



**Matematikos ir
informatikos
fakultetas**

VILNIAUS UNIVERSITETAS

**MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
BAKALAURO STUDIJŲ PROGRAMA
FINANSŲ IR DRAUDIMO MATEMATIKA**

**Žymusis italų aktuaras Gaetano Balducci ir kai
kurie skaičiavimai pagal jo pasiūlytą prielaidą**

Bakalauro baigiamasis darbas

Autorė: Eglė Matulevičiūtė

VU el. paštas: egle.matuleviciute@mif.stud.vu.lt

Vadovas: Dr. Andrius Grigutis

Vilnius
2024

Turinys

Santrauka / Abstract	3
1 Įžanga	4
2 Išgyvenimo modeliai	6
2.1 Pagrindiniai apibrėžimai ir žymėjimai	6
2.1.1 Išgyvenimo funkcijos savybės	6
2.2 Gyvenimo trukmės charakteristikos	6
2.3 Interpoliacijos prielaidos	7
2.3.1 Mirtingumas pasiskirstęs tolygiai metų intervaluose	7
2.3.2 Mirtingumo galia pastovi	7
2.3.3 Balducci prielaida	7
3 Gaetano Balducci	8
3.1 Biografija	8
3.2 Balducci teorijos užuomazgos	9
3.3 Pirmoji Balducci teorijos publikacija	10
3.3.1 Apibrėžiamos charakteristikos	10
3.3.2 Populiacijos tyrimas	11
3.3.3 Žinomesnis Balducci prielaidos pavidalas	14
3.4 Oficialus Balducci teorijos pripažinimas	15
3.5 Kitas būdas Balducci teorijai apibrėžti	16
3.6 Iš Balducci prielaidos sekančios gyvenimo trukmės charakteristikų lygybės .	17
3.7 Trumpų intervalų mirtingumo tikimybė	20
3.8 Theodor Wittstein	22
4 Skirtingų interpoliavimo prielaidų palyginimas	23
4.1 Išgyvenimo funkcija	23
4.1.1 Išgyvenimo funkcija visam likusiam gyvenimui	23
4.1.2 Išgyvenimo funkcijos interpoliacija	25
4.1.3 Likusiojo gyvenimo trukmės tankis	25
4.2 Būsimosios gyvenimo trukmės vidurkis	26
4.2.1 Mirtingumas pasiskirstęs tolygiai metų intervaluose	27
4.2.2 Balducci prielaida	28
5 Gyvybės draudimas	29
5.1 Grynoji vienkartinė premija	29
5.1.1 N-metų gyvybės draudimas	32
5.1.2 M-metų atidėtas gyvybės draudimas n-metų laikotarpiui	32
5.2 Skaičiavimai	32
Pavyzdys 5.1	32

Pavyzdys 5.2	34
Pavyzdys 5.3	40
6 Išvados	44
7 Priedai	46
7.1 Grafikų kodai	46
Literatūra	47

Žymusis italų aktuaras Gaetano Balducci ir kai kurie skaičiavimai pagal jo pasiūlytą prielaidą

Santrauka

Aktuarinio mokslo literatūroje plačiai paplitusi Balducci prielaida, tačiau trūksta šaltinių, kuriuose būtų nagrinėjama teorijos atsiradimo istorija, bei informacijos apie patį italų aktuarą Gaetano Balducci. Šiame darbe tiriamos prielaidos apie išgyvenimo funkcijos $s(x)$ interpoliavimą, kai $x \in \mathbb{N}_0$ nurodo asmens amžių. Tuomet siekiama teorijas pritaikyti gyvybės draudimo srityje, vertinant būsimosios išmokos dabartinės vertės ν^{T_x} pagrindines charakteristikas (T_x yra atsitiktinis dydis ir nurodo žmogaus likusiąją gyvenimo trukmę) – grynąją vienkartinę premiją $\mathbb{E}\nu^{T_x} \mathbb{1}_{\{T_x \leq n\}}$, $n \in \{1, 2, \dots\}$, dispersiją $\mathbb{D}\nu^{T_x} \mathbb{1}_{\{T_x \leq n\}}$ ir pan.

Raktiniai žodžiai: Balducci, Balducci prielaida, gyvybės draudimas, išgyvenimo funkcija, interpoliacija, Wittstein, grynoji vienkartinė premija, dispersija.

The Famous Italian Actuary Gaetano Balducci and Some Calculations Based on His Offered Assumption

Abstract

Balducci assumption is widely spread in the actuarial science literature, however, it lacks sources that analyse the reasoning behind the creation of that assumption, as well as the Italian actuary Gaetano Balducci himself. This work is dedicated to examining popular assumptions about interpolation of survival function $s(x)$ where $x \in \mathbb{N}_0$ denotes the age of the person. Then these theories are carried out in the life insurance sector, evaluating the main properties of discount ν^{T_x} (here T_x is a random variable and denotes the future lifetime of an individual) – net single premium $\mathbb{E}\nu^{T_x} \mathbb{1}_{\{T_x \leq n\}}$, $n \in \{1, 2, \dots\}$, dispersion $\mathbb{D}\nu^{T_x} \mathbb{1}_{\{T_x \leq n\}}$, etc.

Keywords: Balducci, Balducci assumption, life insurance, survival function, interpolation, Wittstein, net single premium, dispersion.

1 Įžanga

Aktuarinė matematika yra tiesiogiai susijusi su neapibrėžtumu ir rizika. Šie veiksniai turi būti atidžiai įvertinami dėl tikėtinų ateities prognozių visose srityse, tačiau ypatingai draudimo ir finansų sektoriuose. Viena iš pagrindinių sričių, kurioje aktuarai susiduria su būtinybe atlikti matematiniais metodais grįstas prognozes yra gyvybės draudimas, kuris paremtas išgyvenimo modeliais ir su jais susijusiomis teorijomis. Žmogaus gyvenimo trukmė X vertinama kaip neneigiamas atsitiktinis dydis, kurio skaitinės charakteristikos galima apibrėžti naudojant tinkamus statistinius metodus [12]. Įvertinus žmogaus gyvenimo trukmę įmanoma tinkamai apskaičiuoti gyvybės draudime reikalingus parametrus, pavyzdžiui, būsimosios išmokos dabartinę vertę, reikalingą premijos dydį, už kurį draudikas gali parduoti draudimą.

Statistinius duomenis apie populiacijos gyvenimo trukmę įprasta rinkti mirtingumo lentelėse – šia praktika naudojasi įvairios šalys, periodiškai rinkdamos informaciją apie individų mirtingumą tarp nustatytų laiko tarpų. Šie duomenys renkami sveikosioms x (metų) reikšmėms ir be išgyvenimo tikimybių $s(x)$ gali būti papildomi ir kitomis skaitinėmis charakteristikomis, aktualiomis vertinant individų mirtingumą, pavyzdžiui – vidutinį sulaukusių x amžiaus individų skaičių iš pradinės vertintos grupės (l_x); vidutinį skaičių individų, kurie mirė sulaukę x metų (d_x); tikimybę, kad individas mirs sulaukęs amžiaus x (q_x); ir būsimosios gyvenimo trukmės vidurkį (e_x^o). Tačiau realybėje gyvenimo trukmė nėra tik sveikosiomis reikšmėmis apibrėžiamas atsitiktinis dydis, vadinasi, mirtingumo lentelės nesuteikia pilnos informacijos apie individų išgyvenamumą. Tarpinės reikšmės metų intervaluose ieškomos naudojantis pasirinktu analizinės išgyvenimo funkcijos $s(x)$ pavidalu (taip apibrėžiamas funkcijos elgsena apibrėžimo srityje) ir su šia funkcija susietomis interpoliavimo prielaidomis.

Analizinės išgyvenimo funkcijos (gyvenimo trukmės pasiskirstymo) pavidalas nagrinėjamas nuo senų laikų, siekiant pritaikyti žinias, kurias suteikia mirtingumo lentelės. Pagrindus tam tiesė mokslininkai nuo pat XVII amžiaus, pavyzdžiui – J. Graunt¹, E. Halley², D. Bernoulli³, R. Price⁴. Vienas pirmųjų, pateikęs analizinės išgyvenimo funkcijos versiją, buvo A. de Moivre⁵ – 1729 m. pasiūlęs vertinti, kad gyvenimo trukmė pasiskirsčiusi tolygiai per visą maksimaliai įmanomą žmogaus gyvenimo laikotarpį [5] [12]. Ši teorija buvo atmesta įvertinus jos netinkamumą pagal empirinius duomenis, tačiau kiti mokslininkai

¹John Graunt (1620–1674) – anglų statistikas, vienas iš pirmųjų mokslininkų, tyrusių demografinės statistikos sritį, 1662 m. publikavo skaičiuotas išgyvenimo tikimybes ir mirtingumą apibūdinančius rodiklius pagal Londono populiacijos mirtingumo statistiką [10].

²Edmond Halley (1656–1742) – anglų astronomas ir matematikas; prisidėjo prie mirtingumo lentelių kūrimo ir jų pritaikymo tinkamoms gyvenimo anuitetų kainoms nustatyti 1693 m. publikacijoje [13].

³Daniel Bernoulli (1700–1782) – šveicarų matematikas, tiesiogiai su aktuarine matematika nedirbo, tačiau 1738 m. publikuotame darbe pateikė vertingų idėjų apie sąsają tarp gyvenimo trukmės nenuspėjamumo ir rizikos [6].

⁴Richard Price (1723–1791) – Jungtinės Karalystės, Velso, moralės filosofas ir matematikas; prisidėjo prie aktuarinės matematikos apibrėždamas vidutinės gyvenimo trukmės vidurkio sąvoką 1771 m. publikacijoje [19].

⁵Abraham de Moivre (1667–1754) – prancūzų matematikas.

ja rėmėsi ir adaptavo vertinant išgyvenimo pasiskirstymą vienerių metų perioduose, kad būtų gauti tikslesni rezultatai. Kitos populiarios versijos buvo pristatytos po šimtmečio: 1825 m. B. Gompertz ⁶ modifikavo eksponentinę funkciją išgyvenamumo funkcijos apibrėžimui [9], 1860 m. W. M. Makeham⁷ patikslino išgyvenamumo funkciją naudodamasis Gompertz apibrėžimu [17], o 1939 m. E. H. W. Weibull⁸ pateikė dar vieną klasikinę išgyvenimo funkcijos versiją besiremdamas eksponentinės funkcijos savybėmis [23].

Parametrai, apibūdinantys mirtingumą metų intervaluose, t. y., kai gyvenimo trukmė vertinama ne tik sveikosiomis reikšmėmis, randami pasitelkiant interpoliaciją. Pagrindinės prielaidos apie $s(x)$ yra šios:

1. Mirtingumas pasiskirstęs tolygiai metų intervaluose;
2. Mirtingumo galia pastovi;
3. Balducci prielaida.

Praktikoje dažniausiai pritaikoma pirmoji prielaida, antrąją dėl paprastumo patogų naudoti edukaciniuose uždaviniuose apie gyvenimo anuitetus (pavyzdžių galima rasti [12]), o trečioji įdomi dėl to, kad nėra plačiai naudojama bei viešai pasiekiamoje aktuarinėje literatūroje informacija apie Balducci prielaidą yra minimali, nors pati prielaida gerai žinoma; be to, literatūroje prakštiškai nėra informacijos nei apie prielaidos autorių Balducci, nei apie jo prielaidos atsiradimo istoriją bei prielaidos pritaikymo tinkamumo motyvaciją.

Todėl šiame darbe siekiama papildyti informaciją, kurios trūksta gyvybės draudimu besidomintiems asmenims. Pirmiausiai bus apibrėžiamos svarbiausios išgyvenimo modeliuose naudojamos charakteristikos, vėliau bus nagrinėjama surinkta informacija apie Gaetano Balducci ir pristatoma, kaip atsirado jo vardu pavadinta prielaida. Tada bus atliekami skaičiavimai gyvybės draudimo srityje (skaičiuojama grynosios vienkartinės premijos išraiška, dispersija ir kitos skaitinės charakteristikos), kuriuose bus pritaikyta Balducci išgyvenimo funkcijos interpoliavimo prielaida ir atliekami aktualūs palyginimai su tolygaus pasiskirstymo metų intervaluose prielaidos rezultatais.

⁶Benjamin Gompertz (1779–1865) – britų matematikas ir aktuaras.

⁷William Matthew Makeham (1826–1891) – anglų aktuaras ir matematikas.

⁸Ernst Hjalmar Waloddi Weibull (1887–1979) – švedų inžinierius ir matematikas, labiausiai žinomas dėl 1951 m. pristatytos išgyvenimo funkcijos [23], kuri buvo patobulinta pagal 1939 m. išleistą publikaciją. Tačiau įdomu tai, kad Weibull visų pirma daugiausiai dėmesio skyrė inžinerijos sričiai – statistinei medžiagų stiprumo analizei, tačiau pagrindiniai principai ir matematinis jo išvadų įvardijimas padėjo pagrindus vėlesniam Weibull skirstinio pritaikymui žmonių išgyvenimo funkcijos analizėje.

2 Išgyvenimo modeliai

2.1 Pagrindiniai apibrėžimai ir žymėjimai

Įvadas į išgyvenimo modelių kursą išsamiau išdėstytas [12], todėl čia pateikiama su trumpinta informacija, skirta apibrėžti žymėjimus, kurie bus reikalingi sekančiuose skyriuose. Pirmiausiai aptariamos svarbiausios išgyvenimo funkcijos charakteristikos.

Išgyvenimo funkcijos reikšmė yra lygi tikimybei, kad žmogus sulauks x metų. Žmogaus gyvenimo trukmė X yra neneigiamas atsitiktinis dydis, kuris, laikoma, kad yra absoliučiai tolydus. Konkretus asmens amžius $x \in [0, \infty)$ naudojamas išgyvenimo funkcijoje kaip pagrindinis kintamasis:

$$s(x) = \mathbb{P}(X \geq x) = 1 - F(x), \text{ kai}$$

$F(x) = \mathbb{P}(X < x) = \int_0^x f(u)du$ yra gyvenimo trukmės pasiskirstymo funkcija, o $f(u)$ a.d. X tankis.

2.1.1 Išgyvenimo funkcijos savybės

Išgyvenimo funkcijai teisinga:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$;
2. $0 \leq s(x) \leq 1$;
3. $s(x)$ nedidėja, kai $x \geq 0$;
4. $s(0) = 1$;
5. $s(\infty) = 0$;
6. $s(x)$ yra tolydi apibrėžimo srityje.

2.2 Gyvenimo trukmės charakteristikos

Pagrindinės asmens gyvenimo trukmės charakteristikos yra šios:

1. Mirtingumo kreivė – tankio ir nagrinėjamos žmonių grupės l_0 sandauga:
 $l_0 f(X) = l_0 F'(x) = -l_0 s'(x)$;
2. Mirtingumo galia: $\mu_x = \frac{f(x)}{s(x)} = -\frac{s'(x)}{s(x)}$;
3. Vidutinė gyvenimo trukmė: $\overset{\circ}{e} = \mathbb{E}X = \int_0^\infty s(x)dx$;
4. Būsimosios gyvenimo trukmės vidurkis: $\overset{\circ}{e}_x = \mathbb{E}T_x = \frac{1}{s(x)} \int_x^\infty s(t)dt$;

5. Tikimybė, kad (x) mirs per artimiausius t metų:

$${}_tq_x = \mathbb{P}(T_x < t) = \frac{s(x) - s(x+t)}{s(x)} = \frac{\ell_x - \ell_{x+t}}{\ell_x};$$

6. Tikimybė, kad (x) išgyvens dar bent t metų:

$${}_tp_x = \mathbb{P}(T_x \geq t) = \mathbb{P}(X \geq x+t | X \geq t) = 1 - {}_tq_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} = \frac{\ell_{x+t}}{\ell_x},$$

$${}_tp_x = p_x p_{x+1} \dots p_{x+t-1}, \quad t \in \mathbb{N};$$

7. Vidutinis x metų sulaukusių žmonių skaičius iš pradinės vertintos grupės:

$$l_x = l_0 s(x), \text{ pradinė grupė } l_0;$$

8. Vidutinis skaičius individų, kurie, sulaukę x metų, mirė per ateinančius metus:

$$d_x = l_x - l_{x+1};$$

9. Tikimybė, kad individas sulauks x metų ir mirs per ateinančius metus:

$$q_x = \frac{d_x}{l_x}.$$

2.3 Interpoliacijos prielaidos

Kaip ir buvo užsiminta įžangoje, pagrindinis mirtingumo lentelių trūkumas yra tas, kad duomenys yra riboti, t. y. pateikiami tik sveikosioms x amžiaus reikšmėms. Kadangi x yra absoliučiai tolydus dydis ir praktikoje gali prireikti atlikti aktuarinius skaičiavimus tarpinėms reikšmėms tarp x ir $x+1$, išgyvenimo funkcijų reikšmes tenka interpoliuoti. Pagrindinės interpoliavimo prielaidos yra:

2.3.1 Mirtingumas pasiskirstęs tolygiai metų intervaluose

Taikoma prielaida, kad $s(x)$ funkcija yra tiesinė⁹ kiekviename intervale $[x, x+1]$:

$$s(x+t) = (1-t)s(x) + ts(x+1), \quad x \in \mathbb{N}_0, \quad t \in [0, 1]. \quad (1)$$

2.3.2 Mirtingumo galia pastovi

Taikoma prielaida, kad mirtingumo galia yra konstanta. Kadangi mirtingumo galia visada yra teigiama, tai ir šioje prielaidoje konstanta yra teigiama, t. y.

$$\mu_x = -\frac{s'(x)}{s(x)} = \lambda, \text{ kai } x \geq 0 \text{ ir } \lambda > 0, \lambda = \text{const}. \quad (2)$$

2.3.3 Balducci prielaida

Pagal Balducci prielaidą, išgyvenimo funkcija tenkina šią sąlygą:

$$\frac{1}{s(x+t)} = \frac{1-t}{s(x)} + \frac{t}{s(x+1)}, \quad x \in \mathbb{N}_0, \quad t \in [0, 1]. \quad (3)$$

⁹Mirtingumas pasiskirstęs tolygiai metų intervaluose - angl. Uniform distribution of deaths (UDD).
Pastaba: Šis trumpinys bus naudojamas toliau tekste dėl patogumo.

Visose prielaidose x yra fiksuotas dydis, o tam tikriems skaičiavimas kartais įtraukiamas koeficientas $k \in \mathbb{N}$, jeigu norima ieškoti $_{k+t}p_x$ - tikimybės, kad x metų turintis asmuo išgyvens dar bent $k + t$ metų (tokiu atveju, akivaizdu, $k + t \in [k, k + 1]$).

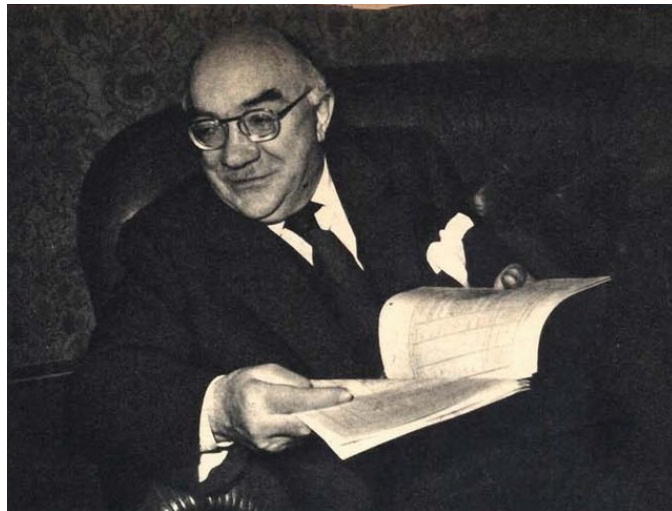
3 Gaetano Balducci

3.1 Biografija

Gaetano Balducci turėjo būti žinomas žmogus dėl vykdytos politinės veiklos, tačiau laisvai prieinamos informacijos apie jo biografiją yra labai nedaug. Nepaisant to, šiame darbe surinkti bent keli faktai apie tiriamosios prielaidos autorių, kurie, tikimasi, ateityje galėtų būti patikslinti kitų šia aktuarinės matematikos atšaka susidomėjusių atstovų darbuose.

Gaetano Balducci (1887–1974) [8] buvo italų aktuaras, labiausiai žinomas dėl įnašo aktuariniam mokslui nagrinėjant su draudimu susijusias teorijas. G. Balducci buvo aktyvus Aktuarų draugijos¹⁰ narys, savo įžvalgomis apie gyvybės draudimo teorijas dalinosi ne viename *Statistikos apžvalgos ir ekonomistų žurnale*¹¹, taip pat leido aktuarinių knygų. Iki šiol yra tiriamos ir pripažįstamos vertingomis jo darbuose išreikštos idėjos tiriant mirtingumo modelių kūrimą, rizikos vertinimą bei finansinę analizę draudimo produktuose.

Taip pat yra žinoma, kad G. Balducci buvo svarbus asmuo Italijos politikoje – beveik 10 metų ėjo Italijos Respublikos Audito Rūmų skyriaus pirmininko pareigas¹² Romoje [18]. Žemiau pateiktame 1 paveiksle pateikta vienintelė laisvai prieinama šio italų aktuario nuotrauka internete.



1 pav.: G. Balducci, 1952, [2].

¹⁰Angl. Society of Actuaries.

¹¹It. Giornale degli Economisti e Rivista di Statistica [2], [3], [4]

¹²Nuo 1994-09-26 iki 1953-12-24 G. Balducci buvo Audito Rūmų (it. Corte dei Conti) skyriaus pirmininkas, atsakingas už generalinio valstybės buhalterio (it. Ragioniere generale dello Stato) funkcijas.

3.2 Balducci teorijos užuomazgos

Kaip ir užsiminta įžangoje, nuo pat XVII a. matematikai modeliavo mirtingumo lenteles ir jomis naudojosi pritaikydami įvairias prielaidas, o Balducci prie diskusijos prisijungė 1911 metais, komentuodamas 1901 m. sudarytą Italijos vyrų populiacijos mirtingumo lentelę, interpoliuotą remiantis W. M. Makeham prielaida [3].

W. M. Makeham analizinės išgyvenimo funkcijos versija (pristatyta 1860 m.) teigia, kad žmogaus (x) mirtingumo galia priklauso ne tik nuo amžiaus, bet ir kitų susijusių aplinkybių:

$$\mu_x = A + Be^{\alpha x}, \quad x \geq 0, \quad (4)$$

kai $A \geq -B$, $\alpha > 0$, $B > 0$. Parametrai A, B, α randami iš žmogaus gyvenimą apibūdinančių duomenų [12]. Pagal tai, išgyvenimo funkcija yra apibrėžiama šiuo būdu:

$$\begin{aligned} s(x) &= \exp \left\{ -Ax - \frac{B}{\alpha} (e^{\alpha x} - 1) \right\}, \quad x \geq 0, \\ F(x) &= 1 - \exp \left\{ -Ax - \frac{B}{\alpha} (e^{\alpha x} - 1) \right\}, \quad x \geq 0, \\ f(x) &= (A + Be^{\alpha x}) \exp \left\{ -Ax - \frac{B}{\alpha} (e^{\alpha x} - 1) \right\}, \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

1911 metų publikacijoje [3] Balducci komentuoja interpoliacijos būdą, kurį naujai pristatė profesorius Tullio Bagni¹³. Interpoliacija pasitelkta naudojant Gauss mažiausiųjų kvadratų metodą [3] ir išgyvenimo funkcija metų intervaluose laikoma tiesine, bet ši prielaida tinkama tik tuo atveju, jeigu tikrinamos (x) reikšmės sutampa su mirtingumo lentelėje aprašytais reikšmėmis. Tačiau metų intervaluose Balducci ginčija [3], kad mirtingumo pasiskirstymas nėra tiesinis ir tai galima pastebėti iš l_x išraiškos:

$$l_x = k s_x g^{c_x},$$

kai k, g, c yra žmogaus gyvenimą apibūdinantys duomenys, k skaičiavimuose būna parenkamas fiksuotas [3].

Todėl T. Bagni pateikti skaičiavimai ir prielaidos yra tinkami nebent empiriniams skaičiavimams, siekiant paprastesniu metodu rasti artimą reikšmę tikrajai. Kitas atliekamos interpoliacijos trūkumas - netiksliai apskaičiuojamos reikšmės ieškant mirtingumo parametrų jaunesniems nei 19 ir vyresniems nei 82 m. žmonėms, kadangi tuose intervaluose, pagal Balducci, nebegalima pasikliauti Makeham prielaidomis [3]. Tačiau, kadangi atlikta interpoliacija yra ganėtinai tinkama naudoti dideliame žmonių gyvenimo metų intervale (nuo 19 iki 82 m.) gaunant pakakankamai tikslias reikšmes, ateityje modelio tobulinimui pasiūloma ieškoti tikslesnių metodų, su kuriais, žinoma, skaičiavimai taptų sudėtingesni, tačiau būtų galima pasiekti geresnių rezultatų [3].

¹³Žinoma tik tiek, kad profesorius Tullio Bagni dėstė Aukščiausiam Romos verslo studijų institute (it. Istituto superiore di studi commerciali di Roma) [3]. Šiuo metu tokią veiklą vykdančio instituto nėra.

3.3 Pirmoji Balducci teorijos publikacija

Po 1911 m. išleisto kritikos straipsnio apie kolegų bandymus analizuoti mirtingumo lenteles, 1917 m. tame pačiame *Statistikos apžvalgos ir ekonomistų žurnale* Gaetano Balducci publikavo „Mirtingumo lentelių kūrimas ir kritika“¹⁴ straipsnį, kurio tikslas – atrasti tikslų, realybę atitinkantį išgyvenimo charakteristikų skaičiavimo metodą, kuris įvertintų mirtingumą nusakančius dydžius ne tik statistiškai (individų mirtis priskiriant tik metų pabaigoms, t. y. vertinant, kad populiacijos mažėjimas vyskta tik sveikose x reikšmėse), bet ir amžiaus tarpinėms reikšmėms [4].

3.3.1 Apibrėžiamos charakteristikos

Pirmiausiai pasirenkamas gana siauras laiko periodas: G. Balducci tiria laikotarpį nuo T_1 metų sausio 1 dienos iki T_2 metų gruodžio 31 dienos. Šiame laikotarpyje turi pakakti statistinių duomenų tyrimui, taip pat statistiniai duomenys išlieka pakankamai stabilūs. Šiame laikotarpyje svarbu apibrėžti skirtingas individų grupes:

- s_x individai, kurie jau priklausė tiriamai grupei ir numatyto periodo eigoje sulaukė (x) metų;
- n_x individai, kurie „prisijungė“¹⁵ prie tiriamos žmonių grupės ir tiriamuoju periodu sulaukė (x) metų;
- l_x individai, kurie sulaukia x metų amžiaus T_2 metais (t. y. tiriamojo periodo antroje pusėje);
- d_x individai, kurie tiriamuoju laikotarpiu sulaukė amžiaus (x) ir mirė nesulaukę amžiaus $(x + 1)$ (čia svarbu paminėti, kad kalbama tik apie individus, kurie, jeigu nebūtų numirę, būtų turėję sulaukti amžiaus $(x+1)$ iki tiriamojo laikotarpio pabaigos).

Tuomet iš visų šių grupių galima apskaičiuoti populiacijos dydį $\lambda(x)$, kurioje vertinami (x) amžiaus sulaukę ir išgyvenę individai [4]:

$$\begin{aligned}\lambda(x) &= \lambda(x-1) + s_x + n_x - l_x - d_{x-1} \Rightarrow \\ \lambda(x) &= \sum_{r=0}^x (s_r + n_r - l_r) - \sum_{r=0}^{x-1} d_r.\end{aligned}$$

Vadinasi, jeigu vienintelis veiksnys, kuris lemia individų kiekio pasikeitimą (sumažėjimą) tiriamoje baigtinėje populiacijoje tarp x ir $x + 1$ amžiaus, yra individo mirtis, tai tikėtinų

¹⁴It. „Costruzione e critica delle tavole di mortalità“.

¹⁵Tekste nepatikslinkta, ką Balducci konkrečiai vertina „prisijungimu“ prie tiriamos grupės žmonių. Kadangi tik vėliau straipsnyje yra pateikiama galimybė „prisijungti“ prie tiriamos grupės dėl kitos nei gimimas priežasties (pavyzdžiui, migracija), čia daroma prielaida, kad dydis n_x aktualus, jeigu tirama naujagimių populiacija.

mirčių kiekis tarp metų x ir $x + 1$ yra:

$$M_x = \lambda(x) q_x, \quad q_x = \mathbb{P}(T_x < t) \in [0, 1]. \quad (5)$$

3.3.2 Populiacijos tyrimas

Realybėje tokios populiacijos kiekio kitimas priklauso ir nuo kitų nei mirtis veiksnių, todėl tiriamas būdas apibrėžti likusiojo gyvenimo trukmės tikimybę, kuri įvertina ir kitus veiksnius¹⁶.

Vadinasi, M_x reikšmė tarp x ir $x + 1$ amžiaus turėtų apibrėžti ne tik tikėtinų mirčių kiekį, bet ir kitų veiksnių nulemtų populiacijos objektų kiekio sumažėjimą:

$$M_x = \lambda(x) q_x + \sum_{t=0}^1 K(x+t) q_{x+t}, \quad (6)$$

čia $K(x+t) = I(x+t) - E(x+t)$ nurodo individų kiekį, kuris dėl bet kokios priežasties tapo tiriamos populiacijos dalimi I ir dėl kitos priežasties nei mirtis paliko populiaciją E laikotarpiu tarp x ir $x + 1$ amžiaus, o $t \in (0, 1]$ ¹⁷.

Tuomet, pagal apibrėžimą žinome, kad $d_x = l_x - l_{x+1} = l_x q_x$. Jeigu skaičiuojame intervalo $(x; x + 1)$ viduje, turime:

$$t d_x = t l_x q_x, \quad t \in (0, 1]. \quad (7)$$

Iš to seka, kad $l_{x+t} = l_x - t l_x q_x = l_x (1 - t q_x)$. Toliau, naudojantis q_x apibrėžimu, galima tirti tikimybę, kad atskiras individas mirs sulaukęs $x + t$ metų (t. y. mirs prieš sulaukdamas $x + 1$ metų):

$$\begin{aligned} {}_t q_x &= \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x} \Rightarrow \\ {}_{1-t} q_{x+t} &= \frac{l_{x+t} - l_{x+1}}{l_{x+t}} = \frac{l_x (1 - t q_x) - l_{x+1}}{l_x (1 - t q_x)} = q_x \frac{1 - t}{1 - t q_x}. \end{aligned} \quad (8)$$

Pasinaudojus paskutine išraiška, taikant elementariusius pertvarkymus patikslinama

¹⁶Pavyzdžiui, Balducci [4] pateikia tokius kriterijus kaip atsistatydinimai, atleidimas (it. „*dimissioni, rescissioni, riscatti, ecc.*“) - atrodo, labiau su einamomis profesinėmis pareigomis susieti veiksniai, tačiau kodėl jie turėtų turėti įtaką priklausymui tiriamai populiacijai, nėra žinoma. Žinoma, jeigu tiriamą populiaciją būtų sudaryta iš kokio nors sektoriaus darbuotojų, Balducci pateikti „išėjimo“ iš populiacijos veiksniai, būtų labai logiški, tačiau bendriniu atveju, kai tiriamą populiaciją, pavyzdžiui, šalies lygiu, tikėtina, realusis „išėjimo“ iš populiacijos veiksnys galėtų būti emigracija (ir atitinkamai imigracija „įėjimo“ į populiaciją atveju).

¹⁷Kadangi $t \in (0, 1]$, natūraliai norėtųsi (6) formulėje naudoti integralą vietoj sumavimo, tačiau, pagal [4], skaičiavimams atlikti numatomos fiksuotos t reikšmės, kurių kiekis baigtinis.

tikėtinų mirčių kiekio tarp metų x ir $x + 1$ (6) lygybė:

$$M_x = \lambda(x)q_x + \sum_{t=0}^1 K(x+t)q_x \frac{1-t}{1-tq_x} = q_x \left(\lambda(x) + \sum_{t=0}^1 K(x+t) \frac{1-t}{1-tq_x} \right). \quad (9)$$

Iš to seka, kad tikimybė q_x yra:

$$q_x = \frac{M_x}{\lambda(x) + \sum_{t=0}^1 K(x+t) \frac{1-t}{1-tq_x}}. \quad (10)$$

Kadangi

$$\frac{1}{1-tq_x} = \frac{1-tq_x + tq_x}{1-tq_x} = 1 + q_x \frac{t}{1-tq_x}, \quad (11)$$

tai paskutiniąją q_x išraišką galima patikslinti iki

$$q_x = \frac{M_x}{\lambda(x) + \sum_{t=0}^1 K(x+t)(1-t) + q_x \sum_{t=0}^1 K(x+t)(1-t) \frac{t}{1-tq_x}}. \quad (12)$$

Tačiau matosi, kad, į skaičiavimus įtraukus populiacijos kitimo veiksnus, kurie neap-
siriboja mirtimi, rasti tikslią mirties tikimybę yra labai sudėtinga. Iš matematinės pusės
nepakanka žinoti kitų kriterijų (t. y. M_x , $\lambda(x)$, $K(x+t)$), kad surastume grynąją tikimybę,
kad atskiras individas mirs sulaukęs x metų. Taigi, G. Balducci teigia, jog tam, kad
gautume pakankamai tikslų įvertinį, iš paskutiniosios išraiškos galima išbraukti trečiąjį
vardiklio narį, nes jis yra labai mažas [4].

Toliau atliekami atitinkami pertvarkymai. Padauginus skaitiklį ir vardiklį iš sumos
 $\lambda(x) + \sum_{t=0}^1 K(x+t)(1-t)$,

$$q_x = \frac{M_x}{\lambda(x) + \sum_{t=0}^1 K(x+t)(1-t) \left(1 + \frac{tq_x}{1-tq_x}\right)} \cdot \frac{\lambda(x) + \sum_{t=0}^1 K(x+t)(1-t)}{\lambda(x) + \sum_{t=0}^1 K(x+t)(1-t)},$$

vardiklius sukeičiame vietomis,

$$q_x = \frac{M_x}{\lambda(x) + \sum_{t=0}^1 K(x+t)(1-t)} \cdot \frac{\lambda(x) + \sum_{t=0}^1 K(x+t)(1-t) \left(1 + \frac{tq_x}{1-tq_x} - \frac{tq_x}{1-tq_x}\right)}{\lambda(x) + \sum_{t=0}^1 K(x+t)(1-t) \left(1 + \frac{tq_x}{1-tq_x}\right)}. \quad (13)$$

Tuomet reikia sutvarkyti antrąjį sandaugos dėmenį:

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda(x) + \sum_{t=0}^1 K(x+t)(1-t) \left(1 + \frac{tq_x}{1-tq_x}\right) - \sum_{t=0}^1 K(x+t)(1-t) \frac{tq_x}{1-tq_x}}{\lambda(x) + \sum_{t=0}^1 K(x+t)(1-t) \left(1 + \frac{tq_x}{1-tq_x}\right)} = \\ & = \frac{\lambda(x) + \sum_{t=0}^1 K(x+t)(1-t) \left(1 + \frac{tq_x}{1-tq_x}\right) - q_x \sum_{t=0}^1 K(x+t)(1-t) \frac{t}{1-tq_x}}{\lambda(x) + \sum_{t=0}^1 K(x+t)(1-t) \left(1 + \frac{tq_x}{1-tq_x}\right)} = \star. \end{aligned}$$

Galima pastebėti, kad trupmeną galima išskaidyti išskiriant sveikąją dalį:

$$\star = 1 - q_x \frac{\sum_{t=0}^1 K(x+t)(1-t) \frac{t}{1-tq_x}}{\lambda(x) + \sum_{t=0}^1 K(x+t)(1-t) \left(1 + \frac{tq_x}{1-tq_x}\right)}.$$

Šio skirtumo ((13) išraiškos antrasis sandaugos dėmuo) antrasis narys įvardijamas kaip *paklaidos dėmuo* ϵ , kurio, aproksimuojant q_x reikšmę, galima atskirai neskaičiuoti [4]. Iš tiesų

$$\begin{aligned} \star &= 1 - \epsilon = 1 - \frac{q_x \sum_{t=0}^1 K(x+t)(1-t) \frac{t}{1-tq_x}}{q_x \left(\lambda(x) + \sum_{t=0}^1 K(x+t) \frac{1-t}{1-tq_x}\right)} = 1 - \frac{M_x - \lambda(x)q_x}{M_x} = \\ &= 1 - 1 + \frac{\lambda(x)q_x}{M_x} = \frac{\lambda(x)q_x}{M_x} \approx 1, \end{aligned}$$

o gauta trupmena būtų tiksliai lygi vienetui, jeigu populiacijoje nevertintume objektų kiekio pokyčio dėl kitų nei mirtis veiksnių.

Tikslesnis paklaidos dėmens ϵ radimas taip pat gali būti pateiktas ir kitu būdu. Daugiklis $\frac{1}{1-tq_x}$ išskaidomas remiantis geometrinės progresijos (g. p.) formule ir tolimesniems skaičiavimams panaikinami visi išskleistos g.p. nariai su q_x , nes jų reikšmės labai mažos lyginant su visais kitais viso reiškinių (13) dėmenimis:

$$\begin{aligned} q_x &= \frac{M_x}{\lambda(x) + \sum_{t=0}^1 K(x+t)(1-t)} \cdot \left(1 - q_x \frac{\sum_{t=0}^1 K(x+t)(1-t)(t + t^2q_x + t^3q_x^2 + t^4q_x^3 + \dots)}{\lambda(x) + \sum_{t=0}^1 K(x+t)(1-t)(1 + tq_x + (tq_x)^2 + (tq_x)^3 + \dots)}\right) \Rightarrow \\ q_x &\approx \frac{M_x}{\lambda(x) + \sum_{t=0}^1 K(x+t)(1-t)} \cdot \left(1 - q_x \frac{\sum_{t=0}^1 K(x+t)(1-t)t}{\lambda(x) + \sum_{t=0}^1 K(x+t)(1-t)}\right). \end{aligned}$$

Tuomet, sudauginus panariui ir antrąjį narį padauginus iš $\frac{M_x}{M_x}$, gaunama:

$$\begin{aligned}
q_x &\approx \frac{M_x}{\lambda(x) + \sum_{t=0}^1 K(x+t)(1-t)} - q_x \left(\frac{M_x}{\lambda(x) + \sum_{t=0}^1 K(x+t)(1-t)} \right)^2 \\
&\quad \cdot \frac{\sum_{t=0}^1 K(x+t)(1-t)t}{M_x} \Rightarrow \\
q_x &\approx \frac{M_x}{\lambda(x) + \sum_{t=0}^1 K(x+t)(1-t)} - q_x^3 \frac{\sum_{t=0}^1 K(x+t)(1-t)t}{M_x} = \\
&= \frac{M_x}{\lambda(x) + \sum_{t=0}^1 K(x+t)(1-t)} - \epsilon.
\end{aligned}$$

Taigi turime, kad

$$q_x = \frac{M_x}{\lambda(x) + \sum_{t=0}^1 K(x+t)(1-t)} \cdot \left(1 - q_x \frac{K(x+t)(1-t) \frac{t}{1-tq_x}}{\lambda(x) + \sum_{t=0}^1 K(x+t)(1-t) \left(1 + \frac{tq_x}{1-tq_x} \right)} \right),$$

tačiau aproksimacijai pakankama išraiška yra:

$$q_x \approx \frac{M_x}{\lambda(x) + \sum_{t=0}^1 K(x+t)(1-t)}. \quad (14)$$

Iš tiesų, kadangi matome, kad į populiacijos dydžio pokytį nulemiančius veiksnius įtraukiant ir kitas nei mirtis priežastis, neįmanoma gauti visiškai tikslios q_x reikšmės, G. Balducci [4] teigia, jog aproksimuotoms reikšmėms, vietoj (14) išraiškos, pakanka naudoti (8) lygybę vertinant, jog $\frac{1}{1-tq_x}$ daugiklis yra labai mažas¹⁸:

$${}_{1-t}q_{x+t} \approx (1-t)q_x. \quad (15)$$

Paskutinioji lygybė (15) ir yra vadinama **Balducci prielaida**.

3.3.3 Žinomesnis Balducci prielaidos pavidalas

Taigi, nors ir yra aiški Balducci prielaidos kilmė, įdomu pastebėti, kad ši formulė daugelyje šaltinių nefigūruoja kaip populiariausia prielaidos išraiška. Tad čia pateikiamas įrodymas, kaip su (15) apibrėžimu galima gauti [12] šaltinyje naudojamą (3) išraišką.

Irodymas. Žinoma, kad

$$\begin{aligned}
{}_{1-t}q_{x+t} &= q_x(1-t) \text{ ir} \\
q_x &= \frac{s(x) - s(x+1)}{s(x)}.
\end{aligned}$$

¹⁸Remiantis tokia pačia logika, kuri pateikta ir ieškant paklaidos dėmens ϵ išraiškos.

Į abi pirmosios lygybės puses įsistačius q_x apibrėžimą turime

$$\begin{aligned}\frac{s(x+t) - s(x+t+1-t)}{s(x+t)} &= \frac{s(x) - s(x+1)}{s(x)}(1-t) \Rightarrow \\ 1 - \frac{s(x+1)}{s(x+t)} &= \left(1 - \frac{s(x+1)}{s(x)}\right)(1-t) \Rightarrow \\ 1 - \frac{s(x+1)}{s(x+t)} &= 1-t - \frac{s(x+1)}{s(x)}(1-t) \Rightarrow \\ \frac{s(x+1)}{s(x+t)} &= t + \frac{s(x+1)}{s(x)}(1-t).\end{aligned}$$

Abi lygybės puses padalinus iš $s(x+1)$:

$$\frac{1}{s(x+t)} = \frac{t}{s(x+1)} + \frac{s(x+1)}{s(x)s(x+1)}(1-t).$$

Taigi, suprastinus $s(x+1)$ paskutiniame lygybės naryje, gauname (3) pristatytą išraišką:

$$\frac{1}{s(x+t)} = \frac{t}{s(x+1)} + \frac{1-t}{s(x)},$$

kai $x \in \mathbb{N}_0$, $t \in (0, 1]$.

□

3.4 Oficialus Balducci teorijos pripažinimas

Iš praeitame skyrelyje pateiktos informacijos akivaizdu, jog G. Balducci prielaidas dėl išgyvenimo funkcijos pavidalo ir pasiūlymus, kaip būtų galima tiksliau interpoliuoti ieškomas reikšmes metų tarpe, pateikė bent jau 1917 m. publikuotame straipsnyje [4]. Tačiau įvairiuose šaltiniuose pateikiama informacija, kad ši teorija atsirado tik 1920 m. (pavyzdžiui, [5] [14]). Iš tiesų, 1920 metais Balducci išleido straipsnį apie šią teoriją [26]¹⁹, tačiau tai jau buvo anksčiau į akademinį pasaulį išsiųstos teorijos aptarimas ir atsakymas į gautus komentarus²⁰ iš A. T. Traversi²¹ [22]. Kadangi vystydamas savo hipotezę G. Balducci rėmėsi ir nepriklausomų dydžių tikimybės sąvoka ($\mathbb{P}(T_x \geq t \cap T_y \geq t) = \mathbb{P}(T_x \geq t) \cdot \mathbb{P}(T_y \geq t)$) [4], o Traversi kritikavo nepriklausomų dydžių prielaidos taikymą [22], Balducci dedikavo [2] laišką pagrįsti savo metodams ir jų tinkamumui. Deja, bet priežastis, kodėl kai kuriuose šaltiniuose teigiama, jog Balducci prielaida atsirado 1920

¹⁹Straipsnis originaliai publikuotas Balducci mėgtame *Aktuarių instituto žurnale* (angl. Journal of the Institute of Actuaries (1886-1994)), o straipsnio svarbą pagrindžia tai, kad jį perspaudino ir Kembridžo universiteto leidykla (angl. Cambridge University Press on behalf of the Institute and Faculty of Actuaries).

²⁰Panašu, kad pokario laikotarpiu, panašiu metu, kai G. Balducci išvystė savo hipotezę, aktuarių draugijoje vyko diskusijos apie 1-ojo Pasaulinio karo įtaką populiacijų mirtingumui. Akivaizdu, kad dėl karo mirtingumo statistika skyrėsi nuo statistikos, gautos taikos metais ir įvairūs matematikai ieškojo būdų išskirti būtent *karo nulemtą mirtingumo rodiklį* (angl. rate of mortality) [21], [22].

²¹Antonio Thomas Traversi (1871-1960) - Naujosios Zelandijos aktuaras, Vyriausybės draudimo komisaras, nacionalinio aprūpinimo fondo vadovas. Londono Aktuarių instituto narys, Valstybės tarnybos Pensijų tarybos narys [22].

metais, nėra tiksliai žinoma, tačiau labai tikėtina, kad skirtingi aktuarinio mokslo atstovai apie Balducci prielaidą dėl 1-ojo Pasaulinio karo galėjo sužinoti iš šių skirtingų Balducci publikacijų ([2] arba [4]) ir rėmėsi informacija, kurią turėjo prieinamą.

3.5 Kitas būdas Balducci teorijai apibrėžti

Šiame darbe jau paaiškinta Balducci teorijos kilmė bei įrodytas kituose šaltiniuose naudojamo teorijos pavidalo korektiškumas. Įdomus ir šiek tiek kitoks priėjimas prie (15) išvados, kuris taikomas įvairiuose išgyvenimo teorijas tiriančiuose šaltiniuose [5], [7], [14]. Taigi, kitas būdas, kuriuo galima apibrėžti mirtingumo tikimybės aproksimaciją, remiasi tam tikru panašumu į *Tolygaus mirties pasiskirstymo metų intervaluose teoriją*, t. y. pastaroji teorija teigia, kad ${}_uq_x = a + bu$, $u \in [0, 1)$ funkcija yra tiesinė, o Balducci teorijoje tiesiškumas suprantamas kaip:

$${}_{1-u}q_{x+u} = a + bu, \quad u \in [0, 1).$$

Šią išraišką galima įvertinti keliuose taškuose:

$$\text{Kai } u = 0, \text{ tai } {}_1q_x = a,$$

$$\text{Kai } u = 1, \text{ tai } {}_0q_{x+1} = a + b = 0 \quad \text{pagal šios tikimybės savybes,}$$

todėl, išsprendus paprastą lygčių sistemą gaunama, jog

$$\begin{aligned} b &= -a = -{}_1q_x \Rightarrow \\ {}_{1-u}q_{x+u} &= {}_1q_x - {}_1q_x \cdot u \Rightarrow \\ {}_{1-u}q_{x+u} &= (1 - u)q_x, \quad \text{kai } u \in [0, 1). \end{aligned}$$

3.6 Iš Balducci prielaidos sekančios gyvenimo trukmės charakteristikų lygybės

Pagal Balducci prielaidą, išgyvenimo funkcija tenkina (3) sąlygą. Naudojantis šia prielaida galima prieiti prie tokių išvadų²²:

$${}_t p_x = \frac{p_x}{1 - (1 - t)q_x}, \quad (16)$$

$${}_t q_x = \frac{tq_x}{1 - (1 - t)q_x}, \quad (17)$$

$${}_y q_{x+t} = \frac{yq_x}{1 - (1 - y - t)q_x}, \quad (18)$$

$$\mu_{x+t} = \frac{q_x}{1 - (1 - t)q_x}, \quad (19)$$

$$f_x(t) = {}_t p_x \mu_{x+t} = \frac{p_x q_x}{(1 - (1 - t)q_x)^2}, \quad (20)$$

$$l_{x+t} = \frac{l_x \cdot l_{x+1}}{l_{x+1} + t d_x}, \quad (21)$$

$\forall x \in \mathbb{N}_0, t \in [0, 1], y \in [0, 1]$ ir $y + t \leq 1$.

Irodymas. Kaip jau žinoma, tikimybė, kad (x) išgyvens dar bent t metų: ${}_t p_x = \frac{s(x+t)}{s(x)}$, pritaikius (3) prielaidą:

$$\begin{aligned} \frac{s(x)}{s(x+t)} &= \frac{(1-t)s(x)}{s(x)} + \frac{ts(x)}{s(x+1)} \Rightarrow \\ \frac{s(x)}{s(x+t)} &= (1-t) + t \frac{s(x)}{s(x+1)} \Rightarrow \\ \frac{s(x)}{s(x+t)} &= (1-t) + t \frac{1}{p_x} = \frac{(1-t)p_x + t}{p_x}. \end{aligned}$$

Iš to,

$$\begin{aligned} {}_t p_x &= \frac{s(x+t)}{s(x)} = \frac{p_x}{(1-t)p_x + t} = \frac{p_x}{(1-t)(1-q_x) + t} = \frac{p_x}{1-q_x-t+ tq_x+t} \\ &= \frac{p_x}{1-(1-t)q_x}. \end{aligned}$$

Kadangi (16) išraiška įrodyta, (17) formulė įrodoma elementariai:

$$\begin{aligned} {}_t q_x &= 1 - {}_t p_x = 1 - \frac{p_x}{1-(1-t)q_x} = \frac{1-q_x+tq_x-p_x}{1-(1-t)q_x} = \frac{1-q_x+tq_x-1+q_x}{1-(1-t)q_x} \\ &= \frac{tq_x}{1-(1-t)q_x}. \end{aligned}$$

Lygybė (18) nurodo tikimybę, kad $(x+t)$ numirs per ateinančius y metų. Todėl reikalinga

²²Šias išraiškas galima rasti įvairiuose šiame darbe naudojamuose šaltiniuose, pavyzdžiui, [5], [12], [16].

atlikti keitimą $t \mapsto y + t$. Tuomet (3) prielaida atrodo taip:

$$\begin{aligned}\frac{1}{s(x+y+t)} &= \frac{1-t-y}{s(x)} + \frac{y+t}{s(x+1)} \Rightarrow \\ \frac{s(x+t)}{s(x+y+t)} &= (1-t-y) \frac{s(x+t)}{s(x)} + (y+t) \frac{s(x+t)}{s(x+1)} \frac{s(x)}{s(x)}.\end{aligned}$$

Kadangi pagal išgyvenimo funkcijos charakteristikų savybes žinoma, kad

$${}_y q_{x+t} = 1 - {}_y p_{x+t} \quad \text{ir} \quad {}_y p_{x+t} = \frac{s(x+y+t)}{s(x+t)},$$

tuomet turime, kad

$$\begin{aligned}\frac{s(x+t)}{s(x+y+t)} &= \frac{1}{{}_y p_{x+t}} = \frac{1}{{}_t p_x} + (y+t) \frac{{}_t p_x}{p_x} = {}_t p_x \left(1 - t - y + \frac{y}{p_x} + \frac{t}{p_x} \right) = \\ &= {}_t p_x \left(\frac{1}{{}_t p_x} - y + \frac{y}{p_x} \right) = 1 - y \cdot {}_t p_x + \frac{y \cdot {}_t p_x}{p_x} = \\ &= \frac{p_x + y({}_t p_x - {}_t p_x \cdot p_x)}{p_x} = \frac{p_x + y \cdot {}_t p_x (1 - p_x)}{p_x} = \frac{p_x + y \cdot {}_t p_x \cdot q_x}{p_x}.\end{aligned}$$

Toliau, pasinaudojus (16) išraiška ir atlikus elementarius pertvarkymus,

$$\begin{aligned}\frac{1}{{}_y p_{x+t}} &= \frac{p_x + y \cdot \frac{p_x}{t+(1-t)p_x} \cdot q_x}{p_x} = \frac{p_x(t + (1-t)p_x) + y q_x p_x}{t + (1-t)p_x} \cdot \frac{1}{p_x} \Rightarrow \\ &= \frac{t + (1-t)(1 - q_x) + y q_x}{t + (1-t)(1 - q_x)} = \frac{t + 1 - q_x - t + t q_x + y q_x}{t + 1 - q_x - t + t q_x} = \frac{1 - (1-t-y)q_x}{1 - (1-t)q_x}.\end{aligned}$$

Iš to seka, kad

$${}_y p_{x+t} = \frac{1 - (1-t)q_x}{1 - (1-t-y)q_x}.$$

Vadinasi,

$${}_y q_{x+t} = 1 - {}_y p_{x+t} = \frac{1 - q_x + t q_x y q_x - 1 + q_x - t q_x}{1 - (1-t-y)q_x} = \frac{y q_x}{1 - (1-t-y)q_x}.$$

Mirtingumo galios išraiška (19) pagal Balducci prielaidą įrodoma naudojantis mirtingumo galios apibrėžimu (2 iš skyrelio 2.2), daline išvestine ir q_x apibrėžimu. Kadangi

$$\mu_{x+t} = - \frac{s'(x+t)}{s(x+t)},$$

pirmiausiai surandama $s'(x+t)$ išraiška:

$$\begin{aligned}\frac{1}{s(x+t)} &= \frac{1-t}{s(x)} + \frac{t}{s(x+1)} = \frac{(1-t)s(x+1) + ts(x)}{s(x)s(x+1)} \Rightarrow \\ s(x+t) &= \frac{s(x)s(x+1)}{(1-t)s(x+1) + ts(x)} \Rightarrow \\ (s(x+t))'_t &= -\frac{s(x)s(x+1) \cdot ((1-t)s(x+1) + ts(x))'}{((1-t)s(x+1) + ts(x))^2} = -\frac{s(x)s(x+1)(-s(x+1) + s(x))}{((1-t)s(x+1) + ts(x))^2}.\end{aligned}$$

Tuomet

$$\begin{aligned}\mu_{x+t} &= \frac{s(x)s(x+1)(-s(x+1) + s(x))}{((1-t)s(x+1) + ts(x))^2} \cdot \frac{(1-t)s(x+1) + ts(x)}{s(x)s(x+1)} = \\ &= \frac{-s(x+1) + s(x)}{(1-t)s(x+1) + ts(x)}.\end{aligned}$$

Iš Balducci prielaidos (3) turime, kad paskutinės gautos trupmenos vardiklis yra lygus

$$(1-t)s(x+1) + ts(x) = \frac{s(x)s(x+1)}{s(x+t)},$$

todėl iš to seka, kad μ_{x+t} nurodanti trupmena yra

$$\begin{aligned}\mu_{x+t} &= \frac{(s(x) - s(x+1))s(x+t)}{s(x)s(x+1)} = \frac{s(x) - s(x+1)}{s(x)} \cdot \frac{s(x+t)}{s(x)} \cdot \frac{s(x)}{s(x+1)} = q_x \cdot {}_t p_x \cdot \frac{1}{p_x} = \\ &= \frac{p_x}{1 - (1-t)q_x} \cdot q_x \cdot \frac{1}{p_x} = \frac{q_x}{1 - (1-t)q_x}.\end{aligned}$$

Išraiška (20) gaunama įsistačius gautas ${}_t p_x$ ir μ_{x+t} formules²³, o (21) lygybei patikrinti galima naudoti (16) lygybę:

$$\begin{aligned}\frac{1}{{}_t p_x} &= \frac{1 - (1-t)q_x}{p_x} \Rightarrow \\ \frac{1}{{}_t p_x} &= (1-t) + t \frac{1}{p_x}.\end{aligned}$$

Kadangi ${}_t p_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} = \frac{l_{x+t}}{l_x}$ ir $d_x = l_x - l_{x+1}$, tai

$$\begin{aligned}\frac{1}{{}_t p_x} &= (1-t) + t \frac{l_x}{l_{x+t}} \Rightarrow \\ \frac{1}{{}_t p_x l_x} &= \frac{1}{l_x} - \frac{t}{l_x} + \frac{t}{l_{x+t}} = \frac{l_{x+1}}{l_x l_{x+1}} - \frac{t l_{x+1}}{l_x l_{x+1}} + \frac{t l_x}{l_{x+t} l_x} = \frac{l_{x+1} + t(l_x - l_{x+1})}{l_x l_{x+1}} \Rightarrow \\ l_{x+t} &= \frac{l_x l_{x+1}}{l_{x+1} + t d_x}\end{aligned}$$

□

²³Alternatyvus įrodymas pateiktas 4.1.3 skyrelyje.

3.7 Trumpų intervalų mirtingumo tikimybė

Nagrinėjant trupmeninius laikotarpius, pasitelkus Balducci prielaidą, galima apskaičiuoti tikimybę, kad x išgyvens dar bent $a + \frac{h}{j}$ metų, tačiau numirs per artimiausią $\frac{1}{j}$ laikotarpį [11]:

$${}_{a+\frac{h}{m}}p_x - {}_{a+\frac{h+1}{m}}p_x = {}_{a+1}p_x \cdot q_{x+a} \cdot \frac{1}{j} \cdot \frac{1}{p_{x+a} + \frac{h}{j} \cdot q_{x+a}} \cdot \frac{1}{p_{x+a} + \frac{h+1}{j} \cdot q_{x+a}}, \quad (22)$$

kai $x, a \in \mathbb{N}_0, j \in \mathbb{N}$, ir $h = 0, 1, \dots, j-1$.

Irodymas. Pasinaudojus tikimybės, kad x išgyvens dar t metų, apibrėžimu ${}_tp_x = \frac{s(x+t)}{s(x)}$, gauname

$${}_{a+\frac{h}{m}}p_x - {}_{a+\frac{h+1}{m}}p_x = \frac{s(x+a+\frac{h}{j}) - s(x+a+\frac{h+1}{j})}{s(x)}.$$

Toliau, trupmenos skaitiklyje esantiems nariams pritaikius Balducci prielaidą (3),

$$\frac{1}{s(x+a+\frac{h}{j})} = \frac{1-\frac{h}{j}}{s(x+a)} + \frac{\frac{h}{j}}{s(x+a+1)}, \quad x+a \in \mathbb{N}_0, \quad \frac{h}{j} \in [0, 1),$$

bei atitinkamai

$$\frac{1}{s(x+a+\frac{h+1}{j})} = \frac{1-\frac{h+1}{j}}{s(x+a)} + \frac{\frac{h+1}{j}}{s(x+a+1)}, \quad x+a \in \mathbb{N}_0, \quad \frac{h+1}{j} \in (0, 1],$$

galima nagrinėti trupmenos skaitiklyje esantį skirtumą:

$$\begin{aligned} & s(x+a+\frac{h}{j}) - s(x+a+\frac{h+1}{j}) = \\ & = \frac{s(x+a)s(x+a+1)}{s(x+a+1)(1-\frac{h}{j}) + s(x+a)\frac{h}{j}} - \frac{s(x+a)s(x+a+1)}{s(x+a+1)(1-\frac{h+1}{j}) + s(x+a)\frac{h+1}{j}} = *. \end{aligned} \quad (23)$$

Reiškinį subendravardiklinus, (23) skaitiklyje gauname:

$$\begin{aligned} & s(x+a)s(x+a+1) \left(s(x+a+1) - \frac{h}{j}s(x+a+1) - \frac{1}{j}s(x+a+1) + \frac{h}{j}s(x+a) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{j}s(x+a) - \left(s(x+a+1) - \frac{h}{j}s(x+a+1) + \frac{h}{j}s(x+a) \right) \right) = \\ & = s(x+a)s(x+a+1) \left(s(x+a+1) - \frac{h}{j}s(x+a+1) - \frac{1}{j}s(x+a+1) + \frac{h}{j}s(x+a) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{j}s(x+a) - s(x+a+1) + \frac{h}{j}s(x+a+1) - \frac{h}{j}s(x+a) \right) = \\ & = s(x+a)s(x+a+1)(s(x+a) - s(x+a+1))\frac{1}{j}. \end{aligned}$$

Vardiklis (23) tupmenoje nagrinėjamas atliekant elementariusius pertvarkymus:

$$\begin{aligned}
& \left(s(x+a+1)\left(1 - \frac{h}{j}\right) + s(x+a)\frac{h}{j} \right) \left(s(x+a+1)\left(1 - \frac{h+1}{j}\right) + s(x+a)\frac{h+1}{j} \right) = \\
& = \left(s(x+a+1) - s(x+a+1)\frac{h}{j} + s(x+a)\frac{h}{j} \right) \left(s(x+a+1) - s(x+a+1)\frac{h+1}{j} + \right. \\
& \left. + s(x+a)\frac{h+1}{j} \right) = \left(\frac{h}{j}(s(x+a) - s(x+a+1)) + s(x+a+1) \right) \cdot \\
& \cdot \left(\frac{h+1}{j}(s(x+a) - s(x+a+1)) + s(x+a+1) \right) = \\
& = \frac{h(h+1)}{j^2}(s(x+a) - s(x+a+1))^2 + \frac{h}{j}s(x+a+1)(s(x+a) - s(x+a+1)) + \\
& + \frac{h+1}{j}s(x+a+1)(s(x+a) - s(x+a+1)) + (s(x+a+1))^2 = \\
& = j^2 \left(h(s(x+a) - s(x+a+1)) + js(x+a+1) \right) \cdot \\
& \cdot \left((h+1)(s(x+a) - s(x+a+1)) + js(x+a+1) \right).
\end{aligned}$$

Grįžtant prie (23), turime

$$\begin{aligned}
& * = s(x+a)s(x+a+1)(s(x+a) - s(x+a+1)) \frac{1}{j} \frac{s(x+a)}{s(x+a)} \cdot \\
& \cdot \frac{1}{j^2 \left(h(s(x+a) - s(x+a+1)) + js(x+a+1) \right)} \cdot \\
& \cdot \frac{1}{\left((h+1)(s(x+a) - s(x+a+1)) + js(x+a+1) \right)} = *,
\end{aligned}$$

Svarbu atkreipti dėmesį, kad, norint atlikti vertingus pertvarkymus, buvo reikalinga reiškinių padauginėti iš $\frac{s(x+a)}{s(x+a)}$. Toliau, atitinkami $s(x+a)$ dėmenys perkeliama į trupmenų skaitiklius ir trupmenose galima įžvelgti tikimybių išraiškas:

$$\begin{aligned}
& \star = s(x+a+1) \frac{s(x+a) - s(x+a+1)}{s(x+a)} j \frac{s(x+a)}{h(s(x+a) - s(x+a+1)) + js(x+a+1)} \cdot \\
& \cdot \frac{s(x+a)}{(h+1)(s(x+a) - s(x+a+1)) + js(x+a+1)} = \diamond.
\end{aligned}$$

Taip pat galima pastebėti, jog reiškinių padauginus iš $\frac{s(x)}{s(x)}$, pirmąjį narį galima išreikšti per

$$\begin{aligned}
& \diamond =_{a+1} p_x \cdot s(x) \cdot q_{a+1} \cdot j \frac{1}{\frac{h(s(x+a)-s(x+a+1))}{s(x+a)} + \frac{js(x+a+1)}{s(x+a)}} \cdot \frac{1}{\frac{(h+1)(s(x+a)-s(x+a+1))}{s(x+a)} + \frac{js(x+a+1)}{s(x+a)}} = \\
& = s(x) \cdot_{a+1} p_x \cdot q_{a+1} \cdot j \cdot \frac{1}{h \cdot q_{x+a} + j \cdot p_{x+a}} \cdot \frac{1}{(h+1) \cdot q_{x+a} + j \cdot p_{x+a}}.
\end{aligned}$$

□

3.8 Theodor Wittstein

Kadangi šio darbo tikslas - surasti kuo daugiau informacijos apie Balducci prielaidos kilimo istoriją ir aktualią kontekstualią informaciją, šis skyrelis yra skiriamas aptarti kito matematiko įnašą į išgyvenimo funkcijos analizę ir diskusijas. Svarbu paminėti, jog (3) prielaida žinoma Balducci vardu, tačiau apie pusšimtį metų anksčiau šią prielaidą pristatė Theodor Wittstein.

Theodor Liudwig Wittstein (1816 – 1894) – vokiečių matematikas, gimnazijos mokytojas, vadovėlių autorius, gyvenęs Žemutinės Saksonijos regione²⁴. Už savo veiklą T. L. Wittstein ne kartą buvo apdovanotas Hanoverio karaliaus George V²⁵. 1862 m. Wittstein publikavo straipsnį „Apie matematinę statistiką ir jos pritaikymą politinei ekonomikai ir draudimui“^{26 27}, kuriame vienas pirmųjų įvardijo sąvoką *matematinė statistika*²⁸. Šiame straipsnyje, tirdamas populiacijos dydį metų x ir $x + 1$ tarpe, Wittstein nagrinėjo ir kitus nei mirtis tiriamų objektų išėjimus iš populiacijos, t. y. $A + B - C - d$ atitinka gyvų objektų kiekį populiacijoje momentu $x + 1$, kai A žymi gyvų objektų kiekį momentu x , B nurodo gyvų objektų kiekį, kurie įtraukiami į tiriamą populiaciją tyrimo metu (metų bėgyje), C - gyvų, tačiau iš tiriamos populiacijos išbraukiamų objektų kiekį tyrimo metų bėgyje bei d - mirčių kiekį tais metais. Žinoma²⁹, jog [24] straipsnyje Wittstein prieina prie dviejų būdų išreikšti mirties tikimybę trupmeniniams laiko tarpams:

$${}_{1-t}q_{x+t} = \frac{q_x(1-t)}{1-tq_x}, \quad (24)$$

$${}_{1-t}q_{x+t} = 1 - (1 - q_x)^{1-t}, \quad (25)$$

čia $t \in (0; 1)$, $x \in \mathbb{N}_0$, pagal [20].

Akivaizdu, jog (24) išraiška yra tapati (8)-ai, kurią tirdamas populiaciją Gaetano Balducci pasiūlė (15)-ą. Priežastys, kodėl Balducci neįvardijo Wittstein atradimų, nežinomos, bet neatmetama galimybė, jog Balducci Wittstein straipsnio nebuvo skaitęs, tačiau verta kelti klausimą, ar nereikėtų garsiosios Balducci prielaidos vadinti **Wittstein-Balducci prielaida**.

²⁴Gimė Hann. Münden, mirė Hannover miestelyje.

²⁵1855 m. Gauss medaliu ir 1857 m. Ketvirtuoju karališkojo Gueplh ordinu, ir 1862 m. Auksiniu garbės medaliu už meną ir mokslą

²⁶Vok. Die Mortalität in Gesellschaften mit successiv eintretenden und ausscheidenden Mitgliedern.

²⁷Pastaba: [24] straipsnio vertimas į anglų kalbą gali būti ieškomas šaltinyje [25], tačiau pastarasis minimas šaltinis nesuteikia žinių apie Wittstein hipotezių matematinius išvedimus; apie juos šiek tiek informacijos galima rasti [20] disertacijoje.

²⁸Tarptautinis statistikos institutas (angl. International Statistical Institute, ISI) įvardija T. L. Wittstein kaip sąvokos *matematinė statistika* pradininką vokiečių kalboje - vok. mathematische Statistik.

²⁹Wittstein teorijas išsamiau nagrinėjo Hilary L. Seal (1911 - 1984) įvairiuose straipsniuose, kurie įvardinti šaltinyje [20].

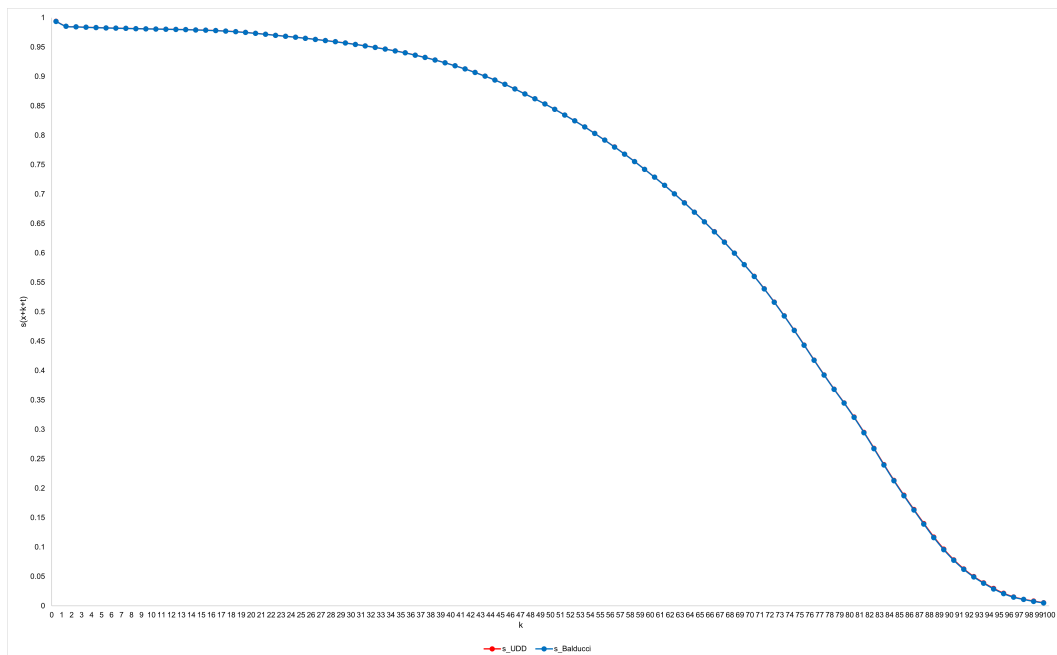
4 Skirtingų interpoliavimo prielaidų palyginimas

4.1 Išgyvenimo funkcija

4.1.1 Išgyvenimo funkcija visam likusiam gyvenimui

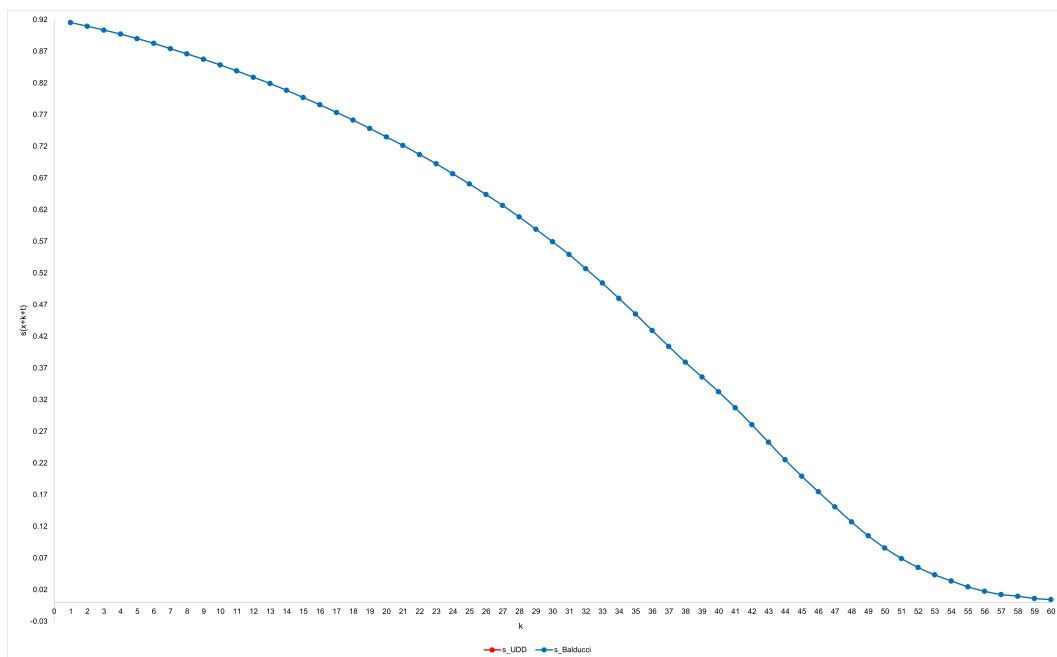
Kaip jau ir buvo minėta, naudotis mirtingumo lentelės duomenimis siekiant apskaičiuoti gyvybės draudimo premijas galima pritaikant pasirinktas prielaidas apie išgyvenimo funkcijos $s(x)$ pavidalą. Akivaizdu, jog kiekviena prielaida suteiks skirtingus rezultatus, o rezultatų skirtumo dydis priklausys ir nuo tiriamo asmens x amžiaus. Šiame skyriuje nagrinėjamas išgyvenimo funkcijos pavyzdys. Tiriama Lietuvos populiacija³⁰ ir, priklausomai nuo pasirinkto žmogaus amžiaus $x \in \mathbb{N}_0$, ieškoma jo likusios gyvenimo trukmės funkcija o parametras $t \in (0, 1]$.

Iš žemiau pateiktų grafikų 2 pav., 3 pav. ir 4 pav. galima pastebėti kelias išgyvenimo funkcijos savybes. Visų pirma, išgyvenimo funkcijos $s(x)$ pavidalas drastiškai keičiasi, priklausomai nuo žmogaus x amžiaus. Akivaizdu, kad kuo jaunesnis asmuo tiriamas, tuo didesnis tikėtinų likusių išgyvenimo metų kiekis. Taip pat iš kreivės matyti, jog vyresniems žmonėms tikėtinų likusių išgyvenimo metų tikimybės yra mažesnės ir tikimybės mažėja su didesniu pagreičiu nei jaunesniems asmenims. Visų antra, grafikuose nurodytos likusios gyvenimo trukmės funkcijų grafikai pagal dvi prielaidas – tolygiai metų intervaluose pasiskirsčiusio mirtingumo (UDD, raudona linija) ir Balducci (mėlyna linija)– tačiau gaunamų reikšmių skirtumas praktiškai nepastebimas (gaunamos reikšmės skiriasi per 4 arba 5 skaičius po kablelio) ir vizualiai išryškėja tiriant vyresnius asmenis (4 pav.), t. y. naudojant Balducci prielaidą, likusio gyvenimo trukmė daugeliu atvejų mažesnė.

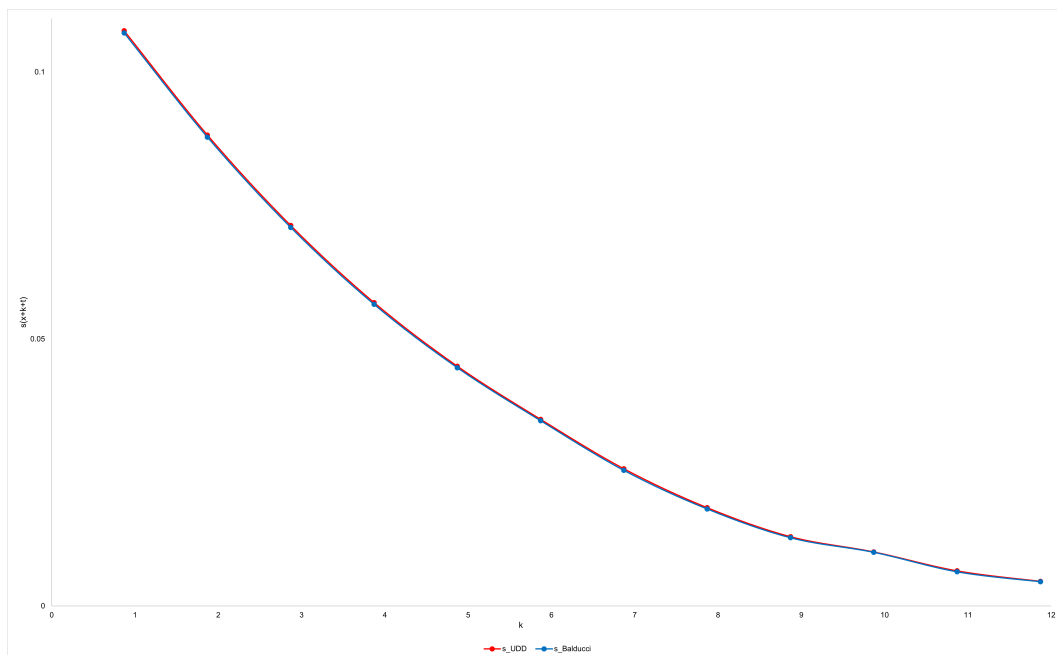


2 pav.: Išgyvenimo funkcija, kai $x = 0$, $t = 0.8$.

³⁰Naudojami duomenys iš *Lietuvos mirtingumo lentelės 1991-1996 m.*, pateiktos šaltinyje [12].



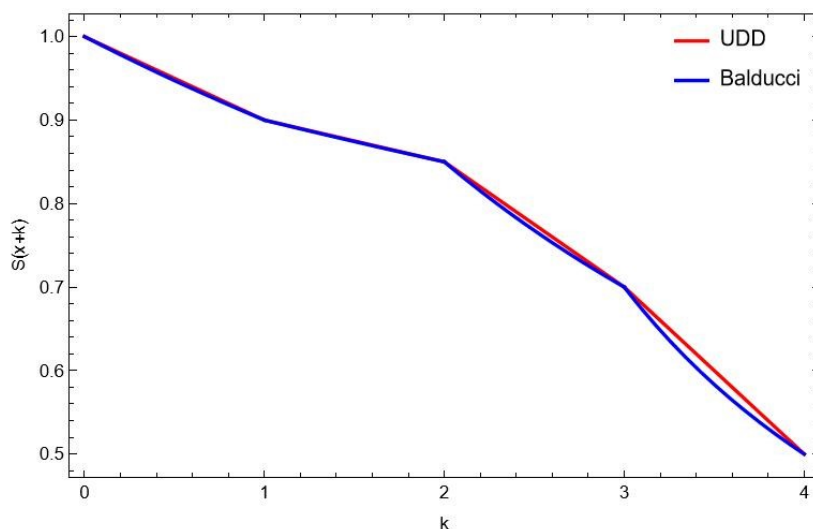
3 pav.: Išgyvenimo funkcija, kai $x = 40$, $t = 0.8$.



4 pav.: Išgyvenimo funkcija, kai $x = 88$, $t = 0.8$.

4.1.2 Išgyvenimo funkcijos interpoliacija

Tiriant trupmenines gyvenimo trukmės reikšmes nepakanka stebėti bendro likusios gyvenimo trukmės $s(x)$ grafiko, kadangi reikšmių skirtumai yra labai nedideli, todėl reikia nagrinėti ir išgyvenimo funkcijos elgseną metų intervaluose $[x, x + 1]$, kaip parodyta 5 paveiksle³¹. Svarbu įvardinti, kad skiriasi ne tik gaunamos $s(x)$ reikšmės - skiriasi grafikų pavidalai, priklausomai nuo pasirinktos interpoliavimo prielaidos, tai yra, pagal tolygaus pasiskirstymo metų intervaluose prielaidą išgyvenimo funkcija yra tiesinė intervaluose $[x, x + 1]$, o pagal Balducci prielaidą išgyvenimo funkcija intervaluose $[x, x + 1]$ sudaryta iš parabolės.



5 pav.: Išgyvenimo funkcijos pagal Tolygaus pasiskirstymo metų intervaluose ir Balducci teorijas.

4.1.3 Likusiojo gyvenimo trukmės tankis

Išgyvenimo funkcijos sąlyginio tankio funkciją taip pat galima pritaikyti nagrinėjant trupmenines laiko reikšmes. Sąlyginė tankio funkcija, kai $X > x$ (X nurodo asmens amžių), yra:

$$f_x(k+t) = \frac{d}{dt} {}_{k+t}q_x, \quad x \in \mathbb{N}_0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad t \in [0, 1].$$

Sąlyginis tankis pritaikius Balducci prielaidą [11] išreiškiamas

$$f_x(k+t) = -\frac{d}{dt} {}_{k+t}p_x = \frac{{}_{k+1}p_x q_{x+k}}{(1 - (1-t)q_{x+k})^2}, \quad x \in \mathbb{N}_0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad t \in [0, 1]. \quad (26)$$

Irodymas. Kadangi žinome, kad

$$f_x(k+t) = (\mathbb{P}(T_x < k+t))' = ({}_{k+t}q_x)' = \frac{d}{dt} (-{}_{k+t}p_x) = -\frac{d}{dt} \frac{s(x+k+t)}{s(x)},$$

³¹ Ilustratyviam grafikui gauti buvo parinktos tam tikros fiktyvios $s(x)$ reikšmės.

tai, pasinaudojus Balducci prielaida:

$$\begin{aligned}
f_x(k+t) &= -\frac{d}{dt} \frac{1}{s(x)} \frac{s(x+k+1)s(x+k)}{s(x+k+1)(1-t) + ts(x+k)} = \\
&= -\frac{d}{dt} \frac{s(x+k+1)}{s(x)} : \frac{s(x+k+1) + ts(x+k) - ts(x+k+1)}{s(x+k)} = \\
&= -\frac{d}{dt} \frac{k+1p_x}{p_{x+k} + tq_{x+k}} = \frac{k+1p_x \frac{d}{dt}(p_{x+k} + tq_{x+k})}{(p_{x+k} + tq_{x+k})^2} = \frac{k+1p_x \cdot q_{x+k}}{(p_{x+k} + tq_{x+k})^2} = \\
&= \frac{k+1p_x \cdot q_{x+k}}{(1 - q_{x+k} + tq_{x+k})^2} = \frac{k+1p_x \cdot q_{x+k}}{(1 - (1-t)q_{x+k})^2}, \quad x \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}, t \in [0, 1].
\end{aligned}$$

□

Atitinkamai, pritaikius tolygaus mirtingumo pasiskirstymo metų intervaluose prielaidą [11], gauname:

$$f_x(k+t)[UDD] = {}_{k|1} q_x, \quad x \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}, t \in [0, 1]. \quad (27)$$

Irodymas.

$$\begin{aligned}
f_x(k+t)[UDD] &= -\frac{d}{dt} \frac{s(x+k+t)}{s(x)} = -\frac{d}{dt} \frac{(1-t)s(x+k) + s(x+k+1)}{s(x)} = \\
&= \frac{s(x+k+1) - s(x+k)}{s(x)} = {}_k p_x - {}_{k+1} p_x = \frac{l_{x+k} - l_{x+k+1}}{l_{x+k}} = \frac{d_{x+k}}{l_{x+k}} = {}_{k|1} q_x
\end{aligned}$$

□

Taigi, tankis pagal tolygaus pasiskirstymo metų intervaluose prielaidą (UDD) yra nepriklausomas nuo parametro t , vadinasi, pastovus ir dėl to skaičiavimai, reikalingi gyvybės draudime, yra daug paprastesni ir patogesni nei renkant skaičiuoti remiantis Balducci prielaida, su kuria tankio funkcija yra sudaryta iš mažėjančių parabolų metų intervaluose (žr. pav. 6)³².

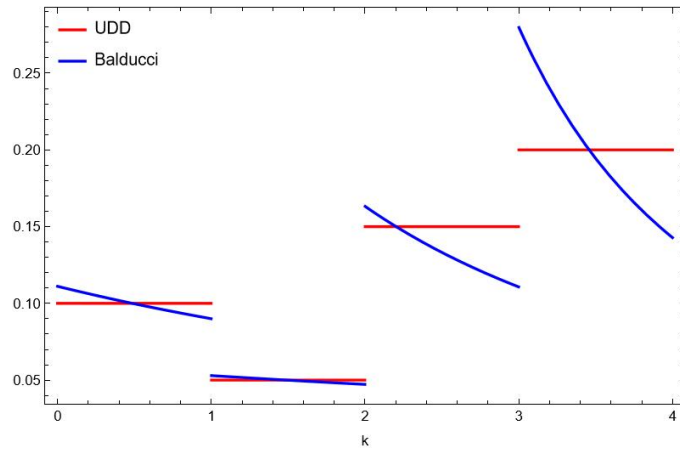
4.2 Būsimosios gyvenimo trukmės vidurkis

Būsimosios gyvenimo trukmės vidurkis, apibrėžtas 2.2 skyrelyje, randamas tokiu būdu:

$$\begin{aligned}
\circ e_x &= \mathbb{E}T_x = \int_0^\infty t f_x(t) dt = \int_0^\infty t d\mathbb{P}(T_x < t) = \int_0^\infty t {}_t p_x \mu_{x+t} dt \\
&= \int_0^\infty t d(-{}_t p_x) = -t {}_t p_x|_0^\infty + \int_0^\infty {}_t p_x dt = \int_0^\infty {}_t p_x dt,
\end{aligned}$$

kai $\lim_{t \rightarrow \infty} ts(x+t) = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} t {}_t p_x = 0$ (pagal [7], [12]).

³²Iliustratyviam grafikui gauti naudoti parinktos tam tikros $s(x)$ reikšmės, tačiau realybėje Balducci prielaidos tankio funkcija būtų sudaryta iš parabolų, kurios yra žymiai horizontalesnės ir tokio ryškaus reikšmių skirtumo tarp Balducci ir Tolygaus pasiskirstymo metų intervaluose iš tiesų nematyti.



6 pav.: Išgyvenimo funkcijos tankis pagal Tolygaus pasiskirstymo metų intervaluose ir Balducci teorijas.

Būsimosios gyvenimo trukmės vidurkį galima patikslinti pritaikant 2.3 skyrelyje išvardintas prielaidas [7].

4.2.1 Mirtingumas pasiskirstęs tolygiai metų intervaluose

Jei mirtingumas pasiskirstęs tolygiai metų intervaluose, tai

$${}^{\circ}e_x^A = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} k p_x \quad (28)$$

Irodymas.

$$\begin{aligned} {}^{\circ}e_{x:\overline{n}}^A &= \int_0^n t {}_tq_x dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} t \frac{l_{x+k} - l_{x+k+1}}{l_{x+k}} dt = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{d_{x+k}}{l_x} \left(k + \frac{1}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{d_{x+k}}{l_x} + \sum_{k=0}^{n-1} k \frac{d_{x+k}}{l_x}. \end{aligned}$$

Kai $n \rightarrow \infty$, tai

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_{x+k}}{l_x} &= \frac{1}{2} \frac{l_x - l_{x+1} + l_{x+1} - l_{x+2} + \dots}{l_x} = \frac{1}{2}, \text{ o} \\ \sum_{k=0}^{n-1} k \frac{d_{x+k}}{l_x} &= \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{l_{x+k} - l_{x+k+1}}{l_x} = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{s(x+k) - s(x+k+1)}{s(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} k p_x. \end{aligned}$$

Vadinasi,

$${}^{\circ}e_x^A = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} k p_x$$

□

4.2.2 Balducci prielaida

Jei mirtingumas pasiskirstęs pagal Balducci prielaidą, tai

$$e_x^B = \frac{p_x \ln p_x}{p_x - 1} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\prod_{j=0}^{k-1} p_{x+j} \right) \frac{p_{x+k} \ln p_{x+k}}{p_{x+k} - 1} \quad (29)$$

Irodymas.

$$\begin{aligned} e_{x:\overline{n}}^B &= \mathbb{E} \min(T_x, n) = \int_0^n t f_x(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{t {}_{k+1}p_x q_{x+k} dt}{(1 - (k+1-t)q_{x+k})^2} = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} {}_{k+1}p_x \left(- \int_k^{k+1} t \left(\frac{1}{1 - (k+1-t)q_{x+k}} \right)' dt \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} {}_{k+1}p_x \left(- \frac{t}{(1 - (k+1-t)q_{x+k})^2} \Big|_k^{k+1} + \int_k^{k+1} \frac{t dt}{1 - (k+1-t)q_{x+k}} \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} {}_{k+1}p_x \left(\frac{k}{p_{x+k}} - (k+1) + \frac{\ln 1 - \ln(1 - q_{x+k})}{q_{x+k}} \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(k \frac{s(x+k+1)}{s(x)} \frac{s(x)}{s(x+k)} - (k+1) {}_{k+1}p_x - \frac{\ln(1 - q_{x+k})}{q_{x+k}} \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} k p_{x+k} - \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) {}_{k+1}p_x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{{}_{k+1}p_x \ln(1 - q_{x+k})}{q_{x+k}} = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{{}_{k+1}p_x \ln(1 - q_{x+k})}{p_{x+k} - 1} - n_n p_x. \end{aligned}$$

Pastaba 1. Kai $n \rightarrow \infty$, tai $n_n p_x \rightarrow 0$.

Irodymas.

$$\mathbb{E} T_x = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(T_x > k) - n \mathbb{P}(T_x > n) + \sum_{k=n+1}^{\infty} k \mathbb{P}(T_x = k).$$

Kadangi vidurkis $\mathbb{E} T_x$ yra baigtinis, tai

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} k \mathbb{P}(T_x = k) = 0.$$

Kai $n \rightarrow \infty$, turime, kad

$$\begin{aligned} \mathbb{E} X &= \sum_{k=1}^{n-1} k \mathbb{P}(T_x = k) + \sum_{k=n}^{\infty} k \mathbb{P}(T_x = k) \geq \sum_{k=1}^{n-1} k \mathbb{P}(T_x = k) + n \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(T_x = k) \\ &\geq \sum_{k=1}^{n-1} k \mathbb{P}(T_x = k) + n \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(T_x = k) = \sum_{k=1}^{n-1} k \mathbb{P}(T_x = k) + n \mathbb{P}(T_x > n), \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Vadinasi,

$$0 \leq n\mathbb{P}(T_x > n) \leq \mathbb{E}T_x - \sum_{k=1}^{n-1} k\mathbb{P}(T_x = k) = \sum_{k=n}^{\infty} k\mathbb{P}(T_x = k)$$

ir, remiantis dviejų policininkų principu, $n_n p_x \rightarrow 0$, kai $n \rightarrow \infty$. □

Vadinasi,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_{x:\overline{n}}^{\circ B} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1 p_x \ln(1 - q_{x+k})}{p_{x+k} - 1} - n_n p_x \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1 p_x \ln(1 - q_{x+k})}{p_{x+k} - 1}.$$

Kadangi

$$k+1 p_x = p_{x+k} \cdot k p_x = p_{x+k} \prod_{a=0}^{k-1} p_{x+a}, \quad \text{tai}$$

$$e_x^{\circ B} = \frac{p_x \ln p_{x+k}}{p_x - 1} + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{a=0}^{k-1} p_{x+a} \frac{\ln(1 - q_{x+k})}{q_{x+k}}$$

□

Galima pastebėti, jog būsimosios gyvenimo trukmės vidurkis, remiantis Balducci prielaida yra mažiausias [7]:

$$e_x^{\circ A} \geq e_x^{\circ B}.$$

5 Gyvybės draudimas

5.1 Grynoji vienkartinė premija

Būsimosios išmokos dabartinė vertė yra atsitiktinė funkcija

$$\mathbb{Z}_x = \nu^{T_x} \mathbb{1}_{\{T_x \geq n\}} \begin{cases} \nu^{T_x}, & \text{jei } T_x \leq n, \\ 0, & \text{jei } T_x > n. \end{cases}$$

Būsimosios išmokos dabartinės vertės vidurkis yra vadinamas **grynąja vienkartine premija**:

$$\mathbb{E}Z_x = \int_0^{\infty} \nu^t \cdot f_x(t) dt. \quad (30)$$

Prieš atliekant grynujų premijų skaičiavimus, apibrėžiamas **eksponentinis integralas**:

$$Ei(y) = - \int_{-y}^{\infty} \frac{e^{-z}}{z} dz = \int_{-\infty}^y \frac{e^z}{z} dz, \quad y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (31)$$

$$Ei\left(-\frac{\delta p_{x+k}}{q_{x+k}}\right) - Ei\left(-\frac{\delta}{q_{x+k}}\right) = - \int_{\frac{\delta p_{x+k}}{q_{x+k}}}^{\infty} \frac{e^{-z}}{z} dz + \int_{\frac{\delta}{q_{x+k}}}^{\infty} \frac{e^{-z}}{z} dz = - \int_{-\delta}^{\infty} \frac{e^{-z}}{z} dz = Ei_k(\delta). \quad (32)$$

Teiginys 1. Tegu išgyvenimo funkcija $s(x), x \in \mathbb{N}_0$ interpoliuojama pagal Balducci prielaidą (3), T_x nurodo žmogaus likusį gyvenimo laiką, kai jam yra $x \in \mathbb{N}_0$ metų. Tuomet, grynoji vienkartinė premija yra [11]:

$$\begin{aligned} {}^m_{|l} \bar{A}_{x:\overline{n}}^1 &:= \mathbb{E} \nu^{mT_x} \mathbb{1}_{\{l \leq T_x \leq l+n\}} = \nu^{ml} \cdot_l p_x - \nu^{m(l+n)} \cdot_{l+n} p_x \\ &+ m\delta \sum_{k=0}^{n-1} \nu^{m(1+k+l-\frac{1}{q_{x+k+l}})} \cdot \frac{k+l+1 p_x}{q_{x+k+l}} \cdot Ei_{k+l}(m\delta), \quad n, m \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N}_0, \end{aligned} \quad (33)$$

$${}^m_{|l} \bar{A}_x := \lim_{n \rightarrow \infty} {}^m_{|l} \bar{A}_{x:\overline{n}}^1. \quad (34)$$

Irodymas. Pagal grynosios premijos apibrėžimą turime, jog

$${}^m_{|l} \bar{A}_{x:\overline{n}}^1 := \mathbb{E} \nu^{mT_x} \mathbb{1}_{\{l \leq T_x \leq l+n\}} = \int_l^{l+n} \nu^{mu} \cdot f_x(u) du = \sum_{k=l}^{l+n-1} \int_k^{k+1} \nu^{mt} \cdot f_x(t) dt.$$

Pasinaudojus (26) tankio funkcijos išraiška,

$$\begin{aligned} \int_l^{l+n} \nu^{mu} \cdot f_x(u) du &= \sum_{k=l}^{l+n-1} \int_k^{k+1} \nu^{mt} \cdot \frac{k+1 p_x \cdot q_{x+k}}{(1 - (1-t)q_{x+k})^2} dt = \\ &= \sum_{k=l}^{l+n-1} k+1 p_x \int_k^{k+1} \nu^{mt} \cdot \frac{q_{x+k}}{(1 - (1-t)q_{x+k})^2} dt, \end{aligned}$$

galima pastebėti, jog reiškinį reikia integruoti dalimis:

$$\begin{aligned} - \int_k^{k+1} \nu^{mt} d \left(\frac{1}{1 - (1-t)q_{x+k}} \right) &= - \left(\frac{\nu^{mt}}{1 - (1-t)q_{x+k}} \Big|_k^{k+1} + \int_k^{k+1} \frac{m\delta \nu^{mt}}{1 - (1-t)q_{x+k}} dt \right) \\ &= \frac{\nu^{mk}}{p_{x+k}} - \nu^{m(k+1)} + \frac{\nu^{m(1+k-\frac{1}{q_{x+k}})}}{q_{x+k}} Ei_k(m\delta) m\delta. \end{aligned}$$

Paskutinėje lygybėje buvo panaudota ši išraiška (nurodyta *Pastaboje* nr. 2):

Pastaba 2. Kai $k \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{N}$ ir laikoma, jog $q_{x+k} > 0$, tai

$$\int_k^{k+1} \frac{\nu^{mt} dt}{1 - (1+k-t)q_{x+k}} = - \frac{\nu^{m(1+k-1/q_{x+k})}}{q_{x+k}} Ei_k(m\delta). \quad (35)$$

Irodymas. Integralui apskaičiuoti reikia atlikti kintamojo keitimą:

$$\begin{aligned} y &= 1 - (1 + k - t)q_{x+k} \Rightarrow \\ t &= \frac{y - 1 + q_{x+k} + kq_{x+k}}{q_{x+k}}, \\ dt &= \left(\frac{y - 1 + q_{x+k} + kq_{x+k}}{q_{x+k}} \right)'_y = \frac{(y - 1 + q_{x+k} + kq_{x+k})'_y q_{x+k}}{q_{x+k}^2} = d \frac{y}{q_{x+k}}, \end{aligned}$$

todėl integralas (35) yra lygus:

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} \frac{\nu^{mt} dt}{1 - (1 + k - t)q_{x+k}} &= \int_{1-q_{x+k}}^1 \frac{\nu^{m\left(\frac{y}{q_{x+k}} + \left(1+k-\frac{1}{q_{x+k}}\right)\right)}}{y} d \frac{y}{q_{x+k}} = \\ &= \int_{p_{x+k}}^1 \frac{\nu^{\frac{m y}{q_{x+k}}} \cdot \nu^{m\left(1+k-\frac{1}{q_{x+k}}\right)}}{y} d \frac{y}{q_{x+k}} = \int_{p_{x+k}}^1 \frac{\nu^{m\left(1+k-\frac{1}{q_{x+k}}\right)} \cdot e^{\ln(1+i)^{-m} \frac{y}{q_{x+k}}}}{y} d \frac{y}{q_{x+k}} = \\ &= \int_{p_{x+k}}^1 \frac{\nu^{m\left(1+k-\frac{1}{q_{x+k}}\right)} \cdot e^{-\frac{my\delta}{q_{x+k}}}}{y^{\frac{m\delta}{q_{x+k}} \frac{q_{x+k}}{m\delta}}} d \frac{y}{q_{x+k}} = \frac{\nu^{m\left(1+k-\frac{1}{q_{x+k}}\right)}}{q_{x+k}} \cdot \int_{p_{x+k}}^1 \frac{e^{-\frac{my\delta}{q_{x+k}}}}{\frac{ym\delta}{q_{x+k}}} d \frac{y}{q_{x+k}} = \star. \end{aligned}$$

Kadangi paskutiniame reiškinyje gaunamas eksponentinis integralas, reiškinį galima pertvarkyti ir gauti anksčiau nurodytą pavidalą:

$$\Rightarrow \star = - \frac{\nu^{m\left(1+k-\frac{1}{q_{x+k}}\right)}}{q_{x+k}} \cdot Ei_k(m\delta)$$

□

Taigi, grįžtant prie grynosios vienkartinės premijos, turime

$$\begin{aligned} {}^m_{l|} \bar{A}^1_{x:\overline{n}|} &:= \sum_{k=l}^{l+n-1} {}_{k+1}p_x \left(\frac{\nu^{mk}}{{}_kp_{x+k}} - \nu^{m(k+1)} + \frac{\nu^{m\left(1+k-\frac{1}{q_{x+k}}\right)}}{q_{x+k}} Ei_k(m\delta) m\delta \right) = \\ &= \sum_{k=l}^{l+n-1} \left(\frac{\nu^{mk} \frac{s(x+k+1)}{s(x)}}{\frac{s(x+k+1)}{s(x+k)}} - \nu^{m(k+1)} {}_{k+1}p_x + {}_{k+1}p_x \frac{\nu^{m\left(1+k-\frac{1}{q_{x+k}}\right)}}{q_{x+k}} Ei_k(m\delta) m\delta \right) = \\ &= \sum_{k=l}^{l+n-1} \left(\nu^{mk} {}_kp_x - \nu^{m(k+1)} {}_{k+1}p_x + m\delta \nu^{m\left(1+k-\frac{1}{q_{x+k}}\right)} \frac{{}_{k+1}p_x}{q_{x+k}} Ei_k(m\delta) \right) = \\ &= \nu^{ml} \cdot {}_lp_x - \nu^{m(l+n)} \cdot {}_{l+n}p_x + m\delta \sum_{k=0}^{n-1} \nu^{m\left(1+k+l-\frac{1}{q_{x+k+l}}\right)} \cdot \frac{{}_{k+l+1}p_x}{q_{x+k+l}} \cdot Ei_{k+l}(m\delta). \end{aligned}$$

□

Taigi, su bendrine (33) išraiška nesunkiai galima išgauti grynąsias premijas, pavyzdžiui, šioms draudimo rūšims:

5.1.1 N-metų gyvybės draudimas

Grynoji vienkartinė premija:

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 := 1 - \nu^n \cdot_n p_x + \delta \sum_{k=0}^{n-1} \nu^{1+k-\frac{1}{q_{x+k}}} \cdot \frac{k+1p_x}{q_{x+k}} \cdot Ei_k(\delta), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (36)$$

Antras momentas, reikalingas dispersijai apskaičiuoti:

$${}^2\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 := 1 - \nu^{2n} \cdot_n p_x + 2\delta \sum_{k=0}^{n-1} \nu^{2(1+k-\frac{1}{q_{x+k}})} \cdot \frac{k+1p_x}{q_{x+k}} \cdot Ei_k(m\delta), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (37)$$

Dispersija:

$$\mathbb{D}Z_x = {}^2\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 - (\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1)^2. \quad (38)$$

5.1.2 M-metų atidėtas gyvybės draudimas n-metų laikotarpiui

Grynoji vienkartinė premija:

$${}_m|\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 := \nu^m \cdot_m p_x - \nu^{(m+n)} \cdot_{m+n} p_x + \delta \sum_{k=0}^{n-1} \nu^{(1+k+m-\frac{1}{q_{x+k+m}})} \cdot \frac{k+m+1p_x}{q_{x+k+m}} \cdot Ei_{k+m}(\delta), \quad (39)$$

kai $n, m \in \mathbb{N}$.

5.2 Skaičiavimai

Pavyzdys 5.1.

Tarkime $l = 0$, $m = 1$, $i = 5\%$, $n = 10$, ir

$${}_k p_x = \frac{100 - k}{100}, \quad k = 1, 2, \dots, 10.$$

- 1) Pagal duotus duomenis galima apskaičiuoti $\bar{A}_{x:\overline{10}|}^1$ naudojantis Balducci mirtingumo prielaida (3) ir gautą reikšmę palyginti su grynąja premija, gauta pagal UDD prielaidą [11];
- 2) Taip pat pagal abi prielaidas bus apskaičiuota ir palyginta būsimosios išmokos dabartinės vertės dispersija $\mathbb{D}Z_x$.

Sprendimas:

- 1) Iš duotos sąlyginio tankio funkcijos ${}_k p_x$ galima rasti q_{x+k} . Kadangi

$${}_k p_x = \frac{s(x+k)}{s(x)} \cdot \frac{s(x+k+1)}{s(x+k+1)} = \frac{k+1p_x}{p_{x+k}}, \quad (40)$$

tai

$$q_{x+k} = 1 - p_{x+k} = 1 - \frac{k+1p_x}{kp_x} = 1 - \frac{100-k-1}{100} : \frac{100-k}{100} = \frac{100-k-99+k}{100-k} \Rightarrow$$

$$q_{x+k} = \frac{1}{100-k}, k = 0, 1, \dots, 9.$$

Pasinaudojus (36) formule, gaunama:

$$\bar{A}_{x:\overline{10}|}^1 := 1 - \nu^{10} \cdot {}_{10}p_x + \delta \sum_{k=0}^9 \nu^{1+k-\frac{1}{q_{x+k}}} \cdot \frac{k+1p_x}{q_{x+k}} \cdot Ei_k(\delta), n \in \mathbb{N}.$$

Toliau atliekami reikalingi pertvarkymai:

$$\begin{aligned} \bar{A}_{x:\overline{10}|}^1 &= \\ &= 1 - \frac{9\nu^{10}}{10} + \delta \sum_{k=0}^9 \nu^{2k-99} \left(\frac{99-k}{100} : \frac{1}{100-k} \right) \cdot \left(Ei \left(-\frac{\delta p_{x+k}}{q_{x+k}} \right) - Ei \left(-\frac{\delta}{q_{x+k}} \right) \right) = \\ &= 1 - \frac{9\nu^{10}}{10} + \frac{\delta \nu^{-99}}{100} \sum_{k=0}^9 \nu^{2k} (100-k)(99-k) (Ei(\delta(k-99)) - Ei(\delta(k-100))). \end{aligned}$$

Taigi, grynosios premijos vertė³³ pagal Balducci prielaidą yra:

$$\bar{A}_{x:\overline{10}|}^1 \approx 0.0791388.$$

Apskaičiuojama grynosios premijos vertė pagal UDD³⁴:

$$\begin{aligned} \bar{A}_{x:\overline{10}|}^1[UDD] &= \frac{i}{\delta} A_{x:\overline{10}|}^1[UDD] = \frac{i}{\delta} \sum_{k=0}^9 \nu^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} = \frac{i}{\delta} \sum_{k=0}^9 \nu^{k+1} \left(\frac{100-k}{100} \frac{1}{100-k} \right) = \\ &= \frac{i}{100\delta} \sum_{k=0}^9 \nu^{k+1} \approx 0.0791321. \end{aligned}$$

Taigi, gaunama, kad šiame pavyzdyje, grynosios premijos reikšmė pagal Balducci prielaidą yra šiek tiek didesnė lyginant su UDD prielaida:

$$\frac{\bar{A}_{x:\overline{10}|}^1}{\bar{A}_{x:\overline{10}|}^1[UDD]} \approx 1.000085.$$

2) Žinoma, kad būsimosios išmokos dabartinės vertės dispersija yra [12]:

$$\mathbb{D}Z_x = {}^2 \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 - \left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 \right)^2.$$

³³**Pastaba:** šiame ir kituose pavyzdžiuose atsakymams gauti buvo naudojama programa **Wolfram Alpha** [15].

³⁴Pirmoji lygybė žinoma ir įrodyta įrodyta [12].

Antrasis skirtumo narys $\bar{A}_{x:\overline{10}|}^1$ surastas a) dalyje, lieka pasinaudoti (37) išraiška ir gauti:

$$\begin{aligned} {}^2\bar{A}_{x:\overline{10}|}^1 &:= 1 - \nu^{20} \cdot {}_{20}p_x + 2\delta \sum_{k=0}^9 \nu^{2(1+k-\frac{1}{q_{x+k}})} \cdot \frac{k+1p_x}{q_{x+k}} \cdot Ei_k(m\delta) \Rightarrow \\ {}^2\bar{A}_{x:\overline{10}|}^1 &:= 1 - \frac{9\nu^{20}}{10} + \frac{2\delta}{100} \sum_{k=0}^9 \nu^{2(2k-99)}(99-k)(100-k) \cdot \\ &\cdot \left(Ei\left(-\frac{2\delta p_{x+k}}{q_{x+k}}\right) - Ei\left(-\frac{2\delta}{q_{x+k}}\right) \right) = 1 - \frac{9\nu^{20}}{10} + \frac{\delta\nu^{198}}{100} \sum_{k=0}^9 \nu^{4k}(99-k) \cdot \\ &\cdot (100-k)(Ei(2\delta(k-99)) - Ei(2\delta(k-100))) \approx 0.063867. \end{aligned}$$

Taigi, dispersija yra lygi

$$\mathbb{D}Z_x \approx 0.0576041.$$

Atitinkamai bus apskaičiuota dispersijos reikšmė pagal UDD:

$$\begin{aligned} {}^2\bar{A}_{x:\overline{10}|}^1[UDD] &= \frac{i^2 + 2i}{2\delta} \left({}^2\bar{A}_{x:\overline{10}|}^1[UDD] \right) = \frac{i^2 + 2i}{100 \cdot 2\delta} \sum_{k=0}^9 \nu^{2(k+1)} \approx 0.0638562. \Rightarrow \\ \mathbb{D}Z_x[UDD] &\approx 0.0575943. \end{aligned}$$

Šiame pavyzdyje būsimosios išmokos dabartinės vertės dispersija $\mathbb{D}Z_x$ yra maždaug 11% didesnė skaičiuojant pagal Balducci prielaidą:

$$\frac{\mathbb{D}Z_x}{\mathbb{D}Z_x[UDD]} \approx 1.10872.$$

Pavyzdys 5.2.

Tarkime $l = 0$, $m = 1$, $i = 5\%$ ir

$$s(x) = \left(1 - \frac{x}{110}\right)^2, \quad 0 \leq x \leq 110.$$

1) Pagal duotus duomenis galima apskaičiuoti $\bar{A}_{x:\overline{10}|}^1$ naudojantis Balducci mirtingumo prielaida (3) ir gautą reikšmę palyginti su grynąja premija, gauta pagal UDD prielaidą, kai:

a) $x = 30$ ir $n = 5, 10, 25$;

b) $x = 80$ ir $n = 5, 10, 25$;

2) Taip pat pagal abi prielaidas bus apskaičiuota ir palyginta būsimosios išmokos dabartinės vertės dispersija $\mathbb{D}Z_x$.

Sprendimas:

1) a) Pirmiausiai patogu rasti

$${}_t p_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} = \left(1 - \frac{x}{110}\right)^2 : \left(1 - \frac{x+t}{110}\right)^2 = \left(\frac{110-x-t}{110-x}\right)^2, 0 \leq x \leq 110.$$

Kadangi pagal sąlygą $x = 30$, tai

$${}_t p_{30} = \left(\frac{80-t}{80}\right)^2.$$

Remiantis (40),

$$\begin{aligned} q_{30+k} &= 1 - p_{30+k} = 1 - \frac{{}_{k+1}p_{30}}{{}_k p_{30}} = 1 - \left(\frac{80-k-1}{80}\right)^2 : \left(\frac{80-k}{80}\right)^2 = \\ &= 1 - \left(\frac{79-k}{80-k}\right)^2 = \frac{6400 - 160k + k^2 - 6241 + 158k - k^2}{(80-k)^2} = \\ &= \frac{159-2k}{(80-k)^2}. \end{aligned}$$

Taip pat galima išsireikšti:

$$\begin{aligned} \frac{{}_{k+1}p_{30}}{q_{30+k}} &= \left(\frac{79-k}{80}\right)^2 : \frac{159-2k}{(80-k)^2} = \frac{1}{80^2} \frac{(79-k)^2(80-k)^2}{159-2k}; \\ \frac{p_{30+k}}{q_{30+k}} &= \left(\frac{79-k}{80-k}\right)^2 : \frac{159-2k}{(80-k)^2} = \frac{(79-k)^2}{159-2k}. \end{aligned}$$

Apskaičiuojamos grynųjų vienkartinių premijų vertės, kai $n = 5$. Pagal Balducci:

$$\begin{aligned} \bar{A}_{30:\overline{5}|}^1 &= 1 - \nu^5 \left(\frac{75}{80}\right)^2 + \frac{\delta}{6400} \sum_{k=0}^4 \nu^{1+k-\frac{(80-k)^2}{159-2k}} \frac{(79-k)^2}{159-2k} \\ &\cdot \left(\left(Ei \left(\frac{\delta(79-k)^2}{2k-159} \right) \right) - Ei \left(\frac{\delta(80-k)^2}{2k-159} \right) \right) \approx 0.107612. \end{aligned}$$

Premija pagal UDD:

$$\begin{aligned} \bar{A}_{30:\overline{5}|}^1[UDD] &= \frac{i}{\delta} \bar{A}_{30:\overline{5}|}^1[UDD] = \frac{i}{\delta} \sum_{k=0}^4 \nu^{k+1} \left(\frac{80-t}{80}\right)^2 \cdot \frac{159-2k}{(80-k)^2} = \\ &= \frac{i}{6400\delta} \sum_{k=0}^4 \nu^{k+1} (159-2k) \approx 0.10759. \end{aligned}$$

Grynoji premija, kai $n = 5$, pagal Balducci prielaidą yra didesnė lyginant su UDD

prielaida:

$$\frac{\bar{A}_{30:\overline{5}}^1}{\bar{A}_{30:\overline{5}}^1[UDD]} \approx 1.00021.$$

Kai $n = 10$, grynosios premijos vertė pagal Balducci prielaidą:

$$\begin{aligned} \bar{A}_{30:\overline{10}}^1 &= 1 - \nu^{10} \left(\frac{70}{80} \right)^2 + \frac{\delta}{6400} \sum_{k=0}^9 \nu^{1+k-\frac{(80-k)^2}{159-2k}} \frac{(79-k)^2}{159-2k} \\ &\cdot \left(\left(Ei \left(\frac{\delta(79-k)^2}{2k-159} \right) \right) - Ei \left(\frac{\delta(80-k)^2}{2k-159} \right) \right) \approx 0.186497. \end{aligned}$$

Kai $n = 10$, grynosios premijos vertė pagal UDD prielaidą:

$$\bar{A}_{30:\overline{10}}^1[UDD] = \frac{i}{6400\delta} \sum_{k=0}^9 \nu^{k+1} (159-2k) \approx 0.186457.$$

Grynoji premija, kai $n = 10$, pagal Balducci prielaidą yra didesnė lyginant su UDD prielaida:

$$\frac{\bar{A}_{30:\overline{10}}^1}{\bar{A}_{30:\overline{10}}^1[UDD]} \approx 1.00022.$$

Kai $n = 25$, grynosios premijos vertė pagal Balducci prielaidą:

$$\begin{aligned} \bar{A}_{30:\overline{25}}^1 &= 1 - \nu^{25} \left(\frac{55}{80} \right)^2 + \frac{\delta}{6400} \sum_{k=0}^{24} \nu^{1+k-\frac{(80-k)^2}{159-2k}} \frac{(79-k)^2}{159-2k} \\ &\cdot \left(\left(Ei \left(\frac{\delta(79-k)^2}{2k-159} \right) \right) - Ei \left(\frac{\delta(80-k)^2}{2k-159} \right) \right) \approx 0.315916. \end{aligned}$$

Kai $n = 25$, grynosios premijos vertė pagal UDD prielaidą:

$$\bar{A}_{30:\overline{25}}^1[UDD] = \frac{i}{6400\delta} \sum_{k=0}^{24} \nu^{k+1} (159-2k) \approx 0.315843.$$

Grynoji premija, kai $n = 25$, pagal Balducci prielaidą yra didesnė lyginant su UDD prielaida:

$$\frac{\bar{A}_{30:\overline{25}}^1}{\bar{A}_{30:\overline{25}}^1[UDD]} \approx 1.00023.$$

Pažvelgus atidžiau galima pastebėti, kad pagal Balducci prielaidą grynosios premijos vertė ne tik didesnė lyginant su gaunamomis reikšmėmis pagal UDD, tačiau, kuo

ilgesniam metų kiekiui n premija skaičiuojama, tuo didesnis skirtumas pastebimas:

$$\frac{\bar{A}_{30:\overline{25}}^1}{\bar{A}_{30:\overline{25}}^1[UDD]} > \frac{\bar{A}_{30:\overline{10}}^1}{\bar{A}_{30:\overline{10}}^1[UDD]} > \frac{\bar{A}_{30:\overline{5}}^1}{\bar{A}_{30:\overline{5}}^1[UDD]}, \text{ kadangi}$$

$$1.00023 > 1.00022 > 1.00021.$$

b) Atliekami atitinkami skaičiavimai, kai $x = 80$. Šiuo atveju,

$${}_tp_{80} = \left(\frac{30-t}{30} \right)^2.$$

Remiantis (40),

$$q_{80+k} = 1 - \left(\frac{29-k}{30-k} \right)^2 = \frac{59-2k}{(30-k)^2}.$$

Taip pat galima išsireikšti:

$$\frac{{}_{k+1}p_{80}}{q_{80+k}} = \frac{1}{30^2} \cdot \frac{(29-k)^2(30-k)^2}{59-2k};$$

$$\frac{p_{80+k}}{q_{80+k}} = \frac{(29-k)^2}{59-2k}.$$

Apskaičiuojamos gryųjų vienkartinių premijų vertės, kai $n = 5$. Pagal Balducci:

$$\bar{A}_{80:\overline{5}}^1 = 1 - \nu^5 \left(\frac{25}{30} \right)^2 + \frac{\delta}{900} \sum_{k=0}^4 \nu^{1+k-\frac{(30-k)^2}{59-2k}} \frac{(39-k)^2}{59-2k}.$$

$$\cdot \left(\left(Ei \left(\frac{\delta(29-k)^2}{2k-59} \right) \right) - Ei \left(\frac{\delta(30-k)^2}{2k-59} \right) \right) \approx 0.272261.$$

Premija pagal UDD:

$$\bar{A}_{80:\overline{5}}^1[UDD] = \frac{i}{900\delta} \sum_{k=0}^4 \nu^{k+1} (59-2k) \approx 0.272101.$$

Grynoji premija, kai $n = 5$, $x = 80$, pagal Balducci prielaidą yra didesnė lyginant su UDD prielaida:

$$\frac{\bar{A}_{80:\overline{5}}^1}{\bar{A}_{80:\overline{5}}^1[UDD]} \approx 1.00059.$$

Kai $n = 10$, grynosios premijos vertė pagal Balducci prielaidą:

$$\begin{aligned} \bar{A}_{80:\overline{10}|}^1 &= 1 - \nu^{10} \left(\frac{20}{30} \right)^2 + \frac{\delta}{900} \sum_{k=0}^9 \nu^{1+k-\frac{(30-k)^2}{59-2k}} \frac{(29-k)^2}{59-2k} \\ &\cdot \left(\left(Ei \left(\frac{\delta(29-k)^2}{2k-59} \right) \right) - Ei \left(\frac{\delta(30-k)^2}{2k-59} \right) \right) \approx 0.446959. \end{aligned}$$

Kai $n = 10$, grynosios premijos vertė pagal UDD prielaidą:

$$\bar{A}_{80:\overline{10}|}^1[UDD] = \frac{i}{900\delta} \sum_{k=0}^9 \nu^{k+1} (59-2k) \approx 0.446673.$$

Grynoji premija, kai $n = 10$, $x = 80$, pagal Balducci prielaidą yra didesnė lyginant su UDD prielaida:

$$\frac{\bar{A}_{80:\overline{10}|}^1}{\bar{A}_{80:\overline{10}|}^1[UDD]} \approx 1.00064.$$

Kai $n = 25$, grynosios premijos vertė pagal Balducci prielaidą:

$$\begin{aligned} \bar{A}_{80:\overline{25}|}^1 &= 1 - \nu^{25} \left(\frac{5}{30} \right)^2 + \frac{\delta}{900} \sum_{k=0}^{24} \nu^{1+k-\frac{(30-k)^2}{59-2k}} \frac{(29-k)^2}{59-2k} \\ &\cdot \left(\left(Ei \left(\frac{\delta(29-k)^2}{2k-59} \right) \right) - Ei \left(\frac{\delta(30-k)^2}{2k-59} \right) \right) \approx 0.641689. \end{aligned}$$

Kai $n = 25$, grynosios premijos vertė pagal UDD prielaidą:

$$\bar{A}_{80:\overline{25}|}^1[UDD] = \frac{i}{900\delta} \sum_{k=0}^{24} \nu^{k+1} (59-2k) \approx 0.641167.$$

Grynoji premija, kai $n = 25$, $x = 80$, pagal Balducci prielaidą yra didesnė lyginant su UDD prielaida:

$$\frac{\bar{A}_{80:\overline{25}|}^1}{\bar{A}_{80:\overline{25}|}^1[UDD]} \approx 1.00081$$

Kaip ir a) dalyje galima pastebėti, kad pagal Balducci prielaidą grynosios premijos vertė ne tik didesnė lyginant su gaunamomis reikšmėmis pagal UDD, tačiau, kuo ilgesniam metų kiekiui n premija skaičiuojama, tuo didesnis skirtumas pastebimas:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{A}_{80:\overline{25}|}^1}{\bar{A}_{80:\overline{25}|}^1[UDD]} &> \frac{\bar{A}_{80:\overline{10}|}^1}{\bar{A}_{80:\overline{10}|}^1[UDD]} > \frac{\bar{A}_{80:\overline{5}|}^1}{\bar{A}_{80:\overline{5}|}^1[UDD]}, \text{ kadangi} \\ 1.00081 &> 1.00064 > 1.00059. \end{aligned}$$

Taip pat, šiuo pavyzdžiu pagrindžiamas teiginys, kad gryniosios premijos reikšmė yra tuo didesnė, kuo vyresniam x žmogui skaičiuojama, t. y.

$$\begin{aligned}\bar{A}_{80:\overline{25}}^1 &> \bar{A}_{30:\overline{25}}^1, \text{ nes } 0.641689 > 0.315916; \\ \bar{A}_{80:\overline{10}}^1 &> \bar{A}_{30:\overline{10}}^1, \text{ nes } 0.446959 > 0.186497; \\ \bar{A}_{80:\overline{5}}^1 &> \bar{A}_{30:\overline{5}}^1, \text{ nes } 0.272261 > 0.107612.\end{aligned}$$

Skirtumas tarp premijos dydžio, skaičiuojamo pagal Balducci prielaidą ir pagal UDD prielaidą, taip pat yra tuo didesnis, kuo vyresniam x žmogui skaičiuojamas, t. y.

$$\begin{aligned}\frac{\bar{A}_{80:\overline{25}}^1}{\bar{A}_{80:\overline{25}}^1[UDD]} &> \frac{\bar{A}_{80:\overline{10}}^1}{\bar{A}_{80:\overline{10}}^1[UDD]} > \frac{\bar{A}_{80:\overline{5}}^1}{\bar{A}_{80:\overline{5}}^1[UDD]} > \frac{\bar{A}_{30:\overline{25}}^1}{\bar{A}_{30:\overline{25}}^1[UDD]} > \\ &> \frac{\bar{A}_{30:\overline{10}}^1}{\bar{A}_{30:\overline{10}}^1[UDD]} > \frac{\bar{A}_{30:\overline{5}}^1}{\bar{A}_{30:\overline{5}}^1[UDD]}.\end{aligned}$$

- 2) Kadangi dispersijai apskaičiuoti reikalingas pirmasis momentas, jau turimas iš a) dalies, lieka rasti antrąjį momentą pagal (37):

$$\begin{aligned}{}^2\bar{A}_{30:\overline{5}}^1 &= 1 - \nu^{10} \left(\frac{75}{80} \right)^2 + \frac{2\delta}{6400} \sum_{k=0}^4 \nu^{2\left(1+k-\frac{(80-k)^2}{159-2k}\right)} \frac{(79-k)^2}{159-2k} \\ &\cdot \left(\left(Ei \left(\frac{2\delta(79-k)^2}{2k-159} \right) \right) - Ei \left(\frac{2\delta(80-k)^2}{2k-159} \right) \right) \approx 0.0961045.\end{aligned}$$

Taigi, dispersija pagal Balducci prielaidą yra

$$\mathbb{D}Z_x \approx 0.0845241.$$

Antrasis momentas pagal UDD:

$${}^2\bar{A}_{30:\overline{5}}^1[UDD] = \frac{i^2 + 2i}{100 \cdot 2\delta} \sum_{k=0}^9 \nu^{2(k+1)} \approx 0.0960643$$

Vadinasi, dispersija pagal UDD prielaidą yra

$$\mathbb{D}Z_x[UDD] \approx 0.0844888.$$

Toliau bus atliekami atitinkami skaičiavimai, kad būtų galima surasti visų būsimųjų išmokų dabartinių verčių, rastų a) dalyje dispersijas, ir gauti (suapvalinti) rezultatai supildomi į lentelę.

Šiame pavyzdyje, kaip ir pirmame, visais atvejais dispersija, apskaičiuojama pagal Balducci prielaidą yra didesnė nei pagal UDD.

x	30			80		
n	5	10	25	5	10	25
$A_{x:\overline{n}}^1$	0.107612	0.186497	0.315916	0.272261	0.446959	0.641689
${}^2A_{x:\overline{n}}^1$	0.0961045	0.151309	0.210954	0.243787	0.366463	0.460747
DZ_x	0.0845241	0.116528	0.111151	0.169661	0.166691	0.0489825
$A_{x:\overline{n}}^1[UDD]$	0.10759	0.186457	0.315843	0.272101	0.446673	0.641167
${}^2A_{x:\overline{n}}^1[UDD]$	0.0960643	0.151244	0.210859	0.243501	0.366001	0.460071
$DZ_x[UDD]$	0.0844888	0.116478	0.111102	0.169462	0.166485	0.0489759

1 lentelė: Gryniosios vienkartinės premijos ir dispersijos.

Pavyzdys 5.3.

Tarkime $l = 0$, $m = 1$, $i = 5\%$ ir

$$q_{x+k} = 0.02(k + 1).$$

1) Pagal duotus duomenis galima apskaičiuoti $\bar{A}_{x:\overline{10}}^1$ naudojantis Balducci mirtingumo prielaida (3) ir gautą reikšmę palyginti su grynąja premija, gauta pagal UDD prielaidą, kai:

a) $n = 10$;

b) $n = 40$;

2) Taip pat pagal abi prielaidas bus apskaičiuota ir palyginta būsimosios išmokos dabartinės vertės dispersija $\mathbb{D}Z_x$.

Sprendimas:

1) a) Iš duotos sąlygos pirmiausiai lengva rasti

$$p_{x+k} = 1 - q_{x+k} = 0.98 - 0.02k.$$

${}_k p_x$ galima gauti pasinaudojus 2.2 skyrelyje pristatyta lygybe:

$${}_k p_x = p_x p_{x+1} \cdots p_{x+k-1} = \prod_{a=0}^{k-1} p_{x+a}, \quad t \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$${}_t p_x = \prod_{a=0}^{k-1} (0.98 - 0.02a).$$

Pagal (40) lygybę turime, kad

$${}_{k+1} p_x = p_{x+k} \cdot {}_k p_x \Rightarrow$$

$${}_{k+1} p_x = (0.98 - 0.02k) \prod_{a=0}^{k-1} (0.98 - 0.02a) = \prod_{a=0}^k (0.98 - 0.02a).$$

Įsistačius aprašytas reikšmes gaunama grynoji premija (pagal Balducci prielaidą), kai $n = 10$:

$$\begin{aligned}\bar{A}_{x:\overline{10}|}^1 &:= 1 - \nu^{10} \cdot \prod_{a=0}^9 (0.98 - 0.02a) + \delta \sum_{k=0}^9 \nu^{1+k-\frac{1}{0.02(k+1)}} \cdot \frac{\prod_{a=0}^k (0.98 - 0.02a)}{0.02(k+1)} \\ &\cdot \left(Ei \left(-\frac{\delta(0.98 - 0.02k)}{0.02(k+1)} \right) - Ei \left(-\frac{\delta}{0.02(k+1)} \right) \right) = \\ &= 1 - \nu^{10} \cdot \prod_{a=0}^9 (0.98 - 0.02a) + \frac{\delta}{0.02} \sum_{k=0}^9 \nu^{1+k-\frac{1}{0.02(k+1)}} \cdot \frac{\prod_{a=0}^k (0.98 - 0.02a)}{k+1} \\ &\cdot \left(Ei \left(\frac{\delta(0.02k - 0.98)}{0.02(k+1)} \right) - Ei \left(\frac{-\delta}{0.02(k+1)} \right) \right) \approx 0.529233.\end{aligned}$$

O grynoji premija pagal UDD:

$$\begin{aligned}\bar{A}_{x:\overline{10}|}^1[UDD] &= \frac{i}{\delta} A_{x:\overline{10}|}^1[UDD] = \frac{i}{\delta} \sum_{k=0}^9 \nu^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} = \frac{i}{\delta} (\nu {}_0 p_x q_x + \nu^{1+1} {}_1 p_x q_{x+1} + \\ &+ \nu^{1+2} {}_2 p_x q_{x+2} + \dots + \nu^{1+9} {}_9 p_x q_{x+9}) = \frac{i}{\delta} \left(0.02\nu + \sum_{k=1}^9 \nu^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} \right) = \\ &= \frac{i}{\delta} \left(0.02\nu + \sum_{k=1}^9 \nu^{k+1} 0.02(k+1) \prod_{a=0}^{k-1} (0.98 - 0.02a) \right) = \\ &= \frac{0.02i\nu}{\delta} \left(1 + \sum_{k=1}^9 \nu^{k+1} (k+1) \prod_{a=0}^{k-1} (0.98 - 0.02a) \right) \approx 0.528683.\end{aligned}$$

Grynoji premija, kai $n = 10$, pagal Balducci prielaidą yra didesnė lyginant su UDD prielaida:

$$\frac{\bar{A}_{x:\overline{10}|}^1}{\bar{A}_{x:\overline{10}|}^1[UDD]} \approx 1.00104$$

b) Atitinkamai, grynoji premija pagal Balducci prielaidą, kai $n = 40$:

$$\begin{aligned}\bar{A}_{x:\overline{40}|}^1 &:= 1 - \nu^{40} \cdot \prod_{a=0}^{39} (0.98 - 0.02a) + \frac{\delta}{0.02} \sum_{k=0}^{39} \nu^{1+k-\frac{1}{0.02(k+1)}} \cdot \frac{\prod_{a=0}^k (0.98 - 0.02a)}{k+1} \\ &\cdot \left(Ei \left(\frac{\delta(0.02k - 0.98)}{0.02(k+1)} \right) - Ei \left(\frac{-\delta}{0.02(k+1)} \right) \right) \approx 0.690889.\end{aligned}$$

O grynoji premija pagal UDD:

$$\bar{A}_{x:\overline{40}|}^1[UDD] = \frac{0.02i\nu}{\delta} \left(1 + \sum_{k=1}^3 9\nu^{k+1} (k+1) \prod_{a=0}^{k-1} (0.98 - 0.02a) \right) \approx 0.689927.$$

Grynoji premija, kai $n = 40$, pagal Balducci prielaidą yra didesnė lyginant su UDD

prielaia:

$$\frac{\bar{A}_{x:40}^1}{\bar{A}_{x:40}^1[UDD]} \approx 1.0014.$$

Ir, kaip ir praeitame pavyzdyje,

$$\frac{\bar{A}_{x:40}^1}{\bar{A}_{x:40}^1[UDD]} > \frac{\bar{A}_{x:10}^1}{\bar{A}_{x:10}^1[UDD]}.$$

2) a) Antrasis momentas pagal (37) ir Balducci prielaia, kai $n = 10$, yra lygus:

$$\begin{aligned} {}^2\bar{A}_{x:10}^1 &:= 1 - \nu^{20} \prod_{a=0}^9 (0.98 - 0.02a) + \frac{2\delta}{0.02} \sum_{k=0}^9 \nu^{2(1+k-\frac{1}{0.02(k+1)})}. \\ &\cdot \frac{\prod_{a=0}^k (0.98 - 0.02a)}{k+1} \cdot \left(Ei\left(\frac{2\delta(0.02k - 0.98)}{0.02(k+1)}\right) - Ei\left(\frac{-2\delta}{0.02(k+1)}\right) \right) \approx \\ &\approx 0.409464. \end{aligned}$$

Dispersija pagal Balducci prielaia:

$$\mathbb{D}Z_x \approx 0.129376.$$

O antrasis momentas pagal UDD:

$$\begin{aligned} {}^2\bar{A}_{x:10}^1[UDD] &= \frac{i^2 + 2i}{2\delta} (\nu^2 {}_0p_x q_x + \nu^4 {}_1p_x q_{x+1} + \\ &+ \nu^6 {}_2p_x q_{x+2} + \dots + \nu^{20} {}_9p_x q_{x+9}) = \frac{i^2 + 2i}{2\delta} \left(0.02\nu^2 + \sum_{k=1}^9 \nu^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} \right) = \\ &= \frac{0.02\nu^2(i^2 + 2i)}{2\delta} \left(1 + \sum_{k=1}^9 \nu^{k+1} (k+1) \prod_{a=0}^{k-1} (0.98 - 0.02a) \right) \approx 0.40866. \end{aligned}$$

Dispersija pagal UDD prielaia:

$$\mathbb{D}Z_x[UDD] \approx 0.129155.$$

Palyginimas:

$$\frac{\mathbb{D}Z_x}{\mathbb{D}Z_x[UDD]} = 1.00172.$$

b) Antrasis momentas pagal (37) ir Balducci prielaidą, kai $n = 40$, yra lygus:

$$\begin{aligned} {}^2\bar{A}_{x:\overline{40}|}^1 &:= 1 - \nu^{80} \prod_{a=0}^{39} (0.98 - 0.02a) + \frac{2\delta}{0.02} \sum_{k=0}^{39} \nu^{2(1+k-\frac{1}{0.02(k+1)})} \\ &\cdot \frac{\prod_{a=0}^k (0.98 - 0.02a)}{k+1} \cdot \left(Ei\left(\frac{2\delta(0.02k - 0.98)}{0.02(k+1)}\right) - Ei\left(\frac{-2\delta}{0.02(k+1)}\right) \right) \approx \\ &\approx 0.496289. \end{aligned}$$

Dispersija pagal Balducci prielaidą:

$$\mathbb{D}Z_x \approx 0.0189603.$$

O antrasis momentas pagal UDD:

$${}^2\bar{A}_{x:\overline{40}|}^1[UDD] = \frac{0.02\nu^2(i^2 + 2i)}{2\delta} \left(1 + \sum_{k=1}^{39} \nu^{k+1}(k+1) \prod_{a=0}^{k-1} (0.98 - 0.02a) \right) \approx 0.495053$$

Dispersija pagal UDD prielaidą:

$$\mathbb{D}Z_x[UDD] \approx 0.0190546.$$

Šiuo konkrečiu atveju gaunama išvada, kad dispersija yra didesnė skaičiuojant pagal UDD prielaidą nei skaičiuojant pagal Balducci prielaidą:

$$\frac{\mathbb{D}Z_x[UDD]}{\mathbb{D}Z_x} = 1.00497.$$

6 Išvados

Apibendrinant, šiame darbe buvo atidžiai išanalizuota informacija apie italų aktuarą Gaetano Balducci ir jo garsiosios prielaidos apie išgyvenimo funkcijos interpoliavimo variantą. Atrastas originalus Balducci prielaidos argumentavimo procesas ir išnagrinėti įvairūs šios teorijos pateikimo būdai, randami įvairiuose šaltiniuose. Pagal Balducci prielaidą apskaičiuotos vertingos išgyvenimo charakteristikų lygybės, taip pat atlikti skaičiavimai gyvybės draudimo srityje: ši teorija pritaikyta grynosioms vienkartinėms premijoms skaičiuoti. Be to, gauti rezultatai palyginti su būsimųjų išmokų dabartinių verčių vidurkais, skaičiuotais pagal tolygaus mirtingumo pasiskirstymo metų intervaluose prielaidą.

Vertingų išvadų yra kelios:

- Analizuojant Balducci teorijos kilmę iš istorinio aspekto, buvo atrasta, kad italų aktuaras nebuvo pirmasis, pasiūlęs tokį interpoliavimo būdą, o pirmasis buvo Theodor Wittstein. Rasta informacija apie T. Wittstein prielaidas yra priežastis, dėl ko kyla klausimas, kodėl žinoma prielaida yra vadinama tik Balducci pavarde. Šiame darbe buvo pristatyta tik minimali informacija apie pastarąjį autorių, tačiau ateityje būtų tikslinga asmenins, susidomėjusiems išgyvenimo funkcijų tyrimo tema, toliau tęsti tyrimą apie T. Wittstein ir jo indėlį į aktuarinę matematiką. Galbūt ateityje būtų vertinga Balducci prielaidą pradėti vadinti Wittstein-Balducci vardu, įvertinant abiejų autorių svarbą.
- Atlikti skaičiavimai grynosioms vienkartinėms premijoms rasti atskleidė, kad, gaunami rezultatai, lyginant su grynųjų vienkartinių premijų reikšmėmis, gautomis pagal UDD prielaidą, skiriasi labai nedaug, tačiau premijos pagal Balducci prielaidą gaunamos didesnės. Svarbu atkreipti dėmesį, jog rezultatų skirtumas tarp šių dviejų prielaidų stipriai priklauso nuo dviejų parametrų - nuo vertinamo žmogaus amžiaus ir metų kiekio, kuriam skaičiuojamas draudimas. Atrasta, kad, kai vertinamo žmogaus amžius didėja ir (arba) kai draudimo metų kiekis didėja, skirtumas taip pat pastebimas vis didesnis (t. y. vienkartinė grynoji premija pagal Balducci prielaidą gaunama vis didesnė lygynant su premijos dydžiu pagal UDD prielaidą).
- Daugeliu atvejų būsimųjų išmokų dabartinių verčių dispersija taip pat gauta didesnė skaičiuojant pagal Balducci prielaidą nei pagal tolygaus mirtingumo pasiskirstymo metų intervaluose prielaidą, išskyrus vieną atvejį. Vadinasi, yra atvejų, kai gaunamos reikšmės gali būti tikslesnės skaičiuojant pagal Balducci prielaidą.

Žinoma, šio darbo neužtenka suprasti konkretiems kriterijams, kada yra tikslingiau naudoti grynųjų vienkartinių premijų išraišką pagal Balducci prielaidą (nei pagal UDD prielaidą), tačiau tai yra įrodymas, kad šią sritį verta nagrinėti toliau ir ieškoti daugiau pavyzdžių, kai būtų pastebimas šis skirtumas. Neatmetama ir galimybė, jog yra atvejų, kai gryniosios vienkartinės premijos vertė yra mažesnė pagal Balducci nei pagal tolygaus mirtingumo pasiskirstymo metų intervaluose prielaidą, tačiau šiame darbe pateiktų pavyzdžių

šiai hipotezei patvirtinti ar paneigti nepakako.

Taigi, gauti rezultatai patvirtina, jog ši aktuarinės matematikos tema dar nėra iki galo išnagrinėta, tačiau atliktas tyrimas užpildo tam tikras informacines ir praktines spragas. Šio darbo dėka iškelti klausimai įrodo temos aktualumą ir skatina toliau tirti ir pildyti aktuarinio mokslo akademinius šaltinius naujais samprotavimais.

7 Priedai

7.1 Grafikų kodai

Listing 1: Išgyvenimo funkcijos

```
Labeled[Plot[{Piecewise[  
  {  
    {(1 - t)*1 + t*0.9, 0 < t < 1},  
    {(2 - t)*0.9 + (t - 1)*0.85, 1 < t < 2},  
    {(3 - t)*0.85 + (t - 2)*0.7, 2 < t < 3},  
    {(4 - t)*0.7 + (t - 3)*0.5, 3 < t < 4}  
  }],  
  Piecewise[{ {0.9/((1 - t)*0.9 + t),  
    0 < t < 1}, {0.9*0.85/((2 - t)*0.85 + (t - 1)*0.9),  
    1 < t < 2}, {0.85*0.7/((3 - t)*0.7 + (t - 2)*0.85),  
    2 < t < 3}, {0.7*0.5/((4 - t)*0.5 + (t - 3)*0.7),  
    3 < t < 4} }], {t, 0, 4},  
  PlotStyle -> {Red, Blue},  
  Frame -> True,  
  FrameLabel -> {"k", "S(x+k)"},  
  FrameStyle -> Directive[Black, 10],  
  PlotLegends -> Placed[Automatic, {Right, Top}]]]
```

Listing 2: Tankio funkcijos

```
Labeled[Plot[{Piecewise[{ {  
  0.1, 0 < t < 1},  
  {0.05, 1 < t < 2},  
  {0.15, 2 < t < 3},  
  {0.2, 3 < t < 4} }],  
  Piecewise[{  
    {0.09/(((1 - t)*0.9 + t*1)^2), 0 < t < 1},  
    {0.03825/(((2 - t)*0.85 + (t - 1)*0.9)^2), 1 < t < 2},  
    {0.08/(((3 - t)*0.7 + (t - 2)*0.85)^2), 2 < t < 3},  
    {0.07/(((4 - t)*0.5 + (t - 3)*0.7)^2), 3 < t < 4} }],  
  }, {t, 0, 4},  
  PlotStyle -> {Red, Blue},  
  Frame -> True,  
  FrameLabel -> {"k"},  
  FrameStyle -> Directive[Black, 10],  
  PlotLegends -> Placed[Automatic, {Left, Top}]]]
```

Literatūra

- [1] The actuary, volume 12, issue 8 (london), october 1978. Society of Actuaries Newsletter, 1978.
- [2] U. author. Gaetano balducci, ragionere generale dello stato, 1952. Italian magazine Epoca, Vol. VII, n. 86, 31 May 1952, 1952.
- [3] G. Balducci. La tavola di sopravvivenza della popolazione maschile italiana (1901) interpolata mediante la formola del makeham. *Giornale degli Economisti e Rivista di Statistica*, 42(4):394–403, 1911.
- [4] G. Balducci. Costruzione e critica delle tavole di mortalità. *Giornale degli Economisti e Rivista di Statistica*, 55 (Anno 28)(6):455–484, 1917.
- [5] R. Batten. *Mortality Table Construction*. Risk, Insurance and Security Series. Prentice-Hall, 1978.
- [6] D. Bernoulli. Exposition of a new theory on the measurement of risk. In *The Kelly capital growth investment criterion: Theory and practice*, pages 11–24. World Scientific, 2011.
- [7] J. Bravo. Tábuas de mortalidade contemporâneas e prospectivas: Modelos estocásticos, aplicações actuariais e cobertura do risco de longevidade. *Universidade de Évora, Évora*, 2007.
- [8] L. Einaudi. *Diario 1945-1947*. Editori Laterza, 1993.
- [9] B. Gompertz. On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of life contingencies. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 115:513–583, 1825.
- [10] J. Graunt and W. F. Willcox. Natural and political observations made upon the bills of mortality. (*No Title*), 1939.
- [11] A. Grigutis, E. Matulevičiūtė, and M. Venckevičius. The famous italian actuary g. balducci and some expressions of the net single premiums under his assumption. 2024. Nepublikuotas straipsnis, pasiekiamas <https://klevas.mif.vu.lt/~andriusg/preprintai.html>.
- [12] A. Grigutis and J. Šiaulys. Aktuarinė matematika. paskaitų konspektas. Vilniaus universitetas, 2024.
- [13] E. Halley. Vi. an estimate of the degrees of the mortality of mankind; drawn from curious tables of the births and funerals at the city of breslaw; with an attempt to ascertain the price of annuities upon lives. *Philosophical transactions of the Royal Society of London*, 17(196):596–610, 1973.

- [14] K. Hare. A study of the actuarial profession. Master's thesis, Liberty University, 2007.
- [15] W. R. Inc. Mathematica, Version 14.0. Champaign, IL, 2024.
- [16] N. L. B. Jr., H. U. Gerber, J. C. Hickman, D. A. Jones, and C. J. Nesbitt. *Actuarial Mathematics*. Society of Actuaries, first edition, 1986.
- [17] W. M. Makeham. On the law of mortality and the construction of annuity tables. *The Assurance Magazine, and Journal of the Institute of Actuaries*, 8(6):301–310, 1860.
- [18] M. Mosca. *Precedenti storici e conseguenze economiche dell'articolo 81 della costituzione*.
- [19] R. Price. *Observations on Reversionary Payments. On Schemes for Providing Annuities for Widows, and for Persons in Old Age.. The Whole New Arranged, and Enlarged by the Addition of Algebraical and Other Notes, and the Solutions of Several New Problems in the Doctrine of Annuities by William Morgan*, volume 2. T. Cadell and W. Davies, 1812.
- [20] G. Puzey. *New Techniques for the Development of General-Purpose Parallel Programming Systems*. Phd thesis, City University London, 1993.
- [21] D. S. SAVORY. Mortality among neutrals in war-time. *Journal of the Institute of Actuaries (1886-1994)*, 51(1):65–68, 1918.
- [22] A. T. TRAVERSI. The relation between the rates of mortality, or decrement, from particular causes, and the rates from all causes, with some remarks upon the prevalent misuse of this term "rate". *Journal of the Institute of Actuaries (1886-1994)*, 51(3):304–308, 1919.
- [23] W. Weibull. A statistical distribution function of wide applicability. *Journal of applied mechanics*, 1951.
- [24] T. Wittstein. Die mortalität in gesellschaften mit successiv eintretenden und ausscheidenden mitgliedern. *Archiv der Mathematik und Physik*, 39:67–92, 1862.
- [25] T. Wittstein. On mathematical statistics and its application to political economy and insurance (continued from page 189). *Journal of the Institute of Actuaries and Assurance Magazine*, 17(5):355–369, 1873.
- [26] C. A. Zorli, M. Pantaleoni, A. Beneduce, G. Demaria, and P. Greco. *Giornale degli economisti e rivista di statistica*, volume 60. 1920.