VILNIAUS UNIVERSITETAS
ŠIAULIŲ AKADEMIJA

MATEMATIKOS MAGISTRO STUDIJŲ PROGRAMA
Didžiųjų duomenų analitikos specializacija

ANDRIUS GEŠTAUTAS

Magistro studijų baigiamasis darbas

BEURLINGO DZETA FUNKCIJŲ UNIVERSALUMAS

Darbo vadovas: prof. dr. Darius Šiaučiūnas

Šiauliai, 2024

Studijuojančiojo, teikiančio baigiamąjį darbą, GARANTIJA

WARRANTY of Final Thesis

Vardas, pavardė *Name, Surname*	**Andrius Geštautas**
Padalinys *Faculty*	**Šiaulių akademija** *Šiauliai Academy*
Studijų programa *Study Programme*	**Matematika** *Mathematics*
Darbo pavadinimas *Thesis topic*	**Berlingo dzeta funkcijų universalumas** *Universality of the Beurling Zeta-Functions*
Darbo tipas *Thesis type*	**Magistro baigiamasis darbas** *Master Thesis*

Garantuoju, kad mano baigiamasis darbas yra parengtas sąžiningai ir savarankiškai, kitų asmenų indėlio į parengtą darbą nėra. Jokių neteisėtų mokėjimų už šį darbą niekam nesu mokėjęs.

I guarantee that my thesis is prepared in good faith and independently, there is no contribution to this work from other individuals. I have not made any illegal payments related to this work.

Šiame darbe tiesiogiai ar netiesiogiai panaudotos kitų šaltinių citatos yra pažymėtos literatūros nuorodose.

Quotes from other sources directly or indirectly used in this thesis, are indicated in literature references.

Aš, Andrius Geštautas, pateikdamas šį darbą, patvirtinu *(pažymėti)* ☑

Embargo laikotarpis

Embargo Period

Prašau nustatyti šiam baigiamajam darbui toliau nurodytos trukmės embargo laikotarpį:

I am requesting an embargo of this thesis for the period indicated below:

☐ ____ mėnesių */ months*

(embargo laikotarpis negali viršyti 60 mėn. */ an embargo period shall not exceed 60 months*).

☑ Embargo laikotarpis nereikalingas */ no embargo requested.*

Embargo laikotarpio nustatymo priežastis */ Reason for embargo period:*

Turinys

Įvadas

Natūralieji skaičiai $q > 1$ yra vadinami pirminiais skaičiais, jeigu jie turi tik du daliklius q ir 1. Taigi, $2, 3, 5, 7, 11, \ldots$ yra pirminiai skaičiai. Natūralieji skaičiai $k > 1$, kurie turi daliklių nelygių k ir 1, yra vadinami sudėtiniais skaičiais. Garai yra žinoma, kad pirminių skaičių aibė yra begalinė. Šį faktą pirmasis įrodė Euklidas (Euclid). Pagal pagrindinę aritmetikos teoremą, kiekvienas sveikasis skaičius $k > 1$ yra išreiškiamas vieninteliu būdu pirminių skaičių laipsnių sandauga. Vadinasi, su tam tikru $r \in \mathbb{N}$

$$k = q_1^{\alpha_1} \cdots q_r^{\alpha_r}, \quad \alpha_j \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\},$$

čia q_j yra j-asis pirminis skaičius, $j = 1, \ldots, r$.

Pirminių skaičių mažesnių už x skaičiaus funkcija

$$\pi(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{q \leqslant x} 1, \quad x \to \infty,$$

yra labai sudėtinga. Palyginus neseniai, 1896 m., Adamaras (Hadamard) ir de la Valė-Pusenas (de la Vallée-Poussin), nepriklausomai vienas nuo kito, įrodė, žr. [13] ir [6], asimptotinę formulę

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{\mathrm{d}u}{\log u} + O\left(x\mathrm{e}^{-c\sqrt{\log x}}\right), \quad c > 0.$$

Šios formulės įrodymui jie panaudojo Rymano (Riemann) idėją, t. y. naudojo funkciją

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} = \prod_q \left(1 - \frac{1}{q^s}\right)^{-1}, \quad s = \sigma + it, \ \sigma > 1,$$

kuri dabar vadinama Rymano dzeta funkcija. Tokiu būdu, buvo gautas pirminių skaičių pasiskirstymo dėsnis.

Pirminiai skaičiai gali būti apibendrinti. Realiųjų skaičių sistema $\mathcal{P}$, $1 < p_1 \leqslant p_2 \leqslant \cdots \leqslant p_n \leqslant \cdots$ su $\lim_{n\to\infty} p_n = \infty$ yra vadinama apibendrintaisiais pirminiais skaičiais. Šiuos skaičius 1937 m. įvedė švedų matematikas Beurlingas (Beurling) [2] straipsnyje. Sistema $\mathcal{P}$ generuoja susijusią apibendrintų sveikųjų skaičių sistemą $\mathcal{N}_{\mathcal{P}}$, kuri, analogiškai sveikiesiems skaičiams, su tam tikru $r \in \mathbb{N}$ yra gaunama iš tokios baigtinės sandaugos

$$p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}, \quad \alpha_j \in \mathbb{N}_0, \ j = 1, \ldots r.$$

Apibendrintųjų pirminių skaičiaus pagrindinis uždavinys yra funkcijos

$$\pi_{\mathcal{P}}(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{p \leqslant x,\, p \in \mathcal{P}} 1, \quad x \to \infty.$$

asimptotinio elgesio tyrimas. Funkcija $\pi_{\mathcal{P}}(x)$ yra glaudžiai susijusi su apibendrintų sveikųjų skaičių skaičiaus funkcija

$$\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{m \leqslant x,\, m \in \mathcal{N}_{\mathcal{P}}} 1, \quad x \to \infty.$$

Šiuose apibrėžimuose sumuojant yra įskaitomas p ir m kartotinumas. Apibendrintų sveikųjų skaičių pasiskirstymą nagrinėjo Beurlingas [2], Borelis (Borel) [4], Diamondas (Diamond) [7, 8, 9], Malvinas

(Malvin) [20], Nymanas (Nyman) [23], Ryavekas (Ryavec) [26], Hilberdinkas (Hilberdink) ir Lapidus (Lapidus) [14], Stankus [27], Žangas (Zhang) [31] ir kiti. Apibendrintų skaičių teorijoje didelis dėmesys yra skiriamas ryšio tarp funkcijų $\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(x)$ ir $\pi_{\mathcal{P}}(x)$ radimui. Paminėsime keletą iš jų. Iš bendrosios Landau (Landau) teoremos pirminiams idealams, žr. [16], gauname, kad iš įverčio

$$\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(x) = ax + O\left(x^{\beta}\right), \quad a > 0,\ 0 \leqslant \beta < 1, \tag{1}$$

seka įvertis

$$\pi_{\mathcal{P}}(x) = \int\limits_2^x \frac{\mathrm{d}u}{\log u} + O\left(x\mathrm{e}^{-c\sqrt{\log x}}\right), \quad c > 0.$$

Nymanas įrodė, žr. [23], kad įverčiai

$$\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(x) = ax + O\left(\frac{x}{(\log x)^{\alpha}}\right), \quad \alpha > 0, \tag{2}$$

ir

$$\pi_{\mathcal{P}}(x) = \int\limits_2^x \frac{\mathrm{d}u}{\log u} + O\left(\frac{x}{(\log x)^{\alpha_1}}\right), \quad \alpha_1 > 0,$$

su bet kokiais $\alpha > 0$ ir $\alpha_1 > 0$ yra ekvivalentūs. Beurlingas [2] straipsnyje gavo, kad sąryšis

$$\pi_{\mathcal{P}}(x) \sim \frac{x}{\log x}, \quad x \to \infty,$$

seka iš (2) įverčio su $\alpha > 3/2$.

(1) asimptotikos pagrįstumo problema nėra lengva. Yra įrodyta asimptotika vieno pavyzdžio atveju, žr. [14]. Tegul sistema $\mathcal{N}_{\mathcal{P}}$ yra generuota sistemos

$$\mathcal{P} = (2, \sqrt{3}, 5, 5, \sqrt{7}, \sqrt{11}, 13, 13, \dots),$$

t. y. $\mathcal{P}$ yra sudaryta iš skaičiaus 2, pirminių skaičių $q \equiv 1(\mathrm{mod}\, 4)$, imant juos du kartus, ir skaičių $\sqrt{q}$, jeigu pirminis skaičius $q \equiv 3(\mathrm{mod}\, 4)$. Tuomet yra žinoma tokia asimptotika:

$$\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(x) = \frac{\pi}{4}x + O\left(x^{23/73}\right).$$

Reikia pažymėti, kad Beurlingas funkcijos $\pi_{\mathcal{P}}(x)$ tyrimui pradėjo naudoti dzeta funkcijas. Šios dzeta funkcijos $\zeta_{\mathcal{P}}(s)$ dabar yra vadinamos Beurlingo dzeta funkcijomis ir, pusplokštumėje $\sigma > \sigma_0$, yra apibrėžiamos Oilerio (Euler) sandaugomis

$$\zeta_{\mathcal{P}}(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

arba Dirichlė (Dirichlet) eilutėmis

$$\zeta_{\mathcal{P}}(s) = \sum_{m \in \mathcal{N}_{\mathcal{P}}} \frac{1}{m^s},$$

čia σ_0 priklauso nuo sistemos $\mathcal{P}$.

Tarkime, kad yra teisinga (1) asimptotika. Tuomet, iš eilučių $\zeta_{\mathcal{P}}(s)$ dalinių sumų matome, kad šios eilutės yra absoliučiai konverguojančios pusplokštumėje $\sigma > 1$, galioja lygybė

$$\zeta_{\mathcal{P}}(s) = s \int_1^{\infty} \frac{\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(x)}{x^{s+1}} \, \mathrm{d}x, \tag{3}$$

funkcija $\zeta_{\mathcal{P}}(s)$ analizinė, kai $\sigma > 1$, ir

$$\sum_{m \in \mathcal{N}_{\mathcal{P}}} \frac{1}{m^s} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Funkcijos $\zeta_{\mathcal{P}}(s)$ analizinis pratęsimas nėra lengva problema. Jeigu (1) asimptotika yra teisinga, tuomet iš (3) gauname, kad

$$\zeta_{\mathcal{P}}(s) = \frac{a\,s}{s-1} + s \int_1^{\infty} \frac{R(x)}{x^{s+1}} \, \mathrm{d}x, \quad R(x) = O\left(x^{\beta}\right), \ 0 \leqslant \beta < 1.$$

Pastaroji lygybė duoda funkcijos $\zeta_{\mathcal{P}}(s)$ analizinį pratęsimą į pusplokštumę $\sigma > \beta$, išskyrus tašką $s = 1$, kuris yra paprastasis polius su reziduumu a.

Beurlingo dzeta funkcijos yra įdomūs analiziniai objektai. Tirdami jų savybes gauname daug įdomių rezultatų, tačiau tam yra reikalingi nauji metodai. Įvairūs autoriai įdėjo daug pastangų, kad parodytų, jog Beurlingo dzeta funkcijos turi panašių savybių kaip ir klasikinės dzeta ir L funkcijos. Paminėsime neseniai paskelbtą rezultatą, žr. [24], kuriame yra funkcijos $\zeta_{\mathcal{P}}(s)$ nulių pasiskirstymo rezultatai.

Magistro darbe tirsime funkcijos $\zeta_{\mathcal{P}}(s)$ analizines savybes. Analizinių funkcijų aproksimavimas yra viena svarbiausių funkcijų teorijos dalių. Gerai žinoma, kad Rymano dzeta funkcija yra universali, žr. [30], analizinių funkcijų aproksimavimo prasme. Tiksliau tai reiškia, kad kiekviena neįgyjanti nulių analizinė funkcija apibrėžta juostoje $\{s \in \mathbb{C} : 1/2 < \sigma < 1\}$ gali būti aproksimuojama norimu tikslumu postūmiais $\zeta(s + i\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$. Rymano dzeta funkcijos universalumas turi gilius teorinius (nulių pasiskirstymas, funkcinis nepriklausomumas, aibės tirštumas, momentų uždavinys, ...) ir praktinių (aproksimavimo problema, kvantinė mechanika) taikymus. Kita vertus, dzeta funkcijų universalumo teorija turi tam tikrų problemų (efektyvumas, universalių funkcijų klasės aprašymas, Linniko-Ibragimovo (Linnik-Ibragimov) hipotezė, žr. [28] monografijos 1.6 skyrių, ...), todėl universalumo tyrimai yra tęsiami, žr. [30, 12, 1, 15, 17, 28, 21].

Magistro darbo tikslas – įrodyti funkcijos $\zeta_{\mathcal{P}}(s)$ universalumą su tam tikromis sistemomis $\mathcal{P}$. Analizinių funkcijų aproksimavimas postūmiais $\zeta_{\mathcal{P}}(s + i\tau)$ buvo pradėtas nagrinėti [18] straipsnyje. Tarkime, kad galioja (1) įvertis. Tegul

$$M_{\mathcal{P}}(\sigma, T) = \int_0^T |\zeta_{\mathcal{P}}(\sigma + it)|^2 \, \mathrm{d}t,$$

$$\widehat{\sigma} = \inf\left\{\sigma : M_{\mathcal{P}}(\sigma, T) \ll_{\sigma} T, \quad \sigma > \max\left(\frac{1}{2}, \beta\right)\right\}.$$

Tarę, kad $\widehat{\sigma} < 1$, apibrėžkime juostą kompleksinėje plokštumoje

$$D = D_{\mathcal{P}} = \{s \in \mathbb{C} : \widehat{\sigma} < \sigma < 1\}.$$

Čia ir toliau žymuo $a \ll_c b$, $a \in \mathbb{C}$, $b > 0$, reiškia, jog egzistuoja konstanta $c = c(\varepsilon) > 0$, kad $|a| \leqslant cb$. Tegul $H(D)$ yra analizinių juostoje D funkcijų klasė su tolygaus konvergavimo kompaktuose topologija, o $\mathrm{meas}A$ – mačiosios aibės $A \subset \mathbb{R}$ Lebego (Lebesgue) matas. Pagrindinis Laurinčiko straipsnio, žr. [18], rezultatas yra tokia teorema:

1 teorema. *Tarkime, kad sistema $\mathcal{P}$ tenkina* (1) *aksiomą. Tuomet egzistuoja uždaroji netuščioji aibė $F_{\mathcal{P}} \subset H(D)$, kad su kiekviena kompaktine aibe $K \subset D$, funkcija $f(s) \in F_{\mathcal{P}}$ ir $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\mathrm{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |\zeta_{\mathcal{P}}(s+i\tau) - f(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

Be to, riba

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\mathrm{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |\zeta_{\mathcal{P}}(s+i\tau) - f(s)| < \varepsilon\right\}$$

egzistuoja ir yra teigiama su visais $\varepsilon > 0$, nebent išskyrus skaičiąją $\varepsilon > 0$ reikšmių aibę.

Pastaroji teorema demonstruoja geras funkcijos $\zeta_{\mathcal{P}}(s)$ aproksimavimo savybes, tačiau aproksimuojamų funkcijų aibės $F_{\mathcal{P}}$ pavidalas yra neišreikštinis. Mūsų tikslas yra identifikuoti aibę $F_{\mathcal{P}}$, naudojant papildomą informaciją apie sistemą $\mathcal{P}$.

Naujas funkcijos $\zeta_{\mathcal{P}}(s)$ analizinio pratęsimo metodas apima apibendrintą fon Mongolto (von Mangoldt) funkciją

$$\Lambda_{\mathcal{P}}(m) = \begin{cases} \log p, & \text{jeigu } m = p^k,\ p \in \mathcal{P},\ k \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{kitais atvejais.} \end{cases}$$

Tegul

$$\psi_{\mathcal{P}}(x) = \sum_{\substack{m\leqslant x \\ m\in\mathcal{N}_{\mathcal{P}}}} \Lambda_{\mathcal{P}}(m).$$

Tuomet [14] straipsnyje buvo įrodyta, kad su $\alpha \in [0,1)$ ir kiekvienu $\varepsilon > 0$

$$\psi_{\mathcal{P}}(x) = x + O\left(x^{\alpha+\varepsilon}\right). \tag{4}$$

Be to, [14] straipsnyje buvo gauta, jog funkcija $\zeta_{\mathcal{P}}(s)$ yra analizinė pusplokštumėje $\sigma > \alpha$, išskyrus paprastąjį polių taške $s = 1$. Todėl (4) tipo įverčiai yra naudingi sistemos $\mathcal{P}$ charakterizavimui. Taip yra aišku, žr. [14], kad (1) su $\beta_1 < 1$ neseka iš įverčio

$$\psi_{\mathcal{P}}(x) = x + O\left(x^{\beta_1}\right). \tag{5}$$

Tegul $\mathcal{K}$ yra juostos D kompaktinių poaibių klasė su jungiuoju papildiniu, o $H_0(K)$, $K \in \mathcal{K}$, tolydžiųjų aibėje K ir analizinių aibės K viduje funkcijų klasė. Be to, tegul

$$L(\mathcal{P}) = \{\log p : p \in \mathcal{P}\}.$$

Akivaizdu, kad sekanti teorema tik sustiprina Liniko-Ibragimovo hipotezę.

2 teorema. *Tarkime, kad sistem* $\mathcal{P}$ *tenkina* (1) *ir* (5) *aksiomas, o aibė* $L(\mathcal{P})$ *yra tiesiškai nepriklausoma virš racionaliųjų skaičių kūno* $\mathbb{Q}$*. Tegul* $K \in \mathcal{K}$ *ir* $f(s) \in H_0(K)$*. Tuomet su visais* $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\text{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |\zeta_{\mathcal{P}}(s+i\tau) - f(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

Be to, riba

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\text{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |\zeta_{\mathcal{P}}(s+i\tau) - f(s)| < \varepsilon\right\}$$

egzistuoja ir yra teigiama su visais $\varepsilon > 0$*, nebent išskyrus skaičiąją* $\varepsilon > 0$ *reikšmių aibę.*

Pažymėsime, kad reikalavimas aibei $L(\mathcal{P})$ yra pakankamai stiprus. Kitaip tariant, sistemos $\mathcal{P}$ elementai turi būti skirtingi. Paprasčiausias sistemos pavyzdys yra

$$\mathcal{P} = \{q + \alpha : q \text{ yra pirminis}\},$$

čia α yra transcendentusis skaičius.

Sistemos $\mathcal{P}$ su aprėžtu kvadratiniu vidurkiu pavyzdys yra pateiktas [10] straipsnyje.

2 teoremos įrodymas remiasi ribine teorema analizinių funkcijų erdvėje $H(D)$.

Magistro darbas parengtas [11] mokslo straipsnio pagrindu.

1. Atsitiktinis elementas

Apibrėžkime Dekarto (Descartes) sandaugą

$$\Omega_{\mathcal{P}} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}.$$

Aibė $\Omega_{\mathcal{P}}$ yra sudaryta iš visų funkcijų $\omega : \mathcal{P} \to \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$. Joje gali būti apibrėžta pataškinės daugybos operacija. Tokiu būdu gauname, kad $\Omega_{\mathcal{P}}$ yra topologinė grupė. Kadangi vienetinis apskritimas yra kompaktinė aibė, tai ir grupė $\Omega_{\mathcal{P}}$ yra kompaktinė. Tegul $\mathcal{B}(\mathbb{X})$ žymi erdvės $\mathbb{X}$ Borelio (Borel) σ-kūną. Tuomet iš aibės $\Omega_{\mathcal{P}}$ kompaktiškumo gauname, kad erdvėje $(\Omega_{\mathcal{P}}, \mathcal{B}(\Omega_{\mathcal{P}}))$ egzistuoja tikimybinis Haro (Haar) matas $m_{\mathcal{P}}$, t. y. gauname tikimybinę erdvę $(\Omega_{\mathcal{P}}, \mathcal{B}(\Omega_{\mathcal{P}}), m_{\mathcal{P}})$.

Pažymėkime $\omega = (\omega(p) : p \in \mathcal{P})$ aibės $\Omega_{\mathcal{P}}$ elementus. Kadangi Haro matas $m_{\mathcal{P}}$ yra Haro matų ant vienetinių apskritimų sandauga, todėl $\{\omega(p) : p \in \mathcal{P}\}$ yra nepriklausomų, kompleksines reikšmes įgyjančių (kompleksiniareikšmių) atsitiktinių dydžių, tolygiai pasiskirsčiusių ant vienetinio apskritimo, seka.

Funkcijas $\omega(p)$, $p \in \mathcal{P}$, pratęskime į apibendrintųjų sveikųjų skaičių aibę $\mathcal{N}_{\mathcal{P}}$. Tegul

$$m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r} \in \mathcal{N}_{\mathcal{P}}.$$

Tuomet gauname

$$\omega(m) = \omega^{\alpha_1}(p_1) \cdots \omega^{\alpha_r}(p_r). \tag{1.1}$$

Dabar su $s \in D$ ir $\omega \in \Omega_{\mathcal{P}}$ apibrėžkime

$$\zeta_{\mathcal{P}}(s, \omega) = \sum_{m\in\mathcal{N}_{\mathcal{P}}} \frac{\omega(m)}{m^s}.$$

1 lema. *Su 2 teoremos sąlygomis funkcija $\zeta_{\mathcal{P}}(s, \omega)$ yra $H(D)$-reikšmis atsitiktinis elementas apibrėžtas tikimybinėje erdvėje $(\Omega_{\mathcal{P}}, \mathcal{B}(\Omega_{\mathcal{P}}), m_{\mathcal{P}})$.*

Įrodymas. Fiksuokime $\sigma_0 > \widehat{\sigma}$ ir pažymėkime

$$a_m(\omega) = \frac{\omega(m)}{m^{\sigma_0}}, \quad m \in \mathcal{N}_{\mathcal{P}}.$$

Tuomet $\{a_m : m \in \mathcal{N}_{\mathcal{P}}\}$ kompleksiniareikšmių elementų seka erdvėje $(\Omega_{\mathcal{P}}, \mathcal{B}(\Omega_{\mathcal{P}}), m_{\mathcal{P}})$. Tegul $\overline{z}$ žymi kompleksinio skaičiaus $z \in \mathbb{C}$ jungtinį skaičių. Tarkime, kad $m_1 \neq m_2$, $m_1, m_2 \in \mathcal{N}_{\mathcal{P}}$. Kadangi aibė $L(\mathcal{P})$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$, sandaugoje $\omega(m_1)\overline{\omega(m_2)}$ yra mažiausiai vienas daugiklis $\omega^{\alpha}(p)$, $p \in \mathcal{P}$, su sveikuoju $\alpha \neq 0$. Todėl, pažymėję $\mathbb{E}\xi$ atsitiktinio dydžio ξ vidurkį, gauname

$$\mathbb{E}|a_m(\omega)|^2 = \frac{1}{m^{2\sigma_0}}, \quad m \in \mathcal{N}_{\mathcal{P}}, \tag{1.2}$$

$$\mathbb{E}a_{m_1}(\omega)\overline{a_{m_2}(\omega)} = \frac{1}{m_1^{\sigma_0} m_2^{\sigma_0}} \int\limits_{\Omega_{\mathcal{P}}} \omega(m_1)\overline{\omega(m_2)}\, \mathrm{d}m_{\mathcal{P}} = 0, \quad m_1 \neq m_2,$$

kadangi integrale yra toks daugiklis

$$\int_{\gamma} \omega^{\alpha}(p)\,\mathrm{d}m_{\gamma} = \int_{0}^{1} \mathrm{e}^{2\pi i\alpha u}\,\mathrm{d}u = 0,$$

čia γ yra vienetinis apskritimas $\mathbb{C}$ plokštumoje, o m_{γ} Haro matas ant apskritimo γ. Šis faktas ir (1.2) lygybė rodo, kad $\{a_m\}$ yra poromis ortogonalių kompleksiniareikšmių dydžių seka, o eilutės

$$\sum_{m\in\mathcal{N}_{\mathcal{P}}} \mathbb{E}|a_m|^2 \log^2 m$$

konverguoja. Vadinasi, pagal klasikinę Rademacherio (Rademacher) teoremą, žr. [19], eilutės

$$\sum_{m\in\mathcal{N}_{\mathcal{P}}} \frac{\omega(m)}{m^{\sigma_0}}$$

konverguoja su beveik visais ω mato $m_{\mathcal{P}}$ atžvilgiu. Todėl panaudoję Dirichlė eilučių savybes, žr. [17], gauname, kad

$$\sum_{m\in\mathcal{N}_{\mathcal{P}}} \frac{\omega(m)}{m^{s}} \tag{1.3}$$

konverguoja tolygiai su beveik visais $\omega \in \Omega_{\mathcal{P}}$ pusplokštumės $\sigma > \sigma_0$ kompaktinėse aibėse.

Dabar, tegul

$$\sigma_k = \widehat{\sigma} + \frac{1}{k}, \quad k \in \mathbb{N},$$

o $D_k = \{s \in \mathbb{C} : \sigma > \sigma_k\}$. Apibrėžkime aibę $\Omega_k \subset \Omega_{\mathcal{P}}$, kad eilutės (1.3) su beveik visais $\omega \in \Omega_k$ konverguotų tolygiai pusplokštumės D_k kompaktinėse aibėse. Tada

$$m_{\mathcal{P}}(\Omega_k) = 1. \tag{1.4}$$

Iš kitos pusės, imdami

$$\widehat{\Omega} = \bigcap_{k} \Omega_k,$$

iš (1.4) lygybės gauname, kad $m_{\mathcal{P}}(\widehat{\Omega}) = 1$. Todėl eilutės (1.3) konverguoja tolygiai pusplokštumės $\sigma > \widehat{\sigma}$ kompaktinėse aibėse, taigi, juostoje D. Vadinasi, $\zeta_{\mathcal{P}}(s,\omega)$ yra erdvės $(\Omega_{\mathcal{P}}, \mathcal{B}(\Omega_{\mathcal{P}}), m_{\mathcal{P}})$ $H(D)$-reikšmis elementas.

2 lema. *Su beveik visais ω sandauga*

$$\prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{\omega(p)}{p^s}\right)^{-1}$$

konverguoja tolygiai pusplokštumės $\sigma > \widehat{\sigma}$ kompaktinėse aibėse ir galioja lygybė

$$\zeta_{\mathcal{P}}(s,\omega) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{\omega(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

Įrodymas. Eilutės $\zeta_{\mathcal{P}}(s,\omega)$ absoliučiai konverguoja pusplokštumėje $\sigma > 1$. Vadinasi, atsižvelgę į (1.1) lygybę, matome, kad lemos lygybė yra teisinga su $\sigma > 1$. Iš 1 lemos įrodymo turime, kad funkcija $\zeta_{\mathcal{P}}(s,\omega)$ su beveik visais $\omega \in \Omega_{\mathcal{P}}$ yra analizinė pusplokštumėje $\sigma > \widehat{\sigma}$. Todėl, pagal analizinį pratęsimą, pakanka parodyti, kad lemos sandauga su beveik visais $\omega \in \Omega_{\mathcal{P}}$ konverguoja tolygiai juostoje D.

Tegul
$$\prod_{p\in\mathcal{P}}\left(1-\frac{\omega(p)}{p^s}\right)^{-1} = \prod_{p\in\mathcal{P}}(1+a_p(s,\omega)) \tag{1.5}$$
su
$$a_p(s,\omega) = \sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{\omega^{\alpha}(p)}{p^{\alpha s}}.$$
Pastebime, kad (1.5) sandaugos konvergavimas gaunamas iš eilučių
$$\sum_{p\in\mathcal{P}} a_p(s,\omega) \qquad \text{ir} \qquad \sum_{p\in\mathcal{P}} |a_p(s,\omega)|^2$$
konvergavimo. Pažymėkime
$$b_p(s,\omega) = \frac{\omega(p)}{p^s}.$$
Tada
$$a_p(s,\omega) - b_p(s,\omega) = \sum_{\alpha=2}^{\infty}\frac{\omega^{\alpha}(p)}{p^{\alpha s}} \ll \frac{1}{p^{2\sigma}}, \quad \sigma > \widehat{\sigma}.$$
Vadinasi, eilutės
$$\sum_{p\in\mathcal{P}} |a_p(s,\omega) - b_p(s,\omega)| \tag{1.6}$$
konverguoja su visais $\omega \in \Omega_{\mathcal{P}}$ ir kiekvienu $\sigma = \sigma_0$, $\sigma_0 > \widehat{\sigma}$, todėl konverguoja tolygiai pusplokštumės $\sigma > \widehat{\sigma}$ kompaktiniuose poaibiuose. Kad įrodytume eilučių
$$\sum_{p\in\mathcal{P}} b_p(s,\omega),$$
konvergavimą, taikysime tuos pačius argumentus kaip ir 1 lemos įrodyme. Su fiksuotu $\sigma > \widehat{\sigma}$ gauname, kad
$$\mathbb{E}|b_p(\sigma,\omega)|^2 = \frac{1}{p^{2\sigma}},$$
o su $p, q \in \mathcal{P}$, $p \neq q$, turime
$$\mathbb{E}b_p(\sigma,\omega)\overline{b_q(\sigma,\omega)} = \frac{1}{p^{\sigma}q^{\sigma}}\int_{\Omega_{\mathcal{P}}} \omega(p)\overline{\omega(q)}\,\mathrm{d}m_{\mathcal{P}} = 0.$$
Vadinasi eilutės
$$\sum_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{E}|b_p(\sigma,\omega)|^2\log^2 p$$
konverguoja, o Rademacherio teorema duoda, kad eilutės
$$\sum_{p\in\mathcal{P}} b_p(\sigma,\omega)$$

konverguoja su visais $\omega \in \Omega_{\mathcal{P}}$. Vadinasi, su bevei visais $\omega \in \Omega_{\mathcal{P}}$ konverguoja tolygiai pusplokštumės $\sigma > \widehat{\sigma}$ kompaktiniuose poaibiuose. Šis faktas kartu su eilučių (1.6) konvergavimo savybe rodo, kad eilutės

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} a_p(s, \omega),$$

su beveik visais $\omega \in \Omega_{\mathcal{P}}$ konverguoja tolygiai pusplokštumės $\sigma > \widehat{\sigma}$ kompaktiniuose poaibiuose. Lieka įrodyti tą patį ir eilutėms

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} |a_p(s, \omega)|^2. \tag{1.7}$$

Iš tiesų, su visais $\omega \in \Omega_{\mathcal{P}}$

$$|a_p(s, \omega)|^2 \ll \frac{1}{p^{2\sigma}}, \quad \sigma > \widehat{\sigma}.$$

Vadinasi eilutės (1.7) su visais $\omega \in \Omega_{\mathcal{P}}$ konverguoja tolygiai pusplokštumės $\sigma > \widehat{\sigma}$ kompaktiniuose poaibiuose.

2. Ergodiškumas

Su $\tau \in \mathbb{R}$ tegul

$$\kappa_\tau = \left(p^{-i\tau} : p \in \mathcal{P}\right),$$

o

$$g_\tau(\omega) = \kappa_\tau \omega, \quad \omega \in \Omega_{\mathcal{P}}.$$

Kadangi Haro matas $m_{\mathcal{P}}$ yra invariantinis aibės $\Omega_{\mathcal{P}}$ elementų postūmių atžvilgiu, t. y. su visais $A \in \mathcal{B}(\Omega_{\mathcal{P}})$ ir $\omega \in \Omega_{\mathcal{P}}$

$$m_{\mathcal{P}}(A) = m_{\mathcal{P}}(\omega A) = m_{\mathcal{P}}(A\omega),$$

tai $g_\tau(m)$ yra mačioji, matą išsauganti transformacija aibėje $\Omega_{\mathcal{P}}$. Taigi, gauname vienparametrinę aibės $\Omega_{\mathcal{P}}$ transformacijų grupę $G_\tau = \{g_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$. Aibė $A \in \mathcal{B}(\Omega_{\mathcal{P}})$ yra vadinama invariantine grupės G_τ atžvilgiu, jeigu su kiekvienu $\tau \in \mathbb{R}$ aibės A ir $A_\tau = g_\tau(A)$ skiriasi viena nuo kitos aibe, kurios matas $m_{\mathcal{P}}$ yra lygus 0. Yra gerai žinoma, žr. [5], kad visos invariantinės aibės sudaro σ-kūną, kuris yra pokūnis kūno $\mathcal{B}(\Omega_{\mathcal{P}})$. Grupė G_τ yra vadinama ergodine, jeigu jos invariantinių aibių σ-kūnas yra sudarytas iš aibių, kurių matas $m_{\mathcal{P}}$ yra lygus 0 arba 1.

3 lema. *Su 2 teoremos sąlygomis grupė G_τ yra ergodinė.*

Įrodymas. Tegul $A \in \mathcal{B}(\Omega_{\mathcal{P}})$ yra fiksuota grupės G_τ invariantinė aibė, o $\mathrm{I}_A(\omega)$ – aibės A indikatorius. Tuomet su beveik visais $\omega \in \Omega_{\mathcal{P}}$

$$\mathrm{I}_A(g_\tau(\omega)) = \mathrm{I}_A(\omega). \tag{2.1}$$

Grupės $\Omega_{\mathcal{P}}$ charakteriai χ yra tokios formos:

$$\chi(\omega) = \prod_{p\in\mathcal{P}}{}^{*}\, \omega^{k_p}(p), \tag{2.2}$$

čia $*$ rodo, kad tik baigtinis skaičius sveikųjų skaičių k_p yra nelygūs nuliui. Tarkime, kad χ yra netrivialusis charakteris, t. y. su visais $\omega \in \Omega_{\mathcal{P}}$ charakteris $\chi(\omega) \not\equiv 1$. Tada gauname, kad

$$\chi(g_\tau) = \prod_{p\in\mathcal{P}}{}^{*}\, p^{-ik_p\tau} = \exp\left\{-i\tau \sum_{p\in\mathcal{P}}{}^{*}\, k_p \log p\right\}.$$

Kadangi aibė $L(\mathcal{P})$ yra tiesiškai nepriklausoma virš racionaliųjų skaičių kūno $\mathbb{Q}$, o χ yra netrivialusis charakteris, todėl

$$\sum_{p\in\mathcal{P}}{}^{*}\, k_p \log p \neq 0.$$

Taigi, egzistuoja $a \neq 0$, kad

$$\chi(g_\tau) = \mathrm{e}^{-i\tau a}.$$

Vadinasi egzistuoja $\tau_0 \in \mathbb{R}$ tenkinantis sąlygą $\chi(g_{\tau_0}) \neq 1$.

Dabar aibėje $\Omega_{\mathcal{P}}$ naudosime Furjė (Fourier) analizę. Pažymėkime $\widehat{g}$ funkcijos g Furjė transformaciją, t. y.

$$\widehat{g}(\chi) = \int_{\Omega_{\mathcal{P}}} g(\omega)\chi(\omega)\,\mathrm{d}m_{\mathcal{P}}.$$

Atsižvelgę į (2.1) lygybę, randame, kad

$$\widehat{\mathrm{I}}_A(\chi) = \int_{\Omega_{\mathcal{P}}} \mathrm{I}_A(\omega)\chi(\omega)\,\mathrm{d}m_{\mathcal{P}} = \chi(g_{\tau_0}) \int_{\Omega_{\mathcal{P}}} \chi(\omega)\mathrm{I}_A(\omega)\,\mathrm{d}m_{\mathcal{P}} = \chi(g_{\tau_0})\widehat{\mathrm{I}}_A(\chi).$$

Vadinasi, nelygybė $\chi(g_{\tau_0}) \neq 1$ duoda

$$\widehat{\mathrm{I}}_A(\chi) = 0. \tag{2.3}$$

Lieka išnagrinėti grupės $\Omega_{\mathcal{P}}$ trivialaus charakterio χ_0 atvejį. Tegul $\widehat{\mathrm{I}}_A(\chi_0) = c$. Tuomet, iš charakterių ortogonalumo, gauname

$$\widehat{c}(\chi) = \int_{\Omega_{\mathcal{P}}} c(\chi)\chi(\omega)\,\mathrm{d}m_{\mathcal{P}} = c\int_{\Omega_{\mathcal{P}}} \chi(\omega)\,\mathrm{d}m_{\mathcal{P}} = \begin{cases} c, & \text{jeigu } \chi = \chi_0, \\ 0, & \text{jeigu } \chi \neq \chi_0. \end{cases}$$

Todėl panaudoję (2.3) lygybę turime

$$\widehat{\mathrm{I}}_A(\chi) = \widehat{c}(\chi). \tag{2.4}$$

Gerai žinoma, kad funkciją visiškai apibrėžia jos Furjė transformacija. Taigi, pagal (2.4) lygybę, su beveik visais $\omega \in \Omega_{\mathcal{P}}$ turime, kad $\mathrm{I}_A(\omega) = c$. Tačiau, kadangi $\mathrm{I}_A(\omega)$ yra indikatorius, tai reiškia, kad $c = 0$ arba 1. Kitaip tariant, su beveik visais $\omega \in \Omega_{\mathcal{P}}$ gauname, kad $\mathrm{I}_A(\omega) = 0$ arba $\mathrm{I}_A(\omega) = 1$. Taigi, $m_{\mathcal{P}}(A) = 0$, arba $m_{\mathcal{P}}(A) = 1$. Lema įrodyta.

3 lemą taikysime funkcijos $\zeta_{\mathcal{P}}(s,\omega)$ kvadratiniam vidurkiui įvertinti.

4 lema. *Tegul galioja 2 teoremos sąlygos. Tuomet su fiksuotu* $\widehat{\sigma} < \sigma < 1$ *ir beveik visais* $\omega \in \Omega_{\mathcal{P}}$

$$\int_{-T}^{T} |\zeta_{\mathcal{P}}(\sigma + it,\omega)|^2\,\mathrm{d}t \ll_{\mathcal{P},\sigma} T, \quad T \to \infty.$$

Įrodymas. Tegul $a_m(\sigma,\omega)$, $m \in \mathcal{N}_{\mathcal{P}}$, yra tas pats, kaip ir 1 lemos įrodyme. Atsitiktiniai dydžiai $a_m(\sigma,\omega)$ yra poromis ortogonalūs ir

$$\mathbb{E}\,|a_m(\sigma,\omega)|^2 = \frac{1}{m^{2\sigma}}.$$

Vadinasi

$$\mathbb{E}\,|\zeta_{\mathcal{P}}(\sigma,\omega)|^2 = \mathbb{E}\left|\sum_{m\in\mathcal{N}_{\mathcal{P}}} a_m(\sigma,\omega)\right|^2 = \sum_{m\in\mathcal{N}_{\mathcal{P}}} \mathbb{E}\,|a_m(\sigma,\omega)|^2 = \sum_{m\in\mathcal{N}_{\mathcal{P}}} \frac{1}{m^{2\sigma}} < \infty. \tag{2.5}$$

Tegul $g_\tau(\omega)$ yra transformacija iš 3 lemos. Tada iš g_τ apibrėžimo turime

$$|\zeta_{\mathcal{P}}(\sigma, g_t(\omega))|^2 = |\zeta_{\mathcal{P}}(\sigma, g_t\omega)|^2 = |\zeta_{\mathcal{P}}(\sigma + it,\omega)|^2.$$

Priminsime, kad stipriai stacionarus atsitiktinis procesas $X(t,\omega)$, $t \in \mathcal{T}$, aibėje $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ yra vadinamas ergodiniu, jeigu jo invariantinių aibių σ kūnas yra sudarytas iš aibių, kurių matas P yra 0 arba 1. Kadangi grupė $G_\mathcal{T}$ yra ergodinė, tai stacionarusis procesas $|\zeta_\mathcal{P}(\sigma + it, \omega)|^2$ yra ergodinis, išsamiau žiūrėti [17] monografiją. Todėl galime taikyti klasikinę Birchofo-Chinčino (Birkhoff-Khintchine) ergodinę teoremą, žr. [5]. Taigi, iš (2.5) įverčio gauname, kad

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |\zeta_\mathcal{P}(\sigma + it, \omega)|^2 \,\mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \zeta_\mathcal{P}(\sigma, g_t(\omega)) \,\mathrm{d}t = \mathbb{E}\,|\zeta_\mathcal{P}(\sigma, \omega)|^2 < \infty.$$

3. Aproksimavimas vidurkiu

Šiame skyriuje funkcijas $\zeta_{\mathcal{P}}(s)$ ir $\zeta_{\mathcal{P}}(s,\omega)$ aproksimuosime absoliučiai konverguojančiuomis Dirichlė eilutėmis. Tegul $\eta > 1 - \widehat{\sigma}$ yra fiksuotas skaičius ir su $m \in \mathcal{N}_{\mathcal{P}}$, $n \in \mathbb{N}$

$$a_n(m) = \exp\left\{-\left(\frac{m}{n}\right)^{\eta}\right\}.$$

Tuomet eilutės

$$\zeta_{\mathcal{P},n}(s) = \sum_{m \in \mathcal{N}_{\mathcal{P}}} \frac{a_n(m)}{m^s} \quad \text{ir} \quad \zeta_{\mathcal{P},n}(s,\omega) = \sum_{m \in \mathcal{N}_{\mathcal{P}}} \frac{a_n(m)\omega(m)}{m^s}, \quad \omega \in \Omega_{\mathcal{P}},$$

yra absoliučiai konverguojančios su $\sigma > \widehat{\sigma}$ ir kiekvienu fiksuotu $n \in \mathbb{N}$. Funkcijas $\zeta_{\mathcal{P}}(s)$ ir $\zeta_{\mathcal{P}}(s,\omega)$ atitinkamai aproksimuosime vidurkiu funkcijomis $\zeta_{\mathcal{P},n}(s)$ ir $\zeta_{\mathcal{P},n}(s,\omega)$. Priminsime erdvės $H(D)$ metriką su jos topologija. Tegul $\{K_l : l \in \mathbb{N}\} \subset D$ yra įdėtųjų kompaktinių aibių seka, kad

$$D = \bigcup_{l=1}^{\infty} K_l,$$

o kiekviena kompaktinė aibė $K \subset D$ yra tam tikroje aibėje K_l. Tuomet

$$\rho(g_1,g_2) = \sum_{l=1}^{\infty} 2^{-l} \frac{\sup_{s \in K_l} |g_1(s) - g_2(s)|}{1 + \sup_{s \in K_l} |g_1(s) - g_2(s)|}, \quad g_1, g_2 \in H(D),$$

yra norima erdvės $H(D)$ metrika.

Yra įrodytas, žr. [18] straipsnį, toks tvirtinimas:

5 lema. *Tarkime, kad galioja* (1) *įvertis. Tuomet*

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \rho\left(\zeta_{\mathcal{P}}(s+i\tau), \zeta_{\mathcal{P},n}(s+i\tau)\right) \, \mathrm{d}\tau = 0.$$

Pažymėkime aibės $\Omega_{\mathcal{P}}$ poaibį $\Omega_{\mathcal{P},1}$ su kuriuo sandauga

$$\prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{\omega(p)}{p^s}\right)^{-1}$$

konverguotų tolygiai juostos D kompaktiniuose poaibiuose. Analogiškai, pažymėkime aibės $\Omega_{\mathcal{P}}$ poaibį $\Omega_{\mathcal{P},2}$ su kuriuo galiotų įvertis

$$\int_{-T}^{T} |\zeta_{\mathcal{P}}(\sigma+it,\omega)|^2 \, \mathrm{d}t \ll T,$$

kai $\widehat{\sigma} < \sigma < 1$. Tuomet, pagal 3 ir 4 lemas, $m_{\mathcal{P}}(\Omega_{\mathcal{P},j}) = 1$, $j = 1,2$. Tegul

$$\widehat{\Omega}_{\mathcal{P}} = \Omega_{\mathcal{P},1} \cap \Omega_{\mathcal{P},2}.$$

Tuomet $m_{\mathcal{P}}(\widehat{\Omega}_{\mathcal{P}}) = 1$.

6 lema. *Su 2 teoremos sąlygomis, kai $\omega \in \widehat{\Omega}_{\mathcal{P}}$, galioja lygybė*

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \rho\left(\zeta_{\mathcal{P}}(s+i\tau,\omega), \zeta_{\mathcal{P},n}(s+i\tau,\omega)\right) \, \mathrm{d}\tau = 0.$$

Įrodymas. Pažymėkime
$$l_n(s) = \eta^{-1}\Gamma(\eta^{-1}s)n^s, \quad n \in \mathbb{N},$$
čia $\Gamma(s)$ yra Oilerio gama funkcija. Tuomet klasikinė Melino (Mellin) formulė
$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Gamma(z)b^{-z}\,\mathrm{d}z = \mathrm{e}^{-b}, \quad a, b > 0$$
su $m \in \mathcal{N}_\mathcal{P}$ duoda
$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\eta-i\infty}^{\eta+i\infty} m^{-z} l_n(z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\eta-i\infty}^{\eta+i\infty} \Gamma(z)\left(\frac{m}{n}\right)^{-z}\mathrm{d}z = a_n(m).$$
Todėl su $\sigma > \widehat{\sigma}$ ir $\omega \in \widehat{\Omega}_\mathcal{P}$
$$\begin{aligned}\zeta_{\mathcal{P},n}(s,\omega) = \sum_{m\in\mathcal{N}_\mathcal{P}} \frac{a_n(m)\omega(m)}{m^s} &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\eta-i\infty}^{\eta+i\infty}\left(\sum_{m\in\mathcal{N}_\mathcal{P}}\frac{\omega(m)}{m^{s+z}}\right) l_n(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\eta-i\infty}^{\eta+i\infty} \zeta_\mathcal{P}(s+z,\omega) l_n(z)\,\mathrm{d}z. \qquad (3.1)\end{aligned}$$
Iš metrikos ρ apibrėžimo seka, kad pakanka įrodyti, jog su kiekvienu $K \subset D$
$$\lim_{n\to\infty}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T \sup_{s\in K}|\zeta_\mathcal{P}(s+i\tau,\omega) - \zeta_{\mathcal{P},n}(s+i\tau,\omega)|\,\mathrm{d}\tau = 0. \qquad (3.2)$$
Tegul $K \subset D$ yra kompaktinė aibė. Tada egzistuoja $\varepsilon > 0$ su $\sigma + it \in K$ tenkinantis nelygybes $\widehat{\sigma} + \varepsilon \leqslant \sigma \leqslant 1 - \varepsilon/2$. Su tam tikru σ imkime $\eta = 1$ ir $\eta_1 = \widehat{\sigma} - \varepsilon/2 - \sigma$. Tuomet $\eta_1 < 0$ ir $\eta_1 \geqslant \widehat{\sigma} + \varepsilon/2 - 1 + \varepsilon/2 = \widehat{\sigma} - 1 + \varepsilon > -1$. Todėl (3.1) išraiškos pointegralinė funkcija juostoje $\eta_1 < \mathrm{Re} z < \eta$ turi tik paprastąjį polių taške $z = 0$. Vadinasi, pagrindinė reziduumų teorema ir (3.1) lygybė su $s \in K$ duoda
$$\zeta_{\mathcal{P},n}(s,\omega) - \zeta_\mathcal{P}(s,\omega) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\eta_1-i\infty}^{\eta_1+i\infty} \zeta_\mathcal{P}(s+z,\omega) l_n(z)\,\mathrm{d}z.$$
Taigi, su $s \in K$
$$\begin{aligned}&\zeta_{\mathcal{P},n}(s+i\tau,\omega) - \zeta_\mathcal{P}(s+i\tau,\omega) \\ &\quad= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \zeta_\mathcal{P}\left(\widehat{\sigma} + \frac{\varepsilon}{2} + i\tau + it + iu, \omega\right) l_n\left(\widehat{\sigma} + \frac{\varepsilon}{2} - \sigma + iu\right)\mathrm{d}u \\ &\quad= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \zeta_\mathcal{P}\left(\widehat{\sigma} + \frac{\varepsilon}{2} + i\tau + iu, \omega\right) l_n\left(\widehat{\sigma} + \frac{\varepsilon}{2} - s + iu\right)\mathrm{d}u \\ &\quad\ll \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\zeta_\mathcal{P}\left(\widehat{\sigma} + \frac{\varepsilon}{2} + i\tau + iu, \omega\right)\right| \sup_{s\in K}\left|l_n\left(\widehat{\sigma} + \frac{\varepsilon}{2} - s + iu\right)\right|\mathrm{d}u. \qquad (3.3)\end{aligned}$$
Gerai žinoma, kad gama funkcijai $\Gamma(\sigma + it)$ tolygiai su $\sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]$ ir kiekvienu $\sigma_1 < \sigma_2$ galioja įvertis
$$\Gamma(\sigma + it) \ll \exp\{-c|t|\}, \quad c > 0. \qquad (3.4)$$

Todėl iš (3.3) išraiškos gauname, kad

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{T}\int_0^T \sup_{s\in K}|\zeta_{\mathcal{P}}(s+i\tau,\omega)-\zeta_{\mathcal{P},n}(s+i\tau,\omega)|\,\mathrm{d}\tau\\
&\qquad\ll \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{T}\int_0^T\left|\zeta_{\mathcal{P}}\left(\widehat{\sigma}+\frac{\varepsilon}{2}+i\tau+iu,\omega\right)\right|\mathrm{d}\tau\right)\sup_{s\in K}\left|l_n\left(\widehat{\sigma}+\frac{\varepsilon}{2}-s+iu\right)\right|\mathrm{d}u\stackrel{\mathrm{def}}{=}I. \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

Iš 4 lemos su $\omega\in\widehat{\Omega}_{\mathcal{P}}$ turime

$$\int_{-T}^{T}\left|\zeta_{\mathcal{P}}\left(\widehat{\sigma}+\frac{\varepsilon}{2}+i\tau,\omega\right)\right|^2\mathrm{d}\tau\ll_\varepsilon T.$$

Vadinasi,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T}\int_0^T\left|\zeta_{\mathcal{P}}\left(\widehat{\sigma}+\frac{\varepsilon}{2}+i\tau+iu,\omega\right)\right|\mathrm{d}\tau &\leqslant \left(\frac{1}{T}\int_0^T\left|\zeta_{\mathcal{P}}\left(\widehat{\sigma}+\frac{\varepsilon}{2}+i\tau+iu,\omega\right)\right|^2\mathrm{d}\tau\right)^{1/2}\\
&\leqslant \left(\frac{1}{T}\int_{-|u|}^{T+|u|}\left|\zeta_{\mathcal{P}}\left(\widehat{\sigma}+\frac{\varepsilon}{2}+i\tau,\omega\right)\right|^2\mathrm{d}\tau\right)^{1/2}\\
&\ll_\varepsilon \left(\frac{T+|u|}{T}\right)^{1/2}\ll_\varepsilon (1+|u|)^{1/2}. \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

Atsižvelgę į (3.4) įvertį, su $s\in K$ gauname

$$l_n\left(\widehat{\sigma}+\frac{\varepsilon}{2}-s+iu\right)\ll n^{\widehat{\sigma}+\varepsilon/2-\sigma}\exp\{-c|u-t|\}\ll_K n^{-\varepsilon/2}\exp\{-c_1|u|\},\quad c_1>0.$$

Pastarasis ir (3.6) įverčiai duoda

$$I\ll_{\varepsilon,K} n^{-\varepsilon/2}\int_{-\infty}^{\infty}(1+|u|)^{1/2}\exp\{-c_1|u|\}\,\mathrm{d}u\ll_{\varepsilon,K} n^{-\varepsilon/2}.$$

Vadinasi, (3.2) lygybė yra įrodyta.

4. Ribinės teoremos

Prieš tai buvusiuose skyriuose gavome rezultatus reikalingus funkcijos $\zeta_{\mathcal{P}}(s)$ ribinės teoremos įrodymui analizinių funkcijų erdvėje $H(D)$. Šiame skyriuje įrodysime matų

$$P_{T,\mathcal{P}}(A) = \frac{1}{T}\text{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \zeta_{\mathcal{P}}(s+i\tau) \in A\right\}$$

ir

$$\widehat{P}_{T,\mathcal{P}}(A) = \frac{1}{T}\text{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \zeta_{\mathcal{P}}(s+i\tau,\omega) \in A\right\}$$

silpnąjį konvergavimą, kai $T \to \infty$, čia $A \in \mathcal{B}(H(D))$, $\omega \in \widehat{\Omega}_{\mathcal{P}}$.

Pradėsime nuo ribinės lemos aibėje $\Omega_{\mathcal{P}}$. Su $A \in \mathcal{B}(\Omega_{\mathcal{P}})$ apibrėžkime matą

$$P_{T,\mathcal{P}}^{\Omega_{\mathcal{P}}}(A) = \frac{1}{T}\text{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \left(p^{-i\tau} : p \in \mathcal{P}\right) \in A\right\}.$$

7 lema. *Tarkime, kad aibė $L(\mathcal{P})$ yra tiesiškai nepriklausoma virš racionaliųjų skaičių kūno $\mathbb{Q}$. Tuomet matas $P_{T,\mathcal{P}}^{\Omega_{\mathcal{P}}}$ su $T \to \infty$ silpnai konverguoja į matą $m_{\mathcal{P}}$.*

Įrodymas. 3 lemos įrodyme turėjome, kad grupės $\Omega_{\mathcal{P}}$ charakteriai yra apibrėžti (2.2) formule. Todėl mato $P_{T,\mathcal{P}}^{\Omega_{\mathcal{P}}}$ Furjė transformacija $F_{T,\mathcal{P}}(\underline{k})$, $\underline{k} = (k_p : k_p \in \mathbb{Z}, p \in \mathcal{P})$ apibrėžiama integralu

$$\begin{aligned} F_{T,\mathcal{P}}(\underline{k}) &= \int\limits_{\Omega_{\mathcal{P}}} {\prod_{p\in\mathcal{P}}}^{*} \omega^{k_p}(p)\,\mathrm{d}P_{T,\mathcal{P}}^{\Omega_{\mathcal{P}}} = \frac{1}{T}\int\limits_{0}^{T}\left({\prod_{p\in\mathcal{P}}}^{*} p^{-i\tau k_p}\right)\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{T}\int\limits_{0}^{T}\exp\left\{-i\tau {\sum_{p\in\mathcal{P}}}^{*} k_p \log p\right\}\mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Parodysime, kad

$$\lim_{T\to\infty} F_{T,\mathcal{P}}(\underline{k}) = \begin{cases} 1, & \text{jeigu } \underline{k} = \underline{0}, \\ 0, & \text{jeigu } \underline{k} \neq \underline{0}. \end{cases} \tag{4.2}$$

Tam mes taikysime aibės $L(\mathcal{P})$ tiesinį nepriklausomumą. Akivaizdu, kad

$$A_{\mathcal{P}}(\underline{k}) \stackrel{\text{def}}{=} {\sum_{p\in\mathcal{P}}}^{*} k_p \log p = 0$$

tada ir tik tada, kai $\underline{k}_p = \underline{0}$. Taigi, iš (4.1) išraiškos gauname

$$F_{T,\mathcal{P}}(\underline{k}) = \begin{cases} 1, & \text{jeigu } \underline{k} = \underline{0}, \\ \frac{1-\exp\{-iT A_{\mathcal{P}}(\underline{k})\}}{iT\exp\{-i A_{\mathcal{P}}(\underline{k})\}}, & \text{kitais atvejais.} \end{cases}$$

Iš pastarosios lygybės matome, kad galioja ir (4.2) lygybė.

Kita lema yra skirta funkcijoms $\zeta_{\mathcal{P},n}(s)$ ir $\zeta_{\mathcal{P},n}(s,\omega)$. Su $A \in \mathcal{B}(H(D))$ apibrėžkime matus

$$P_{T,\mathcal{P},n}(A) = \frac{1}{T}\text{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \zeta_{\mathcal{P},n}(s+i\tau) \in A\right\}$$

ir

$$\widehat{P}_{T,\mathcal{P},n}(A) = \frac{1}{T}\text{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \zeta_{\mathcal{P},n}(s+i\tau,\omega) \in A\right\}.$$

8 lema. *Tarkime, kad aibė $L(\mathcal{P})$ yra tiesiškai nepriklausom virš racionaliųjų skaičių kūno $\mathbb{Q}$. Tuomet erdvėje $(H(D), \mathcal{B}(H(D)))$ egzistuoja tikimybinis matas $P_{\mathcal{P},n}$, kad abu matai $P_{T,\mathcal{P},n}$ ir$\widehat{P}_{T,\mathcal{P},n}$ silpnai konverguoja į $P_{\mathcal{P},n}$, kai $T \to \infty$.*

Įrodymas. Naudosime silpnojo tikimybinių matų konvergavimo išsaugojimo tolydžiuose atvaizdžiuose savybę. Apibrėžkime atvaizdavimą $v_{\mathcal{P},n} : \Omega_{\mathcal{P}} \to H(D)$ formule

$$v_{\mathcal{P},n}(\omega) = \zeta_{\mathcal{P},n}(s, \omega).$$

Kadangi eilutės $\zeta_{\mathcal{P},n}(s, \omega)$ su $\sigma > \widehat{\sigma}$ yra absoliučiai konverguojančios, todėl atvaizdavimas $v_{\mathcal{P},n}$ yra tolydusis. Be to, su $A \in \mathcal{B}(H(D))$ apibrėžkime

$$P_{T,\mathcal{P},n}(A) = \frac{1}{T}\text{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \left(p^{-i\tau} : p \in \mathcal{P}\right) \in v_{\mathcal{P},n}^{-1}A\right\} = P_{T,\mathcal{P}}^{\Omega_{\mathcal{P}}}\left(v_{\mathcal{P},n}^{-1}A\right).$$

Taigi, pažymėję $P_{T,\mathcal{P}}^{\Omega_{\mathcal{P}}}v_{\mathcal{P},n}^{-1}$ matą pastarojoje lygybėje, gauname, kad $P_{T,\mathcal{P},n} = P_{T,\mathcal{P}}^{\Omega_{\mathcal{P}}}v_{\mathcal{P},n}^{-1}$. Ši lygybė, atvaizdavimo $v_{\mathcal{P},n}$ tolydumas ir silpnojo konvergavimo išsaugojimo principas, žr. [3] monografijos 5.1 teoremą, duoda, kad matas $P_{T,\mathcal{P},n}$ su $T \to \infty$ silpnai konverguoja į matą $Q_{\mathcal{P},n} \stackrel{\text{def}}{=} m_{\mathcal{P}}v_{\mathcal{P},n}^{-1}$

Apibrėžkime dar vieną atvaizdavimą $\widehat{v}_{\mathcal{P},n} : \Omega_{\mathcal{P}} \to H(D)$ formule

$$\widehat{v}_{\mathcal{P},n}(\widehat{\omega}) = \zeta_{\mathcal{P},n}(s, \omega\widehat{\omega}), \quad \widehat{\omega} \in \Omega_{\mathcal{P}}.$$

Panaudoję tuos pačius argumentus kaip ir anksčiau, randame, kad matas $\widehat{P}_{T,\mathcal{P},n}$ silpnai konverguoja į matą $\widehat{Q}_{\mathcal{P},n} \stackrel{\text{def}}{=} m_{\mathcal{P}}\widehat{v}_{\mathcal{P},n}^{-1}$. Tegul $v_{\mathcal{P}}(\widehat{\omega}) = \omega\widehat{\omega}$. Tada iš mato $m_{\mathcal{P}}$ invariantiškumo turime

$$\widehat{Q}_{\mathcal{P},n} = m_{\mathcal{P}}(v_{\mathcal{P},n}v_{\mathcal{P}})^{-1} = \left(m_{\mathcal{P}}v_{\mathcal{P}}^{-1}\right)v_{\mathcal{P},n}^{-1} = m_{\mathcal{P}}v_{\mathcal{P},n}^{-1} = Q_{\mathcal{P},n}.$$

Taigi, matai $P_{T,\mathcal{P},n}$ ir $\widehat{P}_{T,\mathcal{P},n}$ su $T \to \infty$ silpnai konverguoja į tą patį matą $Q_{\mathcal{P},n}$.

Dabar nagrinėsime tikimybinių matų šeimą $\{Q_{\mathcal{P},n} : n \in \mathbb{N}\}$. Priminsime keletą sąvokų. Erdvėje $(\mathbb{X}, \mathcal{B}(\mathbb{X}))$ tikimybinių matų šeima $\{P\}$ yra vadinama suspausta, jeigu su kiekvienu $\varepsilon > 0$, egzistuoja kompaktinė aibė $K \subset \mathbb{X}$, kad

$$P(K) > 1 - \varepsilon$$

su visais matais P. Šeima $\{P\}$ yra reliatyviai kompaktiška, jeigu kiekviena seka $\{P_k\} \subset \{P\}$ turi posekį $\{P_{n_k}\}$ silpnai konverguojantį į tam tikrą erdvės $(\mathbb{X}, \mathcal{B}(\mathbb{X}))$ tikimybinį matą P, kai $k \to \infty$. Klasikinė Prochorovo (Prokhorov) teorema, žr. [3] monografijos 6.1 teoremą, teigia, kad kiekviena suspausta tikimybinių matų šeima yra reliatyviai kompaktiška.

9 lema. *Su 2 teoremos sąlygomis šeima $\{Q_{\mathcal{P},n} : n \in \mathbb{N}\}$ yra reliatyviai kompaktiška.*

Įrodymas. Pagal Prochorovo teoremą, matome, kad pakanka įrodyti šeimos $\{Q_{\mathcal{P},n}\}$ suspaustumą. Tegul $K \subset D$ yra kompaktinė aibė. Panaudoję Koši (Cauchy) integralinę formulę ir eilučių $\zeta_{\mathcal{P},n}(s)$ absoliutųjį konvergavimą, su $\sigma_\kappa > \widehat{\sigma}$ gauname

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \sup_{s\in K}|\zeta_{\mathcal{P},n}(s+i\tau)|^2\,\mathrm{d}\tau \ll \sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{m\in\mathcal{N}_{\mathcal{P}}}\frac{a_n^2(m)}{m^{2\sigma_\kappa}} \ll \sum_{m\in\mathcal{N}_{\mathcal{P}}}\frac{1}{m^{2\sigma_\kappa}} \stackrel{\text{def}}{=} V_\kappa < \infty. \tag{4.3}$$

Tarkime, kad ξ_T tam tikros tikimybinės erdvės $(\Xi, \mathcal{A}, \mu)$ atsitiktinis dydis tolygiai pasiskirstęs intervale $[0, T]$. Apibrėžkime $H(D)$-reikšmį atsitiktinį elementą

$$Y_{T,\mathcal{P},n} = Y_{T,\mathcal{P},n}(s) = \zeta_{\mathcal{P},n}(s + i\xi_T).$$

Tegul $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ žymi konvergavimą į skirstinį. Iš 8 lemos gauname, kad

$$Y_{T,\mathcal{P},n} \xrightarrow[T\to\infty]{\mathcal{D}} Y_{\mathcal{P},n}, \tag{4.4}$$

čia $Y_{\mathcal{P},n}(s)$yra $H(D)$-reikšmis atsitiktinis elementas, kurio skirstinys $Q_{\mathcal{P},n}$. Kadangi konvergavimas erdvėjs $H(D)$ kompaktinėse aibėse yra tolygusis, iš (4.4) sąryšio turime

$$\sup_{s\in K} |Y_{T,\mathcal{P},n}(s)| \xrightarrow[T\to\infty]{\mathcal{D}} \sup_{s\in K} |Y_{\mathcal{P},n}(s)|. \tag{4.5}$$

Dabar, tegul $K = K_l$, čia $\{K_l\}$ juostos D kompaktinių aibių seka iš metrikos ρ apibrėžimo. Fiksuokime $\varepsilon > 0$ ir tarkime, kad $R_l = 2^l \varepsilon^{-1}\sqrt{V_l}$, čia $V_l = V_{\kappa_l}$. Todėl (4.3) sąryšis ir Čebyševo (Chebyshev) tipo nelygybė duoda

$$\begin{aligned}
\limsup_{T\to\infty} \mu\left\{\sup_{s\in K_l} |Y_{T,\mathcal{P},n}(s)| > R_l\right\} &\leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{TR_l}\int_0^T \sup_{s\in K_l} |\zeta_{\mathcal{P},n}(s+i\tau)|\,\mathrm{d}\tau \\
&\leqslant \sup_{s\in\mathbb{N}} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{R_l}\left(\frac{1}{T}\int_0^T \sup_{s\in K_l} |\zeta_{\mathcal{P},n}(s+i\tau)|^2\,\mathrm{d}\tau\right)^{1/2} = \frac{\varepsilon}{2^l}.
\end{aligned}$$

Vadinasi, atsižvelgę į (4.5) sąryšį, gauname

$$\mu\left\{\sup_{s\in K_l} |Y_{\mathcal{P},n}(s)| > R_l\right\} \leqslant \frac{\varepsilon}{2^l}. \tag{4.6}$$

Apibrėžkime aibę

$$H(\varepsilon) = \left\{g \in H(D) : \sup_{s\in K_l} |g(s)| \leqslant R_l, l \in \mathbb{N}\right\}.$$

Tada $H(\varepsilon)$ yra erdvės $H(D)$ kompaktinė aibė. Be to, iš (4.6) nelygybės turime, kad su visais $n \in \mathbb{N}$

$$\mu\{Y_{\mathcal{P},n} \in H(\varepsilon)\} = 1 - \mu\{Y_{\mathcal{P},n} \notin H(\varepsilon)\} \geqslant 1 - \varepsilon\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{2^l} = 1 - \varepsilon.$$

Kadangi matas $Q_{\mathcal{P},n}$ yra atsitiktinio elemento $Y_{\mathcal{P},n}$ skirstinys, todėl su visais $n \in \mathbb{N}$

$$Q_{\mathcal{P},n}(H(\varepsilon)) \geqslant 1 - \varepsilon.$$

Lema įrodyta.

Dabar jau esame pasiruošę įrodyti matų $P_{T,\mathcal{P}}$ ir $\widehat{P}_{T,\mathcal{P}}$ silpnąjį konvergavimą. Dėl pilnumo, suformuluosime vieną labai svarbų tvirtinimą

1 teiginys. *Tarkime, kad metrinė erdvė $(\mathbb{X}, d)$ yra separabilioji, o $\mathbb{X}$-reikšmiai atsitiktiniai elementai x_{mn} ir y_n, $m, n \in \mathbb{N}$, yra apbrėžti toje pačioje tikimybinėje erdvėje $(\Xi, \mathcal{A}, \mu)$. Be to, tegul*

$$x_{mn} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} x_m, \quad x_m \xrightarrow[m\to\infty]{\mathcal{D}} x$$

ir su kiekvienu $\varepsilon > 0$

$$\lim_{m\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mu \{d(x_{mn}, y_n) \geqslant \varepsilon\} = 0.$$

Tuomet

$$y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} x.$$

Įrodymas. Teiginys yra 4.2 teorema iš [3] monografijos.

10 lema. *Su 2 teoremos sąlygomis erdvėje* $(H(D), \mathcal{B}(H(D)))$ *egzistuoja tikimybinis matas* $P_{\mathcal{P}}$ *toks, kad abu matai* $P_{T,\mathcal{P}}$ *ir* $\widehat{P}_{T,\mathcal{P}}$ *silpnai konverguoja į* $P_{\mathcal{P}}$*, kai* $T \to \infty$.

Įrodymas. Tegul ξ_T yra atsitiktinis dydis iš 9 lemos įrodymo. Pagal 9 lemą egzistuoja seka $\{Q_{\mathcal{P},n_m}\} \subset \{Q_{\mathcal{P},n}\}$ ir tikimybinis matas $Q_{\mathcal{P}}$ erdvėje $(H(D), \mathcal{B}(H(D)))$, kad matas $Q_{\mathcal{P},n_m}$ su $m \to \infty$ silpnai konverguoja į $Q_{\mathcal{P}}$. Kitaip tariant, su 9 lemos žymenimis

$$Y_{\mathcal{P},n_m} \xrightarrow[m\to\infty]{\mathcal{D}} Q_{\mathcal{P}}. \tag{4.7}$$

Erdvėje $(\Xi, \mathcal{A}, \mu)$ apibrėžkime dar vieną $H(D)$-reikšmį atsitiktinį elementą

$$Y_{T,\mathcal{P}} = Y_{T,\mathcal{P}}(s) = \zeta_{\mathcal{P}}(s + i\xi_T).$$

Tada, taikydami 5 lemą su $\varepsilon > 0$, gauname

$$\begin{aligned}
&\lim_{m\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \mu \{\rho(Y_{T,\mathcal{P}}, Y_{T,\mathcal{P},n_m}) \geqslant \varepsilon\} \\
&\quad = \lim_{m\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \mathrm{meas}\{\tau \in [0,T] : \rho(\zeta_{\mathcal{P}}(s+i\tau), \zeta_{\mathcal{P},n_m}(s+i\tau)) \geqslant \varepsilon\} \\
&\quad \leqslant \lim_{m\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{\varepsilon T} \int_0^T \rho(\zeta_{\mathcal{P}}(s+i\tau), \zeta_{\mathcal{P},n_m}(s+i\tau)) \,\mathrm{d}\tau = 0.
\end{aligned}$$

Šis faktas, sąryšiai (4.4) ir (4.7) rodo, kad visos 1 teiginio sąlygos yra išpildytos. Taigi,

$$Y_{T,\mathcal{P}} \xrightarrow[T\to\infty]{\mathcal{D}} Q_{\mathcal{P}}, \tag{4.8}$$

arba matas $P_{T,\mathcal{P}}$ silpnai konverguoja į matą $Q_{\mathcal{P}}$, kai $T \to \infty$. Kadangi matų šeima $\{Q_{\mathcal{P},n}\}$ yra reliatyviai kompaktiška, sąryšis (4.8) papildomai duoda, kad

$$Y_{\mathcal{P},n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} Q_{\mathcal{P}}. \tag{4.9}$$

Lieka įrodyti mato $\widehat{P}_{T,\mathcal{P}}$ silpnąjį konvergavimą. Tikimybinė erdvėje $(\Xi, \mathcal{A}, \mu)$ apibrėžkime $H(D)$-reikšmius atsitiktinius elementus

$$\widehat{Y}_{T,\mathcal{P},n} = \widehat{Y}_{T,\mathcal{P},n}(s) = \zeta_{\mathcal{P},n}(s + i\xi_T, \omega)$$

ir

$$\widehat{Y}_{T,\mathcal{P}} = \widehat{Y}_{T,\mathcal{P}}(s) = \zeta_{\mathcal{P}}(s + i\xi_T, \omega).$$

Iš 8 lemos gauname sąryšį

$$\widehat{Y}_{T,\mathcal{P},n} \xrightarrow[T\to\infty]{\mathcal{D}} Q_{\mathcal{P}}, \tag{4.10}$$

o iš 6 lemos su $\varepsilon > 0$ turime

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\limsup_{T\to\infty}&\,\mu\left\{\rho\left(\widehat{Y}_{T,\mathcal{P}}, \widehat{Y}_{T,\mathcal{P},n}\right) \geqslant \varepsilon\right\}\\ &\leqslant \lim_{n\to\infty}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{\varepsilon T}\int_0^T \rho\left(\zeta_{\mathcal{P}}(s+i\tau,\omega), \zeta_{\mathcal{P},n}(s+i\tau,\omega)\right)\mathrm{d}\tau = 0.\end{aligned}$$

Pastaroji lygybė, sąryšiai (4.9), (4.10) ir 10 lema duoda sąryšį

$$\widehat{Y}_{T,\mathcal{P}} \xrightarrow[T\to\infty]{\mathcal{D}} Q_{\mathcal{P}}.$$

Taigi, $\widehat{P}_{T,\mathcal{P}}$, kai $T\to\infty$, taip pat silpnai konverguoja į matą $Q_{\mathcal{P}}$.

Lieka identifikuoti matą $Q_{\mathcal{P}}$. Atsitiktinio elemento $\zeta_{\mathcal{P}}(s,\omega)$ skirstinį pažymėkime $P_{\zeta_{\mathcal{P}}}$, t. y.

$$P_{\zeta_{\mathcal{P}}}(A) = m_{\mathcal{P}}\left\{\omega\in\Omega_{\mathcal{P}} : \zeta_{\mathcal{P}}(s,\omega)\in A\right\}.$$

3 teorema. *Su 2 teoremos sąlygomis matas $P_{T,\mathcal{P}}$ silpnai konverguoja į matą $P_{\zeta_{\mathcal{P}}}$, kai $T\to\infty$.*

Įrodymas. parodysime, kad 10 lemos ribinis matas $Q_{\mathcal{P}}$ sutampa su $P_{\zeta_{\mathcal{P}}}$.

Naudosime silpnojo tikimybinių matų konvergavimo ekvivalentą tolydumo aibių terminais, žr. 2.1 teoremą iš [3] monografijos. Tegul A yra mato $Q_{\mathcal{P}}$ tolydumo aibė, t. y. $Q_{\mathcal{P}}(\partial A) = 0$, čia ∂A žymi aibės A sieną. Tuomet, iš 10 lemos gauname, kad

$$\lim_{T\to\infty}\widehat{P}_{T,\mathcal{P}}(A) = Q_{\mathcal{P}}(A). \tag{4.11}$$

Erdvėje $(\Omega_{\mathcal{P}}, \mathcal{B}(\Omega_{\mathcal{P}}))$ apibrėžkime atsitiktinį dydį

$$\xi_{\mathcal{P}}(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{jeigu } \zeta_{\mathcal{P}}(s,\omega)\notin A,\\ 1, & \text{kitais atvejais.}\end{cases}$$

Grįžkime prie grupės G_τ iš 3 lemos. Kadangi, pagal 3 lemą, grupė G_τ yra ergodinė, todėl procesas $\xi(g_\tau(\omega))$ yra ergodinis. Taikydami Birchofo-Chinčino teoremą, žr. [5], turime

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \xi_{\mathcal{P}}(g_\tau(\omega))\,\mathrm{d}\tau = \mathbb{E}\xi_{\mathcal{P}}(\omega) \tag{4.12}$$

su beveik visais $\omega\in\Omega_{\mathcal{P}}$. Tačiau atsitiktinio dydžio $\xi_T(\omega)$ apibrėžimas reiškia, kad su beveik visais $\omega\in\Omega_{\mathcal{P}}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_0^T \xi_{\mathcal{P}}(g_\tau(\omega))\,\mathrm{d}\tau &= \frac{1}{T}\mathrm{meas}\left\{\tau\in[0,T] : \zeta_{\mathcal{P}}(s, g_\tau(\omega))\in A\right\}\\ &= \frac{1}{T}\mathrm{meas}\left\{\tau\in[0,T] : \zeta_{\mathcal{P}}(s+i\tau,\omega)\in A\right\}.\end{aligned}$$

Taigi, (4.11)lygybė duoda

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \xi_{\mathcal{P}}(g_\tau(\omega))\,\mathrm{d}\tau = Q_{\mathcal{P}}(A). \tag{4.13}$$

Be to,

$$\mathbb{E}\xi(\omega) = \int_{\Omega_{\mathcal{P}}} \xi_{\mathcal{P}}(\omega)\mathrm{d}m_{\mathcal{P}} = P_{\zeta_{\mathcal{P}}}(A).$$

Pastarasis faktas, (4.12) ir (4.13) lygybės įrodo, kad $Q_{\mathcal{P}}(A) = P_{\zeta_{\mathcal{P}}}(A)$ su visomis mato $Q_{\mathcal{P}}$ tolydumo aibėmis A. Gerai žinoma, kad visos tolydumo aibės sudaro determinuojančią klasę. Vadinasi, turime, kad $Q_{\mathcal{P}} = P_{\zeta_{\mathcal{P}}}$. Teorema yra įrodyta.

5. Mato atrama

2 teoremos įrodymui yra reikalingas išreikštinis mato $P_{\zeta_{\mathcal{P}}}$ pavidalas. Priminsime, kad mato $P_{\zeta_{\mathcal{P}}}$ atrama yra tokia minimali uždaroji aibė $S_{\mathcal{P}} \subset H(D)$, kad $P_{\zeta_{\mathcal{P}}}(S_{\mathcal{P}}) = 1$. Kiekvienos atramos $S_{\mathcal{P}}$ atvirosios aplinkos matas $P_{\zeta_{\mathcal{P}}}$ yra teigiams.

Apibrėžkime aibę

$$S_{\mathcal{P}} = \{g \in H(D) : g(s) \neq 0 \text{ or } g(s) \equiv 0\}.$$

2 teiginys. *Su 2 teoremos sąlygomis mato $P_{\zeta_{\mathcal{P}}}$ atrama yra aibė $S_{\mathcal{P}}$.*

2 teiginio įrodymas yra panašus kaip ir Rymano dzeta funkcijos atveju. Suformuluosime tik keletą lemų be įrodymo, kadangi jų įrodymai žodis žodin sutampa su analogiškais tvirtinimais iš [17] monografijos.

Pradėsime nuo keleto įverčių susijusių su $p \in \mathcal{P}$.

11 lema. *Tarkime, kad galioja* (5) *įvertis. Tuomet su $x \to \infty$*

$$\sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{1}{p} = \log\log x + a + O\left(x^{\beta_2 - 1}\right),$$

čia a yra konstanta, o $0 \leqslant \beta_2 < 1$.

Įrodymas. Turime, kad

$$\begin{aligned}
\psi_1(x) &\overset{\text{def}}{=} \sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \in \mathcal{P}}} \log p = \psi(x) - \sum_{\substack{p^\alpha \leqslant x \\ p \in \mathcal{P}}} \sum_{2 \leqslant \alpha \leqslant (\log x)/(\log 2)} \log p \\
&= \psi(x) + O\left(\psi\left(x^{1/2}\right) \log x\right) = x + r(x),
\end{aligned}$$

čia

$$r(x) = O\left(x^{\beta_2} \log x\right)$$

su

$$\beta_2 = \max\left(\beta_1, \frac{1}{2}\right).$$

Iš čia, pritaikę dalinį sumavimą, gauname

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{1}{p} &= \frac{1}{x \log x} \sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \in \mathcal{P}}} \log p + \int_{p_1}^{x} \left(\frac{1}{u^2 \log u} + \frac{1}{u^2 \log^2 u}\right) \psi_1(u)\, \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\log x} + \log\log x - \frac{1}{\log x} + c_1 + \int_{p_1}^{x} \left(\frac{1}{u^2 \log u} + \frac{1}{u^2 \log^2 u}\right) r(u)\, \mathrm{d}u \\
&= \log\log x + c_1 + \int_{p_1}^{\infty} \left(\frac{1}{u^2 \log u} + \frac{1}{u^2 \log^2 u}\right) r(u)\, \mathrm{d}u \\
&\quad - \int_{x}^{\infty} \left(\frac{1}{u^2 \log u} + \frac{1}{u^2 \log^2 u}\right) r(u)\, \mathrm{d}u \\
&= \log\log x + c_2 + O\left(\int_{x}^{\infty} u^{\beta_1 - 2}\, \mathrm{d}u\right) = \log\log x + c_2 + O(\left(x^{\beta_2 - 1}\right).
\end{aligned}$$

Toliau naudosime keletą eksponentinio tipo funkcijų savybių. Priminsime, kad srityje $|\arg s| \leqslant \theta_0$, $0 < \theta_0 \leqslant \pi$ analizinė funkcija $g(s)$ yra vadinama eksponentinio tipo, jeigu tolygiai pagal θ, $\theta \leqslant \theta_0$,

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log|g(re^{i\theta})|}{r} < \infty.$$

12 lema. *Tarkime, kad $g(s)$ sveikoji eksponentinio tipo funkcija, galioja* (5) *įvertis ir*

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log|g(r)|}{r} > -1.$$

Tada

$$\sum_{p\in\mathcal{P}} |g(\log p)| = \infty.$$

Įrodymas. Naudojame 11 lemą ir žodis žodin pakartojame 6.4.14 teoremos įrodymą iš [17] monografijos.

Tegul $s \in D$, o $|a_p| = 1$. Dėl trumpumo, pažymėkime

$$g_{\mathcal{P}}(s, a_p) = \log\left(1 - \frac{a_p}{p^s}\right), \quad p \in \mathcal{P},$$

čia

$$\log\left(1 - \frac{a_p}{p^s}\right) = -\frac{a_p}{p^s} - \frac{a_p^2}{2p^{2s}} - \cdots.$$

13 lema. *Tarkime, kad galioja* (5) *įvertis. Tuomet konverguojančių eilučių*

$$\sum_{p\in\mathcal{P}} g_{\mathcal{P}}(s, a_p)$$

aibė yra tiršta aibėje $H(D)$.

Įrodymas. Su aibe $\mathcal{P}$ yra susijusi tik 12 lema. Kiti įrodymo argumentai yra tie patys, kurie yra taikomi 6.5.4 lemos iš [17] monografijos įrodymui.

Priminsime, kad atsitiktinio elemento X skirstinio atrama yra vadinama elemento X atrama ir žymima S_X.

Dėl pilnumo, suformuluosime lemą apie atsitiktinių elementų eilučių atramą.

14 lema. *Tegul $\{\xi_m\}$ nepriklausomų $H(D)$-reikšmių atsitiktinių dydžių seka erdvėje $(\Xi, \mathcal{A}, \mu)$, o eilutė*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \xi_m$$

konverguoja beveik tikrai. Tuomet šios eilutės sumos atrama yra visų funkcijų $g \in H(D)$ išreiškiamų konverguojančia eilute

$$g = \sum_{m=1}^{\infty} g_m, \quad g_m \in S_{\xi_m}$$

aibės uždarinys.

Įrodymas. Lema yra 1.7.10 teorema iš [17] monografijos

2 teiginio įrodymas. Pagal apibrėžimą, $\{\omega(p) : p \in \mathcal{P}\}$ yra nepriklausomų kompleksiniareikšmių atsitiktinių dydžių seka. Todėl $\{g_{\mathcal{P}}(s, \omega(p))\}$ yra nepriklausomų $H(D)$-reikšmių atsitiktinių elementų seka. Kadangi kiekvieno elemento $\omega(p)$ atrama yra vienetinis apskritimas, todėl $g_{\mathcal{P}}(s, \omega(p))\}$ atrama yra aibė

$$\left\{ g \in H(D) : g(s) = -\log\left(1 - \frac{a}{p^s}\right), |a| = 1 \right\}.$$

Taigi, iš 14 lemos matome, kad $H(D)$-reikšmio atsitiktinio elemento

$$\log \zeta_{\mathcal{P}}(s, \omega) = -\sum_{p \in \mathcal{P}} \log\left(1 - \frac{\omega(p)}{p^s}\right)$$

atrama yra visų konverguojančių eilučių

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} g_{\mathcal{P}}(s, a_p)$$

aibės uždarinys su $|a_p| = 1$. Pagal 13 lemą, šių eilučių aibė yra tiršta erdvėje $H(D)$. Apibrėžkime $u : H(D) \to H(D)$ lygybe $u(g) = \mathrm{e}^g$, $g \in H(D)$. Atvaizdavimas u yra tolydusis, $u(\log \zeta_{\mathcal{P}}(s, \omega)) = \zeta_{\mathcal{P}}(s, \omega)$, o $u(H(D)) = S_{\mathcal{P}} \setminus \{0\}$. Tai rodo, kad $S_{\mathcal{P}} \setminus \{0\}$ priklauso atsitiktinio elemento $\zeta_{\mathcal{P}}(s, \omega)$ atramai. Kadangi atrama yra uždaroji aibė, gauname, kad $\zeta_{\mathcal{P}}(s, \omega)$ yra aibės $S_{\mathcal{P}} \setminus \{0\}$ uždarinys, t. y.

$$S_{\zeta_{\mathcal{P}}} \supset S_{\mathcal{P}}. \tag{5.1}$$

Iš kitos pusės, atsitiktinis elementas $\zeta_{\mathcal{P}}(s, \omega)$ su beveik visais $\omega \in \Omega_{\mathcal{P}}$ konverguojanti nenulinių daugiklių sandauga, žr. [29], todėl

$$S_{\zeta_{\mathcal{P}}} \subset S_{\mathcal{P}}.$$

Šis poaibis (5.1) įrodo 2 teiginį.

6. Universalumo įrodymas

Šiame skyriuje įrodysime 2 teoremą. Įrodymas remiasi 3 teorema, 2 teiginiu ir Mergeliano (Mergelyan) teorema apie analizinių funkcijų aproksimavimą polinomais kompaktinėse aibėse su jungiaisiais papildiniais, žr. [22].

2 teoremos įrodymas. Tugul $p(s)$ yra polinomas, K ir ε apibrėžti 2 teoremoje, o

$$\mathcal{G}_\varepsilon = \left\{ g \in H(D) : \sup_{s\in K} \left| g(s) - \mathrm{e}^{p(s)} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

Tuomet aibė $\mathcal{G}_\varepsilon$ yra elemento $\mathrm{e}^{p(s)} \in S_{\mathcal{P}}$ atviroji aplinka. Pagal 2 teiginį, aibė $S_{\mathcal{P}}$ yra mato $P_{\zeta_{\mathcal{P}}}$ atrama, todėl panaudoję atramų savybes gauname, kad

$$P_{\zeta_{\mathcal{P}}}(\mathcal{G}_\varepsilon) > 0. \tag{6.1}$$

Kadangi $f(s) \in H_0(K)$, todėl galime taikyti Mergeliano teoremą ir parinkti tokį polinomą $p(s)$, kad

$$\sup_{s\in K} \left| f(s) - \mathrm{e}^{p(s)} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tai rodo, kad visi aibės $\mathcal{G}_\varepsilon$ elementai yra aibėje

$$\widehat{\mathcal{G}}_\varepsilon = \left\{ g \in H(D) : \sup_{s\in K} |g(s) - f(s)| < \varepsilon \right\}.$$

Todėl, pagal (6.1) nelygybę, turime

$$P_{\zeta_{\mathcal{P}}}(\widehat{\mathcal{G}}_\varepsilon) > 0. \tag{6.2}$$

3 teorema ir silpnojo tikimybinių matų konvergavino ekvivalentas atvirųjų aibių terminais rodo, kad

$$\liminf_{T\to\infty} P_{T,\mathcal{P}}(\widehat{\mathcal{G}}_\varepsilon) \geqslant P_{\zeta_{\mathcal{P}}}(\widehat{\mathcal{G}}_\varepsilon).$$

Pastaroji, (6.2) nelygybės, mato $P_{T,\mathcal{P}}$ ir aibės $\widehat{\mathcal{G}}_\varepsilon$ apibrėžimai duoda pirmosios teoremos dalies tvirtinimą.

Kad įrodytume antrąjį teoremos tvirtinimą, pastebime, jog aibės $\widehat{\mathcal{G}}_\varepsilon$ siena $\partial\widehat{\mathcal{G}}_\varepsilon$ yra aibėje

$$\left\{ g \in H(D) : \sup_{s\in K} |g(s) - f(s)| = \varepsilon \right\}.$$

Taigi, sienos $\partial\widehat{\mathcal{G}}_{\varepsilon_1}$ ir $\partial\widehat{\mathcal{G}}_{\varepsilon_2}$ nesikerta su skirtingais teigiamais ε_1 ir ε_2. Todėl, $P_{\zeta_{\mathcal{P}}}(\partial\widehat{\mathcal{G}}_\varepsilon) > 0$ su daugiausiai skaičiąja $\varepsilon > 0$ reikšmių aibe. Kitaip tariant, $\widehat{\mathcal{G}}_\varepsilon$ yra mato $P_{\zeta_{\mathcal{P}}}$ tolydumo aibė su visais $\varepsilon > 0$, nebent išskyrus skaičiąją $\varepsilon > 0$ reikšmių aibę. Šis faktas, (6.2) nelygybė, 3 teorema ir silpnojo tikimybinių matų konvergavimo ekvivalentas mato tolydumo aibių terminais įrodo antrąjį teoremos tvirtinimą.

Lietratūra

[1] B. Bagchi, *The Statistical Behaviour and Universality Properties of the Riemann Zeta-Function and Other Allied Dirichlet Series*, Ph. D. Thesis, Indian Statistical Institute, Calcutta, 1981.

[2] A. Beurling, Analyse de la loi asymptotique de la distribution des nombres premiers généralisés. I, *Acta Math.* **58** (1937), 225–291.

[3] P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, John Wiley & Sons, New York, 1968.

[4] J.-P. Borel, Sur le prolongement des functions ζ associées a un système de nombres premiers généralisés de Beurling, *Acta Arith.* **43** (1984), 273–282.

[5] H. Cramér and M. R. Leadbetter, *Stationary and Related Stochastic Processes*, Wiley, New York, 1967.

[6] C. J. de la Vallée-Poussin, Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers, I-III, *Ann. Soc. Sci. Bruxelles* **20** (1896), 183–256, 281–362, 363–397.

[7] H. G. Diamond The prime number theorem for Beurling's generalized numbers, *J. Number Theory* **1** (1969), 200–207.

[8] H. G. Diamond, Asymptotic distribution of Beurling's generalized integers, *Illinois J. Math.* **14** (1970), 12–28.

[9] H. G. Diamond, When do Beurling generalized integers have a density?, *J. Reine Angew. Math.* **295** (1977), 22–39.

[10] P. Drungilas, R. Garunkštis and A. Novikas, Second moment of the Beurling zeta-function, *Lith. Math. J.* **59** (2019), 317–337.

[11] A. Geštautas and A. Laurinčikas, On universality of some Beurling zeta-functions, *Axioms* **13**(3) (2024), article no. 145.

[12] S. M. Gonek, *Analytic Properties of Zeta and L-Functions*, Ph. D. Thesis, University of Michigan, Ann Arbor, 1975.

[13] J. Hadamard, Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris* **122** (1896), 1470–1473.

[14] T. W. Hilberdink and M. L. Lapidus, Beurling zeta functions, generalised primes, and fractal membranes. *Acta Appl. Math.* **2006**, *94*, 21–48.

[15] A. A. Karatsuba and S. M. Voronin, *The Riemann Zeta-Function*, Walter de Gruiter, Berlin, New York, 1992.

[16] E. Landau, Neuer Beweis des Primzahlsatzes und Beweis des Primidealsatzes, *Math. Ann.* **56** (1903), 645–670.

[17] A. Laurinčikas, *Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1996.

[18] A. Laurinčikas, On value distribution of certain Beurling zeta-functions, *Mathematics* **12**(3) (2024), article no. 459.

[19] M. Loève, *Probability theory*, Izd. Innostr. Lit., Moscow, 1962 (in Russian).

[20] P. Malliavin, Sur la reste de la loi asymptotique de répartion des nombres premiers généralisés de Beurling, *Acta Math.* **106** (1961), 281–298.

[21] K. Matsumoto, A survey on the theory of universality for zeta and L-functions, in: *Number Theory: Plowing and Starring Through High Wave Forms*, Proc. 7th China - Japan Seminar (Fukuoka 2013), Series on Number Theory and its Appl., M. Kaneko, Sh. Kanemitsu and J. Liu (eds), World Scientific Publishing Co., New Jersey, London, Singapore, Bejing, Shanghai, Hong Kong, Taipei, Chennai, 2015; pp. 95–144.

[22] S. N. Mergelyan, Uniform approximations to functions of a complex variable, in: *Amer. Math. Soc. Transl.*, no. 101, Amer. Math. Soc., Providence, 1954.

[23] B. Nyman, A general prime number theorem, *Acta Math.* **81** (1949), 299–307.

[24] S. G. Révész, Density estimates for the zeros of the Beurling ζ function in the critical strip, *Mathematika* **68** (2002), 1045–1072.

[25] B. Riemann, Über die Anzahl der Primzahlen unterhalb einer gegebenen Grösse, *Monatsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin* (1859), 671–680.

[26] C. Ryavec, The analytic continuation of Euler products with applications to asymptotic formulae, *Illinois J. Math.* **17** (1973), 608–618.

[27] E. Stankus, On some generalized integers, *Lith. Math. J.* **36** (1996), 115–123.

[28] J. Steuding, *Value-Distribution of L-Functions*, Lecture Notes Math. vol. 1877, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2007.

[29] E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann zeta-Function* Second edition revised by D.R. Heath-Brown, Clarendon Press, Oxford, 1986.

[30] S. M. Voronin, Theorem on the "universality" of the Riemann zeta-function, *Math. USSR Izv.* **9** (1975), 443–453.

[31] W.-B. Zhang, Density and O-density of Beurling generalized integers, *J. Number Theory* **30** (1988), 120–139.

Beurlingo dzeta funkcijos universalumas

Santrauka

Tegul $\mathcal{P}$ yra apibendintų pirminių skaičių aibė, o $\zeta_{\mathcal{P}}(s)$, $s = \sigma + it$, – Beurlingo dzeta funkcija susieta su $\mathcal{P}$. Magistro darbe įrodėme analizinių funkcijų aproksimavimą naudojant postūmius $\zeta_{\mathcal{P}}(s + i\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$. Tarkime, kad galioja klasikinės hipotezės apibendintųjų pirminių skaičių skaičiui ir apibendrintos fon Mangoldto funkcijos kvadratiniam vidurkiui, aibė $\{\log p : p \in \mathcal{P}\}$ yra tiesiškai nepriklausoma virš racionaliųjų skaičių kūno $\mathbb{Q}$ ir egzistuoja aprėžtas funkcijos $\zeta_{\mathcal{P}}(s)$ vidurkis. Su šiomis hipotezėmis įrodome funkcijos $\zeta_{\mathcal{P}}(s)$ universalumą. Tai reiškia, kad postūmių $\zeta_{\mathcal{P}}(s + i\tau)$, aproksimuojančių duotą analizinę funkciją apibrėžtą tam tikroje juostoje $\widehat{\sigma} < \sigma < 1$ turi teigiamą apatinį tankį. Šis rezultatas patvirtina Liniko-Ibragimovo hipotezę apie Dirichlė eilučių universalumą.

Universality of the Beurling Zeta-Function

Summary

Let $\mathcal{P}$ be the set of generalized prime numbers, and $\zeta_{\mathcal{P}}(s)$, $s = \sigma + it$, denote the Beurling zeta-function associated to $\mathcal{P}$. In the Master thesis, we consider approximation of analytic functions by using shifts $\zeta_{\mathcal{P}}(s + i\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$. We assume the classical axioms for the number of generalized integers and the mean of the generalized von Mangoldt function, the linear independence of the set $\{\log p : p \in \mathcal{P}\}$, and the existence of a bounded mean square for $\zeta_{\mathcal{P}}(s)$. Under the above hypotheses, we obtain the universality of the function $\zeta_{\mathcal{P}}(s)$. This means that the set of shifts $\zeta_{\mathcal{P}}(s + i\tau)$ approximating a given analytic function defined on a certain strip $\widehat{\sigma} < \sigma < 1$ has a positive lower density. This result supports the Linnik-Ibragimov conjecture on universality of Dirichlet series.