būseną pakeičiama

į priešingą, intensyvumas išreiškiamas taip:

$$P(s_k \rightarrow -s_k) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{s_k}{z} \sum_{\{j\}} s_j \right), \quad (14)$$

čia s_k žymi nagrinėjamos būsenos sukiniio vertę, z žymi artimiausiu kaimynų skaičių, o sumavimas $\{j\}$ atliekamas per artimiausius z kaimynų.

Sistemos būsenai apibūdinti galima įvesti porą makroskopinių tvarkos parametrų [8]. Vienas dydis yra skirtingas sukiniio būsenas turinčių kaimynų skaičiaus santykis su visomis kaimynų poromis. Šis dydis savo prasme panašus į sistemos bendrą energiją. Kitas dydis, panašus į įmagnetėjimą, yra santykinių populiacijos dydžių turinčių skirtingus sukinius skirtumas. Modelyje atlikus vieną žingsnį magnetizacijos vertė pakinta, tačiau sukinių populiacijoms esant vienodo dydžio vidutiniškai per daugelį žingsnių ji nesikeičia [7].

Verta pastebėti, jog rinkėjo modelyje vienkrypčių sukinių domenų plėtimasis (angl. *coarsening*) yra skirtingas negu Izingo modelyje. Tai parodoma modeliuojant lašo formos vienukų sukinių vertės regioną aplink esant priešingiems sukiniams (kaip Izingo modelio atveju, žr. 1 pav.) [6, 8]. Bėgant laikui regiono perimetras plinta, tačiau statistiškai lašo radiusas nesikeičia. Fizikine prasme tai reiškia, jog domeno plėtimasis kinta ne dėl paviršiaus įtempimo jėgos veikimo ir sistemos bandymo atsidurti mažiausios energijos būsenoje [6].

Visgi aptartas rinkėjo modelis neturi triukšmo savybės, pavyzdžiui, (14) lygtis nepriklauso nuo temperatūros ar kitokio parametro. Į modelį galima įvesti triukšmą, kuris bet kuriam pasirinktam sukiniui leidžia nepriklausomai nuo kaimynų pakeisti savo vertę. Vienas paprasčiausių būdų tai padaryti - prie (14) pridėti konstantą [7]. Triukšmas lemia tai, jog sistema lieka į paramagnetinę panašioje būsenoje ir nesuvienodina visų savo sukinių [6]. Taip veikiantis modelis dažnai vadinamas rinkėjo modeliu su triukšmu (angl. *noisy voter model*) [21]. Remiantis detalaus balanso sąlyga galima parodyti, jog tokiam rinkėjo modeliui tikimybių pasiskirstymas aprašomas ne Bolcmano skirstiniu, tačiau pagal Beta skirstinį [22].

Kitas būdas aprašyti rinkėjo modelį (su triukšmu) yra įsivedant šuolių tarp būsenų spartas. Tariant, kad kiekvienas populiacijos agentas gali būti vienoje iš dviejų būsenų, o jų populiacijos yra atitinkamai X ir $N - X$. Galima įsivesti šuolių į ir iš šių būsenų spartas, kurios buvo pasiūlytas Kirmano modelyje [17]. Toks formalizmas dar žinomas kaip vieno žingsnio (angl. *one-step*) procesų aprašymas:

$$\begin{aligned} p(X \rightarrow X + 1) &= \pi^+ \Delta t = (N - X) \mu_{12}(X, N) \Delta t, \\ p(X \rightarrow X - 1) &= \pi^- \Delta t = X \mu_{21}(N - X, N) \Delta t, \end{aligned} \quad (15)$$

čia π^- , π^+ žymi vieno žingsnio spartas, Δt yra pakankamai trumpas laiko intervalas, per kurį turėtų būti tikėtinas įvykti tik vienas šuolis tarp būsenų. Šios lygtys aprašo rinkėjo modelį tuomet, kai parenkamos specifinės μ_{12} , μ_{21} spartų išraiškos [18, 23]:

$$\begin{aligned}\mu_{12} &= \sigma + \frac{hX}{N}, \\ \mu_{21} &= \sigma + \frac{h(N-X)}{N},\end{aligned}\tag{16}$$

čia σ yra savaiminį agentų judėjimą tarp būsenų aprašantis parametras, primenantis triukšmą (pagal originalų apibrėžimą straipsnyje [21]), o h yra aplinkos nulemtas (angl. *peer-pressure*) judėjimas tarp būsenų. Pastarasis taip pat aprašo ir aplinkos poveikio spartą, todėl jį galima įtraukti į Δt narį. Tuomet išraišką galima suprastinti įsivedant apibendrintą parametą $\epsilon = \sigma/h$, kuris priklausomai nuo to ar yra didesnis (mažesnis) už 1 nusako, kuris agentų šuolių tipas dominuoja. Tokiu būdu gaunamos bendresnės šuolių tarp dviejų būsenų spartų išraiškos:

$$\begin{aligned}\pi^+ &= (N-X)(\epsilon + X), \\ \pi^- &= X(\epsilon + [N-X]).\end{aligned}\tag{17}$$

Galutinė spartų forma gaunama darant prielaidą, jog sistema yra termodinaminėje riboje ($x \rightarrow X/N$), tuomet:

$$\begin{aligned}\pi^+ &= (1-x) \left(\frac{\epsilon}{N} + x \right), \\ \pi^- &= x \left(\frac{\epsilon}{N} + [1-x] \right).\end{aligned}\tag{18}$$

Taip pat reikalingas ir laiko skalės pakeitimas, taigi (18) spartos susiejamos su vieno žingsnio operatoriais šitaip:

$$p(X \rightarrow X \pm 1) = N^2 \pi^\pm(x) \Delta t.\tag{19}$$

Vieno žingsnio, arba paprasčiau pavadinant šuolių į ir iš būsenos (angl. *entry-exit*), spartos gali būti modifikuojamos įvedant į modelį (ne)ekstensyvumą [19, 24]:

$$\begin{aligned}\pi^+ &= (N-X) \left(\epsilon + \frac{X}{N^\alpha} \right), \\ \pi^- &= X \left(\epsilon + \frac{[N-X]}{N^\alpha} \right),\end{aligned}\tag{20}$$

kur α yra parametras aprašo kokį svorį savo aplinkai suteikia rinkėjas. Priklausomai nuo parametro vertės α gaunami ekstensyvūs arba neekstensyvūs modelio atvejai. Neekstensyviu atveju ($\alpha = 0$) modelio verčių skirstinys nepriklauso nuo visos populiacijos dydžio N , o ekstensyviu ($\alpha = 1$) atveju - priklauso. Rinkėjo modeliui su triukšmu (t.y. parinkus (16) lygtyse $\sigma \neq 0$) gaunamas stacionarus verčių skirstinys yra pasiskirstęs pagal Beta skirstinį [20, 22]:

$$p_{st}(x) = \frac{\Gamma(\epsilon_1 + \epsilon_2)}{\Gamma(\epsilon_1)\Gamma(\epsilon_2)} x^{\epsilon_1-1} (1-x)^{\epsilon_2-1},\tag{21}$$

kur Γ žymi Gama funkciją, o ϵ_1, ϵ_2 žymi (skirtingas) šuolių spartas į pirmą ir antrąją būsenas.

2.2.2 Erdvinis rinkėjo modelis ir konkuruojanti dinamika

Kadangi nemažai empirinių duomenų pasižymi pasiskirstymais pagal Beta skirstinį (pavyzdžiui, žr. nuorodas [20] straipsnyje), todėl rinkėjo modelis yra tendencingai išplėtotas įtraukiant sudėtingesnius sąveikos mechanizmus [6, 25]. Modelio patobulinimai daugiausia sutelkti į sąveikų tarp agentų (ar jų būsenų) tikslinimą. Sistemos būsenos kitimą galima asocijuoti ne tik su agentų vidinių savybių kaita (pavyzdžiui, nuomonės), bet ir su agentų judėjimu erdvėje, pavyzdžiui, atsižvelgiant į migraciją arba kasdienį keliavimą į ar iš darbo [2]. Nuomonių dinamikos požiūriu didelio masto (pvz., prezidento pozicijai užimti) rinkimai vyksta retai, tačiau turi didelį detalumą erdvinio požiūriu. Atsižvelgimas į tokius reiškinius iš principo įveda į modelį naują dinamiką, kuri analogiškai atitinka Izingo modelio Kawasaki dinamiką. Modelis su tokio tipo dinamika yra pasiūlytas [3] ir vadinasi erdvinio rinkėjo modeliu.

Erdviniame rinkėjo modelyje modeliuojama N agentų populiacija pasiskirsčiusi per M erdviųjų vienetų, kuriame kiekvienas agentas gali būti T skirtingų tipų. Kiekvienas erdvinis vienetas turi bendrą agentų talpą C . Tokiam modeliui parenkamos šuolių tarp būsenų spartos, kurios leidžia agentui pakeisti jo erdvinį vienetą (bet ne tipą):

$$v_{i \rightarrow j}^{k \rightarrow m} = \begin{cases} X_i^{(k)} \left(\epsilon^{(m)} + X_j^{(m)} \right) & i \neq j, k = m, N_j < C \\ 0 & \text{kt. atvejais,} \end{cases} \quad (22)$$

kur $v_{i \rightarrow j}^{k \rightarrow m}$ žymi k tipo agentų šuolio spartą iš i erdvinio vieneto į j , o $X_i^{(k)}$ žymi k tipo agentų populiaciją i erdviniame vienete. Visos spartos $\epsilon^{(k)}$ yra vienodos tam pačiam agentų tipui. Ši išraiška yra tokia pati kaip ir (17) lygtyse, todėl modelį galima laikyti rinkėjo modelio išplėtimu, o modelio erdvinio vieneto pasirinktam tipui populiacijos $X_i^{(k)}$ skirstinys yra pasiskirstęs pagal Beta binominį skirstinį [3].

Šio modelio šuolio į ir iš būsenų spartos gaunamos atsižvelgiant į visas galimybes patekti į pasirinktą erdvinį vienetą ir išėiti iš jo:

$$v_{i+}^{(k)} = \sum_{j=1}^M v_{j \rightarrow i}^{(k)} = \left(N^{(k)} - X_i^{(k)} \right) \left(\epsilon^{(k)} + X_i^{(k)} \right), \quad (23)$$

$$v_{i-}^{(k)} = \sum_{j=1}^M v_{i \rightarrow j}^{(k)} = X_i^{(k)} \left((M-1)\epsilon^{(k)} + \left(N^{(k)} - X_i^{(k)} \right) \right). \quad (24)$$

Šio modelio spartos $\epsilon^{(k)}$ ir $(M-1)\epsilon^{(k)}$, kaip ir rinkėjo modelio atveju lygtyje (21), charakterizuoja agentų populiacijos Beta binominio skirstinio parametrus α ir β . Šios išraiškos visai modelio dinamikai atitinka rinkėjo modelio $\pi^\pm(x)$ spartas lygtyse (17).

Konkuruojančios dinamikos įvedimas į tokiu būdu spartomis aprašytą modelį nereikalauja įsivesti papildomo tikimybės kintamojo (kaip sukininio modelio atveju), kadangi modeliuojama sistema yra tolydaus laiko. Jeigu naujai įvesta (būsenos kitimo) sparta taip pat yra palyginama savo dydžiu su esama migracijos sparta formulėje (22), tuomet modelį galima sėkmingai modeliuoti su Gillespie algoritmu. Natūraliausias būdas papildyti modelį yra su tokios pačios formos kaip ir lygtyje (16)

spartomis:

$$\lambda_{i \rightarrow j}^{k \rightarrow m} = \begin{cases} X_i^k \left(\mu^{(m)} + X_j^{(m)} \right) & i = j, k \neq m \\ 0 & \text{kt. atvejais.} \end{cases} \quad (25)$$

Šiuo atveju nereikia taikyti erdvinio vieneto talpos apribojimo, kadangi keičiantis agentų tipui bendras agentų skaičius esantis viename erdviniam vienetui nesikeičia. Modelio schema detalizuojant abiejų tipų šuolius tarp būsenų pavaizduota 3 paveiksle.

Modelio su konkuruojančia dinamika šuolių į ir iš būsenų spartos gaunamos tokiu pačiu būdu kaip ir erdviniam rinkėjo modelyje. Šuoliui į agento tipą k erdvės vienetui i išraiška:

$$\begin{aligned} +\eta_i^k &= \sum_{j=1}^M v_{j \rightarrow i}^{k \rightarrow k} + \sum_{m=1}^T \lambda_{i \rightarrow i}^{m \rightarrow k} \\ &= \left(N^{(k)} - X_i^{(k)} \right) \left(\epsilon^{(k)} + X_i^{(k)} \right) + \left(N_i - X_i^{(k)} \right) \left(\mu^{(k)} + X_i^{(k)} \right), \end{aligned} \quad (26)$$

kur $N^{(k)}$ žymi sistemoje esančių k tipo agentų skaičių ir N_i žymi i -ojo erdvės vieneto agentų skaičių. Atitinkamo atvejo šuolio iš būsenos sparta lygi:

$$\begin{aligned} -\eta_i^k &= \sum_{j=1}^M v_{i \rightarrow j}^{k \rightarrow k} + \sum_{m=1}^T \lambda_{i \rightarrow i}^{k \rightarrow m} \\ &= X_i^{(k)} \left((M-1)\epsilon^{(k)} + (N^{(k)} - X_i^{(k)}) \right) + X_i^{(k)} \left(\sum_{m \neq k}^T \mu^{(m)} + (N_i - X_i^{(k)}) \right). \end{aligned} \quad (27)$$

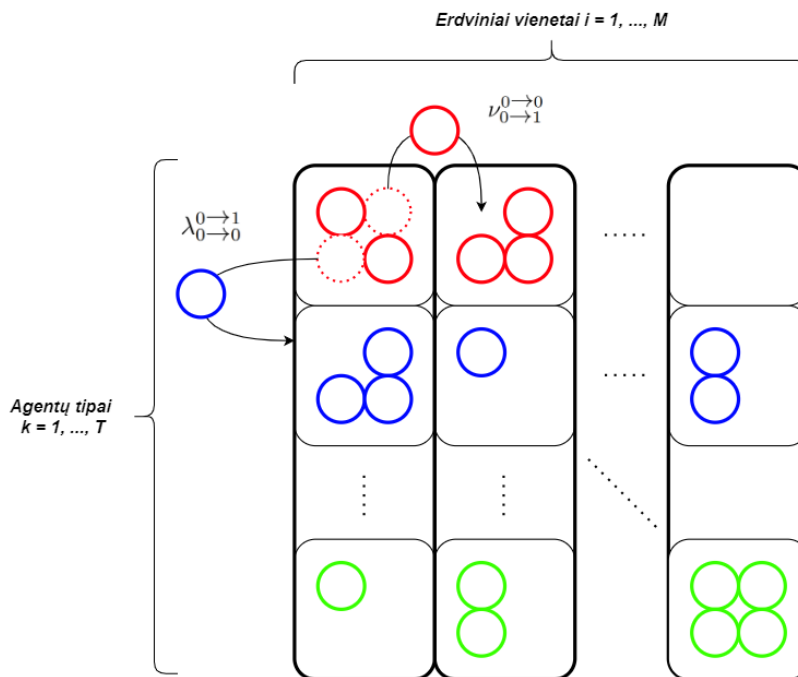
Šios formos išraiškos skiriasi nuo gaunamų erdviniam rinkėjo modelyje - jų nesigauna apibendrinti į (23) ir (24) lygčių formą. Norint išraišką sutraukti reikėtų daryti prielaidą apie sąryšį tarp narių $N^{(k)} - X_i^{(k)}$ (agentų skaičius kituose erdvinuose vienetuose) ir $N_i - X_i^{(k)}$ (kito tipo agentų skaičius tame pačiame vienetui), tačiau vienareikšmiam sąryšiui surasti tarp šių narių dabartinės prielaidos nepadedą.

Gautos spartų išraiškos (26) ir (27) atskleidžia kitą analizės kampą - kaip kinta agentų populiacijos atsižvelgus į su migracija susijusią populiaciją $N^{(k)}$ bei su būsenos kitimu susijusią populiaciją N_i . Tiesiogiai tai išanalizuojama žvelgiant į dydžių $X_i^{(k)}/N^{(k)}$ ir $X_i^{(k)}/N_i$ tikimybės tankio skirstinius.

2.2.3 Rangų dinamika erdviniam rinkėjo modelyje

Greta stacionarių agentų populiacijos tikimybės tankio skirstinių [3] autorius taip pat pristato ir rango-dydžio skirstinius. Rango-dydžio analizė yra dažnai sutinkamas empirinių dėsnių apibendrinimas susiejant sistemos įvertį (metriką, dydį) su jos rangui, t.y. eilės numeriu rikiuojant įverčius didėjimo ar mažėjimo tvaka. Vienas žinomiausių pavyzdžių yra Zipf dėsnis, pagal kurį sąrašo elemento rangas ir įvertis (dydis) yra susiję laipsniniu dėsniu [26]. Pagal [3] rango-dydžio skirstiniai erdviniam rinkėjo modeliui nebūtinai yra laipsninės funkcijos, tačiau yra praktiškai stacionarūs.

Nors skirstiniai yra stacionarus, tačiau pasirinkto erdvinio vieneto rangas ir įvertis laikui bėgant



3 pav. Konkuruojančios dinamikos erdvinio rinkėjo modelio šuolių tarp erdvinių vienetų ir agentų tipų vizualizacija. Tik vienas iš pavaizduotų šuolių vyksta vienu laiko momentu, šuolio metu pakinta išskirtinai tik agento tipas arba agento erdvinis vienetas. Juodai apibrėžti stulpeliai žymi erdvinį vieneta, kuriam taikomas talpos parametras C , vienodas visiems erdviniams vienetams. Agentų tipų skaičiui viename erdviniam vienetame talpa nėra ribojama.

gali kisti. Tokiu atveju atsiranda prasmė kalbėti apie rangų laikinę dinamiką [4, 5]. Dauguma realių sistemų pasižymi rango kitimu bėgant laikui, tai gali priklausyti nuo laiko skalės - miestų populiacijos dydžiai kinta per šimtmečius, o klausomiausių dainų, interneto svetainių lankomumo, ligų sergamumo rodikliai gali keistis gerokai greičiau. Tokios ranginių sistemų savybės yra apibendrinamos keliomis charakteristikomis - sistemų atvirumu ir ranginio sąrašo atsinaujinimo sparta [4], rango arba įverčio stabilumu laiko eilutėje [5].

Pagal empirinius duomenis yra pasiūlyti du modeliai apibendrinti laikinei rangų dinamikai - vienas remiasi rango tikimybės tankio aproksimavimu pagal Fokerio-Planko lygtį [5], kitas rango kitimo trajektorijas aproksimuoja pagal Lanževeno tipo lygtį [5]. Bendras abiejų modelių vardiklis yra tas, jog empirinių duomenų rangų dinamikai aprašyti galima rasti vieno kintamojo stochastinę diferencialinę lygtį, kuri tikimybinio požiūriu aprašo rango kitimą laikui bėgant neatsižvelgiant į įvertį. Šiuo požiūriu galima pastebėti, jog empirinių duomenų rango-dydžio skirstiniai yra gerai aproksimuojami vienmačiu Markoviniu procesu, kadangi lygčiai užrašyti pakanka vienos dimensijos kintamojo, neatsižvelgiant į likusią sistemos konfigūraciją. Tai yra neintuityvus rezultatas vertinant tai, jog toks matas kaip rangas yra labiau priklausomas nuo likusios sistemos konfigūracijos negu sistemos įvertis.

2.3 Vienmatis stochastinis procesas

2.3.1 Aprašymas Fokerio-Planko lygtimi

Analizuoti erdvinį rinkėjo modelį žvelgiant iš mikroskopinio modelio perspektyvos yra sudėtinga - didėjant erdvinį vienetų ir agentų tipų skaičiui sistemą aprašančių lygčių skaičius būtų pernelyg didelis, jog modelis būtų išsprendžiamas analitiškai. Todėl optimaliau sistemą užrašyti makroskopinių lygčių pavidalu, Fokerio-Planko lygtimi, kaip tai padaroma [18] pagal gimimimo-mirties aprašymą. Jeigu įmanoma Fokerio-Planko lygtį užrašyti vienam kintamajam, tai yra vienam agentų tipui erdviniam vienetui, tuomet tai yra stochastiniu pavidalu aprašomas vienmatis procesas.

Pagal [27] stochastiniai vyksmai gali būti aprašomi bendresne diferencialine Čapmano-Kolmogorovo lygtimi, kuri įskaito trijų tipų stochastinius vyksmus - šuolius, dreifą ir difuziją. Daugiamaciau atveju dreifas yra vektorinis, o difuzija - tenzorinis dydis. Fokerio-Planko lygtis gaunama atvejais kai nevyksta šuoliai, tačiau pasireiškia dreifas ir difuzija, tokia lygtimi aprašomos kintamųjų tikimybės tankio trajektorijos yra tolydžios. Darant prielaidą, kad analizuojamas erdvinis rinkėjo modelis yra nagrinėjamas termodinaminėje riboje, agentų populiacijos dalies kintamasis $x = X/N$ yra tolydus, o šuolių procesai šioje riboje nevyksta, kadangi pagal (15) vyksmų (šuolių tarp būsenų) spartas vykstantis pokytis pakeičia agentų tipo erdviniam vienetui populiacija per 1 agentą.

Fokerio-Planko lygtis iš esmės yra agentų tipo populiacijos erdviniam vienetui tikimybės tankio skirstinio judėjimo lygtis [28]. Erdviniam rinkėjo modelyje ji gali būti išvedama iš pagrindinės kinetinės lygties, užrašant ją per vieno žingsnio operatorių formalizmą [18]:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t) = N^2 [(\mathbf{E} - 1)(\pi^-(x)p(x, t)) + (\mathbf{E}^{-1} - 1)(\pi^+(x)p(x, t))], \quad (28)$$

kur x žymi agentų populiacijos dalį, t žymi sistemos laiką, $p(x, t)$ žymi tikimybės tankį, $\pi^\pm(x)$ yra šuolių į ir iš būsenas operatoriai (pavyzdžiui, kaip (18) lygtyse), o \mathbf{E} ir \mathbf{E}^{-1} žymi vieno žingsnio operatorius. Narys N^2 randasi dėl to, jog pereinama nuo diskrečių šuolių tarp būsenų spartų prie tolydžių [18]. Pasinaudojant jų apibrėžimu ir juos išskleidus baigtiniu Teiloro eilutės skleidiniu:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} [f(x)] &= f(x + \Delta x) \approx f(x) + \Delta x \frac{d}{dx} f(x) + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{d^2}{dx^2} f(x), \\ \mathbf{E}^{-1} [f(x)] &= f(x - \Delta x) \approx f(x) - \Delta x \frac{d}{dx} f(x) + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{d^2}{dx^2} f(x), \end{aligned} \quad (29)$$

o šiuos skleidinius pritaikius pagrindinėje kinetinėje lygtyje (28) gaunama nauja jos išraiška:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t) = -N \frac{\partial}{\partial x} [(\pi^+(x) - \pi^-(x))p(x, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [(\pi^+(x) + \pi^-(x))p(x, t)], \quad (30)$$

pagal kurią dreifo ir difuzijos nariai yra lygūs:

$$\begin{aligned} D^{(1)}(x) &= N(\pi^+(x) - \pi^-(x)) \\ D^{(2)}(x) &= \pi^+(x) + \pi^-(x). \end{aligned} \quad (31)$$

Šių narių išraiškos erdviniam rinkėjo modeliui su ir be konkuruojančios dinamikos gaunamos

pasinaudojant šuolių tarp būsenų išraiškomis (23) - (27) lygtyse. Erdviniam rinkėjo modeliui dreifo ir difuzijos nariai įgyja formą:

$$\begin{aligned}
D^{(1)}(X_i^{(k)}) &= N \left[v_{i+}^{(k)} - v_{i-}^{(k)} \right] = \\
&= N \left[\epsilon^{(k)} \left(N^{(k)} - X_i^{(k)} M \right) \right], \\
D^{(2)}(X_i^{(k)}) &= v_{i+}^{(k)} + v_{i-}^{(k)} = \\
&= \epsilon^{(k)} N^{(k)} + X_i^{(k)} \left(2N^{(k)} + \epsilon^{(k)} (M - 2) \right) - 2 \left(X_i^{(k)} \right)^2.
\end{aligned} \tag{32}$$

Kaip ir klasikinio rinkėjo modelio atveju dreifas yra tiesiškai priklausantis dydis, o difuzija - antros eilės polinomas. Konkuruojančios dinamikos atveju išraiškos keblės:

$$\begin{aligned}
D^{(1)}(X_i^{(k)}) &= N \left[{}^+ \eta_i^k - {}^- \eta_i^k \right] = \\
&= N \left[\left(\epsilon^{(k)} N^{(k)} + \mu^{(k)} N_i \right) - X_i^{(k)} \left(\sum_{l=1}^M \epsilon^{(l)} + \sum_{l=1}^T \mu^{(l)} \right) \right], \\
D^{(2)}(X_i^{(k)}) &= {}^+ \eta_i^k + {}^- \eta_i^k = \\
&= \left(\epsilon^{(k)} N^{(k)} + \mu^{(k)} N_i \right) - X_i^{(k)} \left(\sum_{l=1}^M \epsilon^{(l)} + \sum_{l=1}^T \mu^{(l)} - 2 \left(N^{(k)} - N_i \right) \right) - 4 \left(X_i^{(k)} \right)^2,
\end{aligned} \tag{33}$$

tačiau matyti, jog difuzija ir dreifas vis vien yra 1-os ir 2-os eilės polinomai. Priklausomai nuo savaiminių šuolių spartų ϵ ir μ parinkimo, simetriniu atveju nariai $\sum_{i=1}^M \epsilon^{(i)}$ ir $\sum_{i=1}^T \mu^{(i)}$ pavirsta į $M\epsilon$ ir $T\mu$.

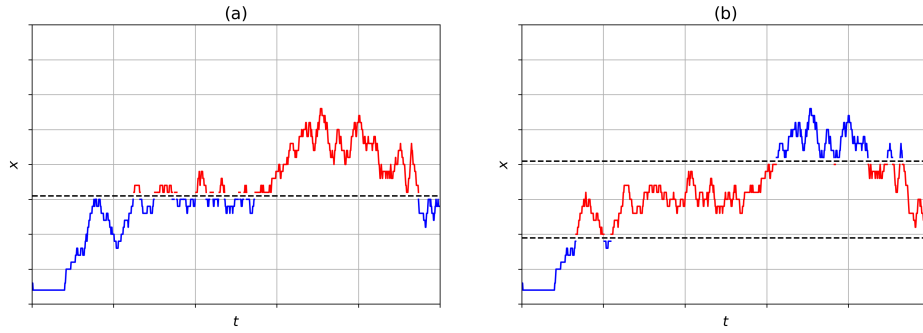
Fokerio-Planko lygtis yra patogus pavidalas analitiniams tyrinėjimams, tačiau $N^{(k)}$ ir N_i narius išsprastinti analitiškai kebloka. Tokiu atveju galima užsiimti skaitmeniniu modeliavimu, o tam patogiau turėti stochastinę diferencialinę lygtį. Ši transformacija yra atliekama remiantis Ito formule, kuri nusako kokia lygtimi yra aprašoma funkcijos stochastinė diferencialinė lygtis. Pagal šią lygtį gaunamas rezultatas, jog difuzijos ir dreifo nariais aprašomas procesas yra ekvivalentus stochastinės diferencialinės lygties ir Fokerio-Planko lygties formose [27], tokia transformacija naudojama skaitmeniniuose rinkėjo modelio simuliacijose [19, 20]. Stochastinė diferencialinė lygtis yra pavidalo:

$$dx = D^{(1)}(x)dt + \sqrt{D^{(2)}(x)}dW, \tag{34}$$

kur $A(x)$ žymi dreifo koeficientą, $B(x)$ žymi difuzijos koeficientą, o dW yra Wiener'io procesas, atitinkantis atsitiktinio triukšmo kintamąjį (žr. 3.3 skyrelį).

2.3.2 Pirmojo kirtimo ir grįžimo laikai

Paprasčiausias vienmačio stochastinio (o kartu ir Markovinio) proceso pavyzdys yra atsitiktinis klaidžiojimas vienoje dimensijoje. Diskrečiu atveju atsitiktinio klaidžiojimo pavyzdys yra šuoliavimo procesas (angl. *hopping-process*). Tiek diskrečiu, tiek tolydžiu vienos ar daugiau dimensijų



4 pav. Kintamojo x laiko t eilutė. (a) paveikslo dalyje vaizduojami pirmojo grįžimo laikai Δt_i - kai kintamojo vertė kerta arba yra lygi ribinei vertei (žymima juoda brūkšniuota linija). (b) paveikslo dalyje vaizduojami pirmojo kirtimo laikai - laikas Δt_i , per kurį kintamojo vertė nuo vienos ribinės vertės pereina prie kitos (žr. juodas brūkšniuotas linijas).

atveju galima parodyti, jog asimptotiškai šio klaidžiojimo pirmo kirtimo ar grįžimo laikai turi specifinės formos skirstinį [29]. Pirmojo kirtimo ir grįžimo situacijos vizualiai pateikiamos 4 paveiksle.

Atsitiktinį šuoliavimą (diskretų klaidžiojimą) vienoje dimensijoje galima apibrėžti šitaip:

$$P(x, t + 1) = pP(x - 1, t) + qP(x + 1, t), \quad (35)$$

kur $P(x, t)$ žymi tikimybę dalelei būti vietoje x laiko momentu t , o p ir q žymi spartas šuoliui į vieną ar kitą kryptį. [29] parodoma, jog nepriklausomai nuo šuolio proceso detalių, tikimybės tankio skirstinys tokiems procesams yra Gauso skirstinio formos. Simetriniu šuolių spartų atveju:

$$P(x, t) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi t \langle x^2 \rangle}} e^{-\frac{(x - \langle x \rangle)^2}{2t \langle x^2 \rangle}}. \quad (36)$$

Tai yra rezultatas atsirandantis dėl centrinės ribinės teoremos. Rezultatas galioja su vienintele sąlyga, jog dydžiai $\langle x^2 \rangle$ ir $\langle x \rangle$ yra baigtiniai. Visi šie procesai gali būti ilgo laiko riboje apibūdinami kaip difuziniai procesai [29].

Asimptotinis Markovo proceso pirmojo grįžimo laikų skirstinys išvedamas pasinaudojant išgyvenimo tikimybės ir generuojančią funkcijomis. Generuojančios funkcijos apytikslė forma [29]:

$$P(0, z) \approx \int_0^\infty P(0, t) z^t dt \propto \int_0^\infty (4\pi Dt)^{-d/2} z^t dt, \quad (37)$$

kur $P(0, z)$ yra generuojanti funkcija, o z yra kintamasis gaunamas po Laplaso transformacijos. Kadangi daroma prielaida, jog tikimybės tankio skirstinys lemiamas difuzijos, procesui galima parinkti norimą dimensiją d . Generuojanti funkcija savyje turi visą informaciją apie sistemos asimptotinį veikimą ir ją galima susieti su išgyvenimo tikimybe - tai yra tikimybė $S(t)$, kad iki laiko momento t dalelė nepasiekia barjero arba grįžimo taško. Gaunamas tikimybės tankio skirstinys skirtingo matiškumo stochastiniams procesams [29]:

$$F(0, t) = -\frac{\partial S(t)}{\partial t} \propto \begin{cases} t^{d/2-2} & d < 2 \\ \frac{1}{i \ln^2 t} & d = 2. \\ t^{-d/2} & d > 2 \end{cases} \quad (38)$$

Iš čia matyti, kad vienos dimensijos atveju gaunamas $t^{-3/2}$ proporcingumas. Rezultatai pirmojo kirtimo (grįžimo) laikų vidurkiui gauti taip pat yra aptariami ir [27,28,30], kadangi tai yra panašaus pobūdžio uždavinys lyg sprendžiant Fokerio-Planko lygtį.

3 Tyrimo metodika

3.1 Gillespie algoritmas stochastinių vyksmų modeliavimui

Skaitinis eksperimento modeliavimas yra atliekamas remiantis Gillespie algoritmu [31]. Algoritmas remiasi stochastiniu pastovios spartos proceso modeliavimu. Šiame darbe Gillespie algoritmas įgyvendinamas remiantis tiesioginiu metodu (angl. *direct method*), kuris buvo pasiūlytas [31].

Pats algoritmas veikia su prielaida, jog tolydžioje laiko skalėje vyksta diskretūs įvykiai su pastoviomis spartomis tarp šių įvykių - tokiu būdu modeliuojami Puasono šuolių procesai (angl. *Poisson jump processes*) [32]. Naudojamas tiesioginis metodas remiasi Puasono procesams galiojančia superpozicijos savybe. Tai reiškia, jog tarpusavyje sąveikaujančių šuolio procesų rinkiniui $i \in \{1, 2, \dots, K\}$, čia i žymi procesą, o K žymi procesų skaičių, galioja savybė:

$$\Lambda = \sum_{i=1}^K \lambda_i, \quad (39)$$

kur λ_i žymi i -ojo proceso spartą, o Λ žymi procesų ansamblio spartą.

Pagal šį metodą įgyvendinti algoritmo žingsniui (vienam įvykiui) tereikia sugeneruoti du tolydziai pasiskirsčiusius dydžius intervale $[0, 1)$. Vienas panaudojamas sugeneruoti laikui iki kito įvykio pagal atvirkštinį rinkinių sudarymo metodą (angl. *inverse sampling method*):

$$\tau = \frac{-\ln u}{\Lambda}, \quad (40)$$

kur τ žymi laiką iki kito įvykio, u yra tolygiai pasiskirstęs atsitiktinis dydis. Kitas atsitiktinis dydis reikalingas apspręsti procesui i , kuris sugeneravo šį įvykį:

$$\Pi_i = \frac{\lambda_i}{\Lambda}, \quad (41)$$

čia Π žymi tikimybę įvykti procesui i . Tolygaus atsitiktinio dydžio verčių intervalą suskaidžius proporcingai pagal Π_i vertes galima pagal atsitiktinio dydžio vertę nuspręsti, kuris procesas sugeneravo įvykį po laiko τ .

Programos kodas skaitiniams eksperimentams atlikti buvo pritaikytas pagal erdvinio rinkėjo modelio autorių kodą [3]. Skaičiavimų paspartinimui ir tikslumui pagerinti modelio parametrų vertės yra diskrečios (sveiko skaičiaus) - modelio spartos sugeneruojamos kaip diskretūs skaičiai siekiant išvengti su trupmeninių skaičių skaičiavimais susijusių netikslumų.

3.2 Naivus Beta binominio skirstinio aproksimacijos algoritmas

Konkuruojančios dinamikos modelio spartos (26) ir (27) neleidžia nuspėti ar agentų populiacijos skirstinys atitinka Beta binoninį skirstinį. O tokiu atveju jei skirstinys atitinka - kokios parametrų α ir β vertės. Iš erdvinio rinkėjo modelio žinoma, jog α ir β vertės yra tiesiogiai susijusios su tiesinės migracijos sparta ϵ . Skirstinio prielaidai esant teisingai konkuruojančios dinamikos atveju galima nustatyti sąryšį tarp formos parametrų ir ϵ su μ .

Šiame darbe nėra tikrinama Beta binominio skirstinio hipotezė (kurią galima patikrinti remiantis neparametriniu Kolmogorovo-Smirnovo testu), tačiau pasinaudojant Beta binominio skirstinio savybėmis yra įvertinami galimi formos parametrai. Žinoma, jog Beta binominio skirstinio momentai (pavyzdžiui, vidurkis) ir variacija yra susiję su formos parametrais α , β ir bandymų skaičiumi N . Šių dydžių išraiškos:

$$\mu_{vid} = Np, \quad (42)$$

$$\sigma^2 = Np(1-p) \frac{\alpha + \beta + N}{\alpha + \beta + 1}, \quad (43)$$

kur p yra lygus:

$$p = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}. \quad (44)$$

Šiuos du dydžius nesudėtinga nustatyti iš skaitinio eksperimento gaunamų rezultatų. Taigi išsprendus dviejų lygčių sistemą gaunamos išraiškos formos parametrams:

$$\alpha = \frac{N\mu_{vid}^2 - \mu_{vid}^3 - \mu_{vid}\sigma^2}{\mu_{vid}^2 - N\mu_{vid} - N\sigma^2}, \quad (45)$$

$$\beta = \alpha \left(\frac{N}{\mu_{vid}} - 1 \right). \quad (46)$$

Tokiu būdu gaunama α vertė atitiktų spartą "į" būseną, o parametro β vertė - spartą "iš" būsenos. Šitokia aproksimacija yra tiksli tik tais atvejais kai prielaida, jog skirstinys atitinka Beta binominį, yra teisingas.

3.3 Aproksimacija vienmačiu stochastiniu procesu

Klasikiniame rinkėjo modelyje, aprašomame spartomis (16), galima pastebėti, jog egzistuoja dvi būsenos - viena apibūdinama agentų populiacija X , o kita yra likusi būseną užimta agentų $N - X$. Tokiai sistemai stochastinis aprašymas yra tikslus vienmačiu atveju, tai reiškia užtenka žinoti vienos būsenos agentų populiaciją ir, nepriklausomai nuo likusios sistemos detalios konfigūracijos (klasikiniam rinkėjo modeliui ji žinoma kaip $N - X$), galima pilnai aprašyti procesą. Erdvinio rinkėjo modelio atveju ši savybė išlieka - pagal (23 - 24) lygtis galima pastebėti, jog šuoliai į būseną ir iš jos įgyja ekvivalenčią formą rinkėjo modeliui. Ši forma leidžia likusią sistemos konfigūraciją apibūdinti dėl ϵ spartų simetrijos. Kita vertus, erdviniam rinkėjo modelyje su konkuruojančia dinamika dėl skirtingų tipo ir erdvinio vieneto populiacijų dydžių šios spartos nebėra klasikinio rinkėjo modelio formos.

Norint nustatyti ar konkuruojančios dinamikos rinkėjo modelis tiksliai aprašomas vienmačiu stochastiniu procesu jam sukonstruojama atitinkama Fokerio-Planko (arba ekvivalenti stochastinė diferencialinė) lygtis. Tai atliekama suskaičiuojant Kramers-Moyal skleidinio koeficientus, kurie yra begalinės Fokerio-Planko arba stochastinės diferencialinės lygties koeficientai, atitinkantys dreifą, difuziją ar aukštesnių eilių narius [28]:

$$D^{(n)}(X) = \frac{1}{n!\Delta t} \langle [x(t + \Delta t) - x(t)]^n \rangle_{|x(t)=X}, \quad (47)$$

čia X žymi nagrinėjamą kintamąjį, $x(t)$ yra jo realizacija laiko momentu t , $D^{(n)}(X)$ yra n -tos eilės Kramers-Moyal koeficientas. Jeigu nagrinėjamas stochastinis procesas yra aprašomas baigtine Kolmogorovo (pvz., Fokerio-Planko) lygtimi, tuomet jo dinamikai aprašyti užteks įskaityti tik pirmus du, dreifo ir difuzijos, narius [33].

Jeigu dinamikoje pasireikštų difuzijos ir šuolio procesai, pavyzdžiui, šuolinės-difuzijos lygtyse, pilnam proceso aprašymui reikėtų atsižvelgti į aukštesnės eilės narius, pavyzdžiui iki 6-os ar aukštesnių eilių [34]. Pastarajame straipsnyje pateikiamas metodas išreikšti gaunamo skirstinio momentus M_i per Kramers-Moyal skleidinio koeficientus (ir atvirkščiai). Pavyzdžiui, šuolinei difuzijos lygčiai:

$$dX = -aXdt + bdW(t) + cdJ(t), \quad (48)$$

antros eilės momentas (variacija) būtų gaunama pagal lygtį:

$$M_2 = 2\Delta t D^{(2)} + \Delta t^2 (D^{(1)})^2, \quad (49)$$

o atitinkamas šios eilės Kramers-Moyal koeficientas gaunamas:

$$D^{(2)} = \frac{2}{n!\Delta t} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [M_2 - M_1^2] \quad (50)$$

Bendros formos išraiška Kramers-Moyal koeficientams parodoma [34] pasitelkus Bell polinomas:

$$D^{(n)}(X, \Delta t) = \frac{1}{n!\Delta t} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} (k-1)! B_{n,k}(M_1, M_2, \dots, M_{n-k+1}), \quad (51)$$

kur $B_{n,k}$ žymi Bell polinomą.

Radus šiuos koeficientus, toliau reikia spręsti stochastinę diferencialinę lygtį, kokia užrašyta (34) išraiškoje. Vienas būdų lygčiai spręsti yra Eulerio-Marujamos metodas detaliau aprašytas [35]. Tai paprasčiausias Teiloro aproksimacijos su stipriu konvergavimu sprendinys. Diferencialinė lygtis (34) pakeičiama į tokios formos skirtuminę lygtį:

$$Y_{n+1} = Y_n + a\Delta t + b\Delta W, \quad (52)$$

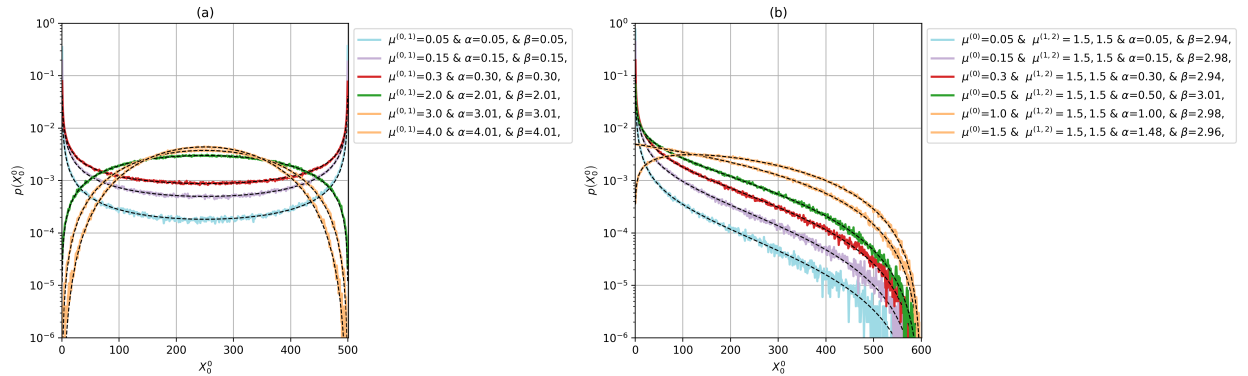
kur Y_n yra modeliuojamos eilutės vertė, Δt atitinka diskretizuotą laiko intervalą, o W yra Wiener'io procesas, kuris kai kuriuose darbuose vadinamas standartiniu Brauno judėjimu - jo pokyčių vidurkis lygus 0 ir standartinis nuokrypis yra $\sqrt{\Delta t}$.

4 Rezultatai

4.1 Agentų populiacijos skirstiniai nekonkuruojančios dinamikos atveju

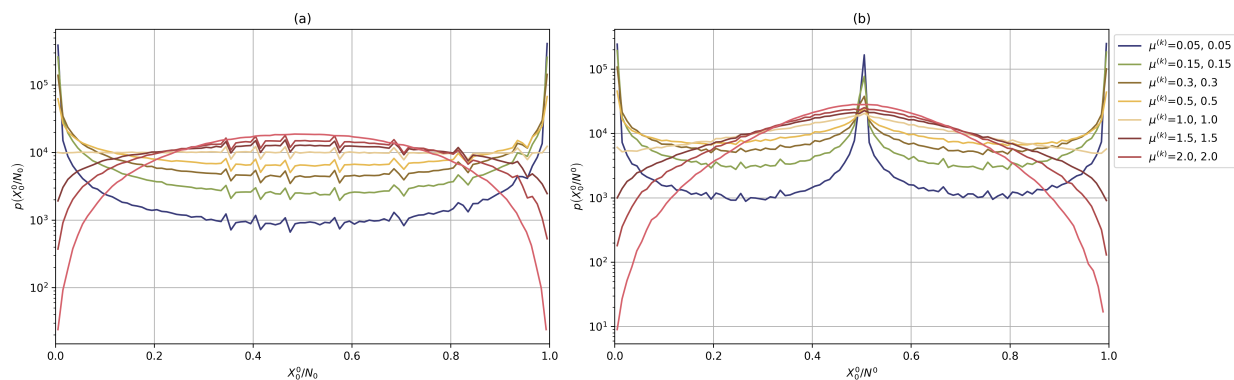
Erdvinis rinkėjo modelis be konkuruojančios dinamikos pasižymi pagrindinėmis klasikinio rinkėjo modelio savybėmis - jų stacionarus skirstinys yra tas pats ar stebint rinkėjo modelio būseną ar vieną erdvinį vienetą erdviniam rinkėjo modelyje. Erdvinio modelio atveju agentų populiacijos tikimybės tankio skirstinys atitinka Beta binominį skirstinį ir jo formos parametrai α ir β priklauso nuo spartos ϵ . Prieš papildant modelį konkuruojančia dinamika, galima analizuoti kokį poveikį turėtų migracijos proceso pakeitimas analogiškai apibrėžtu būsenos kitimo procesu pagal (25) lygtį. Modeliui su būsenos kitimo procesu gaunamas analogiškas rezultatas - β formos parametro vertė priklauso nuo pastovių būsenos kitimo spartų μ . Ši priklausomybė matoma (27) išraiškoje ir pavaizduota 5 paveiksle.

Spartos iš būsenos migracijos pasižymi tokia pačia interpretacija būsenos kitimo atveju. Migracijos atveju sparta yra suminė sparta agentui persikelti į kitą erdvinį vienetą. Kadangi persikeliant į erdvinį vienetą agento tipas k nepakinta, ši sparta įgyja tik proporcingumo koeficientą, ji lygi $(M - 1)\epsilon^{(k)}$. Kita vertus būsenos kitimu atveju - tai suminė sparta agentui pakeisti tipą. Ši suma priklauso nuo agentų tipų T skaičiaus ir kiekvienam agentų tipui parinktų proporcingų spartų $\mu^{(m)}$, kur $m \neq k$. Taip įvestos būsenos kitimo spartos yra vienodos erdviniam vienetams, bet skiriasi agentų tipams, kaip ir migracijos spartos.



5 pav. Pirmo agentų tipo pirmajame erdviniam vienetė populiacijos tikimybės tankio skirstinys. Modelis tik su būsenos keitimo dinamika (migracijos spartos prilyginamos nuliui). (a) paveiksle pavaizduotas atvejis su modelio parametrais $T = M = 2$, $N = C = 1000$, (b) paveiksle pavaizduotas atvejis $T = 3$, $M = 2$, $N = C = 1200$. Kiekviena kreivė atitinka eksperimentus su skirtingomis μ vertėmis (žr. legendą), juodos brūkšniuotos kreivės atitinka naivaus modelio aproksimaciją (formos parametrai pateikiami legendoje). Sparta iš būsenos kokybiškai atitinka $\sum_{m \neq k}^T \mu^{(m)}$ vertę.

Vieno agento tipo erdviniam vienetė ($X_0^{(0)}$) skirstinys tinkamas aprašyti bendras modelio savybes, tačiau jis neparankus atskleisti skirtumų tarp migracijos ir būsenos kitimo dinamikų. 5 paveiksle vaizduojamos kreivės gali būti gaunamos modeliui su migracija parinkus panašius parametrus. Kyla natūralus klausimas - koks skirtumas tarp migracijos ir būsenos kitimo procesų? Šiuos procesus aprašančių spartų forma itin panaši (žr. išraiškas (22) ir (25)) bei tokie skirstiniai kaip 5 paveiksle atkartojami abiejų procesų atvejais.



6 pav. Normuoti pirmo agentų tipo pirmajame erdviniame vienetė skirstiniai. Modelis tik su būsenos keitimo dinamika (migracijos spartos prilyginamos nuliui). Visos kreivės su eksperimento parametrais $T = M = 2$, $N = C = 1000$, būsenos kitimo spartos dviem agentų tipams pateiktos legendoje. (a) paveiksle pavaizduotas normavimo į erdvinio vieneto populiaciją atvejis (b) paveiksle pavaizduotas normavimo į agento tipo populiaciją atvejis.

Skirtumus įžvelgti galima analizuojant kitokio tipo skirstinius - $X_0^{(0)}/N^{(0)}$ ir $X_0^{(0)}/N_0$. Šiuos skirstinius atitinkančios kreivės pateikiamos 6 ir 7 paveiksluose. Ryškiausiai pastebima šių skirstinių savybė - priklausomai nuo proceso pobūdžio vienas skirstinys įgyja formą, kurią įgytų Beta binominis skirstinys agentų populiacijai, o kitas pasižymi sudėtingesne forma - su papildomu iškilimu ties 0.5 verte. Pavyzdžiui 6 paveiksle (būsenos kitimo atvejis) normavimo į erdvinį vienetą atvejis atitinka agentų populiacijos ($X_0^{(0)}$) skirstinio formą, o normavimas į agentų tipo populiaciją turi kitokią formą.

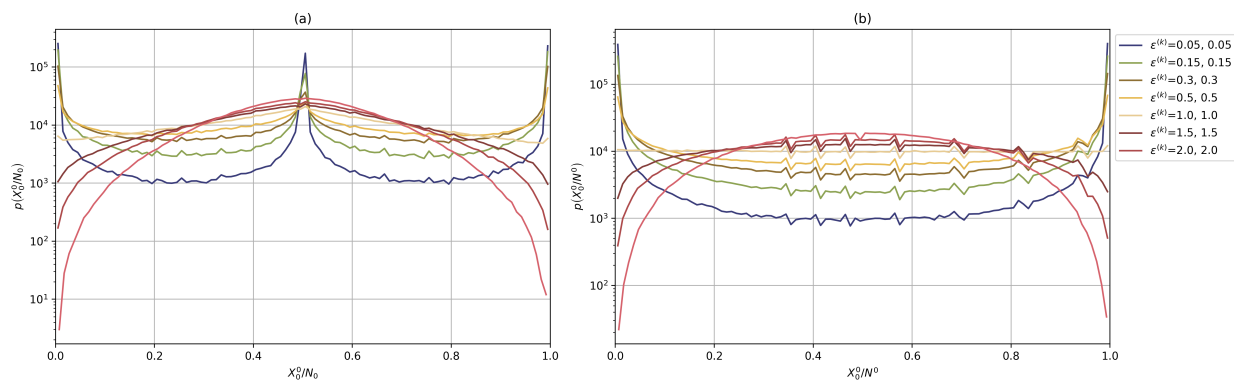
Skirstinių formos pakinta dėl to, jog, priklausomai nuo proceso, erdvės arba tipo populiacija įgyja fiksuotą reikšmę. Būsenos kitimo dinamikos atveju agentų populiacija erdviniame vienetė N_0 nekinta, taigi atitinka Beta binominio skirstinio atvejį, kai $N_0 = N/M$. Toks pats argumentas galioja migracijos atveju - populiacija vienam agentų tipui nekinta ir lygi $N^{(0)} = N/T$.

Iškilusios linijos atsiradimas yra susijęs su tuo, jog vienam iš populiacijos dydžiui (pavyzdžiui, erdvinio vieneto) nekintant, dydžiai $X_0^{(0)}$ ir $X_0^{(1)}$ yra tarpusavyje nepriklausomi. Iškilusi sritis padalija skirstinį į dvi simetriškas dalis. Pradinėje būsenoje atvejui $T = M = 2$ tiek erdvinio vieneto, tiek agentų tipo populiacijos požiūriu agentai pasiskirstę lygiai, todėl rezonansinė linija matyti ties 0.5 verte. Kintant T dydžiui, papildomos linijos atsirastų ties $1/t$, kiekvienai vertei $t \in \{2, 3, \dots, T\}$. Analogiškas rezultatas galioja M parametrui.

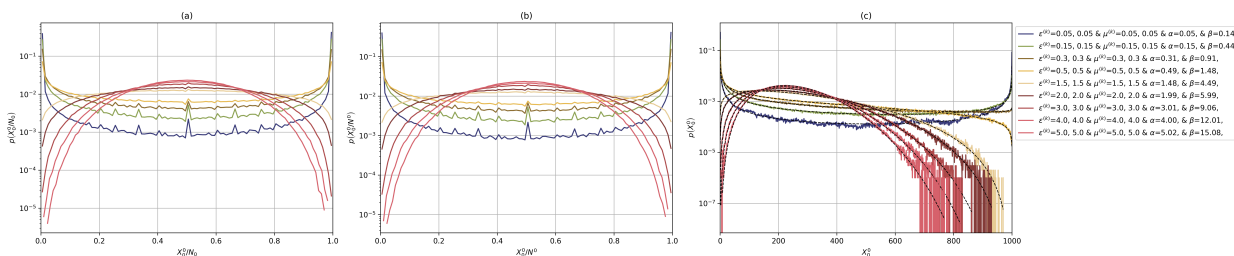
Pati iškilimo forma yra nulemta būsenos kitimo ar migracijos spartų dydžių - kuo spartos didesnės, tuo dažnesni atvejai kai daugiau agentų palieka pradinį erdvinį vienetą ar tipą. Nuo spartų priklauso kraštutinių atvejų, kai didžioji dalis agentų užima vieną erdvinį vienetą arba tipą, dažnumas.

4.2 Agentų populiacijos skirstinių priklausomybė nuo modelio spartų konkuruojančios dinamikos atveju

Analizuojant konkuruojančios dinamikos atvejus galima pradėti nuo simetrinio atvejo - parinkus parametrus $T = M = 2$ bei $\mu^{(k)} = \epsilon^{(k)}$. Šiuo atveju matyti, jog normalizuoti agentų populiacijos



7 pav. Normuoti pirmo agentų tipo pirmajame erdviame vienete skirstiniai. Modelis tik su migracijos dinamika (migracijos spartos prilyginamos nuliui). Visos kreivės su eksperimento parametrais $T = M = 2$, $N = C = 1000$, migracijos spartos dviem agentų tipams pateiktos legendoje. (a) paveiksle pavaizduotas normavimo į erdvinio vieneto populiaciją atvejis (b) paveiksle pavaizduotas normavimo į agento tipo populiaciją atvejis.

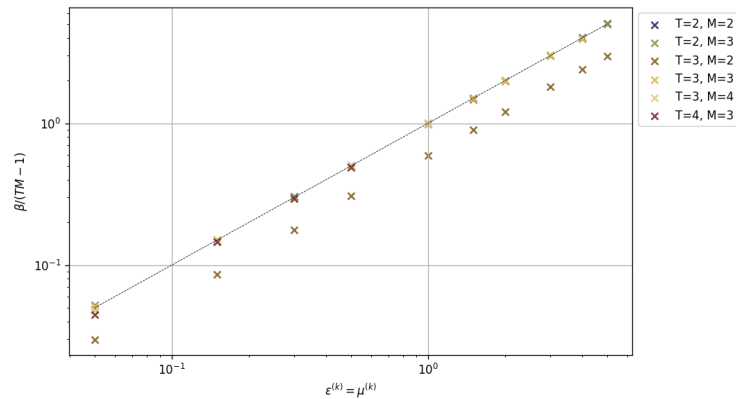


8 pav. Normuoti (a, b) ir nenormuoti (c) pirmo agentų tipo pirmajame erdviame vienete skirstiniai. Simetriinių spartų atvejis modeliui su konkuruojančia dinamika. Visos kreivės su eksperimento parametrais $T = M = 2$, $N = C = 1000$, migracijos ir būsenos kitimo spartos pateiktos legendoje. Juodos brūkšninės linijos (c) grafike atitinka naivaus modelio aproksimacija Beta binominiu skirstiniu.

skirstiniai yra vienodi nepriklausomai nuo normalizavimo į N_0 ar $N^{(0)}$ (žr. 8 paveikslo (a) ir (b)). Kita vertus to paties paveikslo (c) dalyje pateikto $X_0^{(0)}$ skirstinio forma skiriasi nuo pastarųjų - šios maksimumas pasislinkęs į mažesnių verčių sritį. Įvertinus Beta binominį skirstinį naivios aproksimacijos modeliu gaunama eksperimento rezultatus kokybine prasme atitinkanti aproksimacija. Iš gautų verčių pastebima, jog formos parametras β pasižymi proporcingumu $TM - 1$ vertei. Šis daugiklis - tai suminis "kitų" agentų tipų ir erdvių vienetų kombinacijų skaičius. Formos parametras β yra lemiamas šuolių į kitas būsenas spartos, toks proporcingumas rodo efektinę šuolio spartą į kitas būsenas lygią bet kuriai pasirinktai būsenai. Tai neintuityvus rezultatas, nes apibrėžtos šuolių spartos lygtys (22) ir (25) tokių šuolių neleidžia. Įvertinus šį proporcingumą kitoms T ir M verčių kombinacijoms galima pastebėti, jog simetriškų spartų verčių formos parinkimas lemia agentų verčių pasiskirtymą pagal Beta binominį skirstinį. Ši priklausomybė pavaizduota 9 paveiksle.

Kita vertus įdomu išsiaiškinti kokį poveikį skirstiniams turi skirtingų ϵ ir μ verčių parinkimas pagal agento tipą. Viena vertus galima laikyti pastovias ϵ vertes ir keisti visas μ vertes (žr. 11 pav.), kita vertus galima keisti μ priklausomai nuo agento tipo (žr. 10 pav.).

Iš šių pavyzdžių galima pastebėti, jog keičiant μ vertes pagrindinis pokytis įvyksta $X_0^{(0)}/N_0$ skirstinyje, kaip ir buvo pastebėta nekonkuruojančios dinamikos atveju. Atvejais, kai $\mu^{(0)} \neq \mu^{(1)}$



9 pav. Naivaus modelio aproksimacijos formos parametro β verčių priklausomybės nuo spartų $\mu^{(k)} = \epsilon^{(k)}$ dydžio. Būsenos kitimo ir migracijos spartos simetriškos ir atitinka pateiktas 8 paveiksle. Legendoje pateiktos skirtingas kreives atitinkančios T ir M eksperimento parametrų vertės. N vertės kiekvienai kreivei lygios $25 \cdot T \cdot M$. Logaritminės ašys skirtos pabrėžti santykiniams nuokrypiams nuo $y = x$ atvejo, kuris pateiktas juoda brūkšnine linija.

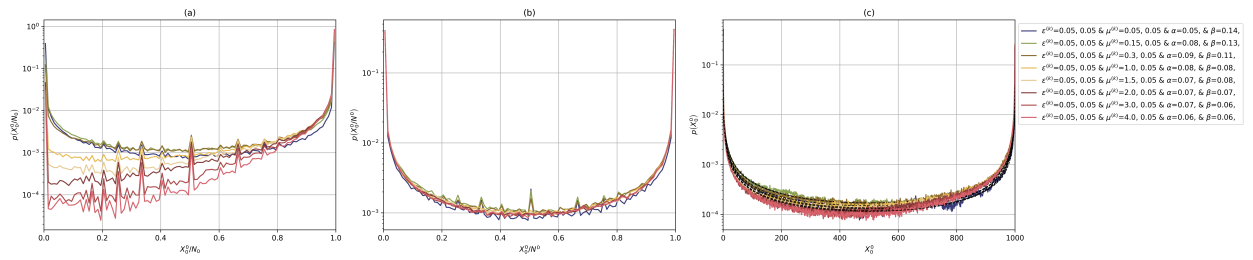
šis pokytis keičiasi - pavyzdžiui, agentų tipui su didesne būsenos pakitimo į šį tipą sparta skirstinys įgyja didesnes tikimybes aukštesnių verčių skirstyje. Dėl didesnės santykinės spartos tarp agentų tipų pirmojo agentų tipo būseną yra dažniau pasirenkama. Šį efektą galima pastebėti 10 (a) paveiksle.

Padidinus ϵ vertes ir tokiu pačiu būdu keičiant μ (t.y. išlaikant μ tarpusavyje nevienodas) - stebimas pokytis kito tipo normuotame skirstinyje ($X_0^{(0)}/N_0$) (žr. 12 paveikslo (b) dalį). Tačiau to paties paveikslo (a) dalis yra vis dar yra kokybiškai panaši į 10 paveikslo (a) dalimi.

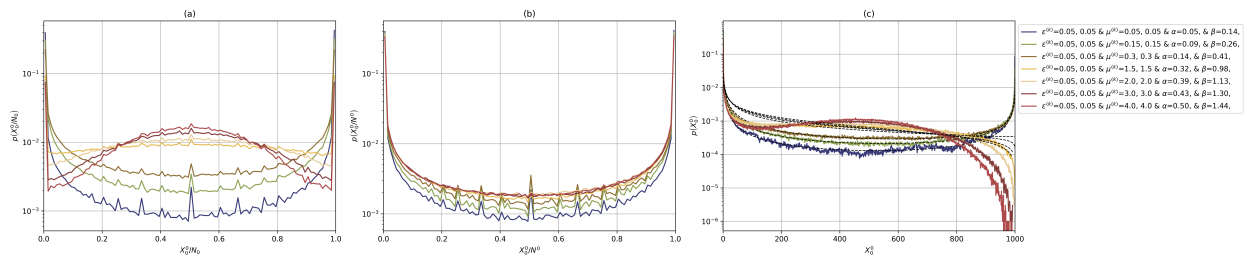
Kitais atvejais keičiant ϵ vertes vietoje μ gaunami kokybiškai tokie patys rezultatai, tačiau vietoje grafikų (a) dalyse stebimų pokyčių (t.y. skirstinyje $X_0^{(0)}/N_0$), pokytis yra stebimas (b) dalyje ($X_0^{(0)}/N_0$ skirstinyje). Be to, esant tarpusavyje skirtingoms $\epsilon^{(k)}$ ir $\mu^{(k)}$ vertėms naivaus aproksimacijos modelis nebeduoda tikslių aproksimacijų. Aproksimacijos netikslumas paneigia prielaidą, jog skirstinys atitinka Beta binominį skirstinį.

Kai kurių grafikų $X_0^{(0)}/N_0$ ir $X_0^{(0)}/N_0$ skirstiniuose galima pastebėti artefaktus primenančių rezonansinių linijų. Šių linijų intensyvumas kai kuriais gaunamais atvejais yra priklausomas nuo sistemos dydžio parinkimo, pavyzdžiui, viso agentų skaičiaus N . Dar tiksliau - nuo agentų skaičiaus tenkančio vienam agentų tipo erdviniam vienetui, t.y. $N/(TM)$. Šios linijos sutinka su tokių trupmenų kaip $2/3$ ar $3/4$ ir pan. vertėmis.

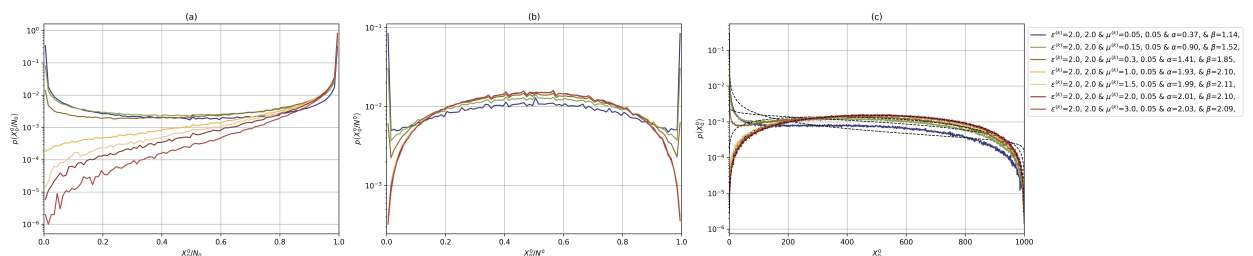
Migracijos ir būsenos kitimo spartų formose (22) ir (25) be tiesinio nario egzistuoja ir netiesinis narys - priklausantis nuo "iš" būsenos populiacijos ir "į" būsenos populiacijos dydžių. Šio nario poveikį galima pastebėti 11 (b) ar 12 (b) paveiksluose. Nors atitinkamos tiesinės spartos ϵ vertės nekinta, tačiau stebimas skirstinių pokytis. Tai gali būti lemiamas dėl netiesinio nario poveikio migracijos spartoms - dėl būsenos kitimo sukurtos didelės populiacijos erdviniuose vienetuose vyksta dažnesnė migracija į šiuos vienetus.



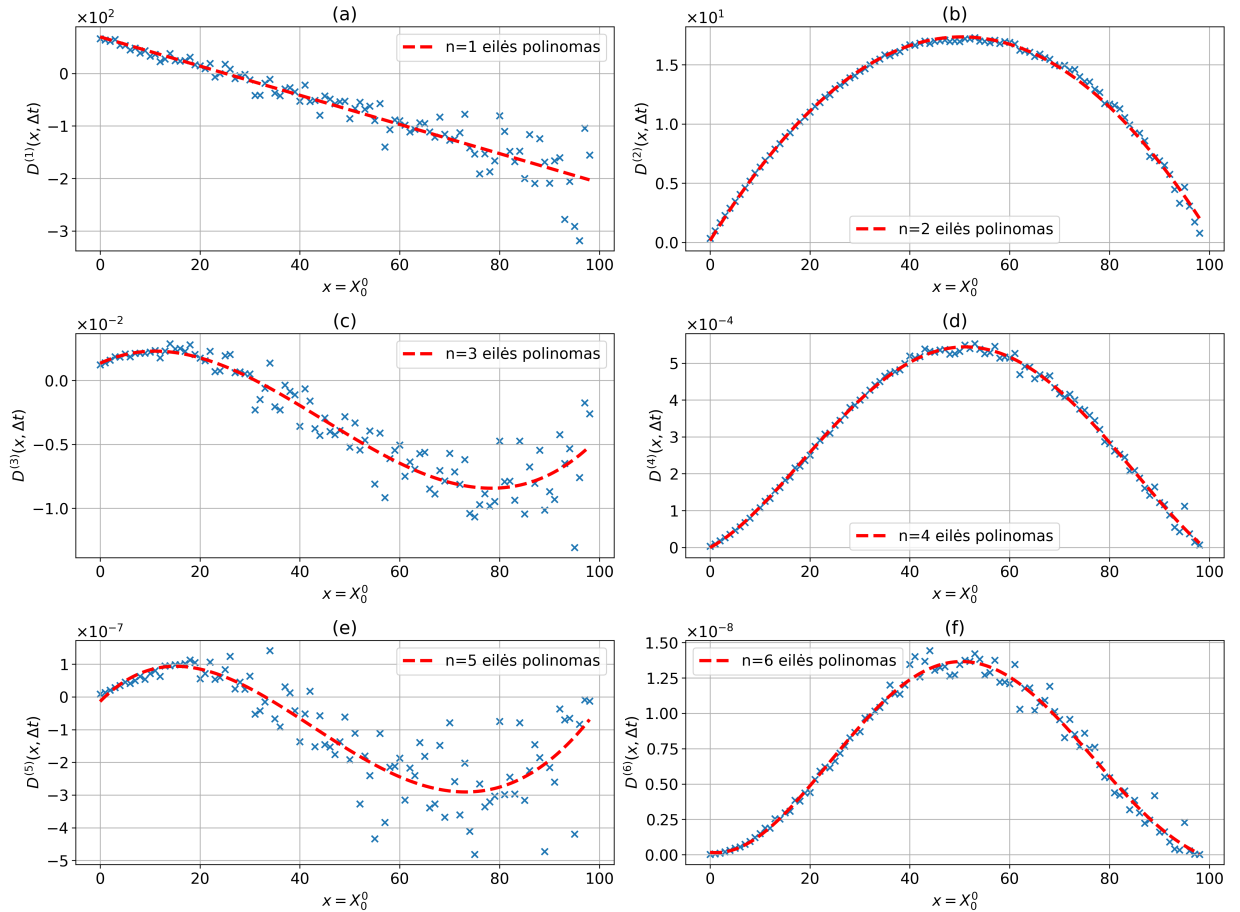
10 pav. Normuoti (a, b) ir nenormuoti (c) pirmo agentų tipo pirmajame erdviiniame vienete skirstiniai. Pastovių ϵ verčių su nevienodomis μ vertėmis atvejis modeliui su konkuruojančia dinamika. Visos kreivės su eksperimento parametrais $T = M = 2$, $N = C = 1000$, migracijos ir būsenos kitimo spartos pateiktos legendoje. Juodos brūkšninės linijos (c) grafike atitinka naivaus modelio aproksimacija Beta binominiu skirstiniu.



11 pav. Normuoti (a, b) ir nenormuoti (c) pirmo agentų tipo pirmajame erdviiniame vienete skirstiniai. 10 atvejis su padidintomis ϵ vertėmis. Modelis su konkuruojančia dinamika. Visos kreivės su eksperimento parametrais $T = M = 2$, $N = C = 1000$, migracijos ir būsenos kitimo spartos pateiktos legendoje. Juodos brūkšninės linijos (c) grafike atitinka naivaus modelio aproksimacija Beta binominiu skirstiniu.



12 pav. Normuoti (a, b) ir nenormuoti (c) pirmo agentų tipo pirmajame erdviiniame vienete skirstiniai. Modelis su konkuruojančia dinamika. Visos kreivės su eksperimento parametrais $T = M = 2$, $N = C = 1000$, migracijos ir būsenos kitimo spartos pateiktos legendoje. Juodos brūkšninės linijos (c) grafike atitinka naivaus modelio aproksimacija Beta binominiu skirstiniu.

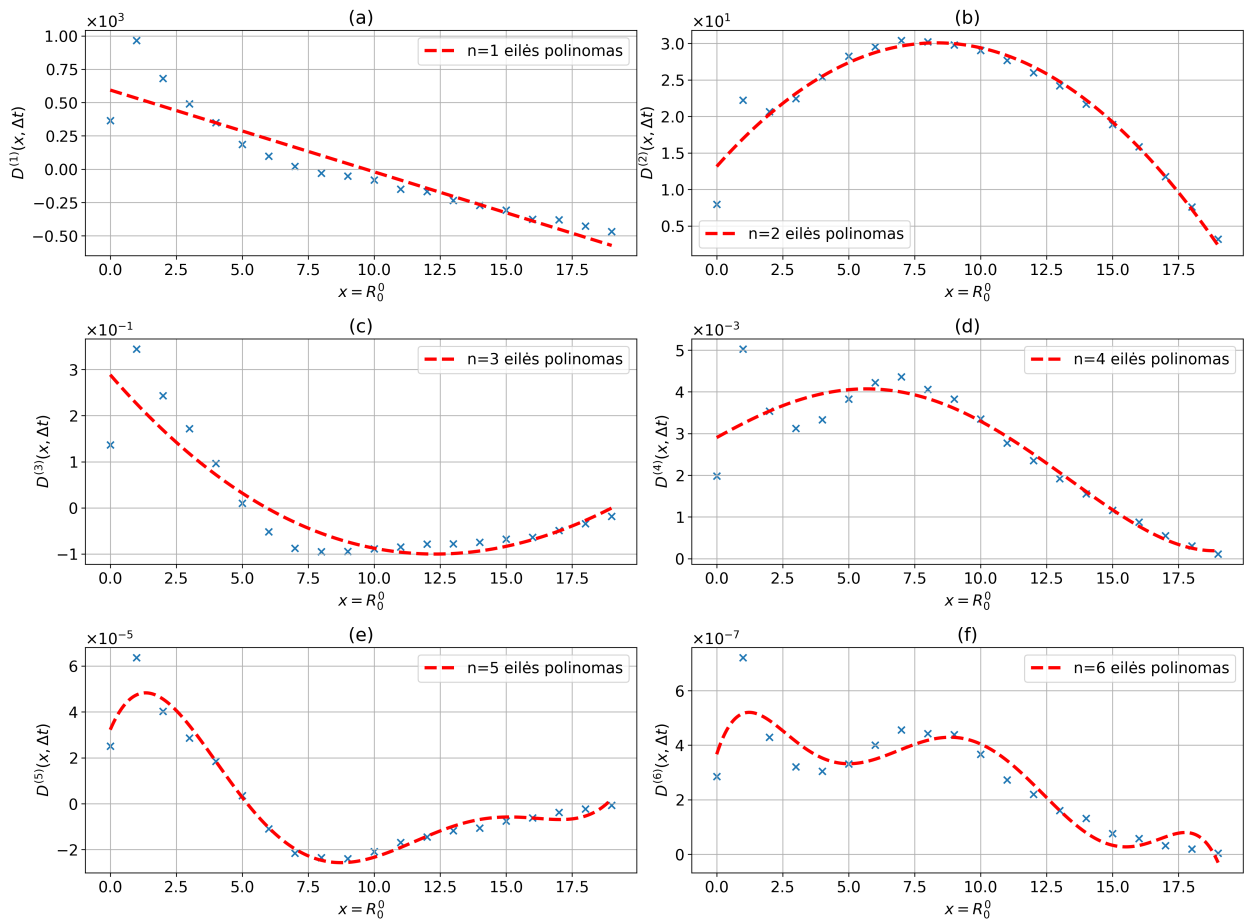


13 pav. Kramers-Moyal koeficientų priklausomybė nuo pirmo tipo agentų pirmame erdviame vienetė populiacijos. Grafikai vaizduoja skirtingų eilių Kramers-Moyal koeficientų kreives. Konkuruojančios dinamikos modelio parametrai $N = C = 100$, $T = M = 2$, $\epsilon = \mu = 1$. Vertės gautos laiko eilutei su skyra lygia vidutinei šuolių tarp būsenų trukmei $\Delta t = 2.4 \cdot 10^{-6}$. Kreives aproksimuojančio polinomo eilė priklauso nuo Kramers-Moyal koeficiento eilės.

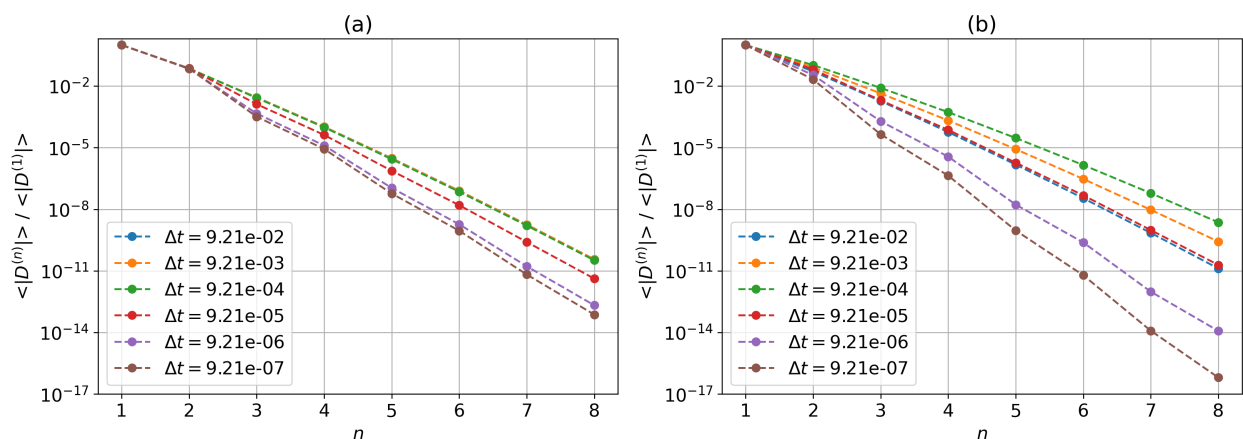
4.3 Kramers-Moyal koeficientų verčių nustatymas

Atliekant skaitinį modeliavimą naudojant Gillespie algoritmą gaunama laiko eilutė su įvairių verčių laiko intervalais. Kadangi laiko intervalai atrenkami pagal atvirkštinį rinkinių sudarymo metodą, šio kintamojo vertė kiekvienam įvykiui yra skirtinga. Siekiant suskaičiuoti Kramers-Moyal koeficientų priklausomybę nuo agentų tipo erdviame vienetė populiacijos dydžio (pvz., $X_0^{(0)}$) ar rango kintamojo ši laiko eilutė performuojama į vienodo intervalo tarpų laiko eilutę, tai reiškia, jog suvienodinama eilutės laiko skyra. Suvienodinta rezoliucija yra parenkama lygi šuolių tarp būsenų intervalų vidutinei vertei.

Erdvinio rinkėjo modelio su populiacija Kramers-Moyal koeficientų kreivių formos priklauso nuo koeficiento eilės. Pavyzdžiui, lyginės eilės koeficientai yra parabolinės formos erdviniam rinkėjo modeliui, o pirmos eilės - tiesinis. Antros eilės koeficientas atitinka difuzijos narį Fokero-Planko lygtyje. Pagal šio koeficiento kreivės formą galima teigti, jog difuzijos poveikis yra didžiausias vidutinių verčių srityje ir difuzija veikia silpniausiai populiacijos vertei esant kraštutinei. Pirmų 6 eilių Kramers-Moyal koeficientų kreivės ir jas aproksimuojantys atitinkamos eilės polinomialai yra pateikiami 13 paveiksle.



14 pav. Kramers-Moyal koeficientų priklausomybė nuo pirmo tipo agentų pirmame erdviiniame vienetė rango. Grafikai vaizduoja skirtingų eilių Kramers-Moyal koeficientų kreives. Nekonkuruojančios dinamikos modelio su **rango** kintamuoju parametrai $N = C = 100$, $M = 20$, $T = 1$, $\epsilon = 1$. Vertės gautos laiko eilutei su skyra lygia vidutinei šuolių tarp būsenų trukmei $\Delta t = 9.2 \cdot 10^{-7}$. Kreivės aproksimuojančio polinomo eilė priklauso nuo Kramers-Moyal koeficiento eilės.



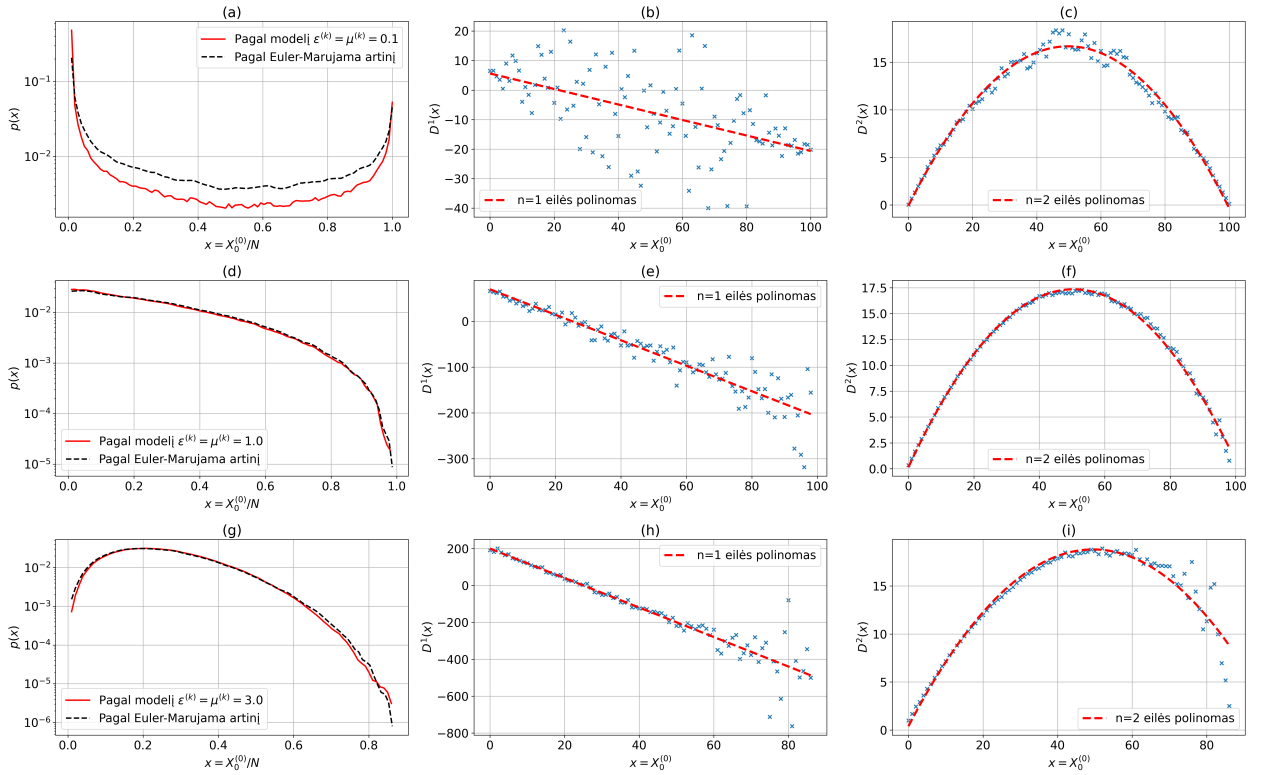
15 pav. Normalizuotų Kramers-Moyal koeficientų kreivių absoliučių verčių vidurkių priklausomybė nuo koeficiento eilės n (sveikiems skaičiams, brūkšniuota tiesė skirta vizualizavimui). Verčių skalė sunormuota į pirmos eilės Kramers-Moyal koeficientą $n = 1$. Kairiame (a) grafike pateikiama aproksimacija erdviniam rinkėjo modeliui su rango kintamuoju, dešiniame (b) grafike pateikiama aproksimacija modeliui su populiacijos kintamuoju. Modelio parametrai $N = C = 100$, $M = 2$, $T = 1$, $\epsilon = 1$ Vertės gautos laiko eilutėms su skirtinga skyra Δt (žr. legenda). Rango kintamojo (a) atveju aukštesnių koeficientų ($n > 2$) įtaka kinta mažiau lyginant su kitu atveju (b).

Kita vertus Kramers-Moyal koeficientų kreivių formos skiriasi erdviniam rinkėjo modeliui pagal rango kintamąjį. Šiuo atveju koeficientų kreivių vertės galima interpretuoti kaip dreifo, difuzijos ar šuolių įtaką aukšto arba žemo rango erdviniam vienetai. Dreifo ir difuzijos nariai turi aproksimacijas artimas kaip ir įprastiniam erdvinio rinkėjo modeliui su populiacija, bet aukštesnių negu 2-os eilės kreivių forma skiriasi (žr. 14 paveiksle).

Pagal (47) galima pastebėti, jog laiko eilutės skyra Δt lemia Kramers-Moyal koeficientų tikslumą aproksimuojant stochastinį procesą. Koeficientų pokytis priklausomai nuo laiko eilutės skyros pateikiamas 15 paveiksle. Galima pastebėti, jog riboje $\Delta t \rightarrow 0$ aukštesnių eilių ($n > 2$) koeficientai savo verčių amplitudė sumažėja lyginant su pirmų dviejų eilių koeficientais. Rango atveju (15 (a) pav.) ši priklausomybė mažesnė negu populiacijos kintamojo atveju (15 (b) pav.). Jeigu šis mažėjimas nebūtų stebimas tai reikštų, jog aukštesnių koeficientų eilių įtaka dinamikai nepriklauso nuo proceso tolydumo prielaidos, tačiau turi pastovų indėlį į proceso dinamiką. Šio darbo apimtyje buvo sugeneruota ir laiko eilutė, kuriai gaunamos kreivės 15 paveiksle nepriklauso nuo eilutės skyros Δt .

4.4 Konkuruojančios dinamikos erdviniam rinkėjo modelyje aproksimacija vienmačiu stochastiniu procesu

Pagal prieš tai buvusiame skyrelyje aptartas Kramers-Moyal koeficientų kreives ir pasinaudojant (52) lygtimi Eulerio-Marujamos metodu yra sugeneruojama laiko eilutė su skyra Δt . Ši skyra parenkama tokia kaip nurodyta skyrelyje prieš tai. Erdviniam rinkėjo modeliui su konkuruojančia dinamika įdomu patikrinti du atvejus - savaiminių spartų $\epsilon^{(k)}$ ir $\mu^{(k)}$ vertėms esant tarpusavyje lygioms bei asimetrinius atvejus, kai vertės nėra tarpusavyje lygios. Pastarajam atvejui 4.2 skyrelyje buvo pastebėta, jog agentų tipo erdviniam vienete populiacijos skirstiniai nėra gerai aproksimuo-



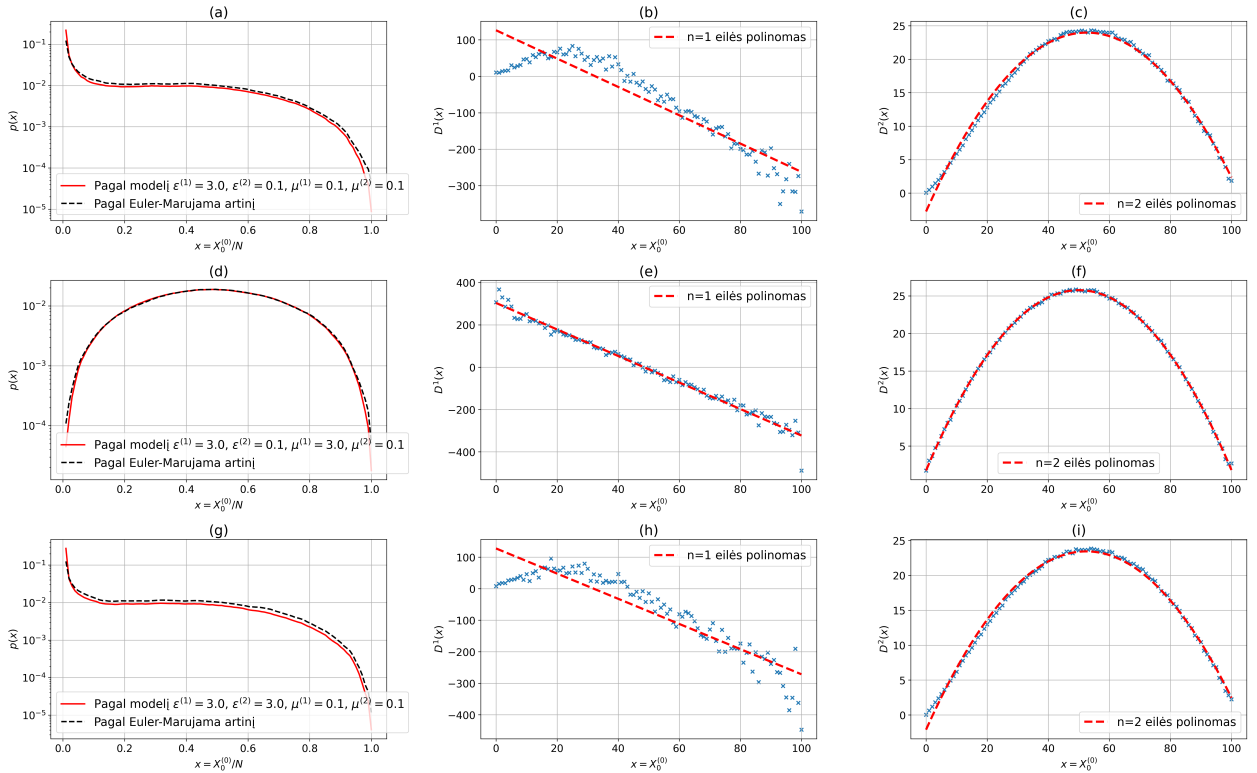
16 pav. (a), (d) ir (g) pateikiama pirmo tipo agentų pirmajame erdviniam vienetui normalizuotos populiacijos tikimybės tankio skirstinys. Raudonos kreivės žymi modelio rezultatus, o juodos žymi vienmačio stochastinio proceso artinį (savaiminės spartos **simetrinės**, žr. legendą). (b), (e) ir (h) pateikiami 1-os eilės, o (c), (f) ir (i) 2-os eilės Kramers-Moyal koeficientų kreivės ir jų atitinkamos eilės polinominės aproksimacijos. Modelio parametrai $T = M = 2$, $N = C = 100$, $\epsilon^{(k)}$ ir $\mu^{(k)}$ vienodi paveikslams vienoje eilėje (žr. kairiausio paveikslų legendą).

jami Beta binominiu skirstiniu.

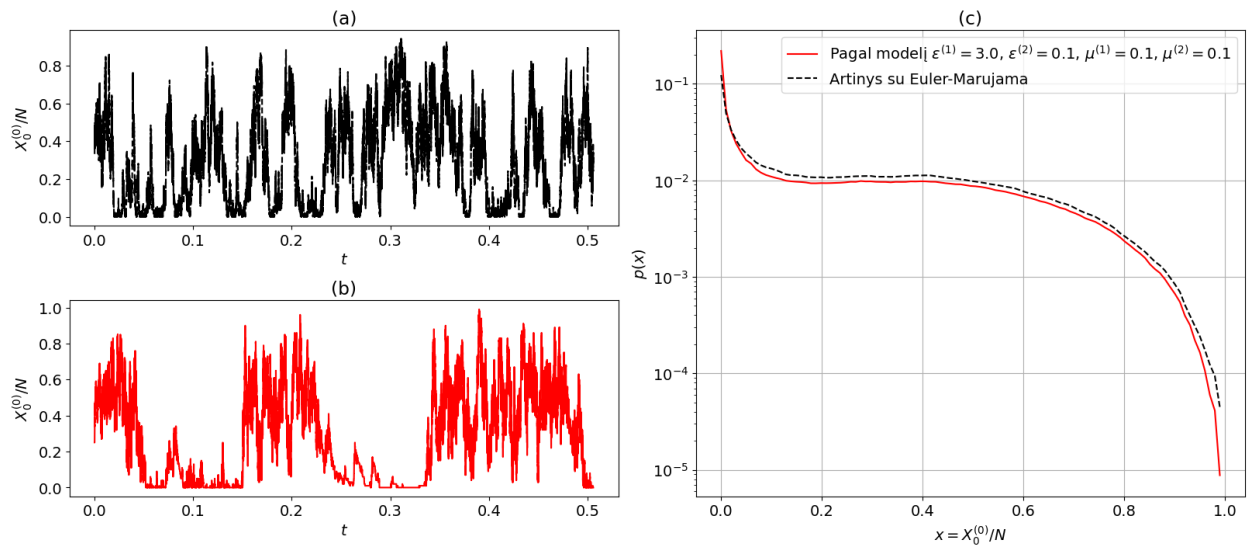
Simetrinio atvejo aproksimacijos yra pateikiamos 16 paveiksle ir nesimetrinio - 17 paveiksle. Visiems atvejams aproksimuojant vienmačiu stochastiniu procesu gauti skirstiniai sutampa arba yra artimi skirstiniams gautiems iš tiesioginio modelio. Vienas iš pasireiškiančių nesutapimų yra mažų (0.1) simetrinių spartų verčių atvejo skirstinių nesutapimas (žr. 16 (a) pav.) Taip pat galima pastebėti, jog šiam atvejui 1-os eilės Kramers-Moyal koeficiento vertės (b) yra išsibarsčiusios nesutampanti skirstinio srityje. Tikėtina, jog šis nesutapimas yra dėl skaitmeninio netikslumo - modeliui su šiais parametrais erdvinuose vienetuose vyrauja mažos arba didelės populiacijos vertės, o dėl tarpinių verčių stokos gauta prasta 1-os eilės Kramers-Moyal aproksimacija. Šis efektas nežymiai pastebimas ir 2-os eilės Kramers-Moyal koeficiento vertėse (c).

Nesimetrinių atvejų aproksimacijoms pastebimas 1-os eilės Kramers-Moyal koeficientų verčių netiesiškumas - tiesiškai aproksimacija 17 (b) ir (h) vertės neaproksimuojamos. Tai yra neintuityvus rezultatas, kadangi (33) lygtyse kitokios eilės proporcingumas nėra numatomas.

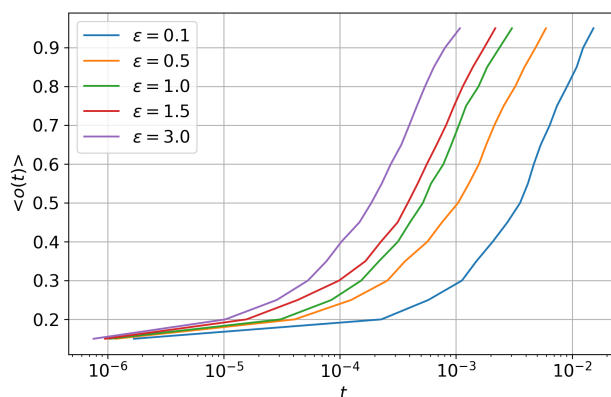
Iš gautų skirstinių aproksimacijų galima apibendrinti, jog aproksimacijos yra tikslios ir atkar-toja visus kokybinius bruožus nepriklausomai nuo savaiminių spartų parinkimo simetriškumo ar asimetriškumo. Galima manyti, jog tai yra vienmačio Markovinio proceso atvejai net ir tuomet kai gauti skirstiniai nėra aproksimuojami Beta-binominiu skirstiniu. Detalesnis vaizdas į modelio ir Eulerio-Marujamos metodu sugeneruotas laiko eilutes yra pateikiamas 18 paveiksle.



17 pav. (a), (d) ir (g) pateikiama pirmo tipo agentų pirmajame erdviniame vienete normalizuotos populiacijos tikimybės tankio skirstinys. Raudonos kreivės žymi modelio rezultatus, o juodos žymi vienmačio stochastinio proceso artinį (savaiminės spartos **nesimetrinės**, žr. legendą). (b), (e) ir (h) pateikiami 1-os eilės, o (c), (f) ir (i) 2-os eilės Kramers-Moyal koeficientų kreivės ir jų atitinkamos eilės polinominės aproksimacijos. Modelio parametrai $T = M = 2$, $N = C = 100$, $\epsilon^{(k)}$ ir $\mu^{(k)}$ vienodi paveikslams vienoje eilėje (žr. kairiausio paveikslo legendą).



18 pav. (c) pateikiami pirmo agentų tipo pirmame erdviniame vienete normalizuotos populiacijos tikimybės tankio skirstinys. (a) ir (b) pateikiamos modelio ir artinio laiko eilučių iškarpos, normalizuotos populiacijos priklausomybė nuo sistemos laiko t . Modelio parametrai $T = M = 2$, $N = C = 100$, savaiminės spartos žr. (c) paveikslo legendoje.



19 pav. Sistemos dalies, kuri yra atsidūrusi sistemos ranginiame sąrašė (TOP 2), priklausomybė nuo vidutinio laiko, per kurį ši sistemos dalis yra patekusi į sąrašą. Rezultatai erdviniam rinkėjo modeliui su rangų kintamuoju, modelio parametrai $T = 1$, $M = 20$, $N = 100$, skirtingos kreivės pagal ϵ (žr. legendą).

4.5 Erdvinio rinkėjo modelio rango-dydžio skirstiniai

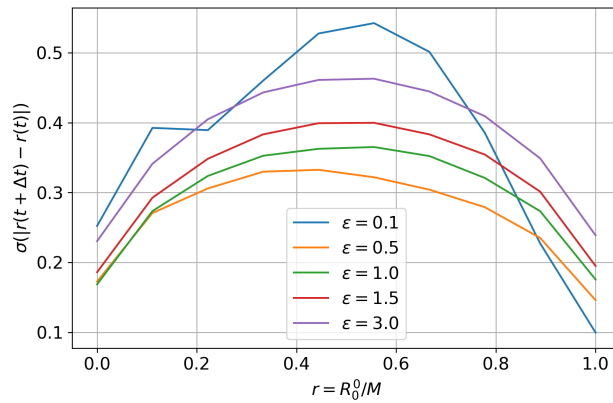
Vienas iš [3] pasiūlytų būdų analizuoti agentų populiacijos skirstinius erdviniam rinkėjo modelyje - per rango-dydžio kreives, kurios savo interpretacija panašios į sudėtinio tikimybės tankio funkcijas. Šiam modeliui rango-dydžio skirstiniai, kaip ir tikimybės tankio skirstiniai, yra stacionarūs. Stacionarumas nereiškia, jog agento tipo erdviniam vienete populiacija nekinta laike - šis pokytis vyksta išlaikant pastovios formos rango-dydžio skirstinį. Prieš nustatant (nekonkuruojančios dinamikos) erdvinio rinkėjo modelio su rango kintamuoju aprašymo vienmačių stochastiniu procesu galimumą, pradžioje verta detaliau pasigilinti į rangų dinamikos savybes modelyje.

Rangų dinamika pasižyminčios sistemos yra nagrinėjamos [4, 5] darbuose, kur analizuojami iš medicininių, socialinių ir panašių sistemų gauti empiriniai duomenys. Empirinių sistemų rangų laikinei dinamikai analizuoti pasitelkiama keletas statistikų - rango (įverčio) stabilumo kriterijus bei rango sąrašo atsinaujinimas.

Ranginio sąrašo atsinaujinimo laikas empirinėse sistemose apibūdina vidutinį laiką, per kurį sistema atnaujinama savo ranginį sąrašą naujais elementais (pavyzdžiui, TOP 10). Rodiklio vertė būtų 0.2 tuomet, kai 20 proc. sistemos elementų iki laiko t yra buvę ranginiame sąrašė. [4] darbe analizuojamos empirinės sistemos skiriasi savo atvirumu dėl sąrašo atsinaujinimo laiko formos - uždaresnėms sistemoms šios kreivės pasižymi skirtingu tiesiniu polinkio kampu negu atviresnėms. Kreivės nebūtinai tiesinės, tas ypač pasireiškia atviresnėms sistemoms, kuriose dalis elementų gali sparčiau pateikti į ranginį sąrašą negu kiti.

Erdvinio rinkėjo modelio atveju sparta ϵ yra ranginio sąrašo atsinaujinimą kontroliuojantis parametras. Parametro vertė lemia spartesnį aukštesnių sąrašo verčių atsinaujinimą, o žemesnes vertes veikia nežymiai (žr. 19 pav.). Tai skirtingas rezultatas nuo empirinių sistemų rezultatų pagal [4], kur skirtingos sistemos pasižymi skirtingo proporcingumo tiesėmis. Šiuo požiūriu erdvinis rinkėjo modelis gali aprašyti tik vienokio tipo ranginę sistemą, o ne daugelį skirtingų.

Rango (įverčio) stabilumo kriterijus yra matuojamas kaip absoliučių verčių standartinis nuokrypis pasirinktoms rango (įverčio atveju - populiacijos) vėrtėms. Šis dydis yra labai panašus į Kramers-Moyal koeficientą, kuriam vietoje standartinio nuokrypio yra vertinamas n -os eilės skirtumų



20 pav. Rango stabilumo priklausomybė nuo normalizuoto rango vertės. Rezultatai erdviniam rinkėjo modeliui su rangų kintamuoju, modelio parametrai $T = 1$, $M = 20$, $N = 100$, skirtingos kreivės pagal ϵ (žr. legendą). 1 atitinka aukščiausio įverčio (populiacijos) rangą (rango viršus), 0 atitinka žemiausio įverčio (populiacijos) rangą.

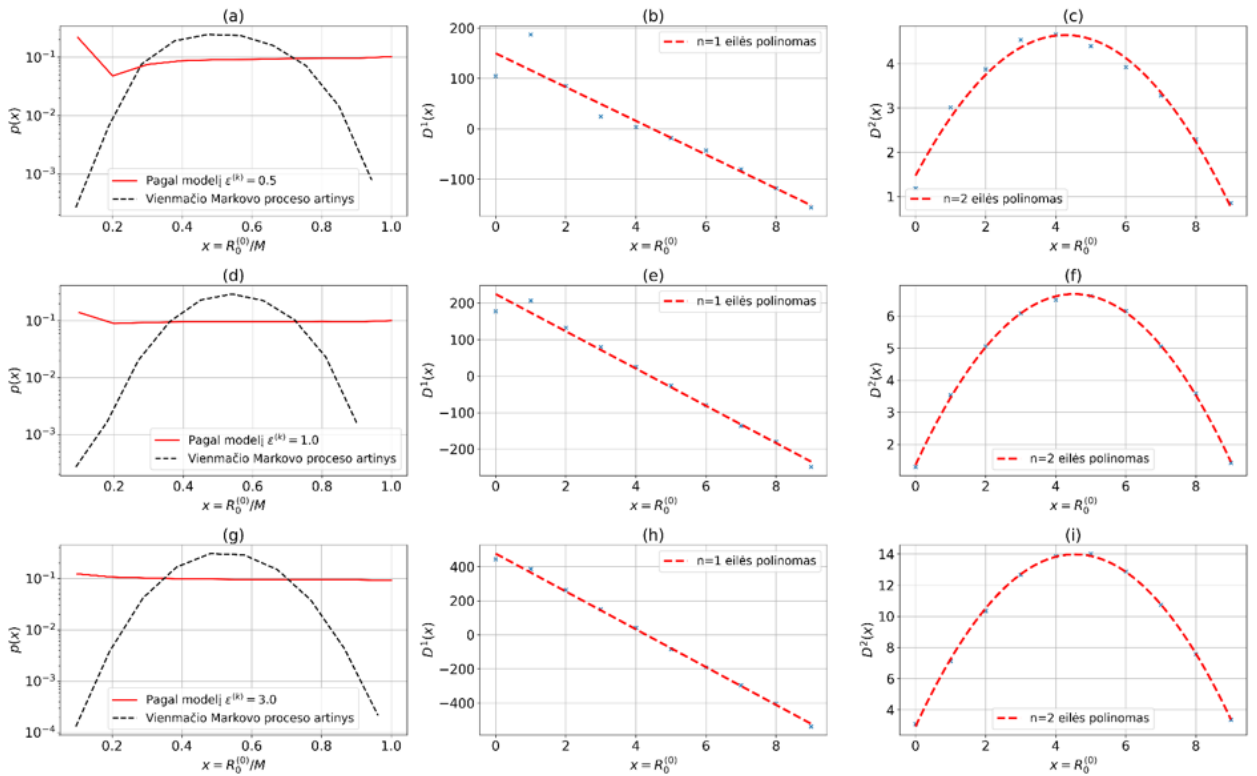
vidurkis. Empirinėms sistemoms šis dydis kinta pagal laipsninį dėsnį [5], o erdviniam rinkėjo modeliui šis rezultatas panašus į rezultatus gautus Kramers-Moyal koeficientų kreivėms (žr. 20 paveikslą). Verta pastebėti, kad, priešingai negu empiriniams duomenims, rinkėjo modelis pasižymi stabilium rango stabilumu žemo įverčio nariams (žemiausio įverčio nariai, o kartu ir rango - ties 0). Laipsninės funkcijos, arba empirinių duomenų, atveju žemiausi rangai pasižymėtų nestabilumu.

4.6 Erdvinio rinkėjo modelio rangų dinamikos aproksimacija vienmačiu stochastiniu procesu

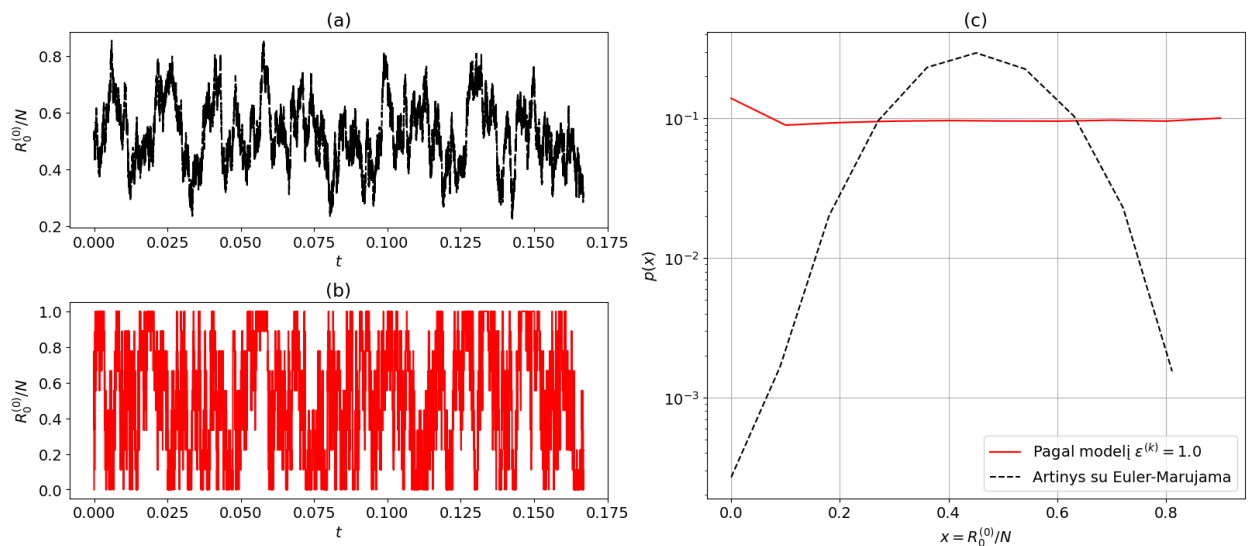
Erdvinio rinkėjo modelio rangų dinamikai įgyvendinami tie patys žingsniai kaip ir 4.4 skyrelyje su vieninteliu pakeitimu - vietoje populiacijos erdviniuose vienetuose analizuojamas erdviniam vienetui priskiriamas rangas. Tokiu būdu gaunamos vienmačio stochastinio proceso aproksimacijos yra netikslios. Šie rezultatai apibendrinami 21 ir 22 paveiksluose.

Iš skaitmeninio modelio laiko eilučių gaunami rango tikimybės tankio skirstiniai primena tolydųjį (angl. *uniform*) skirstinį. Viena vertus, toks rezultatas yra tikėtinas ir įprastai gaunamas atvejais kai atsitiktinis klaidžiojimas vyksta ne begalinėje, o apribotoje erdvėje, šiuo atveju tarp normalizuotų rango verčių 0 ir 1. Tačiau pagal artinį modeliuotos eilutės skirstinys panašesnis į normalųjį skirstinį ir neatitinka modelio erdvinio rinkėjo modelio rezultatų (žr. 21 (a), (d) ir (g) paveikslus).

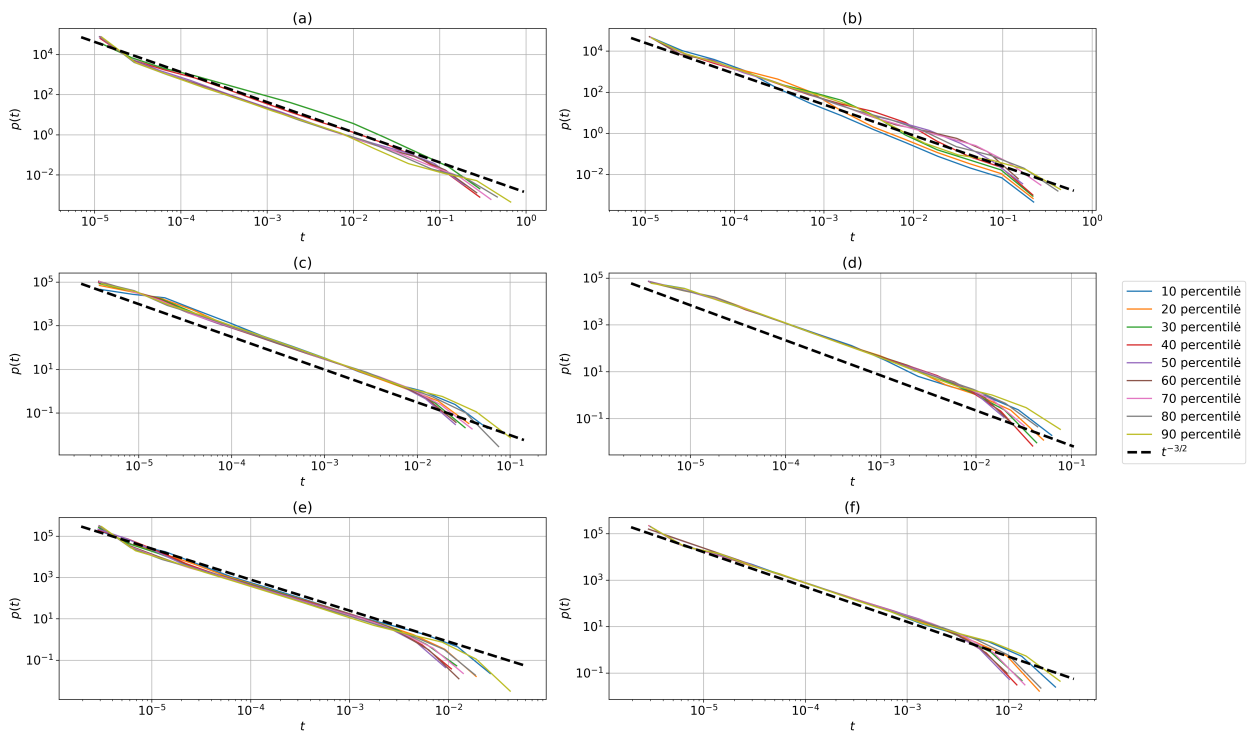
Vienas iš tokio skirtumo aiškinimų gali būti susijęs su tuo, jog vis dėlto pirmų dviejų Kramers-Moyal koeficiento verčių nepakanka pilnai atkartoti rangų dinamikai. Taip pat tai reiškiasi, jog rangų dinamikos aproksimacija Fokerio-Planko lygtimi nėra pakankama ir verta būtų įskaityti aukštesnius narius arba naudoti diferencialinę Kolmogorovo-Čapmano lygtį [27] įskaitant šuolius arba naudojant šuolinę-difuzinę lygtį [34]. Rango kintamojo atveju yra įmanomas pakitimas, kuomet rangas pakinta daugiau negu per 1-ą vertę per vieną Gillespie modeliavimo žingsnį. Modelio ir artinio laiko eilutės yra pateikimos 22 (a) ir (b) paveiksluose.



21 pav. (a), (d) ir (g) pateikiama pirmo tipo agentų pirmajame erdviiniame vienete normalizuoto rango tikimybės tankio skirstinys. Raudonos kreivės žymi modelio rezultatus, o juodos žymi vienmačio stochastinio proceso artinį (savaiminės spartos ϵ skiriasi paveikslams eilėje, žr. legendą). (b), (e) ir (h) pateikiami 1-os eilės, o (c), (f) ir (i) 2-os eilės Kramers-Moyal koeficientų kreivės ir jų atitinkamos eilės polinominės aproksimacijos. Modelio parametrai $T = 1$, $M = 10$, $N = C = 100$, ϵ vienodi paveikslams vienoje eilėje (žr. kairiausio paveikslo legendą).



22 pav. (c) pateikiama pirmo agentų tipo pirmame erdviiniame vienete normalizuoto rango tikimybės tankio skirstinys. (a) ir (b) pateikiamos modelio ir artinio laiko eilučių iškarpos, normalizuoto rango priklausomybė nuo sistemos laiko t . Modelio parametrai $T = 1$, $M = 10$, $N = C = 100$, savaiminės spartos žr. (c) paveikslo legendoje.



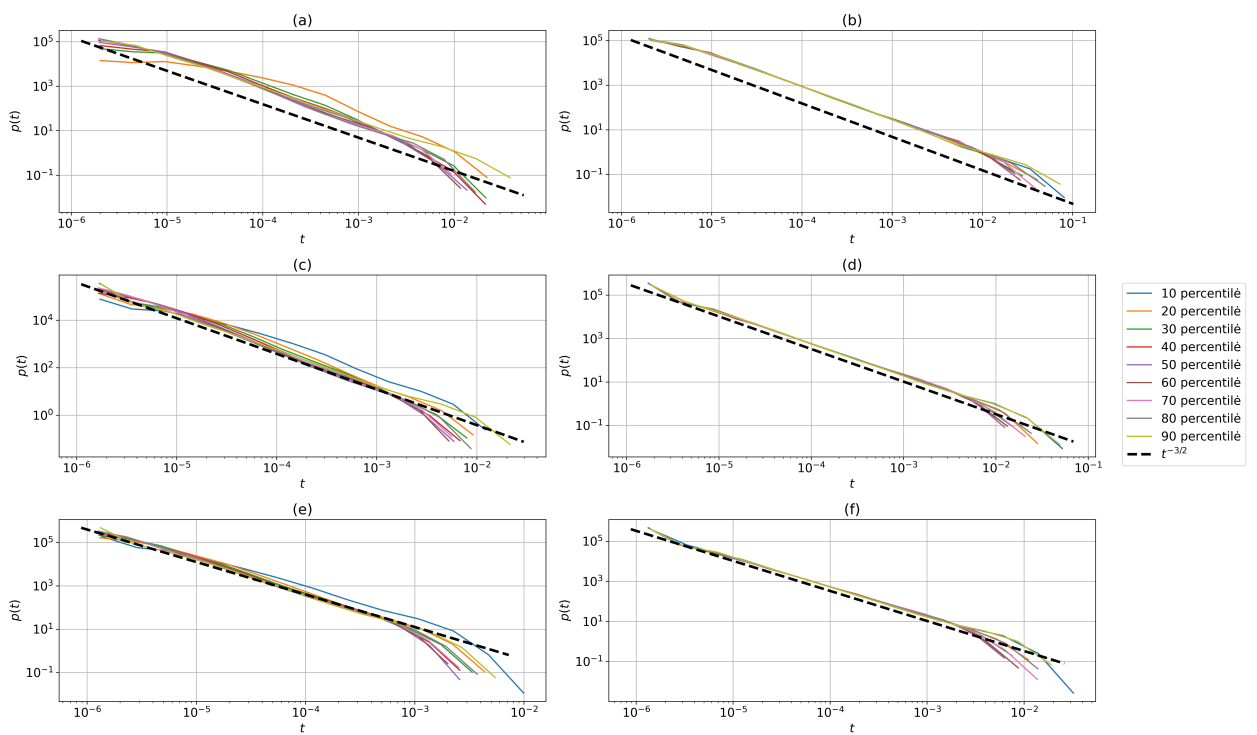
23 pav. Konkuruojančios dinamikos erdviame rinkėjo modelyje pirmojo grįžimo laikų tikimybės tankio skirstiniai. (a), (c) ir (e) pateikiami skirstiniai gauti modeliui pagal spartas, o (b), (d) ir (f) pateikiami skirstiniai gauti vienmačio stochastinio proceso artiniui. Skirtingos kreivės atitinka atvejus, kai grįžimo riba nustatyta į populiacijos skirstinio percentilines vertes (žr. legendą). Modelio parametrai $T = M = 2$, $N = C = 100$, spartos simetrinės ir pagal eilę atitinka spartas iš 16 paveiklo.

4.7 Pirmojo grįžimo laikai konkuruojančios ir rangų dinamikos atvejais

Konkuruojančiai dinamikai ir rangų dinamikai erdviame rinkėjo modelyje gaunami skirtingi aproksimacijos į vienmatį stochastinį procesą rezultatai. Remiantis pirmojo kirtimo laikų aprašymu, tai galima panaudoti kaip dar vieną testą nustatyti ar procesas iš tiesų yra vienmatis stochastinis (kartu ir Markovinis) procesas.

Abiejų dinamikų pirmojo grįžimo laikų kreivės pateiktos 23 pav. (konkuruojančiai dinamikai) ir 24 pav. (rangų dinamikai). Bendrai galima pastebėti, jog pirmojo kirtimo laikų skirstiniai artinams pagal Eulerio-Marujamos metodą yra labai tiksliai pasiskirstę pagal literatūroje pateikiamą $t^{-3/2}$ dėsnį. Rezultatas intuityvus, kadangi toks artinys pagal savo apibrėžimą yra vienmatis Markovinis procesas. Kita vertus skirtingos grįžimo vertės pasirinkimas, grafikuose tai atitinka skirtingas skirstinio percentilines vertes, neturi reikšmingo kokybinio pokyčio apskaičiuotiems grįžimo laikų skirstiniams.

Lyginant abiejų dinamikų pirmojo grįžimo laikus tarpusavyje konkrečias išvadas daryti sudėtinga - abiemis dinamikoms dėsnis yra panašus arba artimas $t^{-3/2}$, jis neįgyja kategoriškai kitokio proporcingumo. Tačiau rangų dinamikai priklausomai nuo ϵ parametro vertės atsiranda grįžimo kreivių išlinkimas, kuris nėra panašus į griežtą Eulerio-Marujamos atveju gaunama proporcingumą. Todėl galima manyti, jog rangų dinamika pasižymi nukrypimu ir skirtingais, o ne vienu, proporcingais skirstinio srityse.



24 pav. Rangų dinamikos erdviniame rinkėjo modelyje pirmojo grįžimo laikų tikimybės tankio skirstiniai. (a), (c) ir (e) pateikiami skirstiniai gauti modeliui pagal spartas, o (b), (d) ir (f) pateikiami skirstiniai gauti vienmačio stochastinio proceso artiniui. Skirtingos kreivės atitinka atvejus, kai grįžimo riba nustatyta į populiacijos skirstinio percentilines vertes (žr. legendą). Modelio parametrai $T = 1$, $M = 10$, $N = C = 100$, savaiminės spartos pagal eilę atitinka spartas iš 21 paveikslėlio.

5 Išvados

1. Konkuruojančios dinamikos erdvinio rinkėjo modelio agentų populiacijos skirstiniai yra pasiskirstę pagal Beta binominį skirstinį tik simetriniu savaiminių migracijos ir būsenos spartų atvejais ($\epsilon^{(k)} = \mu^{(k)}$).
2. Konkuruojančios dinamikos modelis yra tiksliai aproksimuojamas vienmačiu Markovo procesu esant simetrinėms ir asimetrinėms savaiminių migracijos ir būsenos kitimo spartų vertėms.
3. Erdvinio rinkėjo modelio rangų dinamikos aproksimacija vienmačiu Markovo procesu naudojant tik pirmų dviejų eilių Kramers-Moyal koeficientus nėra tiksli.
4. Pirmojo grįžimo laikų skirstiniai konkuruojančios dinamikos atveju atitinka gaunamus vienmačiams difuzijos procesams, o nekonkuruojančios rangų dinamikos atveju pasireiškia priklausomybė nuo ribos į kurią grįžtamą vertės ir savaiminių migracijos šuolių ϵ .

6 Pristatymai konferencijose ir parama tyrimui

Šio tyrimo rezultatai buvo pristatyti stendiniais ir žodiniais pranešimais tarptautinėse ir nacionalinėse mokslinėse konferencijose:

- J. Kvedaravičius, A. Kononovičius, “**Erdvinio rinkėjo modelio rangų dinamikos aprašymas Fokerio-Planko lygtimi**“, LMT studentų konferencija, Vilnius, Lietuva. Žodinis pranešimas, gegužės 16 - 17 dienomis, 2024.
- J. Kvedaravičius, A. Kononovičius, “**Rank dynamics in compartmental voter model**“. Konferencija DPG Meeting of the Condensed Matter Section, 2024, Berlynas, Vokietija. Stendinis pranešimas, kovo 17-22 dienomis, 2024.
- J. Kvedaravičius, A. Kononovičius, “**Competing dynamics in compartmental voter model**“, Konferencija Open Readings, 2024, Vilnius, Lietuva. Stendinis pranešimas, balandžio 18 – 21 dienomis, 2024.
- J. Kvedaravičius, A. Kononovičius, “**Scaling index to measure spatial patterns in competing dynamics Ising model**“. Konferencija International Conference of Young Scientists and Post-Graduate Students, Užhorodas, Ukraina. Žodinis pranešimas, gegužės 15 – 18 dienomis, 2023.
- J. Kvedaravičius, A. Kononovičius, “**Spatial diversity in competing dynamics Ising model**“. Konferencija Open Readings, 2023, Vilnius, Lietuva. Žodinis pranešimas, balandžio 18 – 21 dienomis, 2023.

Dalis tyrimo rezultatų gauti įgyvendinant Lietuvos mokslų tarybos remiamą studentų tyrimų semestro metu projektą Nr. S-ST-23-122, pavadinimu "Rangų dinamika erdviniam rinkėjo modelyje".

ERDVINIO RINKĖJO MODELIO SU KONKURUOJANČIA DINAMIKA
APROKSIMAVIMAS VIENMATE FOKERIO-PLANKO LYGTIMI

Santrauka

Fizikiniai socialinių sistemų modeliai siekia aprašyti realius socialinius procesus panaudodami agentais paremtą modeliavimą. Jeigu daromos prielaidos apie socialinių agentų esmines savybes yra pernelyg reduktyvios - modelio rezultatų palyginimas su empiriniais duomenimis tampa keblus. Dauguma dabartinių nuomonių dinamikos modelių nėra validuoti empiriniais duomenimis. Rezultatų palyginamumui pagerinti kai kurie autoriai sėkmingai pritaikė idėją vietoje laikinio sistemos modeliavimo pasitelkti erdvinį modeliavimą, pavyzdžiui, migraciją arba kasdienį mobilumą.

Poreikis validuoti modelius remiantis empiriniais duomenis sukelia iššūkių dėl duomenų įvairovės problemos. Nuomonių dinamika pasireiškia sistemose, kurios tarpusavyje nėra paprastai palyginamos, pavyzdžiui, demokratiniuose procesuose, socialiniuose tinkluose, Eurovizijos balsavimuose ir panašiai. Nors šiose sistemose naudojami įverčiai (dydžiai) tiesiogiai nesilygina, iš daugelio dalykų galima sudaryti palyginamus rango-dydžio sąrašus. Jei rangai kinta laike galima analizuoti jų laikinę dinamiką. Kai kuriems empiriniams duomenims rangų dinamiką galima modeliuoti kaip vienmatį stochastinį procesą - vieno rango kitimas laike gali suteikti pakankamai informacijos apibūdinti visos sistemos dinamikai.

Šiame tyrime išplečiamas ir analizuojamas erdvinis rinkėjo modelis su dviem fundamentaliais fizikiniais nuomonių dinamikos procesais - būsenos kitimo ir vietų apsikeitimo vyksmais. Šio tyrimo tikslas - Erdvinio rinkėjo modelio su konkuruojančia dinamika aproksimavimas vienmačiu Markovo procesu. Pagrindiniai darbo rezultatai yra šie:

1. Konkuruojančios dinamikos erdvinio rinkėjo modelio stacionarus populiacijos dalies skirstinys nevisais atvejais aprašomas Beta binominiu skirstiniu. Pagal šį skirstinį erdvinio vieneto populiacija yra pasiskirsčiusi tik simetrinių savaiminių šuolių tarp būsenų spartų atvejais.
2. Konkuruojančios dinamikos erdvinis rinkėjo modelis yra gerai aprašomas vienmate Fokerio-Planko lygtimi, todėl yra tiksliai aproksimuojamas kaip vienmatis Markovinis procesas. Kita vertus, rangų dinamikai aproksimuoti vienmačiu Markoviniu procesu nepakanka atsižvelgti į pirmų dviejų Kramers-Moyal koeficientų vertes.
3. Modelio rangų dinamikos pirmojo grįžimo laikų skirstiniai kinta priklausomai nuo savaiminės šuolių tarp būsenų spartos ir neatitinka laikinio $t^{-3/2}$ proporcingumo. Rango kintamasis gali kisti netolydžiai todėl būtų tiksliau aprašomas šuoline-difuzijos lygtimi, o Fokerio-Planko lygtyje į šuolinius procesus neatsižvelgiama.

APPROXIMATION OF COMPETING DYNAMICS COMPARTMENTAL VOTER MODEL TO ONE-DIMENSIONAL FOKKER-PLANCK EQUATION

Summary

Models in sociophysics aim to describe real social processes with the use of agent based modeling. If the underlying assumptions of the model are too reductive, the empirical validation becomes difficult. Most of the currently developed models lack empirical validation. Some overcame this issue by accounting for spatial dynamics, i.e. migration or commuting.

The need to validate with empirical data also poses challenges regarding the diversity of data. Opinion dynamics are concerned with data which are intrinsically difficult to compare, e.g. democratic elections, interactions in social networks, Eurovision voting, etc. Even though scores in these systems are uncomparable, the ranking (rank-size distributions) provide a general framework to compare such data. If ranks vary in time, rank dynamics can be analyzed. For some empirical data rank dynamics can be modelled as one-dimensional Markov processes - change of one rank over long enough period of time is enough to describe dynamics of the system.

In this research we extend compartmental voter model to competing dynamics case by introducing state change and space exchange processes. The goal of this thesis is to approximate compartmental voter model with competing dynamics to one-dimensional Markov process. The main results are these:

1. Competing dynamics compartmental voter models stationary distribution of population in compartment is not necessarily distributed by Beta-binomial distribution. It is only the case for symmetric choice of idiosyncratic transition rates between states.
2. Competing dynamics compartmental voter model is well approximated by one-dimensional Fokker-Planck equation thus being a one-dimensional Markov processes. For rank dynamics, however, accounting for first two orders of Kramers-Moyal coefficients is not enough to approximate to one-dimensional Markov process.
3. First return times of ranking dynamics in the model depend on idiosyncratic transition rates and do not necessarily follow the power law of $t^{-3/2}$. Rank variable can change discontinuously thus leading to a jump-diffusion process, where as Fokker-Planck equation does not account for jump processes.

Literatūra

- [1] A. F. Peralta, J. Kertész, G. Iñiguez, Opinion dynamics in social networks: From models to data (2022).
- [2] J. Fernández-Gracia, K. Suchecki, J. J. Ramasco, M. Miguel, V. Eguíluz, Is the voter model a model for voters?, *Physical Review Letters* **112**, 158701 (2014).
- [3] A. Kononovicius, Compartmental voter model, *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment* **2019**, 103402 (2019).
- [4] G. Iñiguez, C. Pineda, C. Gershenson, A.-L. Barabási, Dynamics of ranking, *Nature Communications* **13**, 1646 (2022).
- [5] N. Blumm, G. Ghoshal, Z. Forró, M. Schich, G. Bianconi, J.-P. Bouchaud, A.-L. Barabasi, Dynamics of ranking processes in complex systems, *Physical Review Letters* **109** (2012).
- [6] C. Castellano, S. Fortunato, V. Loreto, Statistical physics of social dynamics, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 591–646 (2009).
- [7] P. Krapivsky, S. Redner, E. Ben-Naim, *A Kinetic View of Statistical Physics* (Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2010, 2010).
- [8] B. K. C. Parongama Sen, *Sociophysics: An Introduction* (Oxford university Press, 2014).
- [9] M. E. J. Newman, G. T. Barkema, *Monte Carlo Methods in Statistical Physics* (Clarendon Press, Oxford, 1999).
- [10] H. Jang, M. Grimson, T. Woolf, Stochastic dynamics and the dynamic phase transition in thin ferromagnetic films, *Physical review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics* **70**, 047101 (2004).
- [11] D. Landau, K. Binder, *A Guide to Monte Carlo Simulation in Statistical Physics* (Cambridge University Press, 2005).
- [12] T. Tome, M. J. de Oliveira, M. A. Santos, Non-equilibrium ising model with competing glau-ber dynamics, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **24**(15), 3677 (1991).
- [13] W. Figueiredo, B. Grandi, Competing spin dynamics in ising systems, *Brazilian Journal of Physics* **30** (2000).
- [14] J. Gonzalez-Miranda, P. Garrido, J. Marro, J. Lebowitz, Nonequilibrium phase diagram of ising model with competing dynamics, *Physical Review Letters* **59** (1987).
- [15] S. Artz, S. Trimper, Competing glau-ber and kawasaki dynamics, *International Journal of Modern Physics B* **23** (1998).
- [16] P. Clifford, A. Sudbury, A model for spatial conflict, *Biometrika* **60**(3), 581–588 (1973).

- [17] A. Kirman, Ants, rationality, and recruitment, *The Quarterly Journal of Economics* **108**(1), 137–156 (1993).
- [18] A. Kononovicius, *Applications of Statistical Physics in Modeling of Financial Markets and Social Processes*, Ph.D. thesis, Vilnius university (2015).
- [19] A. Kononovicius, Supportive interactions in the noisy voter model, *Chaos Solitons Fractals* **143**, 110627 (2021).
- [20] R. Kazakevičius, A. Kononovicius, Anomalous diffusion in nonlinear transformations of the noisy voter model, *Physical Review E* **103** (2021).
- [21] B. L. Granovsky, N. Madras, The noisy voter model, *Stochastic Processes and their Applications* **55**(1), 23–43 (1995).
- [22] S. Mori, M. Hisakado, K. Nakayama, Voter model on networks and the multivariate beta distribution, *Physical Review E* **99**(5) (2019).
- [23] A. Kononovicius, Noisy voter model for the anomalous diffusion of parliamentary presence, *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment* **2020**, 063405 (2020).
- [24] A. Kononovicius, J. Ruseckas, Continuous transition from the extensive to the non-extensive statistics in an agent-based herding model, *The European Physical Journal B* **87**, 169 (2014).
- [25] D. Stauffer, A biased review of sociophysics, *Journal of Statistical Physics* **151** (2012).
- [26] M. E. J. Newman, Power laws, pareto distributions and zipf’s law, *Contemporary Physics - CONTEMP PHYS* **46** (2004).
- [27] C. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods* (Springer Berlin, Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2009).
- [28] H. Risken, *Fokker-Planck Equation* (Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1996), 63–95.
- [29] S. Redner, *A Guide to First-Passage Processes* (Cambridge University Press, 2001).
- [30] N. Van Kampen, *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*, North-Holland Personal Library (Elsevier, Amsterdam, 2007), third edition edition.
- [31] D. T. Gillespie, A general method for numerically simulating the stochastic time evolution of coupled chemical reactions, *Journal of Computational Physics* **22**, 403–434 (1976).
- [32] N. Masuda, C. L. Vestergaard, *Gillespie Algorithms for Stochastic Multiagent Dynamics in Populations and Networks*, Elements in the Structure and Dynamics of Complex Networks (Cambridge University Press, 2023).

- [33] A. Kononovicius, J. Ruseckas, Stochastic dynamics of n correlated binary variables and non-extensive statistical mechanics, *Physics Letters A* **380**, 1582–1588 (2016).
- [34] L. Rydin Gorjão, D. Witthaut, K. Lehnertz, P. G. Lind, Arbitrary-order finite-time corrections for the kramers–moyal operator, *Entropy* **23**(5) (2021).
- [35] E. P. Peter E. Kloeden, *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations* (Springer Berlin, Heidelberg, 1999).