https://doi.org/10.15388/vu.thesis.685
https://orcid.org/0000-0002-0593-1563

VILNIAUS UNIVERSITETAS

Ieva Kilienė

Tekstinių uždavinių vaidmuo gilinant mokyklinės matematikos žinias

DAKTARO DISERTACIJA

Gamtos mokslai,
matematika (N 001)

VILNIUS 2024

Disertacija rengta 2019 – 2024 metais Vilniaus universitete.

Mokslinis vadovas:
Prof. habil. dr. Rimas Norvaiša (Vilniaus universitetas, gamtos mokslai, matematika – N 001).

Gynimo taryba:
Pirmininkas – **prof. habil. dr. Alfredas Račkauskas** (Vilniaus universitetas, gamtos mokslai, matematika – N 001).
Nariai:
prof. habil. dr. Vydas Čekanavičius (Vilniaus universitetas, gamtos mokslai, matematika – N 001),
prof. dr. Ramūnas Garunkštis (Vilniaus universitetas, gamtos mokslai, matematika – N 001),
doc. dr. Viktor Skorniakov (Vilniaus universitetas, gamtos mokslai, matematika – N 001),
doc. dr. Konstantinos Tatsis (Joaninos universitetas, Graikija, gamtos mokslai, Matematika – N 001).

Disertacija ginama viešame Gynimo tarybos posėdyje 2024 m. lapkričio 15 d. 15 val. Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto Taikomosios matematikos instituto 101 auditorijoje. Adresas: Naugarduko g. 24, 03225, Vilnius, Lietuva, tel. +370 5 219 5000; el. paštas: mif@mif.vu.lt.

Disertaciją galima peržiūrėti Vilniaus universiteto bibliotekoje ir Vilniaus universiteto interneto svetainėje adresu: www.vu.lt/lt/naujienos/ivykiu-kalendorius.

https://doi.org/10.15388/vu.thesis.685
https://orcid.org/0000-0002-0593-1563

VILNIUS UNIVERSITY

Ieva Kilienė

The Role of Word Problems in Deepening Knowledge in School Mathematics

DOCTORAL DISSERTATION

Natural sciences,
Mathematics (N 001)

VILNIUS 2024

This dissertation was written between 2019 and 2024 at Vilnius University.

Academic supervisor:
Prof. Habil. Dr. Rimas Norvaiša (Vilnius University, Natural Sciences, Mathematics – N 001).

Dissertation Defence Panel:
Chair – **Prof. Habil. Dr. Alfredas Račkauskas** (Vilnius University, Natural Sciences, Mathematics – N 001).
Members:
Prof. Habil. Dr. Vydas Čekanavičius (Vilnius University, Natural Sciences, Mathematics – N 001),
Prof. Dr. Ramūnas Garunkštis (Vilnius University, Natural Sciences, Mathematics – N 001),
Assoc. Prof. Dr. Viktor Skorniakov (Vilnius University, Natural Sciences, Mathematics – N 001),
Assoc. Prof. Dr. Konstantinos Tatsis (University of Ioannina, Greece, Natural Sciences, Mathematics – N 001).

The dissertation shall be defended at a public meeting of the Dissertation Defense Panel at 3 p.m. on 15th October 2024 at the Institute of Applied Mathematics of Vilnius University. Address: Naugarduko str. 24, 03225, Vilnius, Lithuania, tel. +370 5 219 5000; e-mail: mif@mif.vu.lt

The text of this dissertation can be accessed at the Library of Vilnius University and on the website of Vilnius University:
www.vu.lt/lt/naujienos/ivykiu-kalendorius.

Turinys

Pagrindinės sąvokos

Tekstinis uždavinys, tai pasakojimu apibūdinta probleminė situacija, kuriai formuluojamas vienas ar keli klausimai. Tekstinis uždavinys sprendžiamas pritaikant matematines operacijas skaitinėms reikšmėms pateiktoms uždavinyje (Matematikos mokymo enciklopedija, 2014 [149]).

Matematinio modeliavimo uždavinys tai tekstinis uždavinys, kurio pasakojimas yra apie realaus pasaulio objektus, jų sprendimas reikalauja išnagrinėti ne tik pateiktą informaciją, bet remtis mokslo, bei realaus pasaulio žiniomis, kartais išnagrinėti ne vieną, o keletą galimų sprendimo variantų [91].

Aritmetiniai tekstiniai uždaviniai gali būti standartiniai ir probleminiai. **Standartinis tekstinis uždavinys (S uždavinys)** tai toks tekstinis uždavinys, kuriame pateikta informacija yra būtina ir pakankama norint atsakyti į jame pateiktą klausimą ir į jį atsakyti galima tiesiogiai pritaikius matematines operacijas skaitinėms reikšmėms pateiktoms uždavinyje. **Probleminis uždavinys (P uždavinys)**, tai toks tekstinis uždavinys, kurį spręsdamas mokinys turi įvertinti duotą informaciją, susirasti trūkstamą informaciją, arba atrinkti, kuri informacija nėra reikalinga. ([149] p. 10)

Nuoseklus uždavinys tai toks tekstinis uždavinys, kurio dydžių sąryšiai ir matematinės operacijos veiksmai suderinti, t.y. jei sąryšis didėjimo atliekamas sudėties arba daugybos veiksmas, jei mažėjimo - atimties arba dalybos. **Nenuoseklus uždavinys** tai tas tekstinis uždavinys, kuris nėra nuoseklus ([95] p. 15).

Matematinis samprotavimas matematinis samprotavimas mokykloje yra dėsningumų paieška, hipotezių formulavimas jų pagrindimas ir apibendrinimas [8].

Dedukcinis argumentas tai tokia grupė teiginių, tarp kurių vienas teiginys yra išvada, o kiti teiginiai prielaidos.

Pagrįstas argumentas yra toks dedukcinis argumentas, kai visoms prielaidoms esant teisingoms išvada taip pat teisinga.

Sintetinis modelis tai mokinių bandymas susieti naują informaciją su jų jau turima samprata apie tam tikrą sąvoką.

Pradinė skaičiaus samprata tai vaiko nuomonė kas yra skaičius, dar prieš pradedant jį mokytis.

Įvadas

Matematikos mokymo neįsivaizduojame be tekstinių uždavinių. Nepaisant to, kad tai yra viena sudėtingiausių temų mokiniams, negalime vienareikšmiškai atsakyti, kokia yra tekstinių uždavinių naudojimo matematikos mokyme nauda ar prasmė. Šio darbo tikslas praplėsti tekstinių uždavinių naudojimo matematikos mokyme galimybes. Išskirsime šiuos pagrindinius tekstinių uždavinių mokymo tikslus:

1. Susieti supaprastintą realaus pasaulio situaciją su matematinėmis sąvokomis.
2. Motyvuoti mokinius mokytis matematikos.
3. Lavinti mokinių kūrybiškumą, problemų sprendimo gebėjimus.
4. Talkinti mokantis naujas matematines temas ir įgyti joms reikalingus įgūdžius.

Standartiniai tekstiniai uždaviniai siejami su pirmuoju tikslu, probleminiai tekstiniai uždaviniai su 2, 3 ir 4 tikslais, nestandartinius tekstinius uždavinius („Kur koks skaičius tinka“ tipo ir modifikuoti tekstiniai uždaviniai) siesime su 2 ir trečiuoju tikslais. Taip pat siekiame atskleisti tekstinių uždavinių panaudojimo platesnes galimybes bei naudą. Apžvelgiant kiekvieną iš matematikos mokymo tikslų, pateikiama teorinė dalis su literatūroje randamais pasiūlymais, bei pateikiamas empirinis tyrimas.

Pirmieji tekstiniai uždaviniai randami maždaug prieš 4000 metų Egipte. Nuo pirmųjų uždavinių iki dabar nuolat keitėsi uždavinių kontekstai, matematiniai žymėjimai, bet tekstiniai uždaviniai visad buvo ir yra svarbi matematikos mokymo dalis. Mes aptarsime tekstinius uždavinius kaip galimą priemonę siekiant tam tikrų tikslų matematikos mokyme ir atskeisime jų panaudojimo galimybes.

Tyrimo aktualumas

Tekstiniai uždaviniai yra viena sudėtingiausių matematikos temų mokiniams [149]. Lietuvoje valstybiniame matematikos egzamine tekstiniai uždaviniai mokiniams sunkiau įveikiami, nei kiti matematiniai uždaviniai, dažnai mokiniai jų visai nesprendžia ([97]). Tuo tarpu tekstiniai uždaviniai gali būti naudinga priemonė gilinti mokyklinės matematikos žinias ir įgūdžius. Tinkamai juos įdarbinant gali būti gaunami įvairiapusiai teigiami rezultatai. Tiek Lietuvoje, tiek pasaulyje galima tobulinti tekstinių uždavinių pateikimą, sandarą, mokymą juos spręsti. Tekstinių uždavinių mokymas gali būti naudingas norint įgyvendinti tam tikrus matematikos mokymo tikslus.

Lietuvoje mokslinių tyrimų susijusių su tekstinių uždavinių naudojimu atlikta nedaug. Yra publikuotos apžvalgos, kur apžvelgiami anksčiau naudoti uždaviniai, uždavinynai (Ažubalis, Zenkevičiūtė, Banionis, Ragalytė) [5, 10, 99, 160], nagrinėtas tekstinių uždavinių naudojimas dirbant su specialiuosius poreikius turinčiais mokiniais (Grabauskienė et. al., Tubutienė)[48, 133], kitos temos moksliniuose darbuose susijusiuose su Lietuvos švietimu nepaliečiamos. Todėl, siekiant gerinti esamą situaciją matematikos mokyme būtina ištirti vadovėliuose naudojamus tekstinius uždavinius ir jų reikšmę matematikos mokymui(si).

Šio darbo naujumą sudaro tekstinių uždavinių naudojimo matematikos mokyme praplėtimas ir galimų pasiekti tikslų naudojant tekstinius uždavinius atskleidimas. Tekstinius uždavinius kaip priemonę pasiekti įvairius mokymo tikslus nagrinėjančių apibendrintų tyrimų mums nėra žinoma. Tyrimai arba nagrinėja tik vieną iš tikslų arba nagrinėja tekstinių uždavinių sąvybes (žiūrėti 0.1 skyrių), bet netiria jų kaip priemonės. Šiame darbe nagrinėjame ne tik standartinius tekstinius uždavinius ir jų naudojimą Lietuvos vadovėliuose, bet ir nestandartinius, retai naudojamus tekstinius uždavinius. Atliekamas empirinis tyrimas su Čekijos ir Lietuvos moksleiviais, naudojant nestandartinius uždavinius, kuriuose didelę reikšmę turi išskirtinės šių kalbų taisyklės. Kitame empiriniame tyrime mokykliniai tekstiniai uždaviniai modifikuojami įtraukiant dedukcinį argumentavimą, tai nauja ir nenagrinėta tyrimų kryptis. Taip pat išbandome naujus matematinių temų pateikimo būdus naudojant tekstinius uždavinius. Atlikti empiriniai tyrimai patvirtina ir pademonstruoja tekstinių uždavinių kaip priemonės gilinti mokyklinės matematikos žinias galimą naudojimą.

Tyrimo problema

Atskleisti tekstinių uždavinių matematikos mokyme galimus tikslus ir pasiūlyti priemones (tekstinių uždavinių tipus ir jų pateikimą), kurios skirtos tuos tikslus pasiekti, taip pat pademonstruoti tų priemonių naudojimą.

Tyrimo uždaviniai

1. Aprašyti pagrindinius tekstinių uždavinių naudojimo matematikos mokyme tikslus ir juos susieti su tam tikro tipo (ar sandaros) tekstiniais uždaviniais.
2. Nustatyti standartinių tekstinių uždavinių tipų dažnių pasiskirstymą pradinių klasių vadovėlyje ir pateikti rekomendacijas matematikos mokymo turinio kūrėjams.
3. Suskirstyti ir empiriškai patikrinti tekstinius uždavinius kaip priemonę lavinti matematinį komunikavimą.
4. Sumodeliuoti ir empiriškai patikrinti nestandartinių tekstinių uždavinių panaudojimą motyvuojant mokytis matematikos.

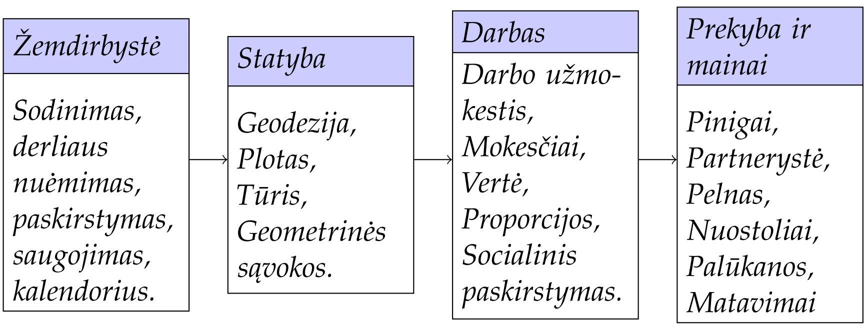
Tekstinio uždavinio sąvoka

Uždavinys 0.0.1. *Kiekviename iš 7 namų yra po 7 kates. Kiekviena katė suvalgė po 7 peles. Kiekviena pelė būtų suvalgiusi po 7 kviečių grūdus. Iš kiekvieno kviečio grūdo išauga po 7 tonas grūdų. Kiek grūdų buvo sutaupyta? [16]*

Tekstiniai uždaviniai randami matematiniuose dokumentuose nuo rašto atsiradimo. Babiloniečiai uždaviniuose aprašė kasdienių objektų ar veiklų skaičiavimus. Rhindo papiruse (apie 1650 m. pr. Kr.) randami įvairūs tekstiniai uždaviniai, vienas iš jų pateiktas skyriaus pradžioje (žiūrėti uždavinį 0.0.1).

Šie uždaviniai iš pradžių neišskiriami kaip atskiras uždavinių tipas. Jie įvardijami kaip problemos (angl.: problems). Vėliau randami terminai „pasakojimo uždaviniai“ (angl.: story problems), „žodiniai uždaviniai s“ (angl.: word problem), „tekstiniai uždaviniai“ (angl.: text problems).

Tekstinių uždavinių kontekstai keitėsi pagal žmonių poreikių kaitą [126] (žiūrėti: 1 pav.).



1 pav.: Tekstinių uždavinių vystymosi schema pagal žmonių poreikių kaitą adaptuota iš straipsnio [126]

Šių dienų matematikos mokyme mokiniams pateikiami uždaviniai atitinka tam tikras realaus pasaulio situacijas, kurias mokinys gali pažinti ar įsivaizduoti, bet ne visada yra susiję su mokinio poreikiais.

Tekstinio uždavinio sprendimui reikalingas supaprastintos situacijos matematinis modelis. Dažniausiai yra nusistovėjusios tam tikros normos, kurias klasės bendruomenė laiko teisingomis, pavyzdžiui: objekto greitis yra pastovus, aprašomi dydžiai yra tiksliai tokie, kokie nurodyti (1 kg, 2 cm ir t.t.).

Kalbant apie matematinius uždavinius, kurie yra pateikiami su tam tikra realaus pasaulio situacija lietuviškoje literatūroje galime sutikti du terminus: „žodiniai uždaviniai“ ir „tekstiniai uždaviniai“ .

Dar 1921 P. Mašiotas straipsnyje [82] kritikavo negyvenimiškus uždavinius uždavinynuose [4]. Tai reiškia, kad uždaviniai buvo aptariantys tam tikras situacijas, bet neįvardinta kaip jie buvo vadinti, tekstiniai, ar žodiniai.

Tarpukario programose buvo išreikštas poreikis, naudoti uždavinius iš mokinių aplinkos [99]. Neatitikimui tarp mokinio aktualijų ir uždavinių matematikos mokyme iliustruoti pateikiamas uždavinys iš 1921 m. Panevėžio berniukų gimnazijos egzamino.

Uždavinys 0.0.2. *Pirklys pirko avių ir arklių iš viso už 780 auksinų. Po to jis pardavė visus gyvulius, gaudamas už arklį po 73,6 auksino, o už avį po 11 auksinų ir taip gaudamas už kiekvieną arklį 15% pelno, o už avį tiek procentų pelno, kiek auksinų ji jam pačiam kainavo. Kiek arklių ir avių jis buvo pirkęs, jeigu bendras gyvulių skaičius mažesnis už 30? [99]*

Lietuvos matematikos bendrojoje programoje (patvirtintoje 2022 metais) naudojami abu terminai ir tekstiniai uždaviniai ir žodiniai uždaviniai kaip sinonimai. Visuotinėje lietuvių enciklopedijoje uždavinys, kuriam reikia parinkti matematinį modelį vadinamas tekstiniu uždaviniu (vle.lt). Tuo tarpu mokslinėje literatūroje dažniau minimas terminas žodiniai uždaviniai. O. Šalkuvienė [108] mini, kad „animuotų priemonių taikymas matematikos pamokose padeda mokiniams spręsti žodinius uždavinius bei daro teigiamą įtaką visam matematiniam ugdymui“ . L. Skromovaitės magistro darbe [118] išskiriami žodiniai uždaviniai, kaip atskiras tiriamų uždavinių tipas. Google scholar pateikia 3440 šaltinių ieškant termino „tekstiniai uždaviniai“ ir 8550 šaltinių ieškant termino „žodiniai uždaviniai“ (2023 - 10 - 20 duomenimis). Galimai taip yra dėl to, kad moksliniuose šaltiniuose dažniau remiamasi anglų kalba parašytais šaltiniais, o anglišką terminą „word problems“ išvertus pažodžiui gautume: žodiniai uždaviniai arba problemos. Šiame darbe naudosime terminą tekstiniai uždaviniai, neatmetant sąryšio su kitų lietuvių autorių tekstuose naudojamu terminu „žodiniai uždaviniai“ .

Tekstinių uždavinių apibrėžimas

Tekstiniai uždaviniai yra plačiai nagrinėjama tema matematikos mokymo tyrimuose. Šiame darbe nagrinėsime standartinius ir nestandartinius tekstinius uždavinius. **Standartiniai tekstiniai uždaviniai** pasakojimu pateikia uždavinio situaciją, su vienu ar keliais klausimai, į kuriuos galima atsakyti pritaikius matematines operacijas skaitinėms reikšmėms pateiktoms uždavinyje, arba išvestinėms skaitinėms reikšmėms ([149] p. 10). Tekstiniuose uždaviniuose pateikiamas pasakojimas apie mokiniui pažįstamus ne matematinius objektus, o sprendimui naudojami matematiniai principai susiję su matematinėmis sąvokomis.

Nestandartiniais uždaviniais vadinsime tekstinius uždavinius, kurie nėra standartiniai. Vienas iš tokių uždavinių tipų yra probleminiai uždaviniai (P uždaviniai). **Probleminis uždavinys, (angl.: P problem)**, tai uždavinys, kuriame pateiktos informacijos yra daugiau arba mažiau nei reikia atsakyti į uždavinio klausimą. P uždaviniai tai tekstiniai uždaviniai, kuriuos spręsdamas mokinys turi apdoroti duotą informaciją, susirasti trūkstamą informaciją, arba atrinkti, kuri informacija nėra reikalinga [145], [67].

Naujausiuose matematikos mokymo tyrimuose išsamiai nagrinėjami matematinio modeliavimo uždaviniai. Tai tekstiniai uždaviniai, kurių aprašyta situacija yra apie realaus pasaulio objektus, jų sprendimas reikalauja išnagrinėti ne tik pateiktą informaciją, bet remtis mokslo, bei realaus pasaulio žiniomis, kartais išnagrinėti ne vieną, o keletą galimų sprendimo variantų. Šiame darbe nagrinėsime tik uždavinius, kurie nėra matematinio modeliavimo uždaviniai. Lietuvoje matematinio modeliavimo uždaviniai dar nėra įtraukti į matematikos mokymą ir jų ištyrimas reikalauja atskiro dėmesio bei tiriamojo darbo.

Standartinį tekstinį uždavinį sudaro šios trys dalys [121]:

1. Realaus pasaulio situacijos aprašymas.
2. Informacija reikalinga atsakyti į klausimą.
3. Klausimas.

Taip pat laikysime, kad uždavinys tekstinis, jei dalis jo informacijos yra pateikta paveikslėliu. Tą patį uždavinį galima pateikti skirtingais būdais. Moyer et. al. išskiria to paties tekstinio uždavinio tris skirtingas versijas: pasakojimą (angl.: verbal), santrauką (angl.: telegraphic) ir iliustraciją (angl.: drawing) [87]. Uždavinio 0.0.3 pasakojimą galima pateikti naudojant mažiau teksto, tai vadinsime santrauka, žiūrėti uždavinį 0.0.4.

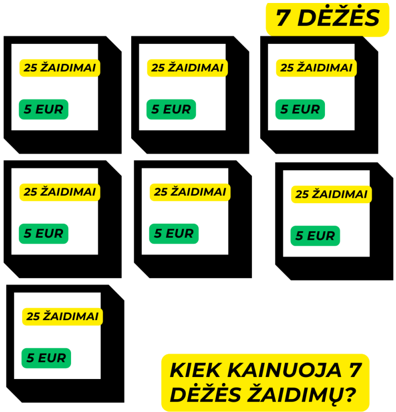
Uždavinys 0.0.3. *Iš viso yra 7 dėžės žaidimų. Kiekvienoje dėžėje yra po 25 žaidimus. Vienos žaidimų dėžės kaina yra 5 Eur. Kiek kainuoja visos 7 žaidimų dėžės?*

Uždavinys 0.0.4. *7 dėžės žaidimų.*
25 žaidimai kiekvienoje dėžėje.
Kiekvienos dėžės kaina 5 Eur.
Kiek kainuoja 7 žaidimų dėžės?

Šį uždavinį taip pat galima pateikti iliustraciją. Pateikiame du variantus labiau ir mažiau detalų (žiūrėti pav. 2). Visas šias versijas laikysime tekstiniais uždaviniais ir nagrinėsime šiame darbe.

Tekstinių uždavinių naudojimo matematikos mokyme tikslai

Tekstiniai uždaviniai yra neatsiejama matematikos mokymo dalis. Knygoje „Matematinės ekspedicijos: tekstinių uždavinių tyrinėjimas skirtingais amžiais“ pateikiami tekstiniai uždaviniai naudoti įvairiose kultūrose



2 pav.: Pieštos uždavinio versijos, antrasis paveikslėlis sugeneruotas naudojantis dirbtiniu intelektu

nuo pat jų naudojimo pradžios iki dabar [126]. Lietuvos matematikos bendrojoje programoje (patvirtintoje 2022 metais) kiekvienos klasės nuo 1 klasės iki 4 gimnazinės (12 klasės) mokymo(si) turinyje yra minimi tekstiniai, žodiniai, konteksto arba probleminiai uždaviniai. Todėl tekstinių uždavinių mokymas svarbus įvairių klasių matematikos mokyme ir visose arba didžiojoje dalyje pasaulio šalių.

Matematikos mokymo enciklopedijoje (2020) [149] išskiriami šie tekstinių uždavinių naudojimo matematikos mokyme tikslai:

1. Susieti supaprastintą realaus pasaulio situaciją su matematinėmis sąvokomis.
2. Motyvuoti mokinius mokytis matematikos.
3. Lavinti mokinių kūrybiškumą, problemų sprendimo gebėjimus.
4. Talkinti mokantis naujas matematines temas ir įgyti joms reikalingus įgūdžius.

Keisdami ir modifikuodami tekstinį uždavinį galime pasiekti skirtingus matematikos mokymo tikslus (žiūrėti pav.: 3).

Standartinis tekstinis uždavinys atliepia pirmąjį mokymosi tikslą, susieti supaprastintą realaus pasaulio situaciją su matematinėmis sąvokomis. Keisdami uždavinyje pateikiamą informacijos kiekį galime S uždavinį performuluoti į P uždavinį. Naudodami P uždavinius galime pasiekti kitus mokymo tikslus: mokyti matematinio komunikavimo, pristatyti naujas matematines temas ir didinti mokinių motyvaciją mokytis matematikos. Keičant uždavinio klausimo pateikimą gausime kitų tipų uždavinius, vieni iš jų: WNMS (Kur koks skaičius tinka, angl.: What numbers make sense) uždaviniai jie taip pat gali pasitarnauti matematinio komunikavimo lavinimui, bei motyvacijos didinimui. Šiame darbe taip pat aptarsime modifikuotus tekstinius uždavinius kuriuose sprendimui reikalingas dedukcinis argumentavimas. Keičiant uždavinyje naudojamą realaus pasaulio situaciją ir jos pateikimą galime įtraukti iliustracijas, schemas, šie pokyčiai gali būti pagalba išmokti ir suprasti [159], [59], [78], tad galime juos sieti su motyvacijos skatinimu.

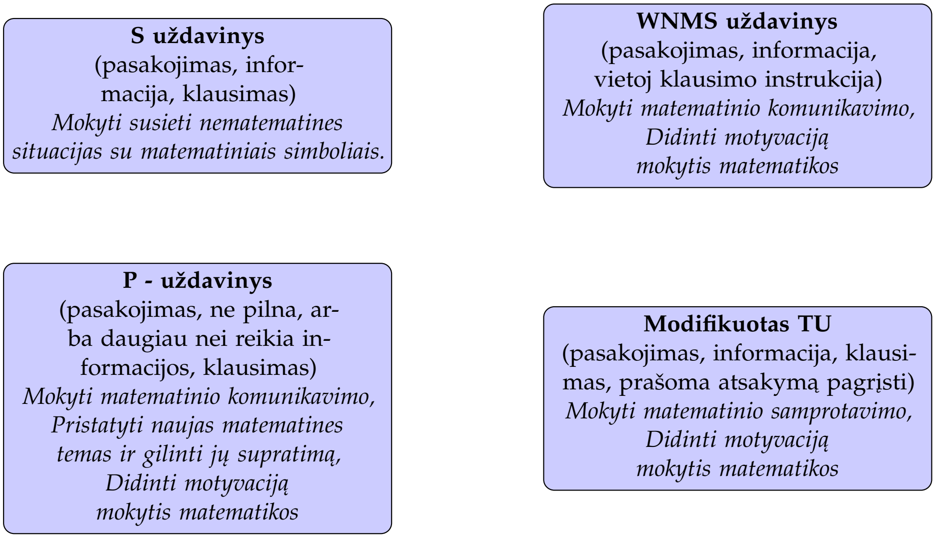
Motyvaciją skirtingi autoriai apibrėžia skirtingai. Šiame darbe naudosimės motyvacijos apibrėžimu, kuris siejamas su motyvacija mokytis matematikos. **Motyvacija**, tai galimybė nukreipti elgesį pasitelkiant emocinę sistemą.[56].

Šiame darbe norime atsakyti į klausimą kaip tekstiniai uždaviniai gali padėti mokytis mokyklinės matematikos, todėl apžvelgsime TU tipus kaip matematikos mokymo priemones, skirtas pasiekti tam tikrus matematikos mokymo tikslus.

0.1 Tyrimų apie tekstinius uždavinius apžvalga

Aptarsime pagrindines tyrimų susijusių su tekstiniais uždaviniais kryptis. Knygoje „Žodžiai ir pasauliai“ (angl. Words and Worlds) [145] išskiriamos 5 mokslinių tyrimų apie tekstinius uždavinius kryptys: teorinės perspektyvos, sociokultūriniai faktoriai, mokinių suvokimo tyrimai, mokytojų suvokimo tyrimai, pokyčiai klasėse.

Nagrinėjant tekstinius uždavinius iš teorinės perspektyvos, galime tirti įvairius būdus, kaip apibrėžiamas tekstinis uždavinys, koks yra jo susiejimas su realiu pasauliu, kokie gali būti tekstinių uždavinių tikslai. Kai kurie autoriai griežtai atskiria tekstinius uždavinius ir matematinio



3 pav.: TU klasifikavimas pagal tikslą ir sandarą

modeliavimo uždavinius ([149] p. 2). Pasak Kaiser [60], pagrindinis skirtumas tarp tekstinių uždavinių ir matematinio modeliavimo uždavinių yra tas, kad tekstinis uždavinys neturi aktualaus klausimo ar problemos, kurie būtų svarbūs realiame pasaulyje ar autentiškame kontekste. Jo sprendimas yra svarbus tik mokykloje. Todėl tekstinio uždavinio sprendimo procesas neapima realaus pasaulio prielaidų įvertinimo, taip pat nėra atliekamas sprendimo vertinimas. Kiti autoriai laiko tekstinius uždavinius supaprastintais matematinio modeliavimo uždaviniais, bet taip pat savyje turinčius modeliavimo elementų. Paskutinius dešimtmečius kai kurie matematikos mokymo tyrėjai Kaiser (2017), Blum (2015), Palm (2002), Verschaffel et al. (2000) [14, 60, 94, 145, 149] ir kiti siūlo, kad mokyklinėje matematikoje atsirastų uždaviniai panašesni į realaus pasaulio matematinį modeliavimą. Įvairioms matematinio modeliavimo užduotims apibūdinti naudojami skirtingi terminai: konteksto problemos, kontekstualizuotos problemos, realaus pasaulio problemos, realistinės problemos, autentiškos problemos, matematinio modeliavimo problemos.

Tekstiniai uždaviniai nagrinėjami psichologijos ir matematikos mokymo tyrėjų jau kurį laiką (Daroczy, Wolska ir kt. 2015; Thevenot ir

Barrouillet 2015; Verschafel ir kt. 2000; Verschafel, Depaepe ir kt. 2013) [25, 128, 144, 147]. Iki 1970 m. tekstinių uždavinių tyrimai daugiausia buvo sutelkti į tai, kaip įvairios uždavinių ypatybės bei mokinio savybės veikia mokinių sėkmę. Buvo atliekami įvairūs tyrimai keičiant uždavinio ypatybes: žodžių skaičių, gramatinį sudėtingumą, raktinius žodžius, reikalingas matematines operacijas, bei tiriant uždavinių sprendimo rezultatus atsižvelgiant į mokinio savybes, tokias kaip amžius, lytis, intelektas, kalbiniai ir matematiniai gebėjimai (Goldin ir McClintock 1984) [47] [149]. Tobulėjant tyrimo metodams plėtėsi ir tiriamos temos. Nuo 1990-ųjų buvo priimta idėja, kad klasikiniai informacijos apdorojimo modeliai yra nepakankami suvokti visą besimokančiųjų tekstinių uždavinių sprendimo procesų sudėtingumą ir kad šiuos modelius reikia praturtinti idėja, kad tekstinių uždavinių sprendimas yra žmogaus veikla, esanti konkrečiame matematikos klasės mikrokosme (Lave 1992; Verschafel ir kt. 2000, 2014) [75, 144**?**].

Iš pradžių tyrimai buvo nukreipti į vieno žingsnio adityvius tekstinius uždavinius, kuriuose naudojami nedideli natūralieji skaičiai. Buvo aprašytas šių uždavinių klasifikavimas ir išskirta 14 skirtingų tipų (žr. [25, 45, 104, 143]). Įvairūs tyrimai atliekami su 5-8 metų vaikais parodė, kad uždaviniai, kurie sprendžiami ta pačia matematine operacija, bet priskiriami skirtingiems tipams yra skirtingo sudėtingumo, mokiniai skirtingai atlieka jų sprendimus ir jų klaidų tipai atliekant šiuos uždavinius skiriasi [45, 143]. Tik vėliau buvo pradėti nagrinėti multiplikatyvūs uždaviniai. Buvo aprašytos multiplikatyvių uždavinių kategorijos ir jų tipai (Vergnaud 1983; Greer 1992) [51, 141].

Taip pat buvo tiriami ir aprašomi adityvių tekstinių uždavinių sprendimo modeliai (apžvalgas žr. [45, 100, 143]). Schukajlow ir kt. (2010) ir Leiss, Plath ir kt. (2019) [77, 112] nustatė, kad situacijos modelio sukūrimas mintyse yra svarbus uždavinio sprendimui ir kad šis sprendimo etapas priklausomai nuo kalbinio užduoties sudėtingumo paprastai užima apie 40% viso sprendimo laiko. Taip pat mokinių skaitymo įgūdžiai, tiek bendrieji, tiek susiję su matematikos dalyku stipriai prisideda prie situacijos modelio tikslumo ir uždavinio sprendimo teisingumo (žr. [76, 77]). Teoriškai buvo aiškinama, kad schemomis grįstas supratimas apie skirtingų tipų tekstinius uždavinius padeda mokiniams spręsti tekstinius uždavinius, bet šios teorijos susilaukė kritikos, nes jose nėra vertinamas tekstinių uždavinių turinys ir kontekstas (Thevenot, 2010; Thevenot and Barrouillet, 2015; Vicente, Orrantia et al., 2007) [127, 128, 151]. Tai paskatino alternatyvių teorijų atsiradimą, kurios laiko žodinio uždavinio reprezentaciją specifine ir laikina protine struktūra, suformuota darbinėje atmintyje ir nesusijusią su iš anksto turimomis schemomis [53, 127, 128]. Tekstinių uždavinių schematizavimas vis dar yra intensyviai diskutuojama ir tiriama tema.

Nors laikoma, kad tekstiniai uždaviniai yra būdas perteikti matematines temas įdomesniu formatu, tyrimai rodo, kad vaikai sėkmingai išsprendžia tekstinius uždavinius, gerokai prieš išmokdami jiems reikalingų matematinių žinių. Pavyzdžiui Carpenter ir Moser (1984) [17] ir De Corte and Verschafel (1987) [31] pateikė išsamius aprašymus kaip darželio ir pradinės mokyklos vaikai sprendžia vieno žingsnio adityvius tekstinius uždavinius, naudodami skaičiavimo strategijas, kurios tiesiogiai modeliuoja uždavinio sprendimą. Panašiai, dar prieš mokantis daugybos ir dalybos didelė dalis mokinių jau geba spręsti multiplikatyvius tekstinius uždavinius naudodamiesi neformaliomis skaičiavimo strategijomis, skaičiavimu balsu, skaičiuojant objektus, arba panaudodami kartotinę sudėtį arba atimtį [21, 73, 88]. Pastebima, kad mokinių sprendimo strategijos vystosi dviem kryptimis. Viena kryptis - nuo neformalių sprendimo strategijų iki labiau formalių, kita kryptis - nuo daug skirtingų strategijų kiekvieno tipo uždaviniams, link vienos bendros strategijos visiems uždaviniams, kuriems reikalinga ta pati matematinė operacija [55, 70]. Kaip galima optimaliai išnaudoti šias dvi kryptis dar vis diskutuojama.

Tyrėjai, kurie nori naudoti tekstinius uždavinius kaip priemonę ugdyti problemų sprendimo gebėjimus naudoja tekstinius uždavinius kurių negalima išspręsti rutininiu būdu. Tokiems uždaviniams spręsti reikia tam tikrų sričių žinių ir įgūdžių, ilgesnio sprendimo kelio, tinkamos informacijos parinkimo ir t.t. (žr. [32, 83, 111, 148]). Tokius uždavinius spręsti padeda euristiniai metodai [96, 111]. Tai metodai, kai naujos žinios pateikiamos ir įtvirtinamos pagalbiniais, primenamaisiais klausimais, jie skatina mokinius aktyviai, logiškai mąstyti, ugdo sąmoningumą, išradingumą (Euristika, Visuotinė lietuvių enciklopedija) [153]. Taip pat tokių uždavinių sprendimui svarbūs metakognityviniai ir savireguliavimo procesai, pavyzdžiui: savo sprendimo ar mokymosi proceso planavimas, savo progreso stebėjimas, rezultato vertinimas, ankstesnio sprendimo pergalvojimas [111]. Euristinių ir metakognityvinių procesų vaidmuo yra plačiai pripažintas tekstinių uždavinių sprendime, taip pat ir matematinio modeliavimo bei nerutininėse užduotyse [79, 81, 122].

Iliustracijos tekstiniuose uždaviniuose skirstomos į 4 kategorijas [40]:
1. **Dekoratyvinė** – nesusijusi su uždaviniu ar jo sprendimu, tik papuošia puslapį.

2. **Vaizduojamoji iliustracija**;

3. **Organizacinė iliustracija**;

4. **Informacinė iliustracija** išsamiau žr. 1.1 skyriuje.

Iliustracijų naudojimas tekstiniuose uždaviniuose gali būti tiek naudingas, tiek neturėti įtakos, arba net trukdyti spręsti uždavinį. Įrodymų, kad dekoratyvinės iliustracijos būtų naudingos nėra. Vaizduojamosios ir organizacinės iliustracijos arba šiek tiek gerina mokinių sprendimo rezultatus, arba neturi įtakos, bet kartais taip pat gali lėtinti sprendimo procesą. Sudėtingesniems uždaviniams šios iliustracijos gali būti naudingos jei mokinys pastebi jose pateiktą informaciją ir ją įvertina [29, 36]. Informacinės iliustracijos nėra išsamiai ištirtos, bet esami tyrimai rodo, kad toks pateikimas kai dalis informacijos yra iliustracijoje gali sulėtinti sprendimo procesą, tai teigiama remiantis kognityvinės apkrovos teorija, kadangi sprendžiant tokį uždavinį reikia apdoroti informaciją iš dviejų skirtingų šaltinių [12].

Taip pat atliekami tyrimai apie grafines uždavinių reprezentacijas, kurias kuria patys mokiniai. Vienareikšmiškai negalima teigti apie jų naudą, bet didelė dalis tyrimų patvirtina, kad mokinio gebėjimas uždavinį iliustruoti schema yra susijęs su uždavinio teisingu sprendimu. Taip pat svarbu, kad mokinys tiksliai galėtų atvaizduoti uždavinį piešiniu. Pradėti tirti ne tik mokinių piešiniai, bet ir kiti su tuo susiję veiksniai, tokie kaip mokinio nusiteikimas, žinios apie piešimą (Rellensmann ir kt., 2017) [102], motyvacija piešti, su piešimu susijusios emocijos. Manoma, kad šie veiksniai yra svarbūs užtikrinant grafinių iliustracijų, kurias kuria mokiniai, tikslumą sprendžiant uždavinius (Uesaka ir Manalo, 2012; Schukajlow, Blomberg ir kt., 2019b) [113, 134]. Dar reikalingi išsamesni tyrimai, norint nustatyti grafinių iliustracijų vaidmenį uždavinių sprendimui.

Tekstinių uždavinių sprendimui reikalingas gebėjimas teisingai suprasti pateiktą pasakojimą, organizuoti teiginius į schemą ir sukurti situacijos modelį, kuris atspindi santykius tarp veikėjų ir objektų. Darbinės atminties pajėgumas ir procesų lėtinimo gebėjimas vaidina svarbų vaidmenį formuojant tinkamas aritmetines reprezentacijas [43, 57].

Tyrimai rodo, kad darbinė atmintis ir uždavinių sprendimo gebėjimai turi priežastinį ryšį, bet nėra tyrimų, kurie parodytų, kad lavinant darbinę atmintį gerėja tekstinių uždavinių sprendimo įgūdžiai.

Tyrimai rodo, kad pedagogai dažnai neatsižvelgia į kognityvinius procesus, tokius kaip darbinė atmintis ir procesų lėtinimo gebėjimas, kurie yra svarbūs sprendžiant tekstinius uždavinius [34, 84]. Svarbu ištirti, kaip mokytojų supratimas apie lingvistinius faktorius ir kognityvinius procesus gali pagerinti mokymo praktikas ir mokinių rezultatus [44, 150].

Elgsenos studijų tyrimų apžvalgoje ([58], 2023) patvirtinama, kad įvairaus amžiaus žmonėms tekstiniai uždaviniai kelia sunkumų [15, 24, 57]. Sunkumai sprendžiant tekstinius uždavinius yra susiję ne tik su matematinių veiksmų atlikimu. Pavyzdžiui jaunesnių klasių mokiniai statistiškai reikšmingai prasčiau sprendžia paprastus tekstinius uždavinius lyginant su aritmetiniais uždaviniais [19, 74]. Tai rodo, kad situacijos vertimas į matematinę išraišką prideda uždavinio sprendimo procesui sudėtingumo.

Tekstinių uždavinių sprendimui turi įtakos tokie veiksmai kaip skaitomo teksto supratimo įgūdžiai (skaityti, apdoroti, interpretuoti reikšmę) ir kognityvinė apkrova. Remiantis kognityvinės apkrovos teorija

[125] žmogus gali apdoroti tik ribotą informacijos kiekį per ribotą laiką. Didėjant tekstinio uždavinio informacijos kiekiui ir sudėtingėjant jo sprendimui sprendėjas gali jo nebeišspręsti. Toliau pateikiami veiksniai turintys įtakos tekstinio uždavinio sudėtingumui.

- **Tekstinio uždavinio struktūra:** Tekstinio uždavinio struktūra gali reikšmingai paveikti uždavinio sprendimo sėkmę. Pavyzdžiui, žodžių eilės tvarka ar skaičių pateikimas skirtinguose sakiniuose, gali turėti įtakos sprendimo strategijoms ir rezultatams [105].
- **Semantiniai sąryšiai:** Sėkmingas uždavinių sprendimas priklauso nuo teisingo semantinių sąryšių tarp veikėjų ir objektų supratimo. Netikslus šių sąryšių supratimas gali lemti klaidingus sprendimus [42].
- **Pasakojimas:** Pažįstamas uždavinio kontekstas gali palengvinti sprendimą [27].
- **Nestandartiniai tekstiniai uždaviniai:** Nestandartiniai uždaviniai, kuriuose pateikiama nebūtina arba klaidinanti informacija, kelia didesnius iššūkius sprendėjams. Tokie uždaviniai reikalauja papildomų gebėjimų, tokių kaip procesų lėtinimas (angl.: inhibition control) siekiant atmesti nereikšmingą informaciją [146].
- **Kalbos nuoseklumas:** Uždavinio nenuoseklumas (pvz. naudojamas žodis „daugiau“, bet reikalinga atimtis) gali sukelti papildomų sunkumų [57].
- **Skaitinės informacijos pateikimas:** Skaičiai gali būti pateikiami skirtingais būdais, pvz., skaitmenimis arba tekstu. Pateikimo būdas gali paveikti informacijos apdorojimą ir sprendimo efektyvumą [132].
- **Uždavinio ilgis:** Ilgesni uždaviniai gali sumažinti sprendimo tikslumą, ypač tiems sprendėjams, kurie turi mažesnį darbinės atminties pajėgumą [155].

0.2 Darbo struktūra

Disertaciją sudaro trys pagrindiniai skyriai, kurie siejami su tekstinių uždavinių mokymo tikslais.

Pirmasis skyrius nagrinėja standartinius tekstinius uždavinius ir jų panaudojimą siekiant susieti supaprastintą realaus pasaulio situaciją su matematinėmis sąvokomis. Pateikiama Lietuvos pradinių klasių vadovėliuose esančių standartinių tekstinių uždavinių analizė ir jų palyginimas su Ispanijos ir Singapūro vadovėliais.

Antras skyrius nagrinėja tekstinius uždavinius, kurie lavina matematinio komunikavimo kompetenciją. Jame apžvelgiami tekstiniai uždaviniai dar neskaitantiems vaikams, nestandartiniai uždaviniai „Koks skaičius kur tinka “ ir modifikuoti tekstiniai uždaviniai, kurių sprendimui naudojamas dedukcinis argumentavimas. Aprašomi su šių tipų uždaviniais atlikti tyrimai ir bandymas.

Trečiajame skyriuje pateikiami tekstiniai uždaviniai motyvuojantys mokytis naujas matematines temas. Tai probleminiai uždaviniai ir jų serijos. Pateikiamas empirinis tyrimas, kuriame naudojami P uždaviniai naujoms matematinėms temoms pristatyti.

Darbo pabaigoje pateikiamos išvados ir rekomendacijos.

Be tekstinių uždavinių panaudojimo galimybių, kurie aptariami šiame darbe dar reikėtų paminėti platesnes jų panaudojimo galimybes. Tekstiniai uždaviniai naudojami tarpdisciplininiam mokymui: mokant finansinio raštingumo, fizikos, chemijos, biologijos, gali būti naudojami ir muzikos bei dailės pamokose.

1 skyrius

Empirinis tyrimas: pradinių klasių vadovėlių analizė

Mokinys spręsdamas uždavinį jam tekstu pateiktą pasakojimą turi suprasti, transformuoti į matematinę išraišką, tada išspręsti ir sprendimą pagrįsti, bei gautą atsakymą vėl transformuoti ir pateikti atsakymą tekstu.

H. Wu pateikia uždavinio, kuris atspindi šią transformaciją pavyzdį [158] (žiūrėti užd. 1.0.1).

Uždavinys 1.0.1. *Gustas turi du brolius ir seserį. Jo sesers amžius atitinka pusę jo vyresnio brolio amžiaus ir tris ketvirtadalius jo jaunesniojo brolio amžiaus. Vyresnysis Gusto brolis yra ketveriais metais vyresnis už Gustą, o jo jaunesnysis brolis yra dvejais metais jaunesnis už Gustą. Tegul G yra Gusto amžius, A vyresniojo Gusto brolio amžius ir B jaunesniojo Gusto brolio amžius. Aukščiau pateiktą informaciją išreikškite G, A ir B.*

Pastebėkime, kad šis uždavinys nėra įprastas, jis neprašo pateikti konkretaus atsakymo, jame reikia pateikti tik matematinę išraišką. Įprastai sprendžiant uždavinį dar reikėtų rasti tam tikrą atsakymą (dažniausiai skaitinę reikšmę) ir jį transformuoti į šnekamąją kalbą, pavyzdžiui: Gusto sesei yra 9 metai.

Bet spręskime būtent tokį uždavinį, koks yra pateiktas. Pastebime, kad sesers amžius nėra pažymėtas jokia raide, visą uždavinyje duotą informaciją reikia išreikšti nenaudojant sesers amžių atitinkančio žymėjimo. Šiam uždaviniui yra ne vienas galimas sprendimo būdas, mes analogiškai [158] pasirinkome sesers amžių pažymėti raide S ir vėliau atliekant pertvarkymus visą informaciją pateikti be žymėjimo S.

Paeiliui skaitydami sąlygą, naudodami žymėjimus S - sesers amžius, A - vyresnio brolio amžius, B - jaunesnio brolio amžius, G - Gusto amžius galime užrašyti šias lygybes:

$$S = \frac{A}{2}, \tag{1.1}$$

$$S = \frac{3}{4}B, \tag{1.2}$$

$$A = G + 4, \tag{1.3}$$

$$B = G - 2. \tag{1.4}$$

Kadangi mums reikia išreikšti situaciją nenaudojant žymėjimo S, lygybės 1.3 ir 1.4 yra tam tinkamos. Bet taip pat svarbu išreikšti sąryšį tarp sesers amžiaus ir vyresnio bei jaunesnio brolių amžių, t.y. 1.1 ir 1.2 lygybes. Jų tiesiogiai naudoti negalime, bet abiejų lygybių dešiniosios pusės yra lygios S, bei dėl to lygios tarpusavyje, tad galime užrašyti lygybę:

$$\frac{A}{2} = \frac{3}{4}B. \tag{1.5}$$

Ši lygybė išreiškia santykį tarp abiejų brolių amžių ir taip pat žinodami bent vieno iš tų brolių amžių galime pasakyti ir sesers amžių.

Todėl šio uždavinio atsakymas yra:

$$A = G + 4, B = G - 2, \frac{A}{2} = \frac{3}{4}B \tag{1.6}$$

Išsprendę šių trijų lygčių sistemą gautume ir sprendinį su skaitinėmis reikšmėmis, bet uždavinio formuluotė to neprašo.

Toliau nagrinėsime tekstinius uždavinius kai prašoma ne tik situaciją transformuoti į matematinę išraišką, bet ir rasti uždavinio atsakymą. Šiame skyriuje kalbėsime apie standartinius tekstinius uždavinius, įprastus tiek savo struktūra, tiek informacijos kiekiu, tiek klausimu. Juos nagrinėsime kaip priemonę skirtą susieti supaprastintą realaus pasaulio situaciją su matematinėmis sąvokomis. Kiekvieną standartinį uždavinį galima išspręsti, sprendimui panaudojama visa duota informacija ir yra tik vienas galimas atsakymas [145].

Mokyklinėje matematikoje tapo tradicija, kad tekstiniai uždaviniai sprendžiami mechaniškai ir nesigilinant į uždavinio situaciją. Nors standartiniai uždaviniai dažnai sprendžiami mechaniškai, jie taip pat kelia mokiniams pakankamai sunkumų. Matysime, kad galimai taip yra todėl, kad suskirsčius šiuos uždavinius į skirtingus tipus, vieni uždavinių tipai mokiniams yra pateikiami daug rečiau nei kiti.

Šio tyrimo naujumas yra edukometrijos mokslo taikymas vadovėlių analizei. Į vadovėlių tyrimą žiūrime ne iš edukologijos pusės, bet kaip į švietimo srities duomenis, kuriuos analizuojame statistiškai.

1.1 Pradinių klasių vadovėlių rinkinio analizė, Lietuvos atvejis

Pažiūrėkite į skaičius, klausiamuosius žodžius ar frazes, jie pasakys, kurią operaciją naudoti. Išbandykite visas operacijas ir pasirinkite labiausiai tinkantį atsakymą. [90]

Pradinių klasių mokiniai su samprotavimu pirmą kartą susiduria spręsdami tekstinius uždavinius. Pradinėje mokykloje mokiniai mokosi kiekybinio samprotavimo, tai yra gebėjimas naudoti bendrus matematinius įgūdžius, tokius kaip algebra, analizuoti ir interpretuoti realaus pasaulio kiekybinę informaciją [41].

Thompson apibūdina kiekybinį samprotavimą taip:

Svarbiausia kiekybinio samprotavimo savybė yra tai, kad skaičiai ir skaičių sąryšiai yra antros svarbos ir nėra įtraukiami į pirminę situacijos analizę. Svarbiausia yra sąryšiai tarp kiekių [130].

Kiekybinis samprotavimas naudingas sprendžiant įvairius aritmetinius tekstinius uždavinius (ATU). Išskiriami du kiekybinio samprotavimo tipai: adityvus samprotavimas ir multiplikatyvus samprotavimas [93]. Svarbu mokinius mokyti spręsti įvairių tipų ATU, tam, kad lavintume jų kiekybinio samprotavimo gebėjimus. Kiekybinis samprotavimas savyje talpina ryšius tarp kiekių, o būtent tai ir nusako skirtingi ATU tipai, todėl svarbu, kad mokiniai spręstų įvairius ATU. Nepaisant to ATU pasiskirstymas įvairiose šalyse yra panašus [152] [121]. Kai kurie ATU tipai vadovėliuose visai nenaudojami. Šiuo tyrimu norime ištirti Lietuvos vadovėlyje pateikiamus ATU ir jų pasiskirstymą palyginti su Singapūro ir Ispanijos. Taip pat apibūdinsime teorinę aplinką, kuri leidžia atlikti tyrimus su daugiau šalių ir daugiau vadovėlių.

Lietuvoje pradinėse klasėse mokiniams pateikiami standartiniai tekstiniai uždaviniai, kurių sprendimui naudojami 1 arba 2 matematiniai veiksmai (sudėtis, atimtis, daugyba, dalyba). Į šiuos uždavinius norime pažvelgti atidžiau. Sakysime kad tekstinis uždavinys yra standartinis uždavinys (S uždavinys, angl.: S problem), jei jis turi optimalų kiekį informacijos reikalingos atsakyti į uždavinio klausimą.

Standartiniai uždaviniai gali būti įvairių tipų ir tokiu būdu įvairiapusiškai lavinti mokinio matematinius gebėjimus [95], [152]. Savo disertacijoje „Kaip pradinių klasių mokiniai mokosi matematiškai analizuoti tekstinius uždavinius: sudėties ir atimties atvejai“ [95] Elena Polotskaia detaliai aptaria keturias skirtingas aritmetinių uždavinių klasifikacijas. Klasifikacijos skiriasi požiūriu į tekstinį uždavinį iš operacinės (angl.: operational) ir sąryšio (angl.: relational) paradigmų. Į uždavinį galime žvelgti kaip į procesą kai atliekamos tam tikros operacijos, arba kaip į dydžius kurie vienas su kitu yra susiję tam tikru ryšiu.

Taip pat išskiriami nuoseklūs (angl.: consistent) ir nenuoseklūs (angl.: inconsistent) uždaviniai. Uždavinys nuoseklus, jei jo sąryšio ir matematinės operacijos veiksmai suderinti, t.y. jei sąryšis didėjimo atliekamas sudėties arba daugybos veiksmas, jei mažėjimo - atimties arba dalybos.

Uždavinys 1.1.1. *Toma turėjo 13 lipdukų, keletą lipdukų ji pametė. Ji dabar turi 8 lipdukus. Kiek lipdukų ji pametė?*

Uždavinyje 1.1.1 sąryšis pametė yra mažėjimo ir reikia atlikti atimties veiksmą, todėl uždavinys yra nuoseklus.

Uždavinys 1.1.2. *Toma turėjo 8 lipdukus. Kažkiek lipdukų ji laimėjo. Dabar ji turi 13 lipdukų. Kiek lipdukų ji laimėjo?*

Tuo tarpu uždavinyje 1.1.2 sąryšis ir matematinė operacija yra priešingi vienas kitam. Žodžio „laimėjo" sąryšis teigiamas, bet uždavinyje reikia atlikti atimties veiksmą. Tokius uždavinius vadinsime nenuosekliais.

Standartiniams uždaviniams, kurie išsprendžiami sudėties ir atimties veiksmais yra naudojama keletas klasifikacijų [140], [90], [106] [22]. Išnagrinėję Elenos Polotskaia disertacijoje pateiktą klasifikacijų palyginimą [95] galime pastebėti, kad aptariamos klasifikacijos labai panašios, visose keturiose vieno veiksmo standartiniai tekstiniai uždaviniai išskiriami į 20 skirtingų tipų.

Šiame darbe aptarsime klasifikavimą pagal uždavinio situacijoje aprašomą (ne matematinį) situacijoje aprašytą veiksmą (sąryšį).

Uždaviniai 1.1.3 ir 1.1.4 išsprendžiami tuo pačiu matematiniu veiksmu $12 - 7 = 5$, bet skiriasi aprašoma situacija.

Uždavinys 1.1.3. *Rokas turi 12 balionų. Luknė turi 7 balionus. Keliais balionais daugiau turi Rokas nei Luknė?*

Uždavinys 1.1.4. *Lukas turėjo 12 sausainių. Jis suvalgė 7 iš jų. Kiek sausainių jam liko?*

Uždavinyje 1.1.3 situacijoje aprašomas palyginimo veiksmas, 1.1.4 uždavinyje įvykstantis veiksmas yra pokytis. Matome, kad skirtingos uždavinio situacijos išsprendžiamos atliekant tą patį matematinį veiksmą. Iš viso 20 skirtingų adityvių tekstinių uždavinių tipų aprašo matematines situacijas, kurios išsprendžiamos naudojant tas pačias tris skaitines reikšmes ir sudėties arba atimties veiksmą. Skiriasi ir mokinio mąstymo procesas galvojant apie situaciją, vėliau matysime, kad vienokias situacijas mokiniai sprendžia lengviau nei kitokias.

Adityvūs vieno veiksmo uždaviniai

Vieno veiksmo adityvių uždavinių (kur naudojamas sudėties arba atimties veiksmas) klasifikaciją detaliai aprašė Stigler et al. [121], taip pat ji nagrinėjama ir kituose darbuose [18], [90]. Vienas naujausių tyrimų šia tema yra autorių Vicente et. al. [152], jame naudojama ši klasifikacija ir lyginami Ispanijos ir Singapūro vadovėliai. Lentelėje 1.1 pateikta minėtų autorių naudojama klasifikacija.

Matome, kad visuose 20 uždavinių tipų, uždavinio sprendimui naudojami tik sudėties ir atimties aritmetiniai veiksmai su skaičiais 5, 8, 13:

- $5 + 8 = 13$,
- $13 - 5 = 8$,
- $13 - 8 = 5$.

Pokytis	
1. Goda turėjo 5 lipdukus. Adas davė jai dar 8 lipdukus. Kiek lipdukų Goda turi dabar? **[Pok+F]**	2. Goda turėjo 13 lipdukų. Ji davė 5 lipdukus Adui. Kiek lipdukų jai liko? **[Pok-F]**
3. Goda turi 5 lipdukus. Kiek lipdukų jai dar reikia gauti, kad turėtų 13 lipdukų? **[Pok+Pok]**	4. Goda turėjo 13 lipdukų. Keletą jų davė Adui. Dabar ji turi 8 lipdukus. Kiek lipdukų Goda davė Adui? **[Pok-Pok]**
5. Goda turėjo kažkiek lipdukų. Adas davė jai dar 5 lipdukus. Dabar ji turi 13 lipdukų. Kiek lipdukų Goda turėjo iš pradžių? **[Pok+P]**	6. Goda turėjo kažkiek lipdukų. Ji davė 5 lipdukus Adui. Dabar ji turi 8 lipdukus. Kiek lipdukų Goda turėjo iš pradžių? **[Pok-P]**
Apjungimas	
7. Goda turi 5 raudonus lipdukus ir 8 mėlynus lipdukus. Kiek lipdukų iš viso ji turi? **[Apj+]**	8. Goda turi 13 lipdukų. 5 yra raudoni, likę mėlyni. Kiek mėlynų lipdukų turi Goda? **[Apj-]**
Palyginimas	
9. Goda turi 13 lipdukų. Adas turi 5 lipdukus. Keliais lipdukais Goda turi daugiau nei Adas? **[Pal+Pok]**	10. Goda turi 13 lipdukų. Adas turi 5 lipdukus. Keliais lipdukais Adas turi mažiau nei Goda? **[Pal-Pok]**
11. Adas turi 5 lipdukus. Goda turi 8 lipdukais daugiau nei Adas. Kiek lipdukų turi Goda? **[Pal+Pagr]**	12. Adas turi 5 lipdukus. Jis turi 8 lipdukais mažiau nei Goda. Kiek lipdukų turi Goda? **[Pal-Pagr]**
13. Goda turi 13 lipdukų. Ji turi 5 lipdukais daugiau nei Adas. Kiek lipdukų turi Adas? **[Pal+Skirt]**	14. Goda turi 13 lipdukų. Adas turi 5 lipdukais mažiau nei Goda. Kiek lipdukų turi Adas? **[Pal-Skirt]**
Sulyginimas	
15. Goda turi 13 lipdukų. Adas turi 5 lipdukus. Kiek lipdukų Adui reikia gauti, kad turėtų tiek pat lipdukų kaip Goda? **[Sul+Pok]**	16. Goda turi 13 lipdukų. Adas turi 5 lipdukus. Kiek lipdukų Godai reikia prarasti, kad ji turėtų tiek pat lipdukų kiek Adas? **[Sul-Pok]**
17. Adas turi 5 lipdukus. Jei jis gaus dar 8 lipdukus, jis turės tiek pat lipdukų kiek Goda. Kiek lipdukų turi Goda? **[Sul+Pagr]**	18. Adas turi 5 lipdukus. Jei Goda praras 8 lipdukus, ji turės tiek pat lipdukų kiek Adas. Kiek lipdukų Goda turi? **[Sul-Pagr]**
19. Goda turi 13 lipdukų. Jei Adas gaus dar 5 lipdukus jis turės tiek pat lipdukų kiek Goda. Kiek lipdukų turi Adas? **[Sul+Skirt]**	20. Goda turi 13 lipdukų. Jei ji praras 5 lipdukus ji turės tiek pat lipdukų kiek Adas. Kiek lipdukų turi Adas? **[Sul+Skirt]**

1.1 lentelė: S1 tekstiniai uždaviniai pagal uždavinyje atliekamą veiksmą

Adityvius vieno veiksmo uždavinius galima suskirstyti į keturias grupes: pokytis, apjungimas, palyginimas ir sulyginimas. Kiekvienoje iš šių grupių pusė tipų aprašo teigiamą sąryšį, kita pusė neigiamą sąryšį. Apjungimo grupėje dėmenų tvarka nėra svarbi, sąryšis kalba apie objektų apjungimą iš dviejų grupių į vieną, nėra svarbu, kuri grupė pirmoji, dėl to šioje grupėje turime tik 2 uždavinių tipus: kai nežinomas vienas iš dėmenų, arba kai nežinoma bendra suma.

Panašiausi yra palyginimo ir sulyginimo uždaviniai, bet šių grupių uždavinių situacijos taip pat skiriasi. Palyginimo uždaviniai lygina turimus objektus, sulyginimo grupėje klausiama, kas turi nutikti(arba jau nutiko), kad abi objektų grupės būtų lygios.

Multiplikatyvūs vieno veiksmo uždaviniai

Analogiškai galime koduoti ir multiplikatyvius vieno veiksmo uždavinius. Skirtingas uždavinių situacijas galime suskirstyti į 14 multiplikatyvių uždavinių tipų keturiose grupėse (žiūrėti lentelę 1.1).

Metodas

Išnagrinėję vieną naujausių Vicente ir kt. [152] siūlomų klasifikacijų atlikome Lietuvos pradinių klasių matematikos vadovėlių apžvalgą. Tyrimui buvo pasirinktas matematikos vadovėlis „Taip“ , bei jo dalys 1-4 klasėms (iš viso 12 vadovėlio dalių). Taip pat tam, kad galėtume palyginti duomenis naudojome ne [152] pateiktą statistiką, bet duomenis kuriuose atsispindi matematinių veiklų skaičius tik vadovėliuose neįtraukiant pratybų sąsiuvinių, reikalingus duomenis pateikė straipsnio autoriai. Nusprendėme analizuoti tik vadovėlių duomenis, nes Lietuvoje pratybų sąsiuviniai nėra naudojami visose mokyklose, dalyje mokyklų naudojami skirtingi pratybų sąsiuviniai nei vadovėlis, dažnu atveju jie keičiami, ar apjungiami kartu su skaitmeniniu turiniu, dėl to nusprendėme nagrinėti tik vadovėlio medžiagą.

Santykis	
Daugialypis	Paprastas
1. Jei nupiešiu 3 piešinius per 6 dienas, kiek piešinių nupiešiu per 4 dienas, piešdamas tuo pačiu tempu?**[SantDaug]**	2. Tu nusipirkai 3 užrašų knygeles, kurių kiekviena kainavo po 5 €. Kiek išleidai iš viso? **[SantP]** 3. Tu išleidai 15 € už 3 vienodas užrašų knygeles. Kiek kainavo viena knygelė? **[Sant-asis]** 4. Tu išleidai 15 € už užrašų knygeles. Viena knygelė kainuoja 5 €. Kiek užrašų knygelių tu nusipirkai? **[Sant-iklis]**
Palyginimas	
Kartais daugiau	Kartais mažiau
1. Aš išleidau 15 €, o tu išleidai 5 €. Kiek kartų daugiau aš išleidau nei tu? **[Pal+Skirt]** 3. Aš išleidau 5 €, o tu išleidai 3 kartus daugiau nei aš. Kiek tu išleidai? **[Pal+Pal]** 5. Aš išleidau 15 €, tai yra 3 kartus daugiau nei tu. Kiek tu išleidai? **[Pal+Pagr]**	2. Aš išleidau 15 €, o tu išleidai 5 €. Kiek kartų mažiau tu išleidai nei aš? **[Pal-Skirt]** 4. Aš išleidau 15 €, o tu išleidai 3 kartus mažiau nei aš. Kiek tu išleidai? **[Pal-Pal]** 6. Aš išleidau 5 €, tai yra 3 kartus mažiau nei tu. Kiek tu išleidai? **[Pal-Pagr]**
Dekarto sandauga	
Produktas	Matavimas
1. Aš turiu 3 skirtingus rašiklius ir 5 skirtingas knygeles. Kiek skirtingų būdų juos galima suderinti? **[DekSand+]**	2. Aš turiu 3 skirtingus rašiklius ir keletą skirtingų knygelių. Jei galiu juos suporuoti 15 skirtingų būdų, kiek knygelių turiu? **[DekSand-]**
Stačiakampė matrica	
Produktas	Matavimas
1. Aš turiu didelį lapą, kuris yra 3 metrų ilgio ir 5 metrų pločio. Koks yra jo plotas? **[StrMatr+]**	2. Aš turiu lapą, kurio plotas $15m^2$. Lapas yra 5 metrų ilgio. Koks yra lapo plotis? **[StrMatr-]**

1.2 lentelė: multiplikatyvių standartinių uždavinių klasifikacija (adaptuota iš [121, 152])

1.1.0.1 Statistinio metodo prielaidos

Tarkime, kad **S** yra visų Lietuvos matematikos vadovėlių 1-4 klasėms aibė. Tegul $A(s)$ yra visų veiklų vadovėlyje s skaičius. Kintamasis s gali reikšti vieną vadovėlį arba vadovėlių rinkinį, priklausomai nuo hipotezės, kurią norime patikrinti.

Jei norime analizuoti konkrečias vadovėlio dalis, galime suskirstyti vadovėlį į dalis $s_1, s_2, \ldots, s_n$ ir nagrinėti kiekvieną dalį atskirai.

Tuomet turime populiaciją:

$$y_1(s), y_2(s), \ldots, y_{A(s)}(s),$$

kur i atitinka i-tąją užduotį vadovėlyje s. Kiekvienas $y_i \in B = \{0, 1\}$, o B yra užduočių tipų rinkinys: 0 - kita matematinė užduotis, 1 - ATU veikla.

Tuomet $ATU = \{y_i(s) = 1\}$ yra visų ATU užduočių aibė, vienai ATU veiklai priklauso viena arba daugiau ATU.

Tegul $N(s)$ yra visų ATU skaičius vadovėlyje s.

Tuomet turime populiaciją:

$$x_1(s), x_2(s), \ldots, x_{N(s)}(s)$$

kur i atitinka i-tąją ATU vadovėlyje s. Čia kiekvienas $x_i \in D = \{1, 2, \ldots, 34\}$, o D yra galimų užduočių tipų rinkinys (20 adityvių tipų ir 14 multiplikatyvių, kaip aprašyta lentelėse 1.1, 1.1).

Aprašysime šių populiacijų charakteristikas:

$p_{ATU}(s)$ - ATU veiklų proporcija ir $ATU = \{y_i(s) : y_i(s) = 1\}$
$p_{OMA}(s)$ - OMA kitų matematinių veiklų proporcija ir $OMA = \{y_i(s) : y_i(s) = 0\}$

$p_{ATU(a)}(s)$ - adityvių ATU proporcija ir $ATU(a) = \{x_i(s) : x_i(s) \leq 20\}$
$p_{ATU(m)}(s)$ - multiplikatyvių ATU proporcija ir $ATU(m) = \{x_i(s) : x_i(s) > 20\}$
$p_{ATU(i)}(s)$ - ATU su iliustracijomis proporcija; $p_{ATU(io)}(s)$ atitinka organizacines iliustracijas atitinkamai. $ATU(io)$ yra x_i poaibis, ATU su organizacinėmis iliustracijomis.

Apjungdami ATU pagal tipus galime gauti šias charakteristikas:

$p_{ATU(+)}(s)$ - ATU užduočių, kur reikalinga sudėtis, proporcija ir $ATU(+) = \{x_i(s) : x_i(s) \leq 7\}$
$p_{ATU(-)}(s)$ - ATU užduočių, kur reikalinga atimtis, proporcija ir $ATU(-) = \{x_i(s) : 7 < x_i(s) \leq 20\}$
$p_{ATU(*)}(s)$ - ATU užduočių, kur reikalinga daugyba, proporcija ir $ATU(*) = \{x_i(s) : 20 < x_i(s) \leq 25\}$
$p_{ATU(:)}(s)$ - ATU užduočių, kur reikalinga dalyba, proporcija ir $ATU(*) = \{x_i(s) : 25 < x_i(s)\}$

Matematiškai, pavyzdžiui,

$$p_{ATU(a)}(s) = \frac{1}{N(s)} \sum_{i=1}^{N(s)} \mathbb{1}_{\text{ATU(a)}}(x_i)(s). \tag{1.7}$$

Norime įvertinti šias proporcijas. Tam turime kelias galimybes. Galime fiksuoti vadovėlį ir ištirti visą jo populiaciją. Tuomet puslapis po puslapio kategorizuojame visas veiklas vadovėlyje. Tai daug laiko reikalaujantis procesas. Kita galimybė yra naudoti atsitiktinę populiacijos imtį. Šiuo tikslu iš vadovėlio s atsitiktinai pasirenkame $M(s)$ puslapių ir gauname s įverčius $\hat{y}_1(s), \ldots, \hat{y}_{a(s)}(s)$ ir $\hat{x}_1(s), \ldots, \hat{x}_{n(s)}(s)$, kur $a(s)$ yra bendras veiklų skaičius pasirinktose puslapiuose, o $n(s)$ yra bendras ATU skaičius pasirinktose puslapiuose ir $\hat{y}_i(s) \in B$, $\hat{x}_i(s) \in A$.

Tuomet aprašome

$$\hat{p}_{ATU(a)}(s) = \frac{1}{n(s)} \sum_{i=1}^{n(s)} \mathbb{1}_{\text{ATU(a)}}(\hat{x}_i(s)). \tag{1.8}$$

kaip $p_{ATU(a)}(s)$ ir $p_{OMA}(s)$ įvertį. Tada 95% patikimumo intervalas populiacijos parametrui $p_{ATU(a)}(s)$ yra

$$\left(\hat{p}_{\text{ATU(a)}} - 2\sqrt{\frac{\hat{p}_{\text{ATU}}(a)(1-\hat{p}_{\text{ATU(a)}})}{n}}, \hat{p}_{\text{ATU(a)}} + 2\sqrt{\frac{\hat{p}_{\text{ATU(a)}}(1-\hat{p}_{\text{ATU(a)}})}{n}}\right),$$

kur $\hat{p} = \hat{p}_{\text{ATU(a)}}(s)$ ir $n = n(s)$. Analogiškai gauname įverčius visoms kitoms proporcijoms.

Jei manome, kad, tam tikra prasme, siektina proporcija yra, sakykime, p_0, tada galime patikrinti hipotezę:

$$H_0 : p(s) = p_0 \quad \text{prieš} \quad H_1 : p \neq p_0 \quad (p < p_0 \text{ arba } p > p_0).$$

Pasirinkome Lietuvos vadovėlių rinkinį s. Jį sudaro 12 knygų. Visame vadovėlių rinkinyje iš viso yra 902 puslapiai (išskyrus įvadinius ir pabaigos puslapius, kuriuose nėra matematinių veiklų). Imčiai buvo pasirinkta 50 puslapių. Jei vadovėlio dalyje yra m puslapių, tuomet atsitiktinai iš jos pasirenkamų puslapių skaičius yra x, toks, kad $\frac{m}{902} = \frac{x}{50}$. Pavyzdžiui, pirmoje vadovėlio dalyje veiklos yra nuo 8 iki 83 puslapio, t.y. 76 puslapiai su veiklomis; reikia pasirinkti $\frac{50 \cdot 76}{902} \approx 4$ puslapius iš šio vadovėlio. Taip buvo gauti visi 50 atsitiktinai pasirinkti puslapiai ir analizuojamos jų veiklos.

Norėdami patikrinti proporcijų lygybės hipotezes, pirmiausia norėjome patikrinti, ar imtis atitinka visą s. Tikriname hipotezę, kad atsitiktinės puslapių imties iš s pasiskirstymas atitinka empirinį bendrą s ATU tipų pasiskirstymą. Norėdami patikrinti šią hipotezę, naudojame chi kvadrato testą.

Mūsų duomenys atitinka šias prielaidas:

- Duomenys gauti atsitiktinai.
- Duomenys yra kiekybiniai.
- Lyginamos ATU tipų grupės nesuderinamos.

- Duomenys yra nepriklausomi.

Tikrinome hipotezes:

H_0: Imties iš s pasiskirstymas atitinka bendrą empirinį s ATU tipų pasiskirstymą.
H_1: Imties iš s pasiskirstymas neatitinka bendro empirinio s ATU tipų pasiskirstymo.

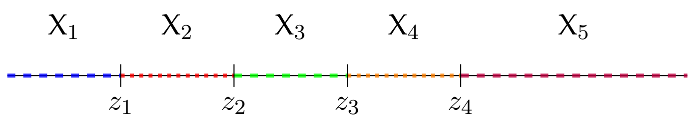
Pasirinkę ATU tipų grupę testavome šias hipotezes jų pasiskirstymo atžvilgiu, naudodami chi kvadrato testą.

Aritmetinių uždavinių tipų pasiskirstymui vadovėlyje įtakos turi matematinių temų eiliškumas. Lietuvoje pagal matematikos programą pirmoje klasėje nagrinėjami tik adityvūs uždaviniai, o nuo antros klasės jau ir multiplikatyvūs. Visą vadovėlių rinkinį galime padalinti į 5 nesikertančias dalis:

- Prieš sudėties pristatymą;
- Po sudėties pristatymo iki atimties pristatymo;
- Po atimties pristatymo iki daugybos pristatymo;
- Po daugybos pristatymo iki dalybos pristatymo;
- Po dalybos pristatymo.

Mes galime identifikuoti konkrečius laiko momentus, kurie yra svarbūs uždavinių tipų pasiskirstymui:

- z_1 - momentas, kai pristatoma sudėtis;
- z_2 - momentas, kai pristatoma atimtis;
- z_3 - momentas, kai pristatoma daugyba;
- z_4 - momentas, kai pristatoma dalyba.



1.1 pav.: Vektorius X su laiko momentais z_1, z_2, z_3, z_4 ir vektoriais X_1, X_2, X_3, X_4, X_5

1.1.0.2 Vadovėlių lyginamoji analizė

Nepublikuoti Vicente ir kt. tyrimo duomenys [152], kuriuos pateikė autoriai ir mūsų tyrimo duomenys leidžia palyginti trijų šalių vadovėlius ATU tipų proporcijų vadovėliuose atžvilgiu. Naudojame dviejų imčių Z proporcijų testą, norėdami palyginti Lietuvą su Singapūru ir Lietuvą su Ispanija pagal proporcijas.

Teisingam testo taikymui yra dvi prielaidos: nepriklausomi stebėjimai ir pakankamas imties dydis. Pagal Agresti ir Franklin [1], $p \cdot n > 10$ ir $(1-p) \cdot n > 10$ turi galioti abiems imtims, kur n yra imties dydis, p - proporcija imtyje.

Mes tikriname hipotezę, kad tam tikrų tipų ATU proporcijos vadovėlyje s ir proporcija Singapūro vadovėlyje sutampa.

$H_0:\ p(s) = p_0$
$H_1:$ proporcijos skiriasi.

Čia p_0 yra pavyzdinė proporcija, kurią norėtume, kad Lietuva pasiektų.

Kategorijos: ATU ir kitos matematinės veiklos (KMV)

Pirmiausia vadovėlyje buvo surastos visos veiklos (angl.: activities).

Veikla vadinsime „kiekvieną užduotį, arba užduočių rinkinį, kurią sudaro atskira mokomoji veikla (angl.: instructional activity) vadovėlio puslapyje, kuri pažymėta pavadinimu, numeriu, arba nurodymu (angl.: instruction) veiklos pradžioje, arba išdėstant kitaip“ [152]

Veikla laikoma ir mokiniui skirta užduotis ir vadovėlyje pateiktas paaiškinimas kaip tam tikrą užduotį atlikti ir gauti atsakymą. Veikla dažniausiai yra susijusi su tam tikromis matematinėmis žiniomis, atliekamais skaičiavimais ir jų pritaikymu.

Tada veikos buvo suskirstytos į **aritmetinių tekstinių uždavinių veiklas** (ATU veikla, angl.: ATU activity) ir **kitas matematines veiklas** (KMV, angl.: OMA).

Aritmetinių tekstinių uždavinių veikloms priskyrėme aritmetinius uždavinius, arba kartu pateiktus kelis aritmetinius uždavinius, kurių sąlyga formuluojama bendrai, būtent šiuos uždavinius ir nagrinėjome.

Apibrėžimas 1.1.5. Aritmetinis tekstinis uždavinys (ATU) tai probleminės situacijos tekstinis apibūdinimas, kai iškeliami vienas ar daugiau klausimų, į kuriuos atsakant gali būti panaudojamos matematinės operacijos ir skaitinės reikšmės pateiktos problemos formuluotėje. [149]

Kategorijos: semantinė, matematinė struktūra

Aritmetiniai tekstiniai uždaviniai buvo skirstomi į adityvius ATU ir multiplikatyvius ATU. Kiekvienam uždaviniui priskiriamas tam tikras tipas. Dviejų veiksmų uždaviniams buvo priskiriami du tipai.

- **Adityvūs ATU tipai**. Šiai kategorijai priklauso uždaviniai, kuriems spręsti naudojama atimtis arba sudėtis. Uždaviniai skirstomi į keturias kategorijas: pokytis, apjungimas, palyginimas, sulyginimas. Šiose kategorijose iš viso buvo išskirta 20 subkategorijų pagal atliekamą veiksmą ir tai ką norima apskaičiuoti (žiūrėti: 1.1).
- **Multiplikatyvūs ATU tipai**. Šiai kategorijai priskiriami uždaviniai, kuriems naudojama daugyba arba dalyba. Išskiriamos keturios pagrindinės grupės: santykis (angl.: rate), Dekarto sandauga (angl.: Cartesian product), palyginimas (angl.: compare), stačiakampė matrica (angl.: rectangular matrix) ir iš viso 14 jų subkategorijų 1.1.

Kategorijos: iliustracijos

ATU su iliustracijomis buvo priskiriamos šios kategorijos:

- **Vaizduojamoji** (angl.: figurative): iliustracija, kuri vaizduoja dalį situacijos, arba visą situaciją, bet neperteikia skaitinių jos reikšmių.
- **Informacinė** (angl.: informational): iliustracija, kuri perteikia visą, ar dalį uždavinio skaitinės informacijos.

- **Organizacinė** (angl.: organizational): schematinės iliustracijos, kurios atvaizduoja dalį, arba visą situaciją ir padeda mokiniui suprasti matematinius sąryšius tarp situacijos objektų.

Lentelėje 1.3 pateikiami jų pavyzdžiai.

Vaizduojamoji	
Iliustracija be uždavinio skaitinės informacijos	
Informacinė	
Iliustracija su dalimi arba visomis skaitinėmis uždavinio reikšmėmis	
Organizacinė	
Iliustracija, kuri perteikia uždavinio matematinę struktūrą	

1.3 lentelė: 3 skirtingų tipų iliustracijų pavyzdžiai iš Lietuviško vadovėlio

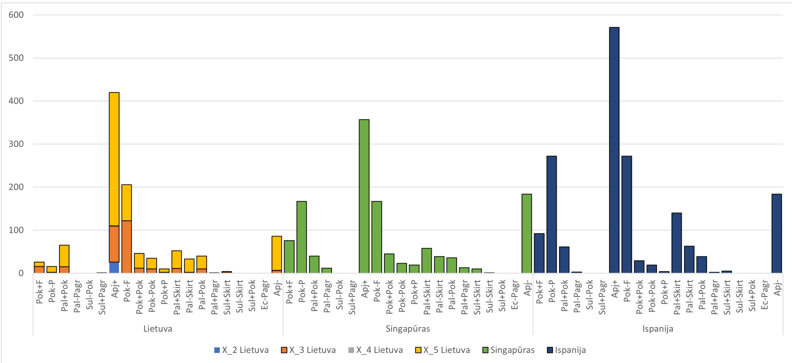
Rezultatai

ATU užduočių dažnumas

Lietuvos atveju, 1-4 klasių vadovėlių rinkinyje buvo rastos 2626 matematinės veiklos, iš jų 879 veiklos (33,47%) buvo priskirtos ATU veikloms.

Pradinių klasių aritmetinius uždavinius galime suskirstyti į adityvius ir multiplikatyvius. Išnagrinėjus Lietuvos pradinių klasių vadovėlių rinkinį „Taip“ iš viso buvo išskirti 1966 ATU uždaviniai. Iš jų 53% buvo adityvūs.

Klasifikuojant smulkiau apžvelgsime ATU pasiskirstymą pagal tipus. Adityvius ATU galime suskirstyti į 20 skirtingų tipų. Matome, kad tipų pasiskirstymas nėra vienodas (pav. 1.2). Dalies tipų visai nėra vadovėliuose (dviejų tipų pokyčio ATU, dviejų tipų palyginimo ATU ir visų 4 tipų sulyginimo ATU). O kai kurių tipų yra itin daug, pavyzdžiui tipai Apj+, Apj- ir Pok-F Lietuvos atveju sudaro 68,4% visų adityvių ATU uždavinių. Šių tipų uždaviniai, remiantis [93, 152] laikomi lengvais, arba vidutiniškai lengvais.

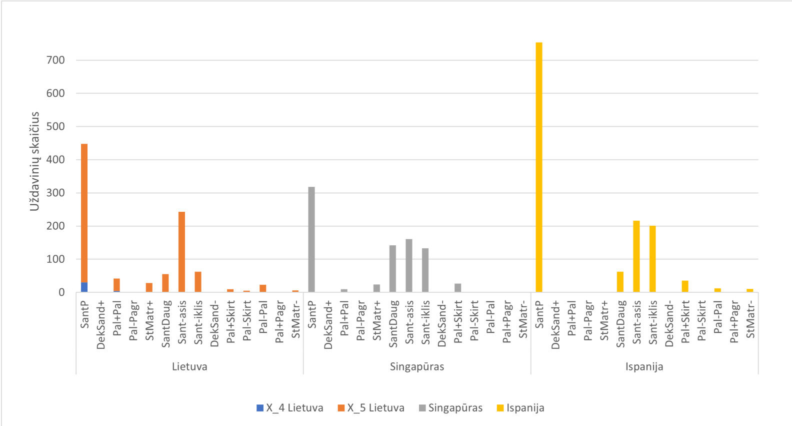


1.2 pav.: Adityvių ATU tipų uždavinių kiekis

Esami tyrimai kol kas negali atsakyti, ar šių tipų uždaviniai mokiniams sunkūs dėl pačių uždavinių savybių, ar tai yra paseka to, kad mokiniai mažai sprendžia tokių uždavinių (jų nėra vadovėliuose).

1.1.0.3 Multiplikatyvios struktūros

Multiplikatyvius uždavinius suskirstę pagal tipus taip pat galime matyti tam tikras tendencijas (Pav.: 1.3). Lietuvos atveju apžvelgę visus multiplikatyvius ATU vadovėliuose galime rasti $81,69\%$ paprastų santykio uždavinių: SantP, Sant-asis, Sant-iklis.



1.3 pav.: multiplikatyvių ATU kiekis 1-4 klasės lietuviškame vadovėlyje

1.1.0.4 Uždavinių tipų pasiskirstymas vadovėlyje

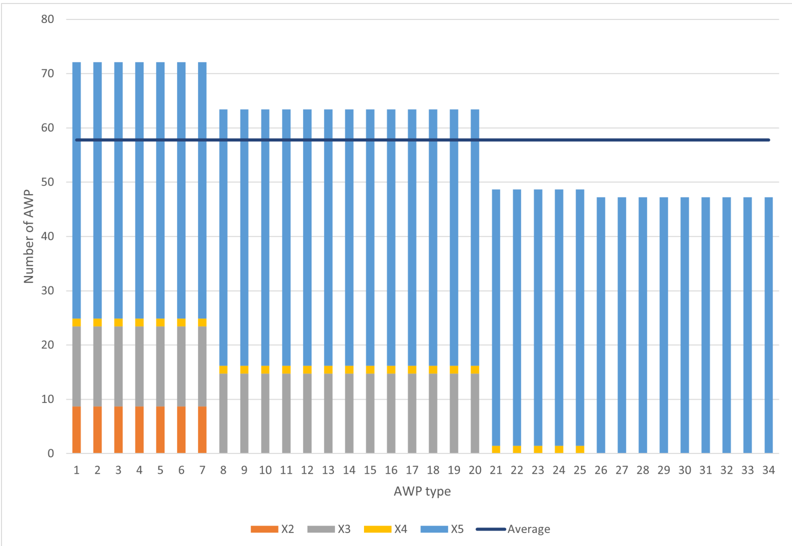
Jei norėtume, kad visų uždavinių tipų kiekiai būtų vienodi, kiekvieno uždavinio tipo turėtų būti po $\frac{n}{34}$ vienetų, kur n yra bendras ATU skaičius. Bet reikėtų atsižvelgti į matematinių temų pateikimo momentus. Turimą vektorių X, kuris yra n ilgio ir kiekviena jo koordinatė atitinka tam tikro ATU uždavinio tipą padalinsime į nesikertančius vektorius X_1, X_2, X_3, X_4 ir X_5, kurie atitinka vadovėlio dalis pagal matematinių temų pateikimą.

- Vektorius X_1 neturėjo nei vieno ATU.
- Vektorių X_2 sudarė 26 ATU, visi jie buvo „Apjungimo 1“ tipo, kitų tipų ATU nebuvo. skirtingų tipų uždaviniai, kuriuose naudojama tik sudėtis.
- Vektorius X_3 yra vadovėlio dalis kai jau pristatyta sudėtis ir atimtis, bet dar nepristatyta daugyba, todėl šioje dalyje galėtų būti 20 skirtingų adityvių tipų. Bet rezultatai, kurie gaunami išnagrinėjus visą vadovėlį atsispindi ir šiame vektoriuje. Apjungus populiariausius tipus: „Apjungimas 1“ ir „Pokytis 2“ gauname 69.49% visų ATU uždavinių šioje vadovėlio dalyje. .
- Vektoriuje X_4, galėtų būti visų tipų adityvių uždavinių (20 skirtingų tipų) ir 5 tipai multiplikatyvių uždavinių, kuriems spręsti reikia daugybos, bet nebūtina mokėti dalybą. Lietuvos atveju ši va-

dovėlio dalis gana trumpa, greit po daugybos temos pristatoma ir dalyba. Iš viso šioje dalyje buvo tik 34 ATU uždaviniai, 2 iš jų adityvūs ir 34 multiplikatyvūs (30 „Santykio 2“ and 4 „Santykio 3“).

- Vektorių X_5 sudaro daugiausiai ATU uždavinių. Šioje vadovėlio dalyje gali būti visi 20 adityvių tipų ir 14 multiplikatyvių. Matyti panaši situacija kaip ir visame vadovėlyje.

Paveiksle 1.4 pateiktas teorinis ATU tipų pasiskirstymas. Subalansuotas tipų pasiskirstymas vektoriuose X_2, X_3, X_4 ir X_5 pateiktas stulpeliuose. Subalansuotas tipų pasiskirstymas visame vadovėlyje pateiktas vidurkio linija. Stulpeliuose skirtingomis spalvomis pavaizduoti uždaviniai vektoriuose X_2, X_3, X_4 ir X_5.



1.4 pav.: Hipotetinis ATU tipų pasiskirstymas pradinių klasių vadovėliuose

Tarkime vektorių ilgiai yra atitinkamai: n_{X_2} vektoriui X_2, n_{X_3} vektoriui X_3, n_{X_4} vektoriui X_4 ir n_{X_5} vektoriui X_5. Tuomet, 1-7 ATU tipų uždavinių kiekis turėtų būti:

$$\frac{n_{X_2}}{7} + \frac{n_{X_3}}{20} + \frac{n_{X_4}}{25} + \frac{n_{X_5}}{34} \tag{1.9}$$

8-20 ATU tipų:

$$\frac{n_{X_3}}{20} + \frac{n_{X_4}}{25} + \frac{n_{X_5}}{34} \tag{1.10}$$

21-25 ATU tipų:

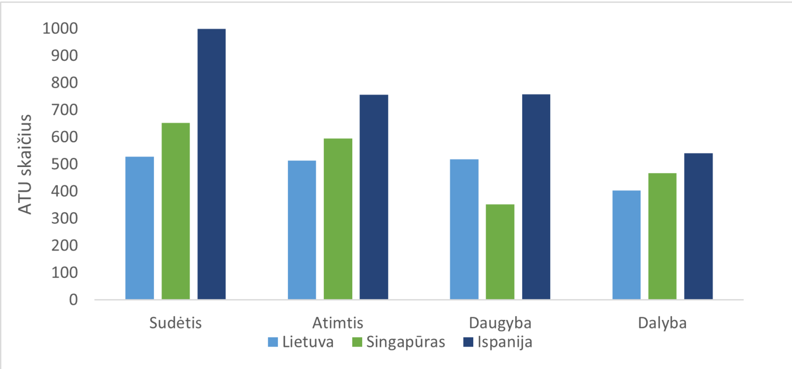
$$\frac{n_{X_4}}{25} + \frac{n_{X_5}}{34} \tag{1.11}$$

Ir galiausiai 26-34 tipų uždavinių kiekis:

$$\frac{n_{X_5}}{34} \tag{1.12}$$

Siūlomas uždavinių kiekis pavaizduotas paveikslėlyje: 1.4.

Taip pat galime suskirstyti visus ATU tipus pagal sprendime reikalingą atlikti matematinę operaciją: sudėtį, atimtį, daugybą, dalybą. Taip suskirstę galime pastebėti, kad uždavinių grupių dydžiai šiuo aspektu daug panašesni visose trijose šalyse (žiūrėti pav.: 1.5).



1.5 pav.: ATU skaičius vadovėliuose pagal reikalingą atlikti matematinį veiksmą

Galime numatyti, kad vadovėlių autoriai atkreipia dėmesį į uždavinių skirtingumą matematinio veiksmo aspektu, bet su skirtingais uždavinių tipais skirstant juos pagal uždavinyje aprašytą situaciją jie gali būti nesusipažinę, dėl to tipų pasiskirstymas toks netolydus.

Apžvelkime, ar tipų pasiskirstymas skiriasi 1, 2, 3 ir 4 klasių vadovėliuose (žiūrėti lenteles 1.4, 1.5). Matome, kad visose klasėse taip pat turime vienų tipų ženkliai daugiau nei kitų.

	1 klasė	**2 klasė**	**3 klasė**	**4 klasė**
	Pokytis			
Pokytis 1	13	3	6	4
Pokytis 2	103	26	32	45
Pokytis 3	10	8	0	28
Pokytis 4	9	14	2	10
Pokytis 5	1	3	4	2
Pokytis 6	0	11	5	0
	Apjungimas			
Apjungimas 1	86	90	95	149
Apjungimas 2	2	25	24	35
	Palyginimas			
Palyginimas 1	8	11	9	24
Palyginimas 2	2	8	10	13
Palyginimas 3	9	36	16	4
Palyginimas 4	5	26	8	1
Palyginimas 5	0	0	0	1
Palyginimas 6	0	0	0	0
	Sulyginimas			
Sulyginimas 1	3	1	0	0
Sulyginimas 2	0	0	0	0
Sulyginimas 3	0	0	0	0
Sulyginimas 4	0	0	0	0
Sulyginimas 5	1	0	0	0
Sulyginimas 6	0	0	0	0

1.4 lentelė: Adityvūs ATU pagal klases

1.2 Atsitiktinės imties atitikimas visam vadovėliui

Buvo sugeneruota atsitiktinė 50 puslapių iš vadovėlio imtis. Rasta 110 matematinių veiklų, iš kurių 32 (29,09%) buvo ATU veiklos. Išanalizavome 66 ATU, iš kurių 39 (59,09%) buvo adityvios.

Palyginome imties ATU tipų pasiskirstymą su empirinį vadovėlio s ATU tipų pasiskirstymą.

	1 klasė	2 klasė	3 klasė	4 klasė
Multiplikatyvūs ATU				
Santykis				
Santykis 1	0	0	0	55
Santykis 2	0	76	120	253
Santykis 3	0	53	101	89
Santykis 4	0	25	15	22
Palyginimas				
Palyginimas 1	0	2	6	2
Palyginimas 2	0	0	4	1
Palyginimas 3	0	6	26	10
Palyginimas 4	0	10	11	2
Palyginimas 5	0	0	0	0
Palyginimas 6	0	0	0	0
Dekarto sandauga				
Dekarto sandauga 1	0	0	0	0
Dekarto sandauga 2	0	0	0	0
Stačiakampė matrica				
Stačiakampė matrica	0	1	1	26
Stačiakampė matrica 2	0	0	2	4

1.5 lentelė: Multiplikatyvus ATU pagal klases

H_0 : Imties iš s pasiskirstymas atitinka empirinį viso s ATU tipų pasiskirstymą.

H_1 : Imties iš s pasiskirstymas neatitinka empirinio viso s ATU tipų pasiskirstymo.

Pirmiausia veiklas suskirstome į KMV ir ATU bei tikriname hipotezę, kad imties pasiskirstymas atitinka s pasiskirstymą. Pritaikius chi kvadrato testą, gauname P reikšmę $p = 0.633559$, $p > 0.05$; todėl remiantis šiais duomenimis, neturime priežasties atmesti hipotezės H_0, teigiančios, kad pasiskirstymai sutampa.

Kartojame tą pačią procedūrą, tikrindami imties atitikimą adityvių ir multiplikatyvių ATU pasiskirstymui ir įvairių matematinių operacijų ATU pasiskirstymui. Abiem atvejais gauname, kad imties pasiskirstymas pagal ATU tipus atitinka s pasiskirstymą.

Matome, kad atsitiktinė imtis atitinka vadovėlį įvairiais aspektais:

pagal ATU veiklų ir KMV proporcijas, pagal adityvių ir multiplikatyvių ATU proporcijas ir pagal ATU grupių pagal matematines operacijas proporcijas.

Todėl atliekant vadovėlio tyrimus, tam tikrais atvejais rekomenduojama tirti atsitiktinę vadovėlio imtį, toks metodas taupo laiką ir leidžia atlikti platesnius tyrimus su daugiau šalių ir vadovėlių. Atliekant platesnius tyrimus lengviau nustatyti aukštos kokybės vadovėlių savybes.

1.3 Lietuvos ir Singapūro bei Lietuvos ir Ispanijos vadovėlių palyginimas

Mūsų turimi duomenys ir Vicente et al. [152] pateiki Singapūro ir Ispanijos vadovėlių nepublikuoti duomenys (žr. lenteles 1.6, 1.7, 1.8) leidžia palyginti šių trijų šalių vadovėlius.

	Lietuva	Singapūras	Ispanija
KMV	1747	3167	3681
ATU veiklos	879	1097	1047
Iš viso:	2626	4264	4728

1.6 lentelė: ATU ir KMV skaičius Lietuvos, Singapūro ir Ispanijos vadovėliuose

	Lietuva	Singapūras	Ispanija
Adityvūs ATU	1042	1096	1520
Multiplikatyvūs ATU	924	820	1349
Iš viso	1966	1916	2869

1.7 lentelė: adityvių ir multiplikatyvių ATU skaičius Lietuvos, Singapūro ir Ispanijos vadovėliuose

Nėra vadovėlio etalono į kurį turėtų lygiuotis visos šalys, bet galime lygindami šalis ieškoti šio etalono. Šiame tyrime lyginome Lietuvos vadovėlius su Singapūro vadovėliais ir Lietuvos vadovėlius su Ispanijos vadovėliais.

Tikriname hipotezę, kad dviejų šalių ATU tipų proporcijos:

	Lietuva	Singapūras	Ispanija
Sudėtis	528	1057	1046
Atimtis	513	1211	1045
Daugyba	519	736	1184
Dalyba	404	828	648
Iš viso	1964	3832	3923

1.8 lentelė: Skirtingų matematinių operacijų ATU skaičius Lietuvos, Singapūro ir Ispanijos vadovėliuose

1. Lietuva ir Singapūras;
2. Lietuva ir Ispanija

yra lygios.

$$H_0: p_1 = p_2$$
$$H_1: p_1 \neq p_2.$$

1.3.0.1 ATU proporcijos

Tikrinome hipotezę, kad abiejų šalių vadovėlių ATU proporcijos yra lygios.

Atlikome Z-testą, lyginant ATU proporcijas Lietuvos ir Singapūro vadovėliuose. Gavome Z reikšmę: $Z = 6.9$. Jei Z-testo prielaidos yra tenkinamos, tuomet Z apytikriai seka standartinį normalųjį pasiskirstymą. Iš to gauname $P(2 - \text{tailed}) = 0.01$, o lyginant Lietuvos ir Ispanijos vadovėlius $Z = 10.59$, $P(2\text{- tailed})$ yra artima 0. Matome, kad turime atmesti hipotezes, kad proporcijos lygios.

1.3.0.2 Adityvių ATU proporcija

Lyginant šalis pagal adityvių problemų proporciją vadovėliuose, matome, kad neturime priežasties atmesti hipotezės, jog adityvių problemų proporcijos Lietuvos ir Ispanijos vadovėliuose yra vienodos $Z = 0.014$, $P(2 - \text{tailed}) = 0.9886$, todėl galime teigti, kad Lietuvos ir Ispanijos vadovėliai šiuo aspektu yra panašūs, tačiau Lietuvos vadovėlis skiriasi nuo Singapūro vadovėlio $Z = -2.63$, $P(2 - \text{tailed}) = 0.009$, kuris turi didesnę dalį adityvių ATU. Šiuo aspektu, Lietuvos vadovėliai yra panašesni į Ispanijos nei į Singapūro.

1.3.0.3 Proporcijos pagal matematines operacijas

Mes taip pat lyginome Lietuvą su Singapūru ir Ispanija pagal ATU, naudojančių tam tikrą matematinę operaciją (sudėtį, atimtį, daugybą, dalybą), proporciją. Neturime priežasties atmesti hipotezės, kad ATU, priskirtų sudėties operacijai, proporcijos yra vienodos nei Lietuvoje ir Singapūre $Z = -0.57$, $P(2 - \text{tailed}) = 0.57$, nei Lietuvoje ir Ispanijoje $Z = 0.18$, $P(2 - \text{tailed}) = 0.86$.

Lietuvos ir Singapūro atveju, atimties ATU proporcijos skiriasi ($Z = -4.32$). Neturime priežasties atmesti hipotezės, kad Lietuvos ir Ispanijos atimties ATU proporcijos yra vienodos $Z = -0.424478445$, $P(2 - \text{tailed} = 0.67$.

Daugybos atveju, mes atmetame hipotezes su abiem šalimis, Lietuvos ir Singapūro atveju $Z = 6.32$, Lietuvos ir Ispanijos atveju $Z = -3$.

Dalybos atveju, neturime priežasties atmesti hipotezės, kad Lietuvos ir Singapūro dalybos ATU proporcijos skiriasi $Z = 0.91$, $P(2 - \text{tailed} = 0.36$, tačiau atmetame šią hipotezę Lietuvos ir Ispanijos atveju $Z = 3.82$.

1.3.0.4 Iliustracijos

Analizavome iliustruotus ATU Lietuvos vadovėlyje. Nustatėme vaizduojamųjų, informacinių ir organizacinių iliustracijų kiekius Lietuvos vadovėliuose ir palyginome juos su Singapūro ir Ispanijos vadovėlių rezultatais [152].

Pagrindinis veiksnys, aptartas autorių, yra organizacinių iliustracijų skaičius ir mes matome, kad Lietuva yra tarp Singapūro ir Ispanijos pagal organizacinių iliustracijų procentą. Lietuva taip pat yra tarp Singapūro ir Ispanijos pagal 4 klasės mokinių aukštųjų gebėjimų pasiekimus ir kognityvinius gebėjimus sprendžiant užduotis pagal TIMSS ataskaitą [89], kaip minėta aukščiau. Gauti rezultatai neprieštarauja Vicente ir kt. hipotezei, kad didesnis organizacinių iliustracijų procentas vadovėlyje teigiamai veikia mokinių rezultatus [152].

1.9 lentelė: Organizacinių, informacinių ir vaizduojamųjų iliustracijų bendras skaičius Lietuvoje, Singapūre ir Ispanijoje

	Lietuva	Singapūras	Ispanija
Organizacinės	108 (10.76%)	190 (36.4%)	21 (1.8%)
Informacinės	392 (39.04%)	244 (46.7%)	348 (52.1%)
Vaizduojamosios	504 (50.20%)	88 (16.9%)	308 (46.1%)

Palyginome ATU su organizacinėmis iliustracijomis proporciją Lietuvoje su Singapūro proporcija.

$H_0 : \ p_{ATU(i)}(s) = p_0$
$H_1 : \ p_{ATU(i)}(s) \neq p_0$

kur p_0 yra Singapūro organizacinių iliustracijų ATU proporcija, $p_{ATU(i)}(s)$ yra organizacinių iliustracijų ATU Lietuvos vadovėlyje s. Tai reiškia, kad laikome, kad Singapūro vadovėlis turi norimą organizacinių iliustracijų proporciją ir siekiame, kad Lietuvos vadovėlis turėtų tokią pačią organizacinių iliustracijų proporciją. Norėdami patikrinti hipotezę, atlikome Z-testą. Z reikšmė yra -5.1755. Atmetame hipotezę apie proporcijų lygybę.

Diskusija

Lietuvos vadovėlyje buvo nustatytas mažesnis matematinių veiklų skaičius, palyginti su Singapūro ir Ispanijos vadovėliais. Rasta 2 626 matematinės veiklos, iš kurių 879 (33,47%) buvo ATU veiklos; Singapūro vadovėlyje buvo 4 264 matematinės veiklos, iš kurių 1 097 veiklos (25,73%) buvo ATU, o Ispanijos vadovėlyje buvo 4 729 veiklos, iš kurių 1 047 (22,14%) buvo ATU [152].

Visose trijose šalyse ryškėja panašios tendencijos kurių ATU tipų yra daugiau ir kurių visai nėra vadovėliuose. Lietuvoje trijų rūšių ATU, sudaro 68,40% visų adityvių ATU. Panašiai Singapūro ir Ispanijos vadovėliuose šie tipai sudaro atitinkamai 64,6% ir 69,3% adityvių ATU. Taip pat visose šiose šalyse kai kurie ATU tipai yra retai randami arba jų visai nėra vadovėliuose. Svarbu mokiniams pateikti įvairių tipų ATU, kad jie galėtų susidurti su įvairiomis situacijomis atitinkančiomis tą patį matematinį veiksmą.

Žiūrint į multiplikatyvius ATU, randame tuos pačius panašumus: Lietuvos vadovėlyje 81,69% visų multiplikatyvių ATU sudaro paprasti santykio ATU. Tuo tarpu Singapūre ir Ispanijoje 75,8% ir 86,8% atitinkamai [152]. Kaip ir adityvių ATU atveju lengvesni multiplikatyvūs ATU dažniau randami vadovėliuose nei sudėtingesni. Reikalingi ateities tyrimai apimantys daugiau šalių ir vadovėlių, taip pat šalis iš skirtingų regionų.

Norėdami turimo vadovėlio proporcijas lyginti su tam tikru p_0, turime nuspręsti, kokio p_0 siekiame. Tai galime atlikti skirtingais būdais: imdami kaip siekiamybę šalių su aukščiausiais mokinių rezultatais vadovėlius, apklausdami ekspertus ir gaudami tam tikrą p_0.

Rekomenduojame vadovėlyje įtraukti įvairių tipų tiek adityvių, tiek multiplikatyvių ATU. Atsižvelgiant į tai, kad pradžioje mokiniai žino tik sudėtį ir gali spręsti tik uždavinius, reikalaujančias sudėties operacijos, vėliau jie išmoksta atimtį tik po daugybą ir dalybą, pateikiame hipotetinį užduočių tipų kiekį vadovėlyje.

Kiekvienas ATU tipas turi skirtingus komponentus. Autoriai Jaffe ir kt. [58] nurodo 9 lingvistinius veiksnius, kurie turi įtakos ATU sprendimui, šiame darbe jų neaptariame, taip pat svarbūs yra skaitinės išraiškos veiksniai [26, 149], kurie daro įtaką ATU sudėtingumui. Šio tyrimo rezultatai patvirtina hipotezę, kurią pateikė Vicente ir kt. [152], apie organizacinių iliustracijų naudą.

2 skyrius

Matematinio komunikavimo kompetencija

Antrasis tikslas, kurį išskiria Verschaffel et. al. [149] yra: lavinti mokinių kūrybiškumą, problemų sprendimo gebėjimus. Tam, kad mokiniai galėtų kūrybiškai pažvelgti į uždavinio sprendimą, jiems svarbu gebėti tinkamai išreikšti matematines mintis. Šiame skyriuje apžvelgsime nestandartinius tekstinius uždavinius kurie lavina matematinį samprotavimą ir skatina matematinę diskusiją. Į šias sąvokas įeina ir kūrybiškumas (hipotezių iškėlimas), problemų sprendimo gebėjimai (dėsningumų pastebėjimas), argumentavimas, dedukcinis samprotavimas (hipotezės pagrindimas/atmetimas) [124].

Sąvoką matematinė diskusija naudojame negriežtai, tai gali būti mokinių (kartu su mokytoju arba be jo) pokalbis apie uždavinį ar kitą matematinę situaciją, arba mokinio vidinė (ar garsiai išsakyta) diskusija apie matematinę situaciją pačio su savimi. Matematinė diskusija priklausomai nuo diskutuojančių asmenų ar grupių gali būti argumentuota, pagrįsta, logiška, nuosekli, gali turėti aiškų tikslą, kurio norima pasiekti. Tam, kad diskusija būtų kokybiška siekiame, kad mokiniai, priklausomai nuo jų amžiaus gebėtų formuluoti matematines mintis, naudoti matematines sąvokas, apibūdinti situaciją ar sprendimą taip, kad suprastų auditorija.

Reid et. al. [101] išskiria keturis samprotavimo tipus: dedukcinis samprotavimas, indukcinis samprotavimas, samprotavimas pagal analogiją ir abdukcinis samprotavimas. Stylianides požiūriu [124] matematinis samprotavimas apima šias keturias matematines veiklas: šablonų atpažinimą, hipotezių iškėlimą, argumentavimą be įrodymo, įrodymą. Stylianides [124] apibrėžia įrodymą kaip pagrįstą argumentuotą teiginį, kuris remiasi teisingomis prielaidomis, kurios pagrindžia arba paneigia matematinę hipotezę. Remdamiesi Thompson et al. (2012) [129], Arbaugh et al. (2018) [2] ir Stylianides et al. (2016) [123] idėjomis apibūdinsime tekstinius uždavinius, kurie ugdo matematinį samprotavimą.

Tekstinis uždavinys ugdo **matematinį samprotavimą**, jei jo sprendimui yra reikalingas argumentavimas, pagrindimas, ar schemų atpažinimas. Taip pat, jei sprendime naudojami teiginiai žinomi ir suprantami auditorijai/klasei ir sprendėjui [68].

2021 m. projekto „Matematinio samprotavimo mokykloje tobulinimas“ metu, vienas iš projekto tikslų buvo išanalizuoti Lietuvos matematikos vadovėliuose esančius tekstinius uždavinius, kurie lavina matematinį samprotavimą. Trumpai apžvelgsime uždavinių tipus, kurie atitinka bent vieną iš samprotavimo uždavinių aspektų (dėsningumų paiešką, hipotezės iškėlimą, išvadų darymą).

MS1: Pateiktos informacijos daugiau, arba mažiau nei reikia. Informaciją reikia apdoroti. (P uždavinys)

MS2: Prašoma atsakymą pagrįsti, paaiškinti, reikalingas įrodymas (Uždaviniai, kurie išreikštiniu pavidalu skatina matematinį samprotavimą. Jų sąlygoje prašoma pagrįsti, paaiškinti, reikalingas įrodymas).

MS3: Mokiniui nežinoma situacija (nestandartiniai, originalaus sprendimo reikalaujantys uždaviniai).

Atlikus vadovėlių apžvalgą buvo išskirti subkategorijų atvejai.

MS1 uždavinių kategorijoje pavyko rasti keletą skirtingų tipų uždavinių.

1. Prašoma rasti daugiau nei vieną galimą atsakymą (pavyzdžiui uždavinys 2.0.1).

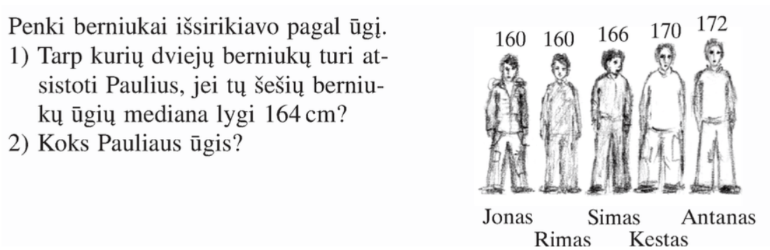
2. Trūkstama informacija nėra mokinio naudojama kasdieninėje aplinkoje (pavyzdžiui uždavinys 2.0.3).
3. Trūkstama informacija yra mokiniui kasdienė.
4. Duomenų daugiau nei reikia gauti atsakymui (pavyzdžiui uždavinys 2.1).
5. Reikia atrinkti kurie duomenys reikalingi atsakyti į kurį klausimą (pavyzdžiui 2.2 uždavinys).
6. Variantų kiekio radimas. Sprendimas reikalauja įvairiapusiškai išnagrinėti situaciją (pavyzdžiui 2.0.4 uždavinys).

MS1 kategorijos uždavinių pavyzdžiai:

Uždavinys 2.0.1. Lina suskaičiavo, kiek žingsnių yra nuo jos namų iki mokyklos. Jei šį žingsnių skaičių suapvalintume iki dešimčių, gautume 1000. Kiek žingsnių galėjo suskaičiuoti Lina?

Uždavinys 2.0.2. Kiek mažiausiai sekundžių gali turėti mėnuo? Atsakymą parašykite standartine išraiška.

Uždavinys 2.0.3. Kristupo škotų aviganiui yra lygiai 10 metų. Kiek sekundžių Kristupo šuo jau gyvena žemėje, jei yra žinoma, kad jis gimė keliamųjų metų kovo 12 dieną? Atsakymą parašykite standartine išraiška.


Penki berniukai išsirikiavo pagal ūgį.
1) Tarp kurių dviejų berniukų turi atsistoti Paulius, jei tų šešių berniukų ūgių mediana lygi 164 cm?
2) Koks Pauliaus ūgis?

2.1 pav.: Uždavinio, kai duomenų daugiau nei reikia gauti atsakymui pavyzdys iš 7 klasės vadovėlio

Uždavinys 2.0.4. Eitynėse dalyvauja daugiau kaip 840, bet mažiau kaip 910 žmonių. Kiek daugiausia žmonių dalyvauja eitynėse, jei žinoma, Dviejų laikraščių redakcijos siūlo darbą pardavėjams visuose Lietuvos regionuose. Štai šių redakcijų pasiūlymai:

„Atkeliauja diena“

Neturi laiko dirbti visą dieną?
Štai tau pasiūlymas!

Prekiaudamas laikraščiu „Atkeliauja diena“ per savaitę uždirbk 75 Eur + 0,1 Eur už kiekvieną parduotą laikraštį.

„Dienos įvykiai“

Nori užsidirbti?
Prekiauk mūsų laikraščiu!

Per savaitę pardavęs 180 egzempliorių gausi po 0,25 Eur už egzempliorių, o už kiekvieną papildomai parduotą laikraštį – dar + 0,30 Eur.

Tautvydas įsidarbino laikraščio „Atkeliauja diena“ redakcijoje, o Smiltė – „Dienos įvykių“ redakcijoje.

8.1. Tautvydas praeitą savaitę pardavė 300 laikraščių. Kiek eurų jis uždirbo?

8.2. Smiltė praeitą savaitę pardavė 260 laikraščių. Kiek eurų ji uždirbo?

8.3. Smiltė šią savaitę uždirbo 122 Eur. Kiek laikraščių ji pardavė?

8.4. Tautvydas šią savaitę uždirbo 120 Eur. Kiek laikraščių jis pardavė?

8.5. Kuriuo laikraščiu geriau prekiauti, jei planuoji kas savaitę parduoti 250 jo egzempliorių?

2.2 pav.: Uždavinio, kai reikia atrinkti kurie duomenys reikalingi atsakyti į kurį klausimą pavyzdys iš 7 klasės vadovėlio

Greičiausias Lietuvoje gyvenantis paukštis – juodasis čiurlys – geba skristi iki 144 km/h greičiu.
10.1. Per kiek laiko tokiu greičiu juodasis čiurlys nuskristų 200 metrų?
10.2. Ar tiesa, kad greičiausias pasaulio žmogus Usainas Boltas (*Usain Bolt*) 100 m bėga beveik 4 kartus lėčiau, nei tą atstumą skrenda čiurlys? Atsakymą pagrįskite (reikalingos informacijos ieškokite internete).

2.3 pav.: Pavyzdys uždavinio, kai prašoma sprendimą pagrįsti palyginant informaciją

kad dalyvius galima surikiuoti arba po 2, arba po 3, arba po 5, arba po 9, arba po 10?

Visi MS1 subkategorijų uždaviniai yra rekomenduojami kaip skatinantys matematinį samprotavimą. Tuo tarpu MS2 subkategorijų uždaviniai yra būtent taip sukonstruoti, kad lavintų matematinį samprotavimą ir jį skatintų. Pavyko vadovėliuose aptikti šias MS2 subkategorijas:

1. Prašoma sprendimą pagrįsti palyginant informaciją (pavyzdžiui uždavinys 2.3).
2. Prašoma pagrįsti atsakymą argumentuojant (pavyzdžiui uždavinys 2.4).
3. Prašoma patvirtinti arba paneigti teiginį, sprendimą (pavyzdžiui uždavinys 2.5, 2.6).

Arnas išdalijo 36 mandarinus 9 draugams po lygiai. Ar draugai galėjo gauti po 5 mandarinus? Atsakymą pagrįskite.

2.4 pav.: Pavyzdys uždavinio, kai prašoma pagrįsti atsakymą argumentuojant

Automobilio bake buvo 44 l degalų. Arnas važinėdamas sunaudojo 3 kartus daugiau degalų, negu jų liko bake.

2.1. Kiek litrų degalų buvo sunaudota?

2.2. Arno draugas Tomas, pažvelgęs į prietaisų skydelį, pasakė, jog buvo sunaudota 33 l degalų. Patvirtinkite arba paneikite Tomo teiginį.

2.5 pav.: Pavyzdys uždavinio, kai prašoma patvirtinti arba paneigti teiginį, sprendimą

Irma ir Rima skaičių –42 sumažino 12 kartų. Irma gavo skaičių –604, o Rimos atsakymas buvo 100 vienetų didesnis negu Irmos. Kurios merginos atsakymas teisingas?

2.6 pav.: Pavyzdys uždavinio, kai prašoma patvirtinti arba paneigti teiginį, sprendimą

B➔20. Jurgita gamina ir parduoda apyrankes. Vienos apyrankės pagaminimo išlaidos (savikaina) yra 20 Eur. Iš pradžių Jurgita pardavinėjo apyrankes po 38 Eur ir per mėnesį parduodavo vidutiniškai 10 apyrankių. Ji pastebėjo, kad kiekvienas pardavimo kainos sumažinimas x eurų mėnesio pardavimus vidutiniškai padidina x apyrankių; čia $0 \le x \le 18$.

20.1. Tarkime, kad apyrankės pardavimo kainą Jurgita sumažino x eurų. Parodykite, kad už parduotas apyrankes gautas mėnesio pelnas apskaičiuojamas pagal formulę $P(x) = -x^2 + 8x + 180$.

(2 taškai)

Juodraštis

2.7 pav.: Uždavinio pavyzdys iš VBE, kuriame prašoma kažką parodyti

Visgi dėmesio tokio tipo uždaviniams vadovėliuose mažai. Dažnai žodžiai „pagrįskite“ , ar „įrodykite“ , „parodykite“ tėra prašymas apskaičiuoti (pavyzdžiui uždavinys 2.7), ar atlikti kitus matematinius veiksmus [62].

Tam, kad mokinys samprotautų apie uždavinį pirmiausia turi uždavinio sąlygą tinkamai suprasti. Tačiau, dalis mokinių uždavinio sąlygos neskaito, tik žiūrėdami į uždavinio skaičius ir klausiamąjį žodį parenka sprendimą [52]. Tai iliustruoja ne vienoje šalyje atlikti tyrimai su Flaubert Gustave uždavinio 2.0.5 skirtingomis versijomis (pavyzdžiui 2.0.6. Dauguma mokinių atlieka veiksmus, pavyzdžiui sudėties ir pateikia uždavinio atsakymą [52], [11], [114].

Uždavinys 2.0.5. Kadangi dabar studijuojate geometriją ir trigonometriją, pateiksiu jums užduotį. Laivas plaukia vandenynu. Iš Bostono jis išvyko su medvilnės kroviniu. Jis sveria 200 tonų. Jis vyksta į Havrą. Pagrindinis stiebas nulūžęs, kajutė guli denyje, laive yra 12 keleivių, vėjas pučia rytų-šiaurės-rytų kryptimis, laikrodis rodo ketvirtį trijų po pietų. Tai gegužės mėnuo. Kiek kapitonui metų? (cituojama [156]).

Uždavinys 2.0.6. Valtyje yra 20 avių ir 6 ožkos. Kiek kapitonui metų?

Neskaitant sąlygos, naudojant tik klausiamuosius žodžius ir skaitines reikšmes galima spręsti uždavinius, kurie apibūdinami kaip nuoseklūs [95] (angl.: consistent) standartiniai uždaviniai.

Pavyzdžiuose (žiūrėti lentelę 2.1) pateikti skaičiai ir klausiamieji žodžiai iš tekstinių uždavinių pirmos klasės vadovėlyje [98]. Šiuose uždaviniuose ir be uždavinio sąlygos galima gauti teisingus atsakymus.

Šiems uždaviniams galima sugalvoti įvairias sąlygas, su pasakojimais apie realius objektus, bet matome, kad ir be sąlygos uždaviniai išsprendžiami, todėl uždavinio formulavimas kaip tekstinio šiuo atveju labiau pridėtinis nei būtinas pačiam uždaviniui. Toks standartinio uždavinio pateikimas nekuria poreikio suprasti apie ką yra pats uždavinys. Neneigiame tokių uždavinių reikalingumo, bei pritaikymo galimybių. Tokie

Skaitinės reikšmės	Klausiamasis žodis	Atsakymas
6, 3	Iš viso	9
8, 5	Liko	3
9, 7	Laisvų	2
1, 8	Kiek yra	9

2.1 lentelė: Skaitinės reikšmės ir klausiamieji žodžiai iš tekstinių uždavinių pirmos klasės vadovėlyje [98]

uždaviniai gali būti puiki priemonė mokytis iškelti uždavinio klausimą, jei uždavinio formuluotėje būtent to ir prašysime. Tačiau papildomai reikėtų ieškoti būtų, kaip tekstinį uždavinį pateikti taip, kad mokinys pirmiausia būtinai turėtų jį perskaityti ir suprasti jame pateiktą situaciją ir tik tada galėtų gauti atsakymą.

Pateiksime keletą nestandartinių uždavinių pavyzdžių, kai vien iš skaičių ir klausiamųjų žodžių atsakymo nuspėti nepavyksta. Žemiau pateiktuose uždaviniuose teisingus atsakymus galima gauti tik perskaičius ir supratus uždavinių sąlygas.

Uždavinys 2.0.7. Kajus turėjo 16 riešutų, Gerda 15 riešutų. Kajus Gerdai davė 1 riešutą. Ar po lygiai riešutų turi vaikai? [98]

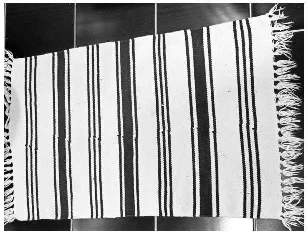
Uždavinys 2.0.8. Kai 2 adatos nulūžo, liko 7 didelės ir 8 mažos adatos. Kiek adatų liko? [9]

Matome, kad 2.0.7 uždavinyje reikia atlikti du veiksmus ir palyginti gautus atsakymus, o 2.0.8 uždavinyje dalis pateiktos informacijos nėra reikalinga ir tai sukuria poreikį įsigilinti į uždavinio sąlygą, tad tai nėra standartinis, o probleminis uždavinys (žr. skyr. tekstinių uždavinių apibrėžimas).

Šiame skyriuje apžvelgsime įvairius tekstinius uždavinius, kurie kuria poreikį uždavinį suprasti ir tuomet jį sprendžiant mokytis išreikšti matematines mintis.

2.1 Tekstiniai uždaviniai neskaitantiems vaikams. Eksperimentas.

- Lina turėjo kažkiek knygų. Kai 3 knygas atidavė jai liko 4 knygos. Kiek knygų turėjo Lina?
- 7. Aš žinojau, nes pas mus yra toks kilimėlis, kur 4 ir 3, aš buvau suskaičiavus, kad 7.



Matematinis samprotavimas dažniausiai ugdomas vyresnėse klasėse, arba už mokyklos ribų. Visuomenėje paplitusi nuomonė, kad tam reikalingas didelis žinių bagažas, bei patirtis sprendžiant sudėtingus matematinius uždavinius. Tačiau tyrimai rodo, kad vaikai, kurie dar neturi jokio matematinio išsilavinimo taip pat yra pajėgūs su mokytojo pagalba lavinti matematinį samprotavimą, bei spręsti nestandartinius žodinius uždavinius [20].

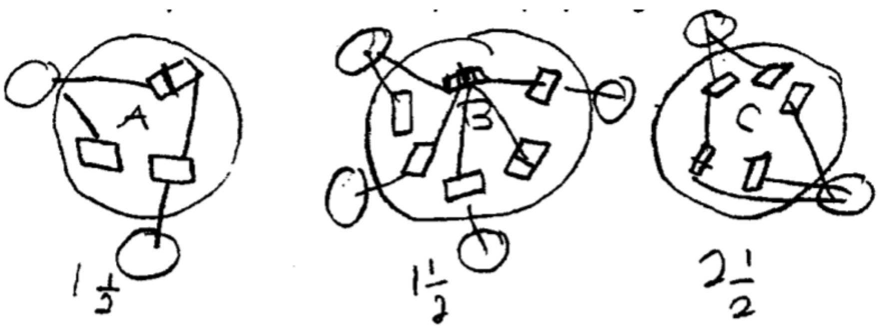
Žinoma, negalime įrodymo uždavinio iš matematikos olimpiados pateikti keturmečiui, turime apgalvoti uždavinio formatą ir sudėtingumo lygį. Vienas iš galimų siūlymų, kaip lavinti matematinį samprotavimą ankstyvame amžiuje yra tekstinius uždavinius pateikti paveikslėliais. Šio amžiaus vaikai geresnius rezultatus pasiekia kai uždaviniai yra pateikti paveikslėlių forma [39]. Citata apie uždavinį su Lina ir knygomis iliustruoja, kad tam tikri skaičių sąryšiai vaikui užsifiksavę naudojantis vizualia informacija. Kol vaikas negeba skaityti ir rašyti, jis geba klausyti, matyti ir kalbėti.

Dalį tekstinių uždavinių galima pateikti iliustracijomis, taip juos pritaikant mokiniams, kurie dar negeba skaityti, arba turi skaitymo sunkumų. Bandymui naudojome Schliemann et al. [110] uždavinį, kuris buvo pateiktas 3 klasės mokiniams: 2.1.1.

Uždavinys 2.1.1. Ant stalo A yra 3 šokoladukai ir dvi kėdės prie šio stalo. Ant stalo B 6 šokoladukai ir 4 kėdės prie jo. Ant stalo C yra 5 šokoladukai ir 2 kėdės prie jo.

a) Parodyk, kaip padalintum šokoladukus po lygiai sėdintiems prie kiekvieno stalo.
b) Prie kurio stalo rinktumeisi atsisėsti? Įtikink, kad prie to stalo sėstis geriausia.
c) Ar kurie nors stalai vienodai geri?

Iliustracijoje 2.8 pateiktas mokinio sprendimas naudojant jo paties piešinį. Mokinys pakomentavo, kad rinktųsi stalą C, nes jis turi daugiau saldainių, o stalai A ir B yra vienodi.



2.8 pav.: 2.1.1 uždavinio sprendimas iš Schliemann et. al. [110] atlikto bandymo su 3 klasės mokiniais

Uždavinys turi potencialo lavinti matematinį samprotavimą. Jis prašo iškelti hipotezę ir įtikinti, kad ji teisinga. Trečioko įtikinimas gali atrodyti nerimtas matematikui akademikui, bet į akademiko postringavimus trečiokas taip pat numotų ranka. Remdamiesi [124] ieškome klasės auditorijai tinkamų argumentavimo būdų, todėl norėjome išbandyti šio uždavinio galimybes su vaiku, kuris su įrodymo uždaviniais dar nėra susipažinęs.

Šį uždavinį adaptavome pakeisdami skaitines reikšmes ir visą informaciją pateikdami vizualiai. Skaitinės reikšmės buvo parinktos tokios, kad sprendimas būtų paprastesnis ir 4-5 metų vaikui nekiltų sunkumų dėl matematinių veiksmų.

Originalaus uždavinio skaičiai yra tokie, kad prie pirmojo ar antrojo stalo atsisėdęs veikėjas gauna 1,5 šokoladuko, o prie trečiojo stalo 2,5 šokoladuko. Mums pakeitus uždavinį sprendėjas turi pasirinkti tarp stalų,

2.9 pav.: Iliustruotas tekstinis uždavinys, dalininkė Eidvilė Viktorija Buožytė

kur gaunama mažiau nei vieną keksiuką, daugiau nei vieną keksiuką ir lygiai vieną keksiuką.

Uždavinį pateikėme paveikslėlio forma taip, kad visa informacija būtų atskleista piešiniu, o uždavinio klausimą būtų galima suformuluoti ir pateikti vaikui žodžiu.

Uždavinys 2.1.2. Visi meškučiai susės prie stalų (žiūrėti pav. 2.9). Prie kurio stalo meškučiui geriausia sėstis, jei jis nori suvalgyti kuo daugiau keksiukų. Ar gali paaiškinti kodėl?

Bandymą atlikome su 4 metų dar neskaitančiu, darželį lankančiu vaiku. Uždavinio sprendimo metu atlikto interviu ištrauka pateikta lentelėje 2.2, iš jos matyti, kad:

1. Vaikas nežinodamas trupmenų, bei negebėdamas išreikšti minties tinkamomis matematinėmis sąvokomis supranta, kad meškutis gaus vieną dalį iš keturių lygių dalių.
2. Vaikas negeba suformuluoti minties, kad susidaro nepilni du vienetai, bet išreiškia mintį, kad objektai(dalys) yra du.
3. Be mokytojo nurodymo vaikas pats naudoja terminą dalis.

4 metų bandymo dalyvis	Tyrėjas
Prie pirmo stalo meškiukas gautų vieną keksiuką.	Tikrai? Kiek meškučių čia sėdės?
Keturi meškiukai. Tada mes turim perpjauti šitą keksiuką į dvi dalis. Šitas meškiukas gaus vieną dalį, kitas meškiukas gaus antrą dalį (rodo pirštu į kėdes kur sėdės meškučiai). Perpjaukim kitą keksiuką į dvi dalis. Šitas meškiukas gaus vieną dalį, kitas meškiukas antrą dalį (rodo pirštu į kėdes).	Kiek kiekvienas meškiukas gaus?
Po keturias dalis.	Kiek gaus kiekvienas meškiukas sėdintis prie vidurinio stalo?
Jis gaus du.	Net du? Kodėl?
Čia yra dvi kėdės, trys keksiukai.	Vienas gaus du, o kitas?
Tada mes galim perpjauti vieną keksiuką. Vienas gaus du ir kitas du.	Bet ne pilnus du?
Po vieną ir dar dalį.	O kaip prie trečio stalo?
Jie gaus visi po vieną.	Prie kurio stalo geriausia sėdėti?
Prie šito stalo (rodo į vidurinį), jie visi gaus po du keksiukus.	

2.2 lentelė: Interviu ištrauka

Diskusija

Bandymo metu buvo pastebėta, kad tokio amžiaus vaikui svarbūs tokie aspektai, kaip iliustracijų dydis, situacijos nusakymas, situacijos supratimas. Dažnai vyresni mokiniai į tokius dalykus matematiniuose uždaviniuose nekreipia dėmesio ir tai gali būti tiek trukdis, nes mokinys neįsigilina į situaciją, tiek teigiamas aspektas, nes nesiblaškoma ir atmetami nesvarbūs uždavinio aspektai.

Atvejo analizė rodo, kad net neskaitantis vaikas geba teisingai pagrįsti uždavinio sprendimą, tik neturi tam reikalingų sąvokų, pavyzdžiui: vaikas negeba suformuluoti minties, kad susidaro nepilni du vienetai, bet išreiškia mintį, kad objektai (nors ir ne pilni) yra du, be mokytojo pagalbos vaikas pats naudoja terminą dalis.

Pavyzdys pademonstruoja, kad tekstinį uždavinį skirtingais formatais galima pateikti skirtingo amžiaus mokiniams ir iš jų tikėtis skirtingų, bet jų amžiui priimtinų ir teisingų sprendimo formų.

Pateiktas uždavinys atitinka tris Stylianides et. al. [124] aprašytus samprotavimo žingsnius: prašo surasti dėsningumą (prie kurio stalo kiek keksiukų gaus kiekvienas veikėjas), iškelti hipotezę (prie kurio stalo geriausia sėstis) ir ją pagrįsti, argumentuoti (paaiškinti kodėl). Paruošus mokinį ir pademonstravus jam tam tikras taisykles, kuriomis galima naudotis pagrindžiant galėtume tikėtis aiškesnio ir taisyklingesnio pagrindimo. Taip pat, galima būtų formuluoti užduotį kai prašoma apibendrinti situaciją didesniam stalų ar keksiukų skaičiui, vėliau apibendrinti situaciją bet kokiems skaičiams.

Ateityje galima atlikti empirinį tyrimą, kuriame atsitiktinai parinktiems dar neskaitantiems vaikams pateikiami iliustruoti tekstiniai uždaviniai. Tyrimo metu svarbu turėti galimybę dirbti su vaikais individualiai, siekiant įsitikinti, kad jie gerai supranta uždavinio sąlygą ir gali ją nagrinėti. Svarbu parinkti tinkamus tekstinius uždavinius, kad jų matematinė situacija būtų vaikui suprantama ir jis gebėtų ją įsivaizduoti.

Taip pat galima stebėti, ar tokio pat amžiaus vaikai, kurie jau geba skaityti taip pat gerai sprendžia tokio tipo uždavinius, ar jų sprendimo galimybės išmokus skaityti padidėja.

Remiantis šiuo bandymu ir Elia [39] požiūriu rekomenduojame ikimokyklinio amžiaus vaikams, kurie dar negeba skaityti formuluoti uždavinius paveikslėliais, bei formuluoti uždavinių klausimus, kurie skatintų matematinį samprotavimą [110]. Šio bandymo pagrindu buvo sukurti iliustruotų uždavinių rinkiniai „MIŠKO ŪSAI“ (autoriai I. Kilienė, S. Daščioras), kuriuose uždaviniai pateikiami iliustracijomis ir siūloma juos pateikti 4-9 metų vaikams.

2.2 Koks skaičius kur tinka uždaviniai. Empirinis tyrimas

> Keistai skambėtų jei būtų trys ateivių arba keturi ateivių, nesirimuoja [Penktokas]

Jau ankstesniuose skyriuose aptarėme, kad mokiniai dažnai sprendžia tekstinius uždavinius neįsigilindami į tekstu pateiktą sąlygą. Norint išvengti proceso kai pažvelgus į uždavinį „ištraukiami“ klausiamieji žodžiai, skaitinės reikšmės ir mechaniškai gaunamas atsakymas ieškome kitokių uždavinių formulavimo būdų, kurie neleistų uždavinio išspręsti į jį neįsigilinus.

Vienas tokių uždavinių pavyzdžių yra nestandartiniai uždaviniai „Kur koks skaičius tinka“ (angl.: what numbers makes sense) (pavyzdžiui 2.2.1) juos išspręsti mokinys gali tik įsigilinęs į uždavinio sąlygą.

Uždavinys 2.2.1. Įrašyk skaičius 3, 5, 6, 10 į tinkamas vietas ir pasitikrink ar tinkamai įrašei.

Kontroliniui kartu ruošiasi ... draugai. Kiekviename iš ... skyrių buvo po ... uždavinius. Visi vaikai išsprendė po ... (skirtingų) uždavinių ir nė vieno neliko neišspręsto.

Mokykloje dažniausiai sprendžiami standartiniai uždaviniai, kurie turi tik vieną teisingą sprendimą, jis gaunamas pritaikius tam tikras matematines operacijas skaičiams pateiktiems uždavinio sąlygoje. Tekstinio uždavinio tikslas nėra tik pritaikyti matematinę operaciją, svarbu, kad mokinys suprastų uždavinio sąlygą, ją nagrinėtų, keltų klausimus, diskutuotų apie galimus sprendimus ir strategijas.

Remiantis Stylianides et. al. [124] šiame uždavinyje mokinys turi surasti dėsningumą (išsiaiškinti kur koks skaičius galėtų tikti), iškelti hipotezę (kad skaičiai tinka būtent ten) ir įsitikinti ar ji teisinga (pagrįsti, paaiškinti). Taip pat šio tipo uždavinius galima papildyti dar viena instrukcija: *rask visus tinkamus variantus, atsakymą pagrįsk.*

Tekstinių uždavinių sudėtingumas taip pat priklauso nuo kalbos, kuria uždavinys užrašytas [26]. Tas pats uždavinys užrašytas skirtingomis kalbomis gali būti skirtingo sakinių ir žodžių ilgio. Kaip mokinys supras tekstą priklauso nuo vartojamų žodžių, sakinių susietumo. Kai kuriose kalbose kartu su skaičiais naudojami artikeliai, arba skirtingos galūnės priklausančios nuo skaičių. Nuo šių kalbos skirtumų gali priklausyti ir uždavinio sprendimas. Tyrimą atlikome Lietuvoje ir Čekijoje, todėl mums buvo svarbu išsiaiškinti lietuvių ir čekų kalbose specifines taisykles susijusias su skaičių vartojimu. Pastebėjome, kad šios kalbos turi išskirtines ypatybes, kurios leidžia sukurti ir panaudoti nestandartinius tekstinius uždavinius. Taip pat norėjome pasinaudodami šiais uždaviniais stebėti kalbos ir matematikos mokymo sąsajas.

Vadovaudamiesi Čekijos mokslininkių atliktu tyrimu [86] pasiūlėme atlikti bendrą tyrimą kartu ir pateikti nestandartinius tekstinius uždavinius Lietuvos moksleiviams. Lietuvių ir čekų kalbų panašumas leido patikrinti mokinių argumentavimo ir sprendimo strategijas. Toliau apžvelgsime naudotų nestandartinių uždavinių „kur koks skaičius tinka“ pateikimą ir potencialą vystyti mokinių argumentavimo ir samprotavimo įgūdžius.

Teorinė aplinka

Tekstiniai uždaviniai „Koks skaičius kur tinka“ (angl.: what numbers makes sense) buvo naudojami Kaur ir Har projekte Singapūre „Matematikos mokytojų pedagoginių įgūdžių lavinimas, siekiant pabrėžti supratimą, samprotavimą ir bendravimą klasėje“ (angl.: Enhancing the pedagogy of mathematics teachers to emphasize understanding, reasoning and communication in their classrooms) [63, 64]. Projektas buvo atliekamas po Singapūro mokyklinės matematikos reformos, kai į programą buvo įtrauktos šios kompetencijos [64]:

1. Matematinis samprotavimas, komunikavimas ir sąsajos;
2. Mąstymo įgūdžiai;
3. Euristika.

Siūlomos aštuonios skirtingos strategijos, naudojant nestandartinius uždavinius, vieni iš jų yra „koks skaičius kur tinka“ tipo uždaviniai.

Lietuvoje ir Čekijoje moksleiviai sprendžia tekstinius uždavinius nuo pirmos klasės. Pradinėje mokykloje (Lietuvoje 1-4 klasės, Čekijoje 1-5 klasės) mokiniai sprendžia vieno ar dviejų veiksmų tekstinius uždavinius, 5 klasėje ir sudėtingesnius tekstinius uždavinius. Abiejose šalyse dažniausiai mokiniams pateikiami standartiniai tekstiniai uždaviniai. Tuo tarpu patys sprendimo metodai turi skirtumų. Čekijoje moksleiviai perskaitę uždavinį turi užrašyti kas uždavinyje yra duota, apskaičiuoti ir atsakymą užrašyti pilnu sakiniu. Lietuvoje uždaviniai sprendžiami tik užrašant matematinį veiksmą ir trumpą atsakymą.

Šiame tyrime nagrinėjome nestandartinius tekstinius uždavinius. Skirtingai nuo standartinių tekstinių uždavinių formulavimo, šiuose uždaviniuose nėra klausimo, bet uždavinio pradžioje yra nurodymas (instrukcija) ką atlikti. Skaitinės reikšmės pateikiamos kartu su nurodymu, o ne aprašant situaciją tokio uždavinio pavyzdys pateiktas žemiau (2.2.2 uždavinys).

Uždavinys 2.2.2. Įrašyk skaičius 6, 37, 5, 7 į tinkamas vietas ir pasitikrink, ar teisingai įrašei.

Jonas perka ... balionus po ... centus ir vieną ledinuką už ... centus. Jis sumokėjo ... centus.

Tekstiniai uždaviniai: „koks skaičius kur tinka?“ yra tokios sandaros: nurodymas, duomenų aibė (skaičiai, žodžiai ir t.t.) ir tekstinis situacijos aprašymas su paliktomis vietomis, kur duotieji duomenys iš duomenų aibės turi būti įrašyti.

Žodis „tinka“ gali būti interpretuojamas trimis reikšmėmis:

1. Matematiškai tinka (pavyzdžiui: $6 \cdot 5 + 7 = 37$).
2. Tinka pagal kontekstą (kai kurie skaičiai į tam tikras vietas gali netikti pagal kontekstą, pavyzdžiui iš viso sumokėti 5 centus už tai ką įsigijo Jonas atrodo nelogiška).

3. Tinka kalbiniu aspektu (atitinka kalbos taisykles, pvz.: 7 balionus, o ne 11 balionus).

Tai ar mokinys atsižvelgia į šiuos aspektus ar ne gali paveikti jo sprendimo strategijos pasirinkimą [57], bei procesą kaip uždavinys sprendžiamas [103] ir žinoma sprendimo teisingumą. Kai kurie mokiniai konteksto aspektu uždavinio teisingumo nevertina ir dėmesį kreipia tik į matematinį teisingumą [30]. Kai kurie mokiniai atsižvelgia į realios situacijos vertinimą [139], bei pagrindžia savo argumentus jų pačių gyvenimiška patirtimi. Realios situacijos vertinimas sprendžiant šio tipo uždavinius gali padėti (pavyzdžiui mokinys įvertinęs, kad pirštinių poroje yra 2 pirštinės, skaičių kiek yra pavienių pirštinių gali parinkti lyginį). Kai kurie mokiniai neatsižvelgia į kalbinius uždavinio aspektus, bet tai gali priklausyti nuo mokinių amžiaus [86]. Sprendžiant šio tipo uždavinius kalbiniai aspektai gali atskleisti tam tikrų skaičių vietą ir liks tik užpildyti likusias vietas atsižvelgiant į kitus aspektus.

Tyrimo klausimai

Sekdami tyrimą atliktą tyrėjų Mottlová ir Slezáková [86] buvo sukurti nauji to paties tipo tekstiniai uždaviniai ir tyrimas atliktas dviejose šalyse Lietuvoje ir Čekijoje. Išsikėlėme šiuos tyrimo klausimus:

TK1: Kokias argumentavimo technikas spręsdami WNMS tipo tekstinius uždavinius kartu su visa klase mokiniai naudoja?
TK2: Ar Čekijos ir Lietuvos moksleivių naudojami argumentai skiriasi?

Pagrindinis tyrimo tikslas buvo pateikti mokiniams WNMS tipo uždavinius ir analizuoti jų diskusiją sprendimo metu. Norėjome sužinoti kokios bus naudojamos strategijos, ar bus atkreipiamas dėmesys į kalbinius aspektus, ar mokiniai argumentuos savo pasirinkimus. Lietuvoje tokio tipo uždaviniai mokyklose nenaudojami, tad papildomas tikslas buvo stebėti ar šio tipo uždaviniai tinkami lavinti matematinį samprotavimą, argumentavimo įgūdžius ir ar naudinga juos naudoti pamokoje. Taip pat norėjome palyginti Lietuvos moksleivių ir Čekijos moksleivių uždavinių sprendimo eigą.

Metodologija

Buvo atlikti du tyrimai Čekijoje ir Lietuvoje. Dalyvavo 28 Čekijos ir 20 Lietuvos penktos klasės moksleivių. Mokiniai dalyvavo taip pat suplanuotose pamokose, jie kartu su visa klase sprendė du nestandartinius tekstinius uždavinius. Pamokas vedė abi šio tyrimo autorės, pastovios klasių mokytojos stebėjo pamokas. Mokiniams buvo duota laiko savarankiškai įsigilinti ir spręsti užduotį ir tada savanoriai mokiniai buvo kviečiami prie lentos paaiškinti užduoties sprendimą ir įrašyti tinkamus skaičius į laisvas vietas. Kiekvienam atėjusiam mokiniui buvo leidžiama įrašyti po vieną skaičių į uždavinio sąlygą.

Kalbiniai skirtumai

Vienas pagrindinių komponentų tekstiniuose uždaviniuose (ypatingai šio tipo užduotyse) yra kalba. Šiame tyrime mums buvo svarbu atsižvelgti į čekų ir lietuvių kalbų skirtumus ir panašumus. Lietuvių ir čekų kalbose svarbus veiksnys yra skaičių ir daiktavardžių linksnių derinimas. Abiejose kalbose tam tikri skaičiai dera tik su tam tikromis daiktavardžių galūnėmis. Abi kalbos turi panašias gramatines taisykles skaičiams su daiktavardžiais derinti, bet pačios skaičių grupės skiriasi. Čekų kalboje skaičius galime suskirstyti į tris grupes 2.4:

- Skaičius 1.
- Skaičiai 2, 3, 4.
- Ir visi skaičiai didesni už 4.

Lietuvių kalboje taip pat galime išskirti tris grupes 2.3.

- Skaičiai, kurių pavadinimai baigiasi žodžiu vienas: 1, 21, 31, 41...
- Skaičiai, kurie baigiasi nuliu ir visi skaičiai nuo 11 iki 19: 10-20, 30, 40, 50, ...
- Skaičiai, kurie baigiasi skaitmenimis 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, išskyrus skaičius nuo 12 iki 19: 2-9, 22-29, 32-39 ...

Siekdami tikslo, kad mokinys įsigilintų į uždavinio sąlygą ir ją suprastų galime pateikti uždavinius, kur mokinys turi į sąlygą įrašyti duotus skaičius. Tuo atveju visai neskaitant sąlygos, jei duota n skaičių ir n tuščių vietų, būdų įrašyti skaičius yra $n!$. Tinkamai suformuluota sąlyga kelia apribojimus, kur skaičiai gali būti įrašyti, juos lemia matematinė išraiška ir tekstinė išraiška. Lietuvių kalba turtinga linksniais, todėl skaičiai ir žodžiai turi atitikti vienas kitą. Matome, kad lietuvių kalboje pagal atitikimą daiktavardžių linksniams skaičius galime suskirstyti į tris grupes 2.3, čekų kalboje taip pat yra trys grupės, tik jos skiriasi. Uždaviniui parinkome tokius skaičius, kad jie abiejose kalbose atitiktų tas pačias grupes.

Skaičių grupė	Daiktavardis su galūne „is“	Daiktavardis su galūne „ė“	Daiktavardis su galūne „a“
1, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91, 101, 121, ...	Ateivis	Dėžė	Pora
10-20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110-120, 130, ...	Ateivių	Dėžių	Porų
2-9, 22-29, 32-39, ...	Ateiviai	Dėžės	Poros

2.3 lentelė: Skaičių suderinimas su daiktavardžių galūnėmis Lietuvių kalba

Skaičių grupės	Ateivis(-iai)	Dėžė(s)	Pora(-os)	Ranka(-os)
1	mimozemšťan	balík	pár	ruka
2, 3, 4	mimozemšťani	balíky	páry	ruce
4 <...	mimozemšťanů	balíků	párů	rukou

2.4 lentelė: Skaičių suderinimas su daiktavardžių galūnėmis čekų kalba

Uždaviniai buvo pateikti čekiškai Čekijos mokiniams ir lietuviškai Lietuvos mokiniams, žemiau pateikiame uždavinius lietuvių, čekų ir anglų kalbomis. Lietuvių ir čekų kalba uždavinio formuluotėje žodžių galūnės prie vietų, į kurias reikia įrašyti skaičius tinka tik tam tikriems skaičiams, tuo tarpu anglų kalboje visi skaičiai kalbiniu aspektu tinka į visas laisvas vietas.

Tyrime naudojami uždaviniai

Naudojome du tekstinius uždavinius. Pirmasis buvo skirtas pristatyti „Koks skaičius kur tinka“ tipo uždaviniams. Tokio tipo uždaviniai įprastai nėra naudojami mokykloje nei Čekijoje nei Lietuvoje.

Pirmajame uždavinyje 2.2.3 pasirinkome skaičius iš tų pačių grupių, visi skaičiai pagal linksnius tinka į visas laisvas vietas, todėl kalbiniai aspektai nėra svarbūs, šio uždavinio pateikimo tikslas supažindinti mokinius su jiems neįprastu užduoties formulavimu.

Uždavinys 2.2.3. Įrašyk skaičius 6, 37, 5, 7 į tinkamas vietas ir pasitikrink, ar teisingai įrašei.

Lietuvių kalba: Jonas perka ... balionus po ... centus ir vieną ledinuką už ... centus. Jis sumokėjo ... centus.

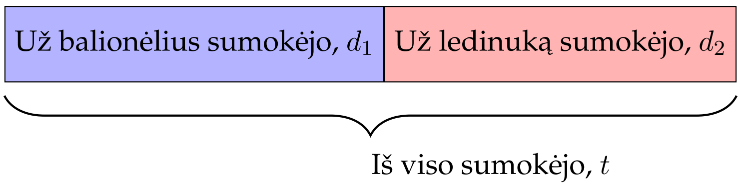
Čekų kalba: Jonáš si do košíku dává ... balónků po ... korunách a lízátko za ... korun. U pokladny zaplatí ... korun.

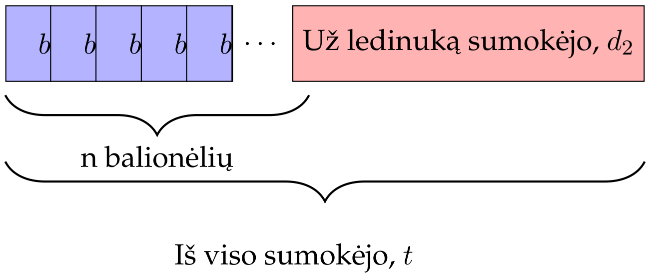
Anglų kalba: John buys ... balloons for ... cents each and one lollipop for ... cents. He paid ... cents.

Šis uždavinys buvo išsamiai aptartas prof. R. Norvaišos organizuojamame matematikos mokymo seminare 2023 metų kovo mėnesį. Kartu su matematikų bendruomene aptarėme uždavinio svarbą ir panaudojimo galimybes. Žemiau pateikiamas uždavinio sprendimas ir aptarimas, kurio idėją pateikė dr. Ričardas Kudžma.

Uždavinio modelis

Naudojant Singapūre naudojamą uždavinių vaizdavimą schemomis (angl.: bar method) galime atvaizduoti uždavinį taip:





Šiame modelyje

- Melsva schemos dalis žymi sumą d_1 centais, kurią Jonas sumokėjo už balionėlius.
- Rausva dalis žymi už ledinuką sumokėtą sumą centais.
- Kiekvienas iš mažesnių mėlynų stačiakampių žymi vieno balionėlio kainą centais b. Pažymėjome, kad iš viso balionėlių buvo pirkta n vienetų.

Pirmąją schemą aprašo lygtis:

$t = d_1 + d_2$,

Antrąją schemą šios lygtys:

$d_1 = n \cdot b$,

$t = n \cdot b + d_2$.

Sprendimo metodo parinkimas

Lygtis $t = n \cdot b + d_2$ turi 4 nežinomuosius, bet šiame uždavinyje kiekvienas nežinomasis gali įgyti tik 4 reikšmes, būtent, 5, 6, 7, 37. Vienas iš metodų šiai lygčiai spręsti: perrinkti visus galimus variantus.

Skirtingų atvejų gali būti $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Tikrinti visus iš eilės užtruktų, todėl paieškokime kitokio sprendimo.

Matematinis sprendimas

Iš lygties matyti, kad t turi būti didžiausias skaičius, nes visi nežinomieji yra teigiami sveikieji skaičiai, todėl atliekant daugybą ir sudėtį gausime didesnį skaičių už dauginamuosius ir sudėties dėmenis. Pasirinkę iš duotų skaičių didžiausią gauname, kad $t = 37$. Tuomet $37 = n \cdot b + d_2$. Pertvarkome lygtį į $37 - d_2 = n \cdot b$.

Išnagrinėsime galimus atvejus.

1. Jei $d_2 = 5$, tada kairė lygybės pusė yra lygi $37 - d_2 = 37 - 5 = 32$, o dešinė lygybės pusė $n \cdot b = b \cdot n = 6 \cdot 7 = 42$. Lygybė negalioja, gauname prieštarą. Prielaida neteisinga;
2. Jei $d_2 = 6$, tada $37 - d_2 = 37 - 6 = 31$, o $n \cdot b = b \cdot n = 5 \cdot 7 = 35$, tai nelygu 31. Lygybė negalioja, gauname prieštarą. Prielaida neteisinga;
3. Jei $d_2 = 7$, tada $37 - d_2 = 37 - 7 = 30$, $n \cdot b = b \cdot n = 5 \cdot 6 = 30$. Galimi du atvejai: $b = 5, n = 6$ ir $b = 6, n = 5$.

Išnagrinėję visus galimus atvejus gauname du tinkamus sprendinius: $t = 37, d_2 = 7, n = 5, b = 6$ ir $t = 37, d_2 = 7, n = 6, b = 5$.

Kalbinis aspektas

Tikriname sprendinius. Kai $t = 37, d_2 = 7, n = 5, b = 6$, gauname sąlygą su reikšmėmis:

Jonas perka **penkis** balionus po **šešis** centus ir vieną ledinuką už **septynis** centus. Jis sumokėjo **trisdešimt septynis** centus.

Kai $t = 37, d_2 = 7, n = 6, b = 5$, gauname šią sąlygą su reikšmėmis:

Jonas perka **šešis** balionus po **penkis** centus ir vieną ledinuką už **septynis** centus. Jis sumokėjo **trisdešimt septynis** centus.

Abu sprendiniai tinka. Parašyti sakiniai ir yra atsakymas.

Toliau aptarsime antrojo tyrime naudoto uždavinio 2.2.4 sprendimą. Šį uždavinį pateikėme jau norėdami stebėti patį sprendimo procesą. Jame į pirmą ir trečią laisvas vietą pagal linksnius tinka tik skaičiai 12 ir 18, į antrą ir ketvirtą skaičiai 3 ir 4. Bet matematiškai uždavinį atitinka tik vienas sprendinys.

Uždavinys 2.2.4. Įrašyk skaičius 3, 12, 18, 4 į tinkamas vietas ir pasitikrink, ar teisingai įrašei.

Lietuvių kalba: Planetoje D gyvena ... ateivių. Jie nusipirko ... dėžes pirštinių. Kiekvienoje dėžėje buvo ... pirštinių porų. Kiekvienas ateivis turi ... rankas. Kai visi užsimovė po pirštinę ant kiekvienos rankos, laisvų pirštinių nebeliko.

Čekų kalba: Na planetě D je ... mimozemšťanů. Koupili ... balíky rukavic. V každém balíku bylo ... párů. Každý mimozemšťan má ... ruce s nasazenými rukavicemi. Žádná rukavice v balíku nezbyla.

Anglų kalba: Planet D is home to ... aliens. They bought ... boxes of gloves. Each box contained ... pairs of gloves. Each alien has ... hands. Once everyone had put on a glove on each hand, there were no more free gloves left.

Kalbinis ir matematinis aspektai

Jei mokiniai pastebi, kad pirmoje tuščioje vietoje netinka skaičiai 3 ir 4, tada jiems lieka tik nuspręsti, tarp skaičių 12 ir 18. Jie gali tai atlikti bandymų ir tikrinimų būdu, bei toliau užpildyti likusias tuščias vietas.

Teisingas šio uždavinio sprendimas yra šis:

Planetoje D gyvena **aštuoniolika** ateivių. Jie nusipirko **tris** dėžes pirštinių. Kiekvienoje dėžėje buvo **dvylika** pirštinių porų. Kiekvienas ateivis turi **keturias** rankas. Kai visi užsimovė po pirštinę ant kiekvienos rankos, laisvų pirštinių nebeliko.

Uždavinio kontekstas

Uždavinys apie ateivius buvo pasirinktas siekiant sudominti 5 klasės moksleivius. Situacija neatitinka realaus pasaulio objektų, joje minimi ateiviai, todėl mokiniai neturi galvoti apie realaus pasaulio faktų atitikimą. Bet svarbu, kad mokiniai pastebėtų, kad sąlygoje minimos pirštinių poros ir sprendime panaudotų faktą, kad pirštinių pora turi 2 vienetus pirštinių. Pateiksime pavyzdžių, kad mokiniai atkreipė dėmesį į tai dėmesį.

Rezultatai

Pateiksime mokinių teiginius, kurie labiausiai atspindi tris uždavinio sprendimo aspektus: kalbinį, matematinį ir konteksto sprendžiant antrąjį tyrimo uždavinį 2.2.4. Pateikiami abiejų šalių moksleivių teiginių pavyzdžiai kiekvienam iš aspektų ir jie pakomentuoti.

Kalbiniai aspektai turėjo įtakos uždavinio sprendimui. Ir Lietuvos ir Čekijos moksleiviai įvertino kalbinius aspektus ir pirmiausia į tuščias vietas įrašė skaičius pritaikydami kalbines taisykles. Lentelėje: 2.5 pateikti mokinių argumentų pavyzdžiai kai kalbama apie kalbinį aspektą. Galime pastebėti, kad abiejų šalių mokiniai atkreipė dėmesį į kalbinį aspektą ir nusprendė, kad 3 (arba 4) ateivių yra neteisingas išsireiškimas. Jie išreiškė savo mintis naudodami tokias išraiškas: „nesirimuoja“ , „neturi prasmės“ , „negali būti“ . Po to kai mokiniai tai pastebėjo jiems reikėjo pasirinkti tik tarp 2 skaičių kiek bus ateivių 12 ar 18.

Dažniausiai sprendžiant matematinius uždavinius reikia įvertinti tik matematinius aspektus. Mokiniams pateiktame uždavinyje buvo ir kitų svarbių aspektų, bet skaičiai įrašyti į vietas taip pat turėjo tikti ir pagal matematinius veiksmus. Lentelėje pateikti abiejų šalių mokinių argumentų pavyzdžiai, kur kalbama apie matematinį uždavinio aspektą. Čekijos moksleiviai bandė užrašyti lygtį, Lietuvos moksleiviai naudojo spėjimo - tikrinimo strategiją. Šie pasirinkimai gali priklausyti nuo mokomojo turinio, kurį mokiniai tuo matu nagrinėjo klasėse, ar kitų šalies, ar konkrečios klasės įpročių. Lietuvos moksleiviai gavo galutinį teisingą atsakymą, Čekijos moksleiviai nespėjo to padaryti. Tai gali

Čekijos mokinių argumentai	**Lietuvos mokinių argumentai**
Mes manome, kad čia yra klaida [ateivių - mimozemšťanů]	Negali būti 4 arba 3. Nesirimuoja.
3 ateivių [3 mimozemšťanů], neturi prasmės	Ateiviai turėtų būti, bet čia ateivių.
12 dėžes [balíky] arba 18 dėžes [balíky] neturi prasmės, bet 3 dėžes [balíky] ir 4 dėžes [balíky] tinka.	Keistai skambėtų [jei būtų 3 arba 4 ateivių].
kažkiek porų [párů] kiekvienoje pakuotėje, negali būti 3 porų [párů] arba 4 porų [párů], todėl vėl 12 arba 18.	18 porų būtų geriau.

2.5 lentelė: Čekijos ir Lietuvos mokinių argumentai susiję su kalbiniu aspektu

priklausyti nuo pasirinktų sprendimų strategijų. Iš diskusijų ištraukų 2.2 galime pastebėti, kad abiejų šalių moksleiviai diskutavo aktyviai ir naudojo matematinius argumentus.

Čekijos mokinių argumentai	**Lietuvos mokinių argumentai**
Aš žinau, kad vienas iš šių skaičių [3 arba 4 antrame laukelyje], turi būti padaugintas iš šio skaičiaus [12 arba 18 trečiame laukelyje]. Tada aš sudauginęs tuos du skaičius ir tuos kitus du ir skaičiaus, kurį gaučiau pusė turėtų būti vienas iš šių skaičių.	Nes jei bus 18 ir turės po 4 rankas, tai tada 12... jiems reikia 72 pirštinių. Ir jeigu bus 3 dėžės po 12... [skaičiuoja mintyse].

2.6 lentelė: Čekijos ir Lietuvos mokinių argumentai susiję su matematiniu aspektu

Spręsdami tekstinius uždavinius mokiniai naudoja savo gyvenimišką patirtį. Abiejose šalyse mokiniai pastebėjo, kad „pora pirštinių“ yra dvi pirštinės, taip pat aptarė, kad jų manymu rankų skaičius turėtų būti lyginis.

Čekijos mokinių argumentai	**Lietuvos mokinių argumentai**
Jei būtų 3 rankos nebūtų porų, nes poros yra po 2	Nes kiekvienas ateivis turi 4 rankas. Nes kitaip keista. Kiekvienoj pusėj turi būti lygiai [rankų].
Jie turi 4 rankas ir mažesnis skaičius turėtų būti čia [antrame laukelyje], nes jei būtų 4 dėžėje ir jie turėtų 3 rankas, jie neatitiktų porų.	Nes 4, negali mažai gyventi [ateivių].

2.7 lentelė: Čekijos ir Lietuvos mokinių argumentai susiję su konteksto aspektu

Diskusija

Uždaviniai „koks skaičius kur tinka“ savo sandara susiję su matematiniu samprotavimu. Uždavinys prašo rasti dėsningumus, iškelti hipotezę ir ją patvirtinti. Taip pat, nors šiame tyrime to nedarėme, galima papildomai prašyti surasti visas teisingas hipotezes ir jų teisingumą pagrįsti.

Ruošiantis tyrimui buvo apžvelgti lietuvių ir čekų kalbų skirtumai ir panašumai. Abi kalbos turi taisykles, kurios nusako kaip skaičiai derinami su daiktavardžiais. Abiejose kalbose galima išskirti tris skirtingas skaičių grupes, kurios turi tam tikras taisykles parenkant daiktavardžių galūnes. Nors pačios skaičių grupės nėra vienodos, bet parinkome skaičius, kurie atitiktų tas pačias grupes ir vienoje ir kitoje kalbose ir sukūrėme uždavinius, kurie abiejų šalių moksleiviams būtų analogiški.

Remiantis Stylianides [124] aprašomu matematinio samprotavimo apibrėžimu, šiame uždavinyje prašome mokinio ieškoti dėsningumų (kuris skaičius kur tinka, kuris kur negali būti), iškelti hipotezę (pilną spėjimą, kur kokį skaičių įrašyti) ir hipotezę pagrįsti, paaiškinti.

Kalbos įtaka tekstiniams uždaviniams yra didelė. Tai, ar mokinys tinkamai supras uždavinio situaciją, bei teisingai išspręs uždavinį taip pat priklauso ir nuo uždavinyje naudojamų žodžių, sakinio sandaros, kitų kalbos detalių. Lietuvių kalba turi savo taisykles ir žodyną, todėl šią temą vertėtų išnagrinėti plačiau ieškant tiek sunkumų su kuriais gali susidurti mokiniai spręsdami tekstinius uždavinius, tiek kalbos išnaudojimo galimybių, ko pavyzdys ir yra šiame skyrelyje aptariami uždaviniai.

Pristačius šio tyrimo rezultatus Europos matematikos mokymo bendruomenės 13 tame kongrese (CERME 13) kitų šalių atstovai buvo nustebinti lietuvių ir čekų kalbų išskirtinumu, daugumoje kitų kalbų panašių taisyklių naudojant skaičius su daiktavardžiais nėra, yra tik skirtingos taisyklės vienaskaitai ir daugiskaitai. Taip pat viena iš PISA egzaminų tyrėjų grupės narių Viviane Durand-Guerrier teigė, kad ateityje bus skiriamas didelis dėmesys tam, kaip nuo kalbos priklauso uždavinio sudėtingumas ir tai, kad vien išvertę uždavinius iš vienos kalbos į kitą negalime jų pateikti mokiniams kaip vienodo sudėtingumo uždavinių.

Tekstiniai uždaviniai formuluojami kaip „koks skaičius kur tinka“ tipo natūraliai kelia poreikį argumentavimui. Matome, kad abiejų šalių moksleiviai atsižvelgė į visus tris aspektus: matematinį, kalbinį ir konteksto, tai parodo, kad uždavinio tipas skatina vertinti uždavinio situaciją ir į ją įsigilinti. Šio tipo uždaviniai gali būti viena iš priemonių lavinti matematinį mąstymą, matematinę kalbą, samprotavimą, bei įsigilinti į uždavinio realią situaciją. Tai vienas iš būdų mokyti mokinius vieną reprezentaciją pakeisti į kitą: tekstinį pasakojimą pakeisti į matematinę išraišką.

Mokiniams geriau susipažinus su šio tipo uždaviniais galima tikėtis griežtesnio ir sklandesnio pagrindimo, kodėl būtent jų pasirinktas atsakymas yra teisingas.

2.3 Dedukcinio argumento naudojimas mokant matematinio komunikavimo. Empirinis tyrimas

Tekstiniai uždaviniai taip pat gali būti priemonė, kuris moko matematinės diskusijos eigos ir taisyklių [37]. Tiek gyvenimiškose diskusijose, tiek mokinių matematiniuose sprendimuose galime rasti nenuoseklumo, arba nepagrįstų išvadų priėmimo. Net matematikos istorijoje randami žymių matematikų neteisingi įrodymai, nes nebuvo laikomasi matematinės logikos taisyklių [38].

Įrodymo uždaviniai mokiniams yra vieni sudėtingiausių, Balacheff teigia dar drastiškiau: matematinio įrodymo mokymas yra nesėkmė (angl.: failure) beveik visose šalyse [6]. Dažnai pritrūkstama pačio supratimo kaip ir kodėl reikia argumentuoti, įrodinėti, dažnu atveju pateikiamas vienas ar keletas pavyzdžių ir mokiniui atrodo, kad teiginio teisingumas aiškus (ar net akivaizdus). Tai galime pastebėti pirmo kurso universiteto studentų įrodymo uždavinių sprendimuose per pirmąsias paskaitas.

Pavyzdžiui dažnas pirmo kurso studentas spręsdamas uždavinį 2.3.1, kurį galima būtų performuluoti tokia forma: $A \implies B$, įrodo teiginį: jei n lyginis, tai n^2 lyginis ($B \implies A$), bei teigia, kad priešingas teiginys akivaizdus.

Uždavinys 2.3.1. Tegul n sveikasis skaičius. Įrodykite, kad jei n^2 lyginis, tai n lyginis.

Šiuo atveju teisingi abu teiginiai, bet taip yra ne visada, tai atspindi uždaviniai 2.3.2 ir 2.3.3.

Uždavinys 2.3.2. Tegul n natūralusis skaičius. Įrodykite, kad jei n paskutinis skaitmuo 2, tai n dalus iš 2.

Uždavinys 2.3.3. Tegul n natūralusis skaičius. Įrodykite, kad jei n dalus iš 2, tai n paskutinis skaitmuo 2.

Galimas mokinio įrodymas abiem uždaviniams yra: Jei skaičiaus n paskutinis skaitmuo 2, tai jis užrašomas $10a + 2$, kur $a \in \mathbf{N}$, $10a + 2 = 2(5a + 1)$, todėl n dalijasi iš 2.

Antrojo uždavinio įrodyti tinkamai nepavyks, nes teiginys nėra teisingas, paneigti teiginiui pakaktų kontrapavyzdžio: skaičius 14 yra lyginis, bet jo paskutinis skaitmuo nėra 2.

Mokiniai nėra mokomi matematinės diskusijos (ar uždavinių pagrindimo, įrodinėjimo) eigos, dažniausiai išreikštiniu pavidalu apie tai visai nėra kalbama mokykloje [69]. Mokyti logikos formaliai, be mokiniams suprantamo konteksto yra sudėtingas ir netinkamas būdas [37], bet logikos elementai gali padėti mokytis tinkamai argumentuoti ir matematiškai samprotauti.

Tyrimo, kuris buvo atliktas tikslas - aprašyti tekstinius uždavinius, skirtus mokyti ir mokytis matematinės diskusijos. Tyrimui naudojamas algebrinis tekstinis uždavinys (žiūrėti uždavinį 2.3.4).

Uždavinys 2.3.4 (AWP+2T). Du autobusai vienu metu išvyko iš miesto į vasaros stovyklą, esančią už 72 km. Pirmo autobuso vidutinis greitis 4 km/h didesnis už antrojo vidutinį greitį. Pirmas autobusas atvyko į vasaros stovyklą 15 min anksčiau už antrąjį.

1. Kokiu vidutiniu greičiu važiavo kiekvienas autobusas?
2. Atsakykite į pastarąjį klausimą su pagrindimu, t.y. išvedant (išaiškinant) užduoties situacijos simbolinę reprezentaciją (lygtį).
3. Įrodykite simbolinę reprezentaciją sukonstruojant taisyklingą dedukciją.

Uždavinys turi tris klausiamąsias dalis (instrukcijas). Trečioje klausiamojoje dalyje prašoma sukonstruoti dedukcinį argumentą, t.y. aprašyti uždavinio sprendimą naudojant teiginius ir teiginių logikos taisykles. Kitaip nei anksčiau nagrinėtuose uždaviniuose čia prašoma ne tik gauti uždavinio atsakymą, bet ir jį pagrįsti.

Teorinė aplinka

Šiame tyrime remsimės Stylianides [124] aprašyta teorine aplinka aprašančia įrodymą matematikoje. Jis įrodymą aptaria trimis aspektais: matematiniu, psichologiniu ir pedagoginiu. Matematinį komponentą galime išskirstyti į: dėsningumų atpažinimą, hipotezės iškėlimą ir pagrindimą (arba pagrindimą, kad hipotezė neteisinga).

Mūsų atveju uždavinio 2.3.4 1. etapas atitinka dėsningumų atpažinimo etapą, 2. hipotezės iškėlimą ir 3. etapas atitinka pagrindimą. Tam, kad mokinys atliktų uždavinio 3. dalį jis turi sukonstruoti argumentus, juos pagrįsti ir gauti išvadą, kad 2. etape aprašyta lygybė yra teisinga.

Tekstiniame uždavinyje aprašoma situacija ne visada atitinka realaus pasaulio faktus, pavyzdžiui greičio uždaviniuose objekto greitis nusakomas kaip pastovus, nors realiame pasaulyje tai išgauti sudėtinga. Priimta tiesa pagal kontekstą (angl.: accepted truth in context) yra klasė matematinių teiginių ir teiginių apie tekstinį uždavinį klasė, kuriuos duotuoju momentu mokiniai/sprendėjai naudoja.

Įrodymas pagal kontekstą yra pagrįstas dedukcinis argumentas, kurio prielaidos laikomos priimta tiesa pagal kontekstą, o išvada yra uždavinio simbolinė reprezentacija [69]. Dedukcinis argumentas laikomas pagrįstu tada ir tik tada kai prielaidoms esant teisingoms, išvados niekada nebus klaidingos.

Tyrimo dalyviai

Tyrime dalyvavo 26 bakalauro pirmo kurso duomenų mokslo specialybės studentai, kurie mokosi matematikos pagrindų dalyką. Studentai kurso eigoje buvo susipažinę su teiginių logika, teiginių išvedimo taisyklėmis (Modus Ponens, Modus Tollens ir kt.). Paminėsime, kad matematikos pagrindų dalyką besimokydami studentai įgyja įprotį įrodinėti faktus ir juos pagrįsti.

Prieš tai studentams buvo pateikti du pavyzdžiai demonstruojantys kaip algebrinį uždavinį išspręsti ir jo sprendimo teisingumą pagrįsti naudojant dedukcinį argumentavimą. Studentai užduoties sprendimui galėjo skirti 60-90 minučių. Buvo suformuotos 7 grupės po 3-4 studentus į grupes juos priskiriant atsitiktinai. Kiekvienos grupės diskusija buvo įrašyta audio formatu.

Duomenys

Tyrimo metu buvo įrašyti septyni 40-90 min trukmės audio įrašai. Juose užfiksuoti pokalbiai buvo transkribuoti (iš viso apie 16 935 žodžių) ir analizuojami. Taip pat buvo gauti studentams pateikto klausimyno atsakymai ir atlikta jų analizė.

Kodavimas ir kategorizavimas

Sukūrėme kodavimo sistemą, kai kodus priskyrėme frazėms, ar ilgesnėms diskusijos dalims. Analizavome mokinių pokalbius dalykiniu atžvilgiu ir kaip diskusiją, tai yra kokia eiga vyksta diskusija, kokie diskusijos elementai naudojami.

Dalykiniu atžvilgiu nagrinėjant diskusiją kodus galima išskirti į šias kategorijas:

0. Įvadinės diskusijos
1. Situacijos simbolinės reprezentacijos sudarymas ir uždavinio sprendimas. (atitinka uždavinio 2.3.4 1. ir 2. dalis).
2. Prielaidų formulavimas (atitinka uždavinio 2.3.4 3 dalį).
3. Išvadų darymas remiantis prielaidomis (atitinka uždavinio 2.3.4 3 dalį).

Kodus priskyrėme naudodami tokios išraiškos kodą: xyz, čia $x \in \{0, 1, 2, 3\}$ yra viena iš 3 aukščiau išvardintų kategorijų. $y \in \{M, L, G\}$ atitinka tris sritis: matavimai, logika, bendros žinios, z nusako konkretų veiksmą, aptariamą sritį, ar temą. Lentelėse 2.3, 2.3, 2.10 nurodytos yz galimos reikšmės. Šio uždavinio formuluotėje naudojamos sąvokos greitis, laikas, atstumas, todėl sprendimui ir jo pagrindimui reikalingos žinios apie matavimus. Tai atsispindi ir priskiriamuose koduose (lentelė 2.3).

Logikos kodai	Pavyzdžiai iš studentų diskusijų
LPS (įrodymo paieškos)	Jūs suprantate, kad mums reikia implikacijos, kad būtų faktas, kuris yra implikacijoje.
LI (implikacijos poreikis)	Man atrodo reikia rašyti „jeigu“ ... tokia formulė, „tai“ ... su mūsų reikšmėmis.
LIF (implikacija ar faktas)	Bet aš siūlau užrašyti kaip faktą.
LCP (prielaidos)	Aš manau, kad mums reikia atskirai daryti, ne iš P_1, bet pirmo autobuso būtų P_1, o antro autobuso būtų P_2. Dvi prielaidas reikėjo daryti.
LNF (faktų kilmė)	Bet čia iš sąlygos.
LSC (implikacija greičių palyginimas)	Jeigu pirmas važiavo x, tai kitas važiavo $x + 4$.
LTC (implikacija laiko palyginimas)	Jeigu t_1 yra 72 dalinta iš x ir t_2 yra 72 dalinta iš $x+4$, tai t_1 minus t_2 yra 0,25.
LS (implikacija greitis)	Jeigu kelias yra 72, tai vieno greitis lygus s dalinti iš v, tarkim.
LT (implikacija laikas)	Jei kelias $s = 72$ ir greitis v, tai $t_1 = \frac{s}{v}$.
LIT (laiko išvedimas)	Imi P_1, P_3, MP ir gauni, kad t_1 yra lygu 72 padalinta iš v.
LAP (prielaidų išdėstymas ir formulavimas)	Tai pala, keturios prielaidos bus?
L$\vdash$ (dedukcinis argumentas)	Tai tada mums va šitą reikia parašyti P_1, P_2, šitas ženklas $\vdash$...
LMP (MP pritaikymas)	Studentas pritaiko Modus Ponens taisyklę, nes MP ne iš trijų [teiginių] ...
LV (taisyklingas argumentas	Ir tada pagal Q_1 ir Q_2 gausime lygtį.
LD23 (skirtumas tarp 2 ir 3 dalių)	Paprastai parašyta. O paskui su P_1.

2.8 lentelė: Logikos kodai

Diskusiniu atžvilgiu nagrinėjant išskirsime dialoginius žingsnius: savo nuomonės išreiškimą, prašymą atsakyti, reakciją į kito dalyvio

Kodas Mxy (matavimai)	Studentas remiasi pagrindiniais faktais, arba teiginiais apie matavimus.
MT (laiko vertinimas)	Vienas per $\frac{72}{x}$ valandų.
MS (greičio vertinimas)	Rašau v_1, kad būtų aišku.
MD (atstumo vertinimas)	Tada mums dar reikės atstumą pasižymėt.
MSC (greičių palyginimas)	Nes pas mus parašyta, kad greitis 4 km/h. Didesnis už antro. Tai mes parodom, jei tą greitį paimam už x, tai bus $x + 4$.
MTC (laiko palyginimas)	Vienas laikas minus kitas laikas lygu 0,25.
MDC (atstumų palyginimas)	Jie važiavo tą patį kelią $s = 72$.
MSR (simbolinės reprezentacijos konstravimas)	Apjungiant lygtis į vieną sistemą, mes turime bendrus nežinomuosius, gauname sistemą?
ME (lygtis)	Ir čia jau yra lygtis.
MSF (greičio formulė)	Kadangi $s = vt$, tada $v = s$ dalinti iš t. (G5; ..)
MTF (laiko formulė)	Jei atstumą s judama greičių v, tai t lygu formulė ...
MFS (sprendimo paieška)	Tiesiog išsprendę lygtį ir viskas.
MAA (sudėties aksioma)	Tai čia kaip su tuo matavimu, kad tuos sudėjus yra tas, mum dar vieną prielaidą reikia parašyt.

2.9 lentelė: Matavimų kodai

žingsnį, bei šių žingsnių subkategorijas ir papildomą dialoginį žingsnį, kuris neatitinka nė vieno iš ankščiau minėtų kodų (lentelė 2.11).

Taisyklinga ir patikima dedukcija

Pateiksime šio uždavinio galimą pagrindimą. Pagal 2.3.4 užduoties situaciją du autobusai nuvažiuoja 72 kilometrų, tačiau skirtingais greičiais, kuriuos reikia rasti. Antrojo autobuso vidutinį greitį pavaizduosime atkarpa AB, o pirmojo autobuso vidutinį greitį pavaizduosime atkarpa AC:

Kodas Gxy (bendrosios žinios)	Studentas remiasi bendromis matematikos žiniomis
GWP	bendrosios žinios apie tekstinius uždavinius
GP	bendri komentarai apie įrodymus
RR	- angl.: requests for response (siūlymas veikti tam tikru būdu arba kitaip),
WE	Nuoroda į nagrinėtą pavyzdį

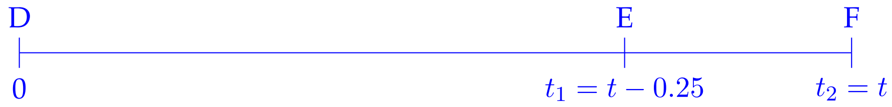
2.10 lentelė: Bendrųjų žinių kodai

D kodas (Dialoginiai žingsniai)	Kodus atitinkantys pavyzdžiai iš studentų diskusijos
D-SD (Savo nuomonės išsireiškimas)	Jo, nes mes gaunam, kad iš vieno laiko atimam kitą.
D-RR (prašymas atsakyti)	
D-RR-RQ (retorinis klausimas)	Viskas, nu ką bepridursi?
D-RR-IN (kvietimas atsakyti)	Tipo pagal sąlygą, ane?
D-OO (reakcija į kito dalyvio žingsnį)	
D-OO-SA (paprastas sutikimas)	Ai jo, dar vienos reikia.
D-OO-RA (pagrįstas sutikimas)	Mes turėsim vieną teiginį, kad jų laikai skiriasi per 0,25.
D-OO-SO (paprastas prieštaravimas)	Ne, ne.
D-OO-RO (pagrįstas prieštaravimas)	Ne, nes mes jau čia dedam tuos [aut. past.: indeksus], tai reikia prie visur dėt.
D-OO-LU (nesupratimas)	Aš nesuprantu, čia v yra greitis?
D-OTR (kiti)	Dialoginis žingsnis, neatitinkantis jokio kito D kodo.

2.11 lentelė: Dialoginiai žingsnių kodai adaptuoti pagal [71],[3].

2.3.4 užduoties sąlygoje pasakyta, kad $|BC| = 4$ km/h.

Pirmojo autobuso važiavimo trukmę pavaizduosime atkarpa DE, o antrojo autobuso važiavimo trukmę pavaizduosime atkarpa DF:



2.3.4 užduoties sąlygoje pasakyta, kad $|EF| = 0,25$ h.

Siūlome šią simbolinės reprezentacijos taisyklingos dedukcijos konstrukciją:

$$\begin{cases} \frac{72}{t-0,25} = x + 4, \\ \frac{72}{t} = x. \end{cases} \tag{2.1}$$

$$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7 \vdash \quad (2.1) \quad \text{lygčių sistema,} \tag{2.2}$$

čia prielaidos

P_1 Jei atkarpų AC ir AB skirtumo BC ilgis $|BC| = s_2$ ir atkarpos AB ilgis $|AB| = s_1$, tai atkarpos AC ilgis $|AC| = s_1 + s_2$.

P_2 Jei atstumas S nuvažiuojamas per laikotarpį T, tai važiavimo vidutinis greitis $V = \frac{S}{T}$.

P_3 Faktas: antro autobuso vidutinis greitis $v_2 = x$ km/h su kuriuo nors $x \in \mathbb{R}$.

P_4 Faktas: pirmo autobuso vidutinis greitis v_1 yra 4 km/h didesnis už antrojo vidutinį greitį v_2.

P_5 Faktas: antrojo autobuso važiavimo trukmė $t_2 = t$ h su kuriuo n ors $t \in \mathbb{R}$.

P_6 Faktas: pirmas autobusas atvyko ketvirtį valandos anksčiau, t,y, $t_2 - t_1 = 0,25$ h.

P_7 Faktas: abu autobusai važiavo 72 km.

Remiantis šiomis prielaidomis, aprašome teiginius:

Q_1 : Remiantis P_1, P_3, P_4, t.y.

$$\underbrace{v_2 = x \text{ ir } v_1 - v_2 = 4}_{U},$$

$$\text{jei } \underbrace{v_2 = x \text{ ir } v_1 - v_2 = 4}_{U}, \text{ tai } \underbrace{v_1 = v_2 + (v_1 - v_2) = x + 4}_{W},$$

ir MP ($U, U \Rightarrow W \vdash W$) gauname $v_1 = x + 4$ km/h.

Q_2 : Remiantis P_1, P_4, P_5 ir MP, gauname $t_1 = t - 0,25$ h.

Q_3 : Remiantis P_2, P_7, P_3, P_5 ir MP, gauname $x = \frac{72}{t}$ km/h.

Q_4 : Remiantis P_2, Q_1, Q_2, P_7 ir MP, gauname $x + 4 = \frac{72}{t-0,25}$ km/h.

Q_5 : Remiantis Q_3, Q_4 ir išvedimo taisykle konjunkcija , gauname lygčių sistemą (2.1).

Sprendimas formalus ir visiškai kitoks nei sprendimai, kuriuos pateikia mokiniai mokykloje, todėl pateiksime išsamią vienos iš studentų grupių diskusiją, kuri parodo kaip jie sprendė šį uždavinį ir formulavo dedukcinį argumentą. Diskusija iliustruoja tekstinių uždavinių pritaikymą mokant logikos ir argumentavimo. Studentų naudota kalba netaisyta.

Transkribuota ir koduota diskusija

Pasirinkome kaip pavyzdį pateikti antrosios grupės diskusiją. Joje yra nemažai dialogo ir įvairių logikos elementų, nedominuoja vieno studento sprendimas. Taip pat diskusija išreikšta gana aiškia ir nuoseklia kalba, ne visų grupių darbuose buvo galima tai pastebėti. Išskirti atskirų studentų pasisakymai pažymėti A,B ir C raidėmis. „M-kod“ stulpelyje pateikiami kodai nagrinėjant tekstą dalykiniu aspektu, „D-kod“ stulpelyje - diskusiniu aspektu (2.12 lentelė).

2.12 lentelė: Studentų grupės diskusija sprendžiant ATU naudojant dedukcinį argumentavimą

Nr.	Stud.	Transkripcija	R kodas	D kodas
1	A	Tai, kad čia easy, jeigu taip paprastai išspręst, labai paprastas uždavinys.	0GWP	
2	Autoriaus pastaba: kurį laiką kiekvienas sprendžia savarankiškai			
3	A	Vienas per $\frac{72}{x}$ valandų, kitas per $\frac{72}{\dots}$ tik aš jau iškart pasirašiau,	..	D-SD
		$\boxed{\text{kad reikia iškart tuos daryt}}$ $\boxed{\text{tuos implikacijas}}$, pavyzdžiui aš rašiau: tarkim, kad pirmas automobilis važiavo greičiu $x = v_1$, tai jeigu pirmas važiavo x, tai kitas važiavo $x + 4$, nes tada mes turėsim čia tą implikaciją. Sakyt, kad teisinga implikacija, teisingas tas, reiškia teisingas B. Tai $x + 4$, kad greitis, jau tą turėtume teisinga. Tada tą patį darom su keliu. Kad sakom, kad 72, tai rašom, kad jeigu kelias yra 72, tai vieno laikas lygus s dalinti iš v tarkim, o kito yra jei kelias lygu 72, tai laikas lygus s dalinti iš v+4. Ir tada gaunam, kad vieno toks	1LI	...
		laikas, kito toks laikas ir turim, kad skirtumas yra 0,25. $\boxed{\text{Taip darom?}}$	1MSR	D-RR-IN
4	B	Jo.		D-OO-SA

Tęsiasi kitame puslapyje

lentelė 2.12 – tęsinys nuo ankstesnio puslapio

Nr	Stud.	Transkripcija	R-kod	D-kod
5	C	Tai pala, keturios prielaidos bus?	..	D-RR-IN
6	B	Penkios.	..	D-OO-SO
7	C	Penkios?	..	D-OO-LU
8	A	Ai jo, dar vienos reikia.	..	D-OO-SA
9	A	Mes turėsim vieną teiginį, kad jų laikai skiriasi per 0,25.	1MTC	D-OO-RA
10	B	Jo, čia, nu dar viena prielaida, jo?	..	D-OO-SA
11	A	Man rodos jau beveik padariau realiai. Žiūrėkit kaip aš pasirašiau. Pasirašiau tarkime pirmas automobilis važiavo greičiu $x = v_1$, tada, jei pirmas važiavo x greičiu, tai kitas važiavo $x + 4$ greičiu= v_2, arba net nereikia v_2, $x + 4$.	1LSC	D-SD
12	C	O kam tų iksų? Negalima tiesiog v ir $v + 4$?		D-RR-IN
13	A	Nu tai x plius $x + 4$. Kas čia neaišku?		D-OO-SO
14	B	Tas pats gi viskas.		D-OO-SO
15	A	Tai tada teiginys, kad tiesiog jie važiavo tą patį kelią $s = 72$, mes čia turėsim, tiesiog tokią prielaidą, kuri yra tiesiog teisinga. Nes net nereikės nieko įrodinėt. Čia tiesiog prielaida ir jinai yra teisinga.	1MD,	D-SD
		Imsim, kad visos prielaidos teisingos.	1LV	

Tęsiasi kitame puslapyje

lentelė 2.12 – tęsinys nuo ankstesnio puslapio

Nr	Stud.	Transkripcija	R-kod	D-kod
		Tada kita prielaida, kad jei kelias $s = 72$, tai $t_1 = \frac{s}{v}$. Jei kelias… ir šitą įrodysim irgi, nes mes turėsim, kad šitas teisingas, šitas irgi imsim, kad visa prielaida teisinga, tai reiškia gausim, kad šitas teisingas, nu, kad s dalint iš v. $x+4$, o čia dalint iš x.	1MT	
16	C	Šitą įrodyt, reikės šitą formulę? [S=VT]	1MSF	D-RR-IN
17	A	Čia yra prielaida, kurią mes, tiesiog, kur turim.	..	
18	A	Tai, jeigu kelias yra 72, tai t_2 laikas bus lygus s dalinti $x+4$, jeigu t_1 yra 72 dalinti iš x ir t_2 yra 72 dalinta iš $x+4$, tai t_1 minus t_2 yra $0,25$. Ir dabar reikia pasirašyti tai kaip prielaidas.	.. 1MTC	D-SD
19	B	Tai čia yra prielaidos? dabar reikia išvadas daryt.	1GDT	D-RR-IN
20	A	Ne, čia teiginiai.		D-OO-SO
21	B	Čia teiginiai?		D-RR-RQ
22	Autoriaus pastaba: [A ir C aiškinasi $t_1 - t_2$ ženklą]			
23	B	Dabar reikia parašyt prielaidas	..	D-SD
24	A	Gerai P_1. Šito sakė nereikia rašyt? Va čia teiginiai kitam lape jau prielaidos. Mes irgi dabar teiginius pasirašėm. Kokia ten pirma prielaida pavyzdžiui?	.. WE	D-OO-RA

Tęsiasi kitame puslapyje

lentelė 2.12 – tęsinys nuo ankstesnio puslapio

Nr	Stud.	Transkripcija	R-kod	D-kod
25	B	Gal ir reikia parašyt $S = VT$.	2MSF	D-SD
26	A	Rašom pirmą prielaidą $P_1 :\ S = VT$		D-OO-SA
		V didžioji? Visos didžiosios?		
27	B	Koks skirtumas? Čia bendras žymėjimas.		D-OO-SA
28	A	Mūsų antra prielaida: jeigu pirmas važiavo greičiu x, tai kitas važiavo šituo. Ar net nereikia šito rašyti, nes šitas yra tiesiog. Nes mes imsim, kad šitas. Jo, arba galim parašyt, prielaida…	2MSC	D-SD
29	B	Tai parašyk, aš manau.		D-OO-SA
30	A	Nu jo, gerai. P_2 ... Rašau v_1, kad būtų aišku.	..	D-SD
31	B	Rašyk jo. Kuo aiškiau, kad būtų.		D-OO-SA
32	A	$v_1 = x$. Galiu parašyt.	..	D-SD
33	B	ir $v_2 = x + 4$.	..	D-SD
34	A	Ar rašom prielaidą tą dar MP, jeigu šitas yra toks, tai šitas yra toks, kadangi turim, kad šitas yra teisingas, tai šitas yra teisingas, nes prielaida teisinga.	2LMP	D-SD
		Darom taip?		D-RR-IN
35	B	mm [patvirtinant]		D-OO-SA

Tęsiasi kitame puslapyje

lentelė 2.12 – tęsinys nuo ankstesnio puslapio

Nr	Stud.	Transkripcija	R-kod	D-kod
36	A	Ta prasme, kad parašyt, jeigu pirmas važiavo x, tai šitą galim pasižymėt, tarkim šitas, jei $v_1 = x$, tai $v_2 = x + 4$. Ir tą turim, šitas, kad teisingas, kad prielaida teisinga, nes mes imsim, kad visos prielaidos teisingos ir reiškia, kad $v_2 = x + 4$.	..	D-SD
37	B	mm [aut. past.: patvirtinant]		D-OO-SA
38	A	Taip ir rašom?		D-RR-Q
39	B	Galim.		D-RR-A
40	A	Jei $v_1 = x$, tai $v_2 = x + 4$. Tada turim P_4,$s_1 = s_2 = 72$.	2MD	D-SD
41	B	Ir galim parašyt, kad bendras $s = ...$	..	D-SD
41	A	Ne, nes mes jau čia dedam tuos [aut. past.: indeksus], tai reikia prie visur dėt.	..	D-OO-RO
		Tada rašom, jeigu $v_1 = x$, ne, jeigu $s_1 = 72$ ir $v_1 = x$, tai $t_1 = \frac{72}{x}$. Ar ne?	2MT ..	D-SD
42	B	Ir gal toj pačioj prielaidoj abu išreikšt?	..	D-SD
43	A	Ne, ne.	..	D-OO-SO
44	B	Skirtingas? Galim skirtingas.	..	D-OO-SA
45	A	Ir šitą patį, tiktai su kitu [aut. past.: indeksu]. Jei $v_2 = x+4$ ir $s_2 = 72$, tai $t_2 = \frac{72}{x+4}$. Ir tada mūsų paskutinis.	2MT	D-SD
46	B	Čia parašyk, kad skirtumas 0,25. Tipo pagal sąlygą, ane?	2MTC	D-RR-IN

Tęsiasi kitame puslapyje

lentelė 2.12 – tęsinys nuo ankstesnio puslapio

Nr	Stud.	Transkripcija	R-kod	D-kod
47	A	Mes turim. Ir čia jau yra lygtis. Ir mes šitą parašom ir tada mūsų išvada yra, kad lygtis.	2ME	D-SD
48	B	Mm... Ai tai mes ...		D-RR-RQ
49	A	Jo, nes mes gaunam, kad iš vieno laiko atimam kitą	..	D-SD
50	B	Mums reik parašyt, kad yra prielaida, kad skiriasi $\boxed{\text{laikai}}$.	2MTC	D-SD
51	A	Nu.		D-OO-SA
52	B	Tą 15 minučių.	..	D-SD
53	A	Ir mes iš šito jau gaunam po to lygtį.	..	D-OO-SO
54	B	Ir čia jau lygtį, viskas. Bus P_1, P_2, P_3, P_4,...	L-AP	D-RR-IN
55	A	Jei $t_1 = \frac{72}{x}$ ir $t_2 = \frac{72}{x+4}$, tai. Ir tada pala, lėtesnis yra daugiau, tai $t_1 - t_2 = 0,25$ h.	L-ITC	D-SD
		Tau dar kažkas neaišku?		D-RR-IN
56	C	Aš tiesiog galvoju, jei per greitį išreikštume.	2MSR	D-OO-RO
57	A	Galima ir per greitį, nėra vieno teisingo sprendimo tiesiog mes du [aut. past. du studentai] jau taip padarėm, lengviau kai du jau taip padarė.	..	D-OO-RO
58	C	Čia reikia gal greičio tą lygtį.	..	D-OO-RO
59	B	Ne, tu žiūrėk dabar, jeigu išsireikši greitį. Per diskriminantus suskaičiuosi laiką. Ir su tuo laiku	..	D-OO-RO

Tęsiasi kitame puslapyje

lentelė 2.12 – tęsinys nuo ankstesnio puslapio

Nr	Stud.	Transkripcija	R-kod	D-kod
		turėsi išsireikšti greitį. Mes jau pasižymėjom greitį kaip x.		
60	A	Ir mūsų lygty jau bus greitis. 72 dalint iš greičio, kas yra x-as mūsų, tai mes iškarto jau ir gaunam šitą iksą. x-as, kuris yra teisingas jau atsakymas.	..	D-OO-RO
61	C	Iksas greitis, ane? Nu tai ir galim sukeist vietom, pavyzdžiui. . .	..	D-OO-RO
62	A	Tada, koks iš to skirtumas?	..	D-OO-RO
63	B	Vis tiek yra keli būdai.	..	D-OO-RO
64	A	Yra keli būdai, gausim vistiek tą patį. Tiesiog šitas atrodo toks paprastesnis, žiūrėk viskas jau.	..	RR-RQ
65	B	P_1, P_2, P_3, ... ir gaunasi lygtis.	L⊢	D-SD
66	A	P_7 lygtis. Tarkim, visos prielaidos teisingos. P_1, P_2 tiesiog yra teisinga jau nereikia įrodyt. Tai hm.. Mes turim gaut, kad $v_2 = x + 4$ teisingas. Tai tada, rašom, $v_1 = x$, implikacija, jei $v_1 = x$, tai $v_2 = x + 4$. P_2 ir P_3 teisingas.		D-SD
		Reiškia, pagal MP, $v_2 = x + 4$.	3LIS	
67	C	Išvada, pagal MP.		
68	A	Jei $v_1 = x$ ir $s_1 = 72$, tai $t_1 = \frac{72}{x}$. Tada rašom, kadangi P_2 ir P_4 teisingi. Čia šitą pasižymim kaip U, U teisingas, nes P_2 ir P_4 teisingi. Kadangi U ir P_5 teisinga, pagal MP $t_1 = \frac{72}{x}$.	3LIT	D-SD

Tęsiasi kitame puslapyje

lentelė 2.12 – tęsinys nuo ankstesnio puslapio

Nr	Stud.	Transkripcija	R-kod	D-kod
		Supranti?		D-RR-IN
69	C	Nu gal.		D-OO-LU
70	A	Gerai, tai čia Q_2. Tai dar darom. Tas pats tiktai, jei $v_2 = x + 4$ ir $s_2 = 72$, tai $t_2 = \frac{72}{x+4}$. Šitą irgi reikia pažymėti kaip nors. W teisinga, nes Q_1 ir P_4 teisinga, nes mes neturim tokios prielaidos.	3LIT	D-SD
		Ar jūs nesutinkat?		D-RR-IN
71	B	Gerai.		D-OO-SA
72	A	Nu ir mes čia turėsim, kadangi Q_2 ir Q_3 teisingi, tai P_7 teisingas ir mes jau čia turim lygtį. Viskas bus.	..	D-SD
73	B	Nu ... tai dabar paskutinė išvada.		D-RR-IN
74	A	$t_1 = \frac{72}{x}$ ir $t_2 = \frac{72}{x+4}$, atėmus mažesnį laiką gausim 0,25 h. Tada šitą pasižymim Z. Z bus teisinga pagal Q_2 ir Q_3. Pagal MP, $t_1 - t_2 = 0,25$ teisinga.	3LITD	D-SD
75	B	Ar visas [prielaidas] panaudojom?	..	D-RR-Q
76	A	P_1 nepanaudojom.	..	D-RR-A
77	B	Tai įtraukim.	..	D-RR-A
78	A	[Remiantis] išvadom ir P_1 ir MP taisykle...	..	D-SD
79	B	teisinga šita lygtis.	3LIE	D-OTR
80	A	Viskas, nu ką bepridursi? Nu kas blogai?		D-RR-RQ

Galime išskirti šios diskusijos epizodus:

Epizodas [1-2] - įžanga ir individualus sprendimas.

Epizodas [3-4] - siūloma simbolinė reprezentacija ir jos konstravimo kelias (MSR). Numatomas pagrindimo būdas naudojant implikaciją (PS). Vieno žmogaus pasiūlymas.

Epizodas [5-10] - laikų skirtumas. Aptinkama, kad dar reikalingas teiginys apie laikų skirtumą.

Epizodas [11-14] - greičių skirtumas. Formuluojamas kaip implikacija tikslinant pasiūlytą planą. Matosi, kad suprantamas MP reikalingumas.

Epizodas [15-17] - trukmių įvertinimas. Formuluojamos implikacijos apie autobusų važiavimo trukmes, kurias numatoma pagrįsti greičio formule ir atstumo faktu.

Epizodas [18] - laikų lyginimas. Formuluojama implikacija, kurios teisingumo pagrindimas kelia abejones, jei nesiremti užduoties sąlyga.

Epizodas [19-22] - sakinių statusas neaiškus. Skirtumas tarp 1 ir 2 temų.

Baigiasi 1 tema, prasideda 2 tema.

Epizodas [23-27] - greičio formulė. Pagal pavyzdį (WE) nusprendžia, kad pirma prielaida bus greičio formulė.

Epizodas [28-39] - greičių lyginimas, naudojant implikaciją ir numatant MP naudojimą pagrindžiant.

Epizodas [40-41] - nuvažiuotas atstumas. Akcentas - du autobusai važiuoja tą patį atstumą.

Epizodas [41-44] - pirmo autobuso važiavimo trukmė.

Epizodas [45] - antro autobuso važiavimo trukmė.

Epizodas [46-55] - laikų skirtumas. Siūloma $t_1 - t_2 = 0,25$ laikyti atskira prielaida, kaip faktą, pagal sąlygą. Siūlymas nepriimamas paliekant šį faktą kaip implikacijos konsekventą (P_7 prielaida).

Epizodas [55-64] - Skirtingos simbolinės reprezentacijos siūlymas, lieka atmestas.

Epizodas [65] - konstatuojamas dedukcinis argumentas.

Epizodas [66-67] - greičio išvedimas.

Epizodas [68-69] - važiavimo trukmės išvedimas, pirmam autobusui.

Epizodas [70-71] - važiavimo trukmės išvedimas, antram autobusui.

Epizodas [72-74] - laikų skirtumo išvedimas.

Epizodas [75-80] - lygties išvedimas.

Studentų pateiktas simbolinės reprezentacijos pagrindimas

Studentai pateikė tokį simbolinės reprezentacijos pagrindimą.

$P_1:\ S = V{\cdot}T$
$P_2:\ v_1 = x$
$P_3:$ Jei $v_1 = x$, tai $v_2 = x + 4$
$P_4:\ S_1 = S_2 = 72$ km
$P_5:$ Jei $v_1 = x\ \wedge\ S_1 = 72$, tai $t_1 = \frac{72}{x}$
$P_6:$ Jei $v_2 = x + 4\ \wedge\ S_2 = 72$, tai $t_2 = \frac{72}{x+4}$
$P_7:$ Jei $t_1 = \frac{72}{x}\ \wedge t_2 = \frac{72}{x+4}$, tai $t_1 - t_2 = 0,25$ (h)

$$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7 \vdash \quad \text{lygtis} \quad \frac{72}{x} - \frac{72}{x+4} = 0,25$$

Tarkime, kad visos prielaidos teisingos.

$Q_1:\ P_2$ teisingas ir P_3 teisingas, reiškia pagal MP $v_2 = x + 4$.
$Q_2:$ Jei $\underbrace{v_1 = x\ \wedge\ S_1 = 72}_{U}$, tai $t_1 = \frac{72}{x}$. U teisinga, nes P_2 ir P_4 teisinga.
Kadangi U teisinga ir P_5 teisinga, pagal MP $t_1 = \frac{72}{x}$.
$Q_3:$ Jei $\underbrace{v_2 = x + 4\ \wedge\ S_2 = 72}_{W}$, tai $t_2 = \frac{72}{x+4}$. W teisinga, nes Q_2 ir P_4 teisinga. Kadangi W teisinga ir P_6 teisinga, tai $t_2 = \frac{72}{x+4}$ pagal MP.

Q_4 : Jei $\underbrace{t_1 = \frac{72}{x} \ \wedge \ t_2 = \frac{72}{x+4}}_{Z}$, tai $t_1 - t_2 = 0,25$ (h). Z teisinga, nes Q_2 ir Q_3 teisinga. Kadangi Z teisinga ir P_7 teisinga, pagal MP $t_1 - t_2 = 0,25$ (h) teisinga.

Q_5 : Remiantis visomis išvadomis ir P_1 ir MP taisykle teisinga lygtis

$$\frac{72}{x} - \frac{72}{x+4} = 0,25 \tag{2.3}$$

2 grupės pasiūlytas dedukcinis argumentas yra taisyklingas, bet galima būtų jį patobulinti. Nuosekliai tai aptarsime.

Vertindami dedukcinio argumento taisyklingumą tariame, kad visos prielaidos teisingos. Tada išvedimo taisyklės Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 rodo, kad siūlomos t_1, t_2 ir $t_1 - t_2$ išraiškos teisingos. Q_5 išvedime esanti nuoroda į P_1, visas išvadas ir MP, nėra tiksli ir negarantuoja lygties teisingumo. Vietoj šio žingsnio labiau tiktų nuoroda į išvedimo taisyklę konjunkcija, dėl kurios turėtume trijų išvadų Q_1, Q_2 ir Q_3 teisingumą vienu metu, o tuo pačiu ir lygtį 2.3.

Kaip studentai ir pastebėjo (diskusijos 76 eilutė) prielaida P_1 lieka nepanaudota. Taip yra todėl, kad P_5 ir P_6 implikacijos yra P_1 prielaidos atskiri atvejai ir tai daro P_1 nereikalinga šiame prielaidų rinkinyje.

Dedukcinis argumentas yra patikimas kai visos prielaidos yra teisingos. Tarp 2 grupės prielaidų yra keturios implikacijos (P_3, P_5, P_6 ir P_7), kurių teisingumas susietas su matavimo teorijos aksiomomis. Studentai nebuvo atskirai supažindinti su šiomis aksiomomis, bei mokyklinėje matematikoje jos neišskiriamos, todėl laikysime, kad studentų auditorijai šios implikacijos yra teisingos remiantis uždavinio sąlyga.

Ši studentų grupė vieną kartą lygino savo sprendimą su pateiktu pavyzdžiu (kodas WE) ir pokalbyje galime išskirti 12 monologų.

Apklausa

Mokant matematikos mokykloje (bent iki 2023 metų) logikos temos ir įrodymo uždaviniai nėra nagrinėjami. Tekstiniai uždaviniai nėra sprendžiami pagrindžiant juos logine kalba, todėl studentams šis mokyklinės matematikos uždavinys yra įprastas kai neprašoma jo sprendimo užrašyti formaliai. Po pirmojo tokio susidūrimo su dedukciniu argumentavimu pasitelkiant tekstinius uždavinius norėjosi išgirsti pirmo kurso studentų nuomonę apie tokį uždavinio pateikimą. Visi eksperimento dalyviai baigę atlikti savo užduotis užpildė jiems pasiūlytą klausimyną atsakydami į penkis klausimus.

1. Ar pavyko išvesti užduoties situacijos simbolinę reprezentaciją (2 dalis)?
2. Ar pavyko įrodyti užduoties situacijos simbolinę reprezentaciją naudojant dedukciją (3 dalis)?
3. Ar užduoties situacijos reprezentacijos įrodymas padeda geriau suprasti sprendimą?
4. Kuri užduoties dalis jums atrodo sunkesnė, 2 ar 3 dalis?
5. Ar pritariate įrodymo naudojant dedukciją mokymuisi mokykloje, prieš tai tinkamai pasirengus?

Studentų dalyvavusių tyrime atsakymai į klausimyno klausimus:

	1	2	3	4	5
TAIP	26	19	12		21
NE	0	0	8		1
Negaliu atsakyti	0	7	6	1	4
2-a sunkesnė				3	
3-a sunkesnė				21	
abi sunkios				1	
abi lengvos				0	

2.13 lentelė: Studentų atsakymai į klausimyno klausimus

Kadangi užduoties 2 dalis reikalavo tik mokyklinės matematikos žinių, natūralu, kad visi mokiniai išvedė situacijos simbolinę reprezentaciją. Dalis mokinių abejoja, ar jiems pavyko tinkamai įrodyti ją naudojant dedukciją, tai rodo, kad šis būdas jiems dar nėra įprastas. Tai matyti ir diskusijose, kuriose abejojama dėl dedukcijos žingsnių teisingumo. Į trečiąjį klausimą: „Ar užduoties situacijos reprezentacijos įrodymas padeda geriau suprasti sprendimą?“ 46.15 % studentų atsakė teigiamai, 30.77 % studentų atsakė neigiamai ir 23.08 % studentų nurodė, kad negali atsakyti. Šiuo atveju negalime vienareikšmiškai teigti, kad didesnė dalis studentų sutinka, kad įrodymas padeda geriau suprasti sprendimą, nes mokinių, kurie neatsakė teigiamai yra 53.85 %, galimai visi šie mokiniai nesijaučia tvirtai įrodinėdami, todėl įrodymas jiems nepadeda geriau suprasti.

Išvados

Grupių darbuose skyrėsi monologų skaičius, rėmimosi pavyzdžiais atvejai, bei pati diskusijos eiga, bet visuose darbuose galima išskirti matematinę diskusiją, kuri, nors turi klaidų ir netikslumų remiasi logikos elementais. Taip pat galima pastebėti, kad grupės, kurios lengviau rado sprendimą dėsto mintis nuosekliau ir aiškiau, pilnais sakiniais, tuo tarpu matematinės minties nenuoseklumas susijęs su kalbos skurdumu.

Siekiant, kad įrodymas padėtų geriau suprasti, pirmiausia mokiniai ar studentai, turi įgusti įrodinėti, tam, kad pasitikėtų savo įrodymo gebėjimais ir pastebėti, kad įrodymas nėra techninis procesas, bet padeda suprasti. Šis tyrimas, yra pavyzdys, kad tekstiniai uždaviniai gali būti priemonė mokyti matematinės diskusijos, bet tam reikia skirti dėmesį, bei nuosekliai pritaikyti užduotis. Įrodymo užduotis rekomenduojama pateikti mokiniams jau pradinėse klasėse [7, 123] ir vėliau kiekvienais metais jas pritaikyti pagal amžių, gebėjimus ir žinias. 80.77 % studentų atsakydami į 4 klausimą nurodė, kad trečia uždavinio dalis sunkesnė, bet žaismingas sutapimas yra tas, kad lygiai tiek pat mokinių pritaria dedukcijos mokymui mokykloje tinkamai tam pasirengus. Tad vadovaujantis šia apklausa klausimą „ar mokyti“ galime keisti klausimu „kaip mokyti“ ir ieškoti mokiniams pritaikytų tekstinių uždavinių, kurie būtų priemonė mokyti matematinės diskusijos, bei juos tinkamai parengti suteikiant reikalingas logikos žinias.

3 skyrius

Motyvavimas mokytis naujas matematines temas

Uždavinys 3.0.1. Lenktyniauja dvi sraigės Skraja ir Skuba. Po 8 minučių nuo lenktynių pradžios Skraja nukeliavo 7 dm, o po 12 minučių Skuba nukeliavo 10 dm. Kuri sraigė greitesnė? Kaip skiriasi jų greičiai?

Uždavinys apie dvi sraiges Skrają ir Skubą gali būti pateiktas prie visų kitų temos uždavinių, arba naudojamas kaip įvadinis uždavinys trupmenų palyginimo temai pristatyti. Pradėti mokyti naują matematinę temą galime nuo teorijos, taip pat galime tiesiog pateikti matematinius uždavinius (nebūtinai tekstinius) ir tada pateikti jiems reikalingą teoriją. Bet tokiu būdu neužduodame klausimo kam tą temą mokomės ir kas bus kai ją išmoksime. Nauja matematinė tema dažniausiai turi naujas sąvokas, kurias mokiniui reikia pažinti, taip pat naujas taisykles ir sprendimo būdus, vienas iš būdų inicijuoti naujos temos mokymąsi yra pristatyti ją pateikiant tekstinį uždavinį, kurio iš karto išspręsti nepavyksta, trūksta informacijos, arba žinių. Tokius nestandartinius uždavinius vadinsime P uždaviniais ir šiame skyriuje išnagrinėsime jų galimą pritaikymą matematikos mokymui pateikiant naujas temas.

Tekstinių uždavinių naudojimas matematinėms temoms pristatyti

Šiame skyriuje remsimės realistinio matematikos mokymo (angl.: Realistic Mathematics Education) teorija [138] (toliau sutrumpintai vadinama RME). Nyderlanduose sukurta mokymo teorija ypatingą dėmesį skiria realioms situacijoms ir jų panaudojimui matematikos mokyme. Šiuo atveju tai nėra realaus pasaulio situacijos, kuriose vertiname kuo daugiau situacijos aspektų, realiomis situacijomis šioje teorijoje laikomos tos, kurias mokinys gali įsivaizduoti. Realios situacijos, kurias mes formuluosime kaip tam tikrus tekstinius uždavinius, tampa priemone matematinėms sąvokoms pažinti ir naudojamos kaip kontekstas, kuriame mokiniai vėliau gali pritaikyti savo matematines žinias [138]. Palaipsniui žinios tampa formalesnės ir bendresnės bei mažiau specifinės kontekstui.

Šios teorijos pradininkas yra Hans Freudenthal, jis aprašė terminą „matematizavimas“ . Matematizuoti, tai padaryti matematiškesniu, šis terminas susijęs su tokiomis matematikos ypatybėmis kaip bendrumas, tikrumas, tikslumas, trumpumas. Matematizavimas pažodžiui reiškia „padaryti matematiškesnį “ .

Gravemeijer [49] [50], taip pat remdamasis ankstesniu Treffers darbu [131] matematizuojant išskiria šiuos aspektus ir juos paaiškina:

1. apibendrinimą: apibendrinti, ieškoti dėsningumų, klasifikuoti, struktūrizuoti);
2. patvirtinimą: atskleisti, pagrįsti, įrodyti, iškelti ir tikrinti hipotezes;
3. tikslumą: modeliuoti, aprašyti simboliais, apibūdinti (kad liktų kuo mažiau galimų interpretacijų ir argumentavimas būtų patikimas);
4. trumpumą.

Matematizuojant svarbus mokytojo vaidmuo, jis kaip gidas ar vedlys padeda mokiniui pereiti visus šiuos žingsnius. Lygindami šią teoriją su Stylianides [124] matematinio samprotavimo apibrėžimu matome, kad abi teorijos turi bendras savybes: dėsningumų paiešką, hipotezės iškėlimą ir jos patvirtinimą arba paneigimą. Remiantis šia teorija matematinės temos yra pateikiamos su mokymo instrukcija (angl.: logal instruction theories), kuria mokytojas gali vadovautis dirbdamas su klase. Priklausomai nuo mokinių atsako ir diskusijų bei sprendimų eigos mokytojas veda mokinius toliau ta linkme, kad jie pasiektų užsibrėžtą tikslą, dažniausiai susipažintų su temai reikalingomis sąvokomis ir procedūromis.

RME metodas gana plačiai pripažintas kaip efektyvus matematikos mokymo, supratimo ir problemų sprendimo įgūdžių lavinimui [33]. Remiantis RME buvo sukurta ne viena mokymo instrukcija trupmenoms mokyti [66], [119]. Empiriniame tyrime mes taip pat pateiksime mokymo instrukciją trupmenoms mokyti. Joje naudosime P uždavinius.

P uždaviniai

Standartiniai tekstiniai uždaviniai dažniausiai yra naudojami jau išmoktam mokomajam turiniui įtvirtinti. Šiame skyriuje apžvelgsime nestandartinius uždavinius, kurie gali būti priemonė naujam mokomajam turiniui pristatyti.

Apibrėžimas 3.0.2. Sakysime, kad tekstinis uždavinys yra P uždavinys (angl.: P problem), jei jis turi mažesnį nei reikia, arba didesnį nei reikia kiekį informacijos atsakyti į uždavinio klausimą.

P uždaviniai gali būti tekstiniai uždaviniai, kur mokinys turi apdoroti duotą informaciją, kad gautų jam reikalingą informaciją, susirasti trūkstamą informaciją, arba atrinkti, kuri informacija nėra reikalinga.

Palyginkime du uždavinius, kuriuos naudojo R. Saljo et. al. [107].

Uždavinys 3.0.3. Karvė duoda 18 litrų pieno per dieną, kiek pieno ji pagamins per savaitę? (S uždavinys)

Uždavinys 3.0.4. Toma eina į mokyklą ir per dieną vidutiniškai turi 7 pamokas. Kiek pamokų ji turi per savaitę? (P uždavinys)

Atlikus tyrimą su 5 - 6 klasių mokiniais 90% mokinių teisingai išsprendė S uždavinį 3.0.3 ir tik 70% mokinių teisingai išsprendė P uždavinį 3.0.4. Matome, kad uždavinių matematiniai sprendimai yra analogiški, skiriasi uždavinio situacijos vertinimas. S uždavinyje mokinys perskaitęs žodį savaitė 18 litrų daugina iš 7 ($18 \cdot 7 = 126$), P uždavinyje 3.0.4 taip pat naudojamas žodis savaitė, bet situacija nusako mokinio savaitę, kai jis eina į mokyklą, todėl duotą skaičių dauginti reikia ne iš 7, o iš 5 ($7 \cdot 5 = 35$).

Tyrime taip pat naudojamas P uždavinys, kuriame reikia ne tik apdoroti informaciją, bet ir daryti prielaidas, tam tikras išvadas 3.0.5.

Uždavinys 3.0.5. Du berniukai, Čarlis ir Martynas padeda Nikolui grėbti lapus. Pievos plotas: 1200 m^2. Čarlis sugrėbė 700 m^2 pievos plotą per 4 valandas, Martynas 500 m^2 per 2 valandas. Jie gauna 180 kronų už darbą. Kaip berniukai turėtų pasidalinti pinigus, kad tai būtų sąžininga?
Čarlis turėtų gauti ...... kronų.
Martynas turėtų gauti ...... kronų.

Šis uždavinys neturi vieno teisingo atsakymo, galima sakyti, kad atsakyti į klausimą informacijos nepakanka, nes nėra nurodyta, kokiais kriterijais vadovaudamiesi vaikai turi dalintis uždarbį. Šiuo atveju mokinys, ar mokinių grupė gali aptarti įvairius sprendimo variantus ir pasirinkti jiems priimtiniausią sprendimą, bei juo vadovaudamiesi pateikti atsakymą. Mokinių grupės pateikė savo pasiūlymus, vėliau turėjo laiko juos išdiskutuoti ir dar kartą pateikti pasiūlymus (žiūrėti lentelę: 3.1).

Sprendimo modelis	1 pasiūlymas. Grupių skaičius	2 pasiūlymas. Grupių skaičius
Po lygiai (90+90)	11	0
Pagal atliktą darbą (105+75)	9	3
Pagal darbo laiką (120+60)	6	14
Tam tikru kitu santykiu	0	7

3.1 lentelė: Rezultatai iš tyrimo [107], Grupių pasirinkusių tam tikrą sprendimo modelį skaičius susipažinus su uždaviniu ir po bendros diskusijos grupėse.

Matome, kad pirminiai grupių pasiūlymai ir pasiūlymai po diskusijos skiriasi. Pirmiausia mokiniai siūlė užmokestį dalintis po lygiai, o po diskusijos siūlė remtis tam tikrais kriterijais, pavyzdžiui dalintis užmokestį pagal išdirbtą laiką, atliktą darbą, arba tam tikru kitu santykiu.

P uždavinių sprendimo kelias nėra vienintelis, uždavinys dažnai savyje turi probleminį klausimą. Pritaikydami RME teoriją panaudosime šiuos uždavinius kaip priemonę naujai matematikos temai pristatyti.

3.1 Empirinis tyrimas: P uždavinių pritaikymas naujoms matematinėms temoms pristatyti

Pasirinkome pristatyti trupmenų temą, naudojant P uždavinį. Tai yra viena daugiausiai iššūkių keliančių temų pradinėse klasėse [109], [46], [23]. Ši tema svarbi ne tik pradinėse klasėse, vyresnėse klasėse žinias išmoktas apie trupmenas mokinys turės pritaikyti atlikdamas algebros uždavinius [85]. Lietuvoje mokiniai mokomi trupmenų naudojant dalies-visumos metodą, dažniausiai trupmenos pristatomos vizualiai - pateikiant tam tikrą figūrą ar paveikslėlį kaip vienetą, dalį jo nuspalvinant ir tai daliai priskiriant tam tikrą trupmeną. Pradinės mokyklos mokiniams Simon [117] rekomenduoja trupmenas pristatyti kaip matavimus.

Jaunesni mokiniai turi supratimą apie skaičius, kurį įgyja kartais dar prieš mokyklą ar darželį. Skaičiai mokiniams asocijuojasi su kiekiais arba matavimais (pavyzdžiui.: 5 obuoliai, 126 cm ūgis). Kai pristatome trupmenas kaip visumos dalį, toliau vadinsime tai pyrago pjaustymo metodu (atitikmuo anglų kalba nusakomam pie-chart metodui), nesukuriame sąsajos su natūraliųjų skaičių aibe, kurią mokiniai jau pažįsta [54], [80], [109], [65].

Vergnaud išsamiai aptaria kaip mokinio mąstyme formuojasi matematinės sąvokos [142]. Tam reikia ne vienos situacijos, bet kuo daugiau įvairių situacijų, kuriose sąvoka naudojama, kad mokiniui susiformuotų aiškus sąvokos vaizdas. Tam, kad mokinys suprastų trupmenos sąvoką jis turi susipažinti su įvairiai pateikiama trupmeną: kaip visumos dalis, matavimas, santykis, koeficientas.

Pasirinkome pristatyti trupmeną kaip matavimą, nes šiuo būdu trupmena labiausiai susiejama su natūraliaisiais skaičiais. V. V. Davydov [28] teigia, kad "skaičiai turėtų būti pateikiami kaip bendra sąvoka, taip, kad pristačius kiekvieną naują skaičių aibę (pavyzdžiui racionaliųjų, iracionaliųjų) bendros skaičiaus sąvokos nereikėtų keisti [117]. Jei skaičius pristatome kaip matavimo rezultatą, kaip skaičius galime pristatyti ne tik natūraliuosius skaičius, bet ir paprastąsias bei dešimtaines trupmenas.

M. A. Simon išskiria tris sunkumus su kuriais susiduria mokiniai [117]:

(1) Trupmenos kaip kiekio nesupratimas, (2) Trupmenos supratimas kaip dviejų atskirų skaičių, (3) Trupmenos siejimas tik su visumos dalimi. Papildomai literatūroje galime rasti ir išskirti dar du sunkumus: (4*) trupmenų dydžio nustatymas netinkamai pritaikant natūraliųjų skaičių taisykles, pavyzdžiui: trupmena su didesniais skaičiais (tiek skaitiklyje tiek vardiklyje) yra didesnė [35], (5*) Negebėjimas tarpusavyje susieti trupmenų su skirtingais vardikliais, (6*) Trupmenų nesiejimas

su natūraliaisiais skaičiais [135].

Taip pat kaip ir Simon, X. Vamvakoussi siūlo trupmenas mokyti kaip matavimus [135], [136], [137] ir grindžia tai sąvokinio pokyčio (angl.: conceptual change) teorija. Remiantis šia teorija, mokinių turimas skaičiaus supratimas (toliau vadinsime pradine skaičiaus samprata), kurį jie įgyja prieš mokyklą yra labai panašus į natūraliojo skaičiaus sąvoką [154]. Pagal pradinę skaičiaus sampratą, skaičiai tai tie objektai, kuriuos naudojame skaičiuodami ir jie atitinka tam tikrą kiekį. Pirmaisiais mokymo metais šis supratimas kas yra skaičius dar pastiprinamas, nes būtent taip skaičius mokykloje ir naudojamas. Bet pristačius trupmenų temą, tarp trupmenų ir pradinės skaičiaus sampratos atsiranda skirtumai. Mokiniams pirmaisiais mokymo metais naudojant tik natūraliuosius skaičius daugindami skaičius visada gauname didesnį skaičių, dalindami, mažesnį, kuo skaičius ilgesnis, tai yra kuo daugiau skaitmenų reikia jam užrašyti, tuo jis didesnis, kiekvienas skaičius turi unikalų pavadinimą ir užrašymą, visos šios taisyklės trupmenoms nebegalioja, todėl trupmenų sąvoka neatitinka pradinės skaičiaus sampratos, kurią mokinys turi ir mokykloje dar labiau sustiprino (žiūrėti lentelę 3.2).

Pradinė skaičiaus samprata	Trupmena
1, 2, 3, ...; Daiktų skaičiavimas; Daugindami gauname didesnį skaičių, dalindami mažesnį; Kuo daugiau simbolių naudojame užrašant, tuo skaičius didesnis; Kiekvienas skaičius turi unikalų užrašymą.	$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ Daiktų dalių skaičiavimas; Daugindami ir dalindami galime gauti tiek didesnį, tiek mažesnį skaičius Skaičius užrašomas naudojant daugiau simbolių gali būti tiek didesnis, tiek mažesnis; Tas pats skaičius gali būti užrašytas įvairiais užrašais.

3.2 lentelė: Skirtumai tarp pradinės skaičiaus sampratos ir trupmenos sąvokos, adaptuota pagal [135]

Atlikome tyrimą su 3 klasės mokiniais. Lietuvos mokyklose 3 klasėje yra pristatomos trupmenos. Naudojome P uždavinį, kurio realioje situacijoje aprašomas skysčio kiekis. Tam, kad būtų gautas uždavinio atsakymas, uždavinys neturi pakankamai informacijos, todėl jis yra P uždavinys. Tyrimo tikslas yra pademonstruoti, kad P uždavinys gali būti priemonė skirta pristatyti matematinę temą ir atskleisti sintetinius modelius susijusius su tos temos sąvokomis. Taip pat pristatomas pamokos planas, kurį gali naudoti mokytojai.

Apibrėžimas 3.1.1. Sintetinis modelis tai mokinių bandymas susieti naują informaciją su jų jau turima samprata apie tam tikrą sąvoką [61].

Šiuo tyrimu norėjome atsakyti į šiuos klausimus:

TK1: Ar gali P uždavinys būti priemone atskleidžiančia mokinio supratimą apie trupmenas?

TK2: Kokius neteisingus įsitikinimus (sintetinius modelius) apie trupmenas mokiniai turi?

Trupmenų mokymas pradinėse klasėse nėra giliai išnagrinėtas matematikos mokymo tyrimuose. Didesnis dėmesys skiriamas vėlesniam trupmenų mokymui. Keijzer savo disertacijoje [66] pateikia trupmenas kaip išdalintus stulpelius (angl.: folded bars) ant skaičių tiesės, trupmenos pristatomos kaip skaičiai esantys tarp natūraliųjų skaičių. Sari [109] pateikia šešių pamokų trukmės mokymosi planą 3 klasės mokiniams, jis atitinka šiuos žingsnius: 1) Pateikti „lygaus dalinimosi" prasmę; 2) Aprašyti trupmenas kaip lygaus dalinimosi rezultatą; 3) Naudoti trupmenas kaip matavimo vienetus; 4) Susieti skirtingų vardiklių trupmenas tarpusavyje. Pateikimui naudojamas dalies-visumos metodas ir skaičių (trupmenų) tiesė.

Įdomus ir teigiamus rezultatus davęs eksperimentas pateikiamas Moss et. al. [85]. 4 klasės mokiniams pateikia vandens stiklines ir pirmiausia ant jų pademonstruoja procentų temą, tuomet pereina prie dešimtainių trupmenų ir galiausiai prie paprastųjų trupmenų. Po eksperimento mokinių racionaliųjų skaičių supratimas yra geresnis nei kontrolinės grupės mokinių, kuriems temos buvo pateiktos įprastai. Kituose tiriamuosiuose darbuose mokiniams trupmenos pateikiamos ne kaip matavimai, o vienu iš šių būdų: visumos-dalies, koeficiento, santykio, skaičių tiesės [72, 80, 116]. Gunderson et. al. [54] tyrimo rezultatai rodo, kad mokinių rezultatai geresni, kai jiems trupmenos pateikiamos ant skaičių tiesės, nei kaip figūrų plotai. Trupmenų kaip matavimo rezultato pradinėse klasėse tyrimų nėra daug, todėl norėdami išnaudoti tekstinių uždavinių galimybes nusprendėme jas pateikti būtent šiuo būdu.

Į trupmenos sąvokos supratimą žvelgiame iš A. Sfard [115] perspektyvos, kuri teigia: sąvoka gali būti suprasta dviem skirtingais būdais, kaip objektas ir kaip procesas. Remiantis šiuo požiūriu trupmenos gali būti suprastos kaip objektas: skaičius, visumos dalis, matavimas, arba kaip procesas, pavyzdžiui visumos dalinimas.

Norėdami apjungti pradinę skaičiaus sampratą ir naują trupmenų sąvoką galime naudoti skaičių tiesę, tai siūloma Vamvakoussi ir Simon darbuose[117, 135]. Skaičių tiesė gali būti ta bendratis, kuri apjungia natūraliuosius skaičius ir trupmenas. H. Wu skaičių apibrėžia kaip tašką ant skaičių tiesės [157]. Šį apibrėžimą taip pat naudoja R. Norvaiša savo straipsnyje apie trupmenos sąvoką vadovėliuose [92].

Apibrėžimas 3.1.2. Realusis skaičius yra taškas skaičių tiesėje. □

R. Norvaiša nuosekliai aptaria, kaip sukonstruojama trupmenų aibė [92], šiame darbe mes tik trumpai pristatysime šią idėją.

Apibrėžimas 3.1.3. Tarkime, kad n yra nelygus nuliui natūralusis skaičius. Kiekvieną skaičių tiesės atkarpą [0,1], [1,2], [2,3], ... padalinsime į n lygių dalių. Dalijimo taškai, apimantys ir natūraliuosius skaičius, skaičių tiesėje sudaro seką trupmenų su vardikliu n. Pirmasis šios sekos taškas yra 0, antrasis $\frac{1}{n}$, trečiasis $\frac{2}{n}$, $m+1$ - asis šios sekos taškas yra trupmena $\frac{m}{n}$ Šios sekos narių aibę vadinsime trupmenų su vardikliais n aibe. □

Apibrėžimas 3.1.4. Trupmenų aibę sudaro sąjunga trupmenų su vardikliais n aibių, kai n prabėga visus natūraliuosius skaičius nelygius 0. □

Kai trupmenas ir natūraliuosius skaičius patalpiname toje pačioje skaičių tiesėje mums lengviau juos palyginti, didesnis yra tas skaičius, kuris yra dešiniau nuo nulio.

Tyrimo tikslas yra apjungti šias teorines idėjas ir pademonstruoti tekstinį uždavinį kaip priemonę pristatyti naujai temai ir identifikuoti mokiniams sudėtingus tos temos aspektus.

Skaičių tiesę perkeldami ant sugraduotos stiklinės aprašėme realią situaciją, kuri kelia probleminį klausimą ir padeda apjungti natūraliuosius skaičius bei trupmenas, taip pat pereiti nuo trupmenos kaip objekto, prie trupmenos kaip proceso.

Metodologija

Remdamiesi A. Sfard [115] aprašyta teorine aplinka atskirsime trupmenos kaip objekto ir trupmenos kaip proceso supratimą. Manome, kad 3 klasės mokiniai supranta natūraliuosius skaičius, kaip objektus. Mokiniai jau buvo supažindinti su trupmenų tema, todėl kažkokį supratimą apie trupmenas jau turi. Manome, kad dėl trupmenų kaip dalies-visumos pristatymo mokiniai iš pradžių įgija supratimą trupmenų kaip proceso, ne kaip objekto. Remdamiesi šia teorine aplinka tikimės aptikti mokinių turimus neteisingus įsitikinimus apie trupmenas ir stebėti, kuriame trupmenų supratimo etape mokiniai yra. Remiantis A. Sfard galime išskirti tris etapus, kuriuos 3 klasės mokiniai gali pasiekti mokydamiesi trupmenas.

1. Įsisavinimas (angl.: interiorization) - kai visuma (dažniausiai apskritimas) padalinama į dalis, kai kurios dalys nuspalvinamos ir mokiniai užrašo, kokia trupmena pavaizduota. Arba atvirkščiai, visuma yra padalinta į dalis, duodama trupmena ir mokiniai turi nuspalvinti atitinkamą dalių skaičių.
2. Suspaudimas (angl.: condensation) - kai mokiniams duodama figūra ir tam tikra trupmena ir jie patys padalija ją į tam tikrą skaičių dalių ir nuspalvina reikiamą jų kiekį.

3. Reifikacija (angl.: reification) - kai prašoma pažymėti trupmeną tarp kitų skaičių (taip pat ir trupmenų) ir atlikti su trupmenomis tam tikras operacijas.

Kai mokinys pasiekia reifikacijos fazę galime teigti, kad jis trupmenas suvokia kaip objektus. Mes pateikėme P problemą (žiūrėti uždavinį 3.1.5) norėdami patikrinti, kuriame mokymosi etape yra mokiniai, ar jie jau pasiekė reifikacijos etapą, taip pat pateikėme užduotis atspindinčias įsisavinimo ir suspaudimo etapus (uždaviniai 3.1.6 ir 3.1.7).

Norėjome naudoti užduotis, kurios atskleistų mokinių turimus sintetinius modelius ir jų sąvokų supratimo etapą. Tam pasirinkome projektavimu grįstą tyrimo metodą (angl. Design-Based Research), toliau DBR. DBR metodas leidžia keisti pamokos struktūrą tyrimo eigoje [13]. Atliekant tyrimą šiuo metodu, mokymo idėjos suformuluojamos tyrimo plane, bet gali būti keičiamos jas empiriškai testuojant, tai mums buvo naudinga, nes norėjome išbandyti naujai aprašytą pamokos planą. DBR atliekamas ciklais, kurių kiekvienas turi tris etapus: pasiruošimas ir planavimas, mokymo eksperimentas, retrospektyvi analizė [13]. Žemiau mes pristatome du mūsų eksperimento ciklus. Ciklus galime kartoti tol, kol gauname norimus rezultatus.

Pasiruošimas ir planavimas

Ruošdamiesi tyrimui atlikome literatūros apžvalgą, išanalizavome 3 klasės vadovėlius, bei ieškojome būdų, trupmenas pateikti kaip matavimus. Nusprendėme realioje situacijoje naudoti objektą, kurio matavimai būtų ne diskretūs, pavyzdžiui vanduo, laikas, amžius, ūgis. Toks pasirinkimas leidžia apjungti trupmenas ir natūraliuosius skaičius. Taip pat naudojantis analogija pademonstruoti, kad trupmenų yra be galo daug. Tikėjomės, kad toks pateikimas inicijuos matematinę diskusiją tarp mokinių.

Uždavinyje naudojame situaciją su skysčiu stiklinėje dėl šių priežasčių:

- Tai yra atitikmuo skaičių tiesei, kai stiklinė sugraduota;

- Graduodami galime pasirinkti kokio ilgio bus atkarpa atitinkanti vienetą.
- Kiekvienas papildomas lašas stiklinėje nusako vis naują skaičių.
- Galima įsivaizduoti stiklinę kiek norima aukštą (pratęsti skaičių tiesę tiek kiek norima);
- Pavyzdys pakankamai paprastas jaunesniems mokiniams, taip pat nesudėtinga atlikti bandymus su tikra stikline.

Mokymo eksperimentas

Vyko 13 pamokų nuotoliniu būdu, su 14 skirtingų klasių (vienoje iš pamokų dalyvavo dvi skirtingos klasės vienu metu). Po kai kurių pamokų, pamokos planas neženkliai keitėsi, atsižvelgiant į ankstesnių pamokų eigą. Buvo padaryti nuotolinių pamokų įrašai, užfiksuoti mokinių uždavinių sprendimai, taip pat mokiniams buvo pateikti atviri klausimai ir atsitiktinai parinkti mokiniai dalyvavo apklausoje. Klasių mokytojos tik stebėjo pamokas ir jose nedalyvavo. Kadangi viskas vyko COVID - 19 periodu, pamokos buvo organizuojamos per Zoom ir Teams platformas. Iš viso 298 trečių klasių mokiniai (8-9 metų) dalyvavo tyrime, jie buvo iš 14 Lietuvos mokyklų esančių skirtinguose regionuose. Visi dalyvavę mokiniai mokėsi iš to paties vadovėlio, bei, buvo susipažinę su trupmenomis dalies-visumos metodu, taip pat buvo susipažinę su sąvokomis pusė, trečdalis, dalis, natūraliųjų skaičių daugyba ir dalyba.

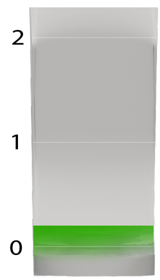
Retrospektyvi analizė

Po kiekvienos pamokos nagrinėdavome pamokų video įrašus, klausimynų atsakymus, apklausų įrašus ir mokinių grafinius trupmenų atvaizdavimus. Išnagrinėję duomenis priimdavome sprendimą ar keisti sekančios pamokos planą, ar palikti tokį koks yra.

Pirmasis eksperimento ciklas

P uždavinyje 3.1.5 yra aprašyta situacija ir klausimas, bet nėra pakankamai informacijos, kad galima būtų atsakyti į duotą klausimą. Tekstinis uždavinys prašo atsakyti, kiek skysčio yra stiklinėje, kai kiekis yra žemiau pirmosios padalos. Šio P uždavinio tikslas yra patikrinti kokioje trupmenų sąvokos supratimo stadijoje yra mokinys. Taip pat buvo stebimi mokinių spėjimai, kokia tai trupmena. Stebėjome kokius sintetinius modelius jų spėjimai atspindi. Šis uždavinys taip pat iškelia probleminį klausimą, kuris motyvuoja trupmenų sąvokos reikalingumą, bei jų sąsają su natūraliaisiais skaičiais.

Uždavinys 3.1.5. Tu sukūrei eliksyrą, kuris paverčia žmogų nematomu. Turi stiklinę, ant kurios nupiešta liniuotė. Viena padala rodo kiek eliksyro reikia vienam žmogui tapti nematomu. Per pirmą dieną pavyko pagaminti tik tokį kiekį eliksyro.



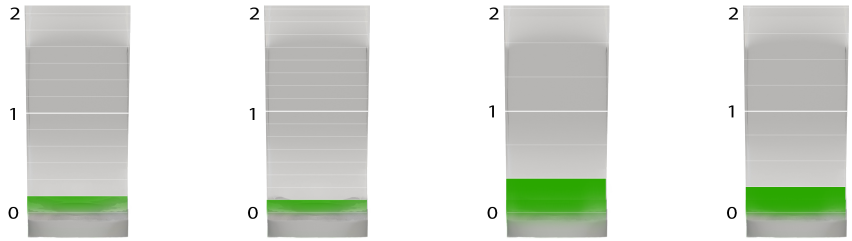
Užrašyk kiek eliksyro pavyko pagaminti.

Eliksyro yra . . . porcijos.

Visi mokiniai jau buvo susipažinę su sąvokomis pusė, trečdalis, ketvirtadalis ir trupmena. Visi klasės mokiniai kartu spėliojo ir bandė įvardinti trupmeną.

Uždaviniai 3.1.6 ir 3.1.7 buvo naudojami patikrinti kaip mokiniai supranta trupmenas. Tai nėra tekstiniai uždaviniai, bet jie papildomai buvo naudojami pamokoje.

Uždavinys 3.1.6. Užrašykite kiek eliksyro yra stiklinėse.



Užduotis 3.1.7 buvo priešinga: nupiešti stiklines su skysčiu, kai duotos trupmenos.

Uždavinys 3.1.7. Nupieškite stiklines ir pažymėkite $\frac{1}{4}$ porcijos; $\frac{1}{12}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{2}{2}$ porcijų jose.

Retrospektyvi analizė ir antrasis eksperimento ciklas

Po pirmosios pamokos buvo atlikti pamokos plano pakeitimai. Nusprendėme pakeisti trupmeną ir naudoti ne vieną, o dvi trupmenas, kurių skirtumas nėra didelis. Užduotimi norėjome parodyti, kad nedidelis skysčio lygio stiklinėje pasikeitimas atitinka jau kitą trupmeną. Užduotį 3.1.5 pakeitėme į dvi užduotis su trupmenomis $\frac{1}{3}$ ir $\frac{3}{7}$. Antroji trupmena pasirinkome neįprastą mokiniams (dažniausiai vadovėlyje pateikiamos trupmenos su mažesniais vardikliais), taip pat tai trupmena, kuri yra didesnė nei $\frac{1}{3}$ ir mažesnė nei $\frac{1}{2}$. Norėjome, kad mokiniai pirmaisiais savo spėjimais jos neatspėtų, tam, kad matytume, ar jų spėjimai artimi paveikslėlyje pavaizduotu skysčio lygį atitinkančiai trupmenai, bei pastebėtume sintetinius modelius, susijusius su trupmenomis, kuriuos mokiniai turi.

Trečią užduotį pakeitėme taip, kad mokiniai iš pradžių nusipieštų stiklinę pagal pirmo uždavinio pavyzdį ir tada joje žymėtų trupmenas, nes kitu atveju mokiniai pilnai stiklinei priskiria vienetą ir jų žymėjimai atitinka stiklinės dalis, taip nelieka sąsajos su natūraliųjų skaičių aibe.

Rezultatai

Mokiniams pateikus stiklinę, kurioje buvo $\frac{1}{3}$ porcijos eliksyro jie kartu grupėje gana greit pateikdavo atsakymą. Jų spėjimų aibė gana siaura: $\frac{1}{2}$, 0.3, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{5}$ ir pan. Kai buvo pateikta stiklinė, kurioje buvo $\frac{3}{7}$ porcijos, mokinių spėjimai buvo labai įvairūs, buvo spėjamos ir trupmenos $\frac{2}{2}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{2}$ tai rodo, kad nors jau žino trupmenų temą mokiniai jų dar nesieja su dydžiais ir natūraliaisiais skaičiais. Po kiekvieno spėjimo kartu su mokiniais pažymėdavome, kur jų spėjama trupmena būtų žymima stiklinėje. Spėjimo proceso metu mokiniai patys priėjo prie teisingų idėjų:

1. Kuo didesnis vardiklis, tuo mažesnė trupmena.
2. Trupmena $\frac{2}{2}$ yra lygi $\frac{1}{1}$ ir jos yra lygios 1.
3. Trupmena $\frac{1}{0}$ negali būti pažymėta ant stiklinės.

Taigi šis P uždavinys pagelbėjo tam tikras trupmenų savybes atrasti patiems.

Antrąją užduotį mokiniai atliko labai greitai ir daugumos jų atsakymai buvo teisingi (užduotis buvo atliekama žodžiu visiems kartų). Ši užduotis demonstruoja, kad mokiniai tam tikrą trupmenos supratimą turi ir paveikslėlyje pavaizduotas trupmenas gali užrašyti (įsisavinimo etapas pagal A. Sfard). Ši užduotis labiausiai artima metodui, kuriuo jiems pristatomos trupmenos vadovėlyje dalies-visumos (pyrago pjaustymo metodui), tai rodo, kad mokykloje pristatytą medžiagą mokiniai įsisavino.

Trečiąją užduotį mokiniai atliko lapuose individualiai. Jie turėjo pažymėti nurodytas trupmenas. Išskyrėme keturių tipų mokinių darbus:

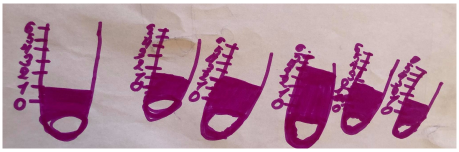
- Darbai, kuriuose stiklinės nenuspalvintos, arba nuspalvintos pilnai. Manome, kad šie mokiniai arba nesuprato užduoties, arba nėra pasiekę trupmenos įsisavinimo etapo.
- Neįprasti darbai, kuriuose trupmenos atvaizduojamos netinkamai, arba tinkamai atvaizduojamos ne visos trupmenos.
- Darbai, kur trupmena žymi stiklinės dalį, o ne stiklinės padalos dalį.

- Darbai, kuriuose trupmenos vaizduojamos tinkamai.

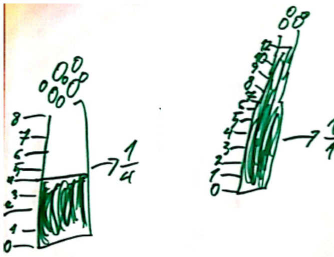
Neįprastus darbus matome 3.1 paveikslo dalyse. Paveiksle 3.2 mokinys visas trupmenas pažymėjo virš vieneto arba lygias vienam. Kitas mokinys pažymėjo $\frac{1}{4}$ kaip 4 ir $\frac{1}{12}$ kaip 12 3.3. O trečias mokinys pažymėjo $\frac{1}{12}$ ties 1, bet padalą išdalino į 12 ar 13 dalių 3.4. Galimai jis pažymėjo skaitiklį, o padalą padalino į tiek dalių, koks yra vardiklis. Užduotis būtų atlikta teisingai, jei būtų nuspalvinta tik viena padalos dalis, ne visos.

3.1 pav.: Neįprastas grafinis trupmenų atvaizdavimas

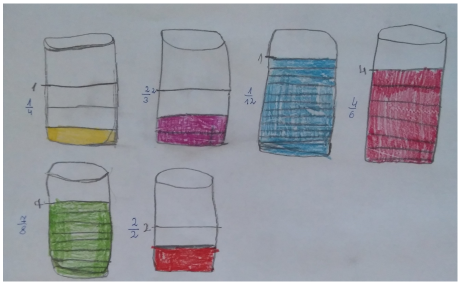
3.2 pav.:



3.3 pav.:



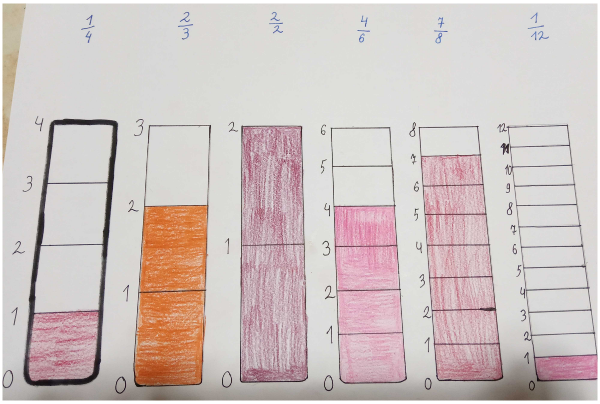
3.4 pav.:



Paveikslėliuose 3.5 and 3.6 matyti, kad kai kurie mokiniai trupmeną sieja su visos stiklinės dalimi, o ne su stiklinės padalomis, pažymima $\frac{1}{4}$ visos stiklinės, o ne $\frac{1}{4}$ padalos. Taip pat 3.5 matome, kad nuspalvinta padala pakelta ir apačioje palikta laisva erdvė.

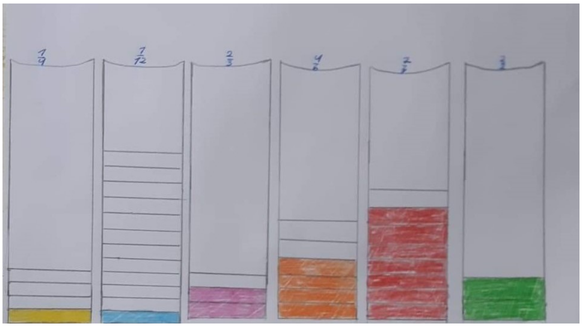
3.5 pav.: Grafinė reprezentacija, kai trupmenos žymimos kaip visumos dalis

3.6 pav.: Grafinė reprezentacija, kai trupmenos žymimos kaip visumos dalis (2)

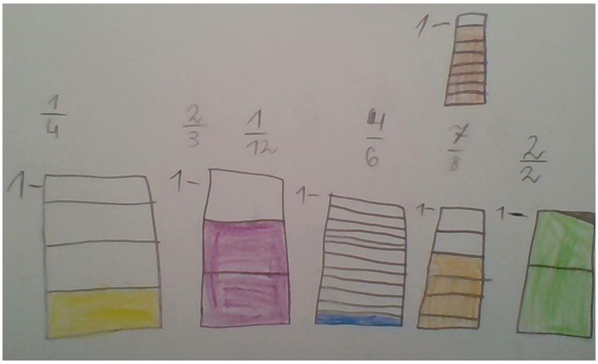


Dalis darbų atskleidė tinkamą trupmenų supratimą. Paveikslėlyje 3.7 matome, kad trupmenos pažymėtos gerai, tik nėra pažymėto vieneto, o 3.8 paveikslėlyje matome, kad viskas atlikta teisingai.

3.7 pav.: Grafinė reprezentacija, kur trupmenos pažymėtos teisingai tik nėra pažymėto vieneto



3.8 pav.: Grafinė reprezentacija su teisingu žymėjimu



Šie pavyzdžiai sufleruoja į ką reiktų atkreipti dėmesį mokant trupmenų:

- Skaitiklio ir vardiklio reikšmes;
- Trupmenų ryšį su skaičiumi 1 ir kitais natūraliaisiais skaičiais.
- Kalbėti apie įvairias trupmenas, ne tik tokias paprastas kaip $\frac{1}{3}$ ir $\frac{2}{5}$, bet ir tokias kaip $\frac{7}{12}$ ir $\frac{1}{79}$.

Apklausos rezultatai

Apklausos metu turėjome galimybę išsiaiškinti mokinių trupmenų supratimą. Tyrėme jų požiūrį į trupmeną kaip į skaičių, procesą, objektą. Trečios klasės mokinys paklaustas ar $\frac{1}{3}$ yra skaičius atsakė: „skaičius yra skaičius, ne trupmena“ . Ši mintis rodo, kad mokinys nesieja trupmenų su natūraliaisiais skaičiais.

Pateiksime sintetinius modelius apie trupmenas iliustruojančias apklausos ištraukas. Mokinių vardai pakeisti.

- Mokiniai trupmenų su skirtingais vardikliais nesieja tarpusavyje (žiūrėti 3.3 lentelėje).

3.3 lentelė: apklausos ištrauka (1)

Tyrėjas	Toma
Kiek skaičių galime pažymėti stiklinėje tarp 0 ir 1?	Galime pažymėti $\frac{1}{1}$.
Ar galime pažymėti $\frac{1}{2}$?	Taip, kitoje stiklinėje, jei nupieštume daugiau padalų.

- Mokiniai supranta trupmenas kaip dešimtainius skaičius. Lentelėje 3.4 pateikiame pavyzdį. Kajus žino dešimtainius skaičius ir taiko trupmenoms jų taisykles.

3.4 lentelė: apklausos ištrauka (2)

Tyrėjas	Kajus
Sugalvok trupmeną	2 kablelis 3
Ar gali pažymėti ją skaičių tiesėje?	(aut. past.: pažymi kaip 2.3, gana tiksliai)
Ar gali pažymėti $\frac{1}{5}$?	(aut. past.: pažymi kaip 1.5, kartu išsiaiškinama, kad tai yra 1.5, paklausus kur žymėti $\frac{1}{5}$ pažymi ją kaip 5.1)

- Trupmenų siejimas su visumos-dalies modelio savybėmis (žiūrėti lentelę 3.5).

  Matome, kad Saulė kalbėdama apie trupmenas naudojasi tam tikru geometriniu atitikmeniu.
- Trupmenų žymėjimas skaičių tiesėje ten, kur turėtų būti žymimas jų vardiklis, pavyzdžiui $\frac{1}{2}$ kaip 2. Arba trupmenos siejimas su

3.5 lentelė: apklausos ištrauka (3)

Tyrėjas	Saulė
Kaip manai, kiek yra skirtingų trupmenų	Galvojau gal 40, bet neišeis padalinti apskritimo į 40 dalių, bet turėtų būti galima padalinti į 35 dalis, todėl manau, kad 35.

skaitiklio ir vardiklio reikšmėmis, pavyzdžiui $\frac{2}{5}$ žymima kaip du taškai: 2 ir 5 (žiūrėti 3.6 lentelėje).

3.6 lentelė: apklausos ištrauka (4)

Tyrėjas	Benas
Pasiūlė trupmeną.	$\frac{1}{5}$.
Ar galėtum pažymėti ją skaičių tiesėje?	(aut. past.: pažymi prie skaičiaus 1.5)
Pasiūlė kitą trupmeną.	$\frac{1}{2}$.
Ar galėtum pažymėti ją skaičių tiesėje?	(aut. past.: pažymi prie skaičiaus 2.1)
Ar galėtume rasti daugiau trupmenų tarp šių dviejų?	Taip, bet ne daug.

Pateikėme sintetinius modelius, kuriuos pavyko atskleisti apklausos metu. Mokomasis turinys turėtų būti kuriamas stengiantis neformuoti šių modelių.

Diskusija

13 mokinių klasių buvo pateiktas P uždavinys. Norėjome ištirti kuriame trupmenų supratimo etape yra mokiniai ir kokius sintetinius modelius jie turi. Šis procesas galėtų būti panaudojamas mokinių formuojamajam vertinimui, kai norime ne tik žinoti mokinio supratimą, bet ir nukreipti jo mokymąsi reikiama linkme tam, kad pasiektų norimą supratimo etapą. Trupmenų supratimas buvo tiriamas bendrai visai klasei, kaip grupei,

ne individualiai, tai buvo daroma siekiant klasėje išvystyti matematinę diskusiją.

P uždavinys apie skystį stiklinėje atskleidė šiuos sintetinius modelius:

- Mokiniai supranta trupmenas su skirtingais vardikliais kaip atskiras aibes.
- Mokiniai sieja trupmenas su dešimtainiais skaičiais.
- Mokiniai sieja trupmenas su dalies-visumos modelio savybėmis.
- Mokiniai žymi trupmeną skaičių tiesėje ten, kur turėtų būti žymimas jų vardiklis, arba kaip du taškus: skaitiklio reikšmę ir vardiklio reikšmę.
- Mokiniai nepastebi, kad trupmenos $\frac{2}{2}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{2}$ yra nemažesnės nei 1.

Mokiniai spręsdami P uždavinį patys atrado šias taisykles:

1. Kuo didesnis vardiklis, tuo mažesnė trupmena.

2. Trupmena $\frac{2}{2}$ yra lygi $\frac{1}{1}$ ir jos yra lygios 1.

3. Trupmena $\frac{1}{0}$ negali būti pažymėta ant stiklinės.

Tyrimas parodė, kad P uždavinys gali būti naudojama kaip priemonė įvertinti mokinio trupmenų supratimo etapą. Reikalingi tyrimai ateityje, kad galėtume įvertinti ar tai geresnė priemonė nei įprasti tekstiniai uždaviniai. P uždavinys buvo naudojamas visos klasės diskusijai organizuoti, taip pat būtų galima išbandyti šio uždavinio panaudojimą individualiai bendraujant su mokiniu.

Tyrimų, kurie pristatytų trupmenas kaip matavimus jaunesniems mokiniams yra nedaug, todėl šiuo tyrimu papildome esamus tyrimus.

Remiantis A. Sfard [115] teorija galime pastebėti, kad mokiniai dar nėra pasiekę reifikacijos etapo. Kai kurie iš jų yra pasiekę suspaudimo etapą, kiti įsisavinimo. Mokiniai dar turi pereiti nuo trupmenos kaip proceso iki trupmenos kaip objekto supratimo. Tolesni tyrimai reikalingi norint ištirti, kaip šis supratimas gali būti pasiekiamas.

Remiantis sąvokinio pokyčio teorija [135], [136] ir šio tyrimo rezultatais matome, kad mokiniams reikalingas gilesnis sąvokų supratimas. Vienas iš galimų

Vienas galimų būtų šį tikslą pasiekti yra pateikti trupmenas naudojant skaičių tiesę [157]. Šiame tyrime tam pateikėme P uždavinį su skysčio stiklinėje matavimu. Ilgalaikiai šio pateikimo būdo tyrimai reikalingi, kad galėtume įvertinti metodo efektyvumą.

Išvados

Tyrimas pateikia alternatyvų trupmenų mokymo būdą, kai trupmenos mokomos kaip matavimai. Šis mokymo būdas mokytojui pateikia mokinio formuojamojo vertinimo informaciją. Pastebima, kad šis metodas tarp mokinių iššaukia matematinę diskusiją. Rekomenduojame P uždavinius naudoti siekiant organizuoti matematinę diskusiją ir aptikti mokinių turimus sintetinius modelius.

Sukūrėme ir aprašėme pamokos planą, kai trupmenos pateikiamos neįprastu būdu, naudojant P uždavinį. Mokytojai, bei tyrėjai gali šį planą naudoti ateities tyrimams.

3.2 Uždavinių serija skirta naujai matematinei temai pristatyti

Kai norima pateikti sudėtingesnę temą, galima naudoti ne vieną uždavinį, o uždavinių seriją, kuri pristatytų įvairius matematinės temos aspektus.

Apžvelgsime pamokų planą aprašytą ir adaptuotą pagal Stephan et. al. [120] atliktą tyrimą. Planas remiasi RME teorija ir yra skirtas mokyti skaičiuoti iki 100. Vėliau pateiksime pagal analogišką principą mūsų sukurtą pamokos planą skirtą pristatyti trupmenų palyginimo temą.

Skaičiavimai 100 ribose naudojant P uždavinius

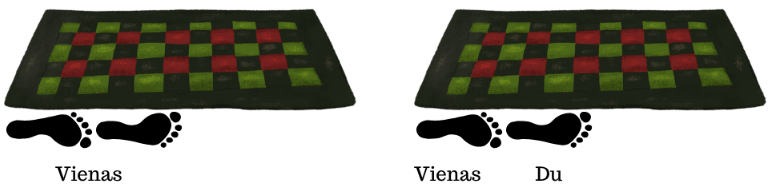
Uždavinys 3.2.1. Gyveno karalius, kuriam savo karalystėje kartas nuo karto reikėjo išmatuoti įvairius daiktus. Karalius nusprendė matavimams naudoti savo pėdą. Patarkite karaliui, kaip jis galėtų panaudoti savo pėdą, kad išmatuotų įvairių daiktų ilgį.

Tai yra P uždavinys, kuriame yra suformuluota situacija, užduotas klausimas, bet duomenų atsakyti į klausimą ir atlikti matematinį veiksmą pateikta nėra.

Instrukcijoje pateikiama galimą pamokos eigą. Tiksli pamokos eiga nėra žinoma, nes ji priklauso nuo mokinių dalyvavimo pamokoje, todėl yra numatoma galima pamokos eiga bei jos variantai.

Galima pamokos eiga:

- Mokiniai tarp įvairių pasiūlymų pasiūlo matuoti objektus dedant pėdas nepaliekant tarpų tarp vienos pėdos pirštų ir kitos kulno.
- Mokiniai paprašomi pademonstruoti matavimo būdą matuojant kilimėlį.
- Pasiskirstę poromis mokiniai išmatuoja kilimėlį ir užrašo gautus rezultatus.
- Gali skirtis ne tik mokinių matavimo rezultatai, bet ir matavimo būdai. Pavyzdys pateikiamas 3.9 paveiksle.



3.9 pav.: Du metodai, kuriais mokiniai gali skaičiuoti kilimėlio ilgį pėdomis, adaptuota pagal [119]

Mokiniai aptaria ar skiriasi ir kuo skiriasi šie būdai. Ar kažkuris būdas yra netinkamas?

- Grįžtama prie užduoties tikslo. Kokiu tikslu mes norime matuoti kilimėlį? Kam reikalingas matavimas? Norime išmatuoti, kiek pėdų telpa į kilimėlį.
- Matuojame tam, kad kitam žmogui galėtume perteikti kilimėlio ilgį (čia perteikiama matavimo vieneto prasmė).
- Mokiniai prieina išvados, kad negalima išmatuoti daikto ilgio, jei pėda nesutampa su daikto pabaiga.

Po šios dalies plėtojama tema ir pristatomas naujas uždavinys skirtas pademonstruoti, kaip konstruojamas įrankis matavimui.

Uždavinys 3.2.2. Karalius visą dieną praleido matuodamas ir neturėjo laiko svarbioms savo pareigoms atlikti. Patarkite karaliui, kaip matuoti daiktus, kad jis neturėtų visada pats atlikti matavimų.

Šios veiklos tikslas - sukurti įrankį matavimui. Uždavinys yra P uždavinys, nes jame pateikta situacija ir klausimas (formuluojamas kaip prašymas patarti), bet nėra duotos informacijos skirtos atsakyti į klausimą. Pateikiant atsakymą nereikia pateikti skaitinės reikšmės, tik strategiją.

. Galima pamokos eiga:

- Aptariami įvairūs mokinių pasiūlymai: pavyzdžiui žmogui, kuris matuoja duoti karaliaus batus, kad galėtų jais naudotis arba pagaminti daugiau karaliaus batų, kad jie būtų naudojami matavimui.
- Mokytojas papasakoja, kad vienas iš karaliaus patarėjų pasiūlė nupiešti karaliaus pėdą ant popieriaus lapo.
- Mokiniai pasiūlo pagaminti dvi tokias pėdas, tam, kad būtų galima jas dėlioti nedarant nereikalingų tarpų.
- Mokytojas sako, kad karalius įsakė nupiešti ant vieno lapo penkias pėdas iš eilės be tarpų. Klausiama kaip tokį piešinį būtų galima panaudoti.
- Mokiniai pastebi, kad taip matuoti būtų greičiau.
- Mokiniai paprašyti mokytojo porose pasigamina savo pėdų juosteles iš 5 pėdų.

Šis pamokos planas buvo išbandytas [119] ir rekomenduojamas kaip pasiteisinęs.

Tęsdami trupmenų temą aprašysime mūsų sukurtą pamokos planą mokant trupmenų ir naudojant P uždavinius.

Trupmena kaip skaičių aibės elementas naudojant P uždavinius

Analogišku principu kaip [119, 120] sukūrėme pamokos skirtos gilinti trupmenų kaip skaičių aibės objekto supratimą planą. Pateikiame detaliai aprašytą pamokos eigą.

Pradedant pamoką pateikiamas P uždavinys 3.2.3

Uždavinys 3.2.3. Karalius Hugas nori išmatuoti karalystę savo pėdomis, bet tingi vaikščioti. Jis pakvietė du tarnus: Pusių ir Trisę. Pusiaus pėdos ilgis yra lygiai pusė karaliaus pėdos ilgio. O Trisės pėdos ilgis - lygiai trečdalis Karaliaus pėdos ilgio.

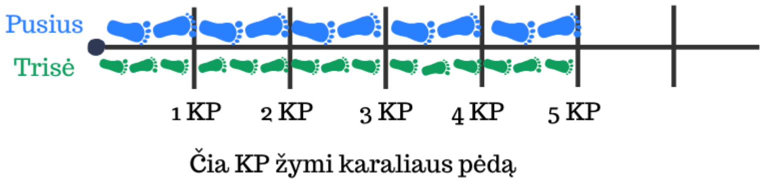
- Kiek pėdų nužingsniuoti turi Pusius ir kiek Trisė, kad nužingsniuotų 5 karaliaus pėdas?
- Pusius nužingsniavo 5 pėdas, o Trisė 8 pėdas ir susipyko, kuris išmatavo daugiau. Pusius ar Trisė išmatavo daugiau? Paaiškink kodėl.

Uždavinio vizualizacija pateikta 3.10, pateikus uždavinį iš pradžių mokiniams ji nerodoma.

Aprašysime galimą ir tikimąsi pamokos eigą.

Uždavinio sprendimo etapai:

- Diskusija, kurios metu mokiniai siūlo uždavinio sprendimus, paaiškinimus. Kiekvienas pasiūlymas aptariamas. Jei argumentai nėra teisingi aptariama kodėl (pavyzdžiui tai, kad Trisė išmatavo didesnį atstumą, nes nuėjo 8 pėdas, o Pusius tik 5 nėra teisingas argumentas, nes Trisės pėda trumpesnė).



3.10 pav.: Pusiaus ir Trisės pėdų palyginimas uždavinyje 3.2.3

- Natūraliai iškyla, arba mokytojas užduoda klausimą, kodėl karaliaus tarnams tarpusavyje neišeina nuspręsti, kuris daugiau nuėjo? Gal vertėtų pabandyti Trisei nueiti Pusiaus eitą kelią ir išmatuoti kiek ji nueis. Ar taip pavyktų išsiaiškinti kas teisus?
- Mokiniams išdalinamas languotas popierius ir prašoma nupiešti pėdą, bei ant jos pažymėti $\frac{1}{2}$ ir $\frac{1}{3}$ pėdos. Mokiniai turėtų pastebėti, kiek langelių turi sudaryti didžiąją pėdą, kad pavyktų nesunkiai pažymėti reikiamas pėdos dalis.
- Vaikams duodamos baltos juostelės ir karaliaus pėdos trafaretai. Prašoma pažymėti $\frac{1}{2}$ ir $\frac{1}{3}$ ir daugiau trupmenų.
- Mokiniams apsvarsčius įvairius paaiškinimus pratęsiama situacija, kai ateina trečias tarnas Šešė, kurios pėdos ilgis yra šeštadalis karaliaus pėdos ilgio. Sprendžiamas papildomas uždavinys 3.2.4

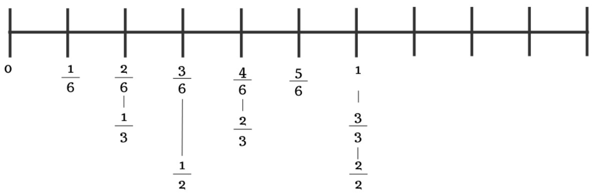
  Uždavinys 3.2.4. Kiek Šešės pėdų tilps į Pusiaus pėdą? Kiek į Trisės pėdą? Ir kiek į Hugo pėdą?

  Kiekvieno mokinio atsakymus išsprendus šį uždavinį verta užfiksuoti, kad matytume, ar jis geba atsakyti į šį klausimą.
- Ant pėdos kur mokinys pažymėjo $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ pėdos pažymima ir $\frac{1}{6}$ pėdos.
- Vienoje linijoje skirtingomis spalvomis piešiamas kelias su 5 Pusiaus pėdomis ir 8 Trisės pėdomis (žiūrėti 3.10 paveikslėlį). Nupiešiamos ir Šešės einančios tuo keliu pėdos. Ar mokiniai gali dabar išspręsti uždavinį, kai į situaciją įtraukiama Šešė?

  Uždavinys 3.2.5. Kiek Šešės pėdų atitinka Pusiaus ir Trisės nueitus atstumus?

Šio uždavinio atsakymus taip pat verta užfiksuoti, norint įvertinti, dėl kokių priežasčių mokinys gali klysti.

- Padaroma išvada apie uždavinio atsakymą. Aptariama, kodėl Šešės atėjimas padėjo atsakyti į klausimą.
- **Perėjimas prie skaičių tiesės.** Pereinama prie skaičių tiesės ir atstumas nupieštas pėdomis žymimas kaip trupmenos skaičių tiesėje (žiūrėti paveikslėlį 3.11). Galima žymėjimams pasiltelkti pagamintą pėdos maketą. Labai svarbu mokiniams padėti suprasti, kad kai kurios trupmenos, pavyzdžiui $\frac{1}{2}$ ir $\frac{3}{6}$ žymimos toje pačioje vietoje. Tai pabrėžiama ir aptariama.



3.11 pav.: Trupmenų žymėjimas skaičių tiesėje pagal uždavinį 3.2.3

Pamokos plano išbandymas

Šio tyrimo tikslas buvo išbandyti P uždavinį, skirtą gilesniam trupmenų supratimui ir patikrinti jo kartu su pamokos planu naudojimo galimybes. Pamokos planas buvo išbandytas su dviem skirtingomis mokinių grupėmis.

Pirmoji pamoka buvo organizuota su specialiuosius poreikius turinčių mokinių grupe, iš viso dalyvavo 7 mokiniai: penki trečiokai ir 2 ketvirtokai. Pateikiame pirmosios mokinių grupės standartinio mokinio portretą (žiūrėti paveikslėlį 3.12). Tyrime dalyvavę mokiniai dar tvirtai nemoka trupmenų, todėl kai gauna sudėtingesnę užduotį (pavyzdžiui: ant vienos pėdos nupiešti kitą pėdą) pasimeta. Dėl to uždavinio formuluotė jiems buvo sudėtinga. Mokiniai dar sunkiai supranta patį trupmenos žymėjimą, tad sukonstruotos pamokos tikslas, patikslinti ir pagilinti trupmenų žinojimą jiems buvo kiek per ambicingas. Šioje grupėje dalis mokinių gebėjo atsakyti, kad 5 karaliaus pėdos bus 10 Pusės pėdų, bet kiek tai bus Trisiaus pėdų jau nebeatsakė. Prieš pamoką atlikus testą (žiūrėti priedą b) pastebima, kad mokiniai lygina trupmenas pagal natūraliųjų skaičių taisykles, pavyzdžiui: $\frac{1}{5} < \frac{1}{6}$.

- Esu 3 klasės mokinė.
- Prieš savaitę išmokau trupmenas.
- Turiu specialiųjų poreikių.
- Man sunku susikaupti.
- Mėgstu spalvinti ir fantazuoti.

3.12 pav.: Pirmos grupės standartinio mokinio portretas, paveikslėlis sukurtas naudojant dirbtinį intelektą

Mokiniams, kurie dar nėra gerai įsisavinę trupmenų (pagal A. Sfard [115] pirmasis supratimo etapas) pamokos eigą reikėtų keisti. Pavyzdžiui duoti iš karto pagamintas pėdas.

Patebėjimai po pirmos pamokos:

- Siūlyti piešti pėdas skirtingomis spalvomis, taip mokiniams aiškiau ir paprasčiau.
- Skirti daugiau laiko, vienos pamokos viskam atlikti neužtenka.
- Pamoką skirti mokiniams, kurie jau įsisavinę trupmenas, kad galėtų mokytis jas palyginti.

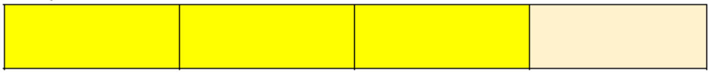
Antroji mokinių grupė su kuria uždavinys buvo išbandytas yra mokiniai, kurie jau mokėsi trupmenas, žino jų žymėjimus, bet neturi gilaus supratimo (paveikslėlyje 3.13 pateiktas mokinio portretas). Atlikome atvejo tyrimą (angl.: case study) su dviem mokiniais ketvirtoke ir penktoku, kurių tėvai nurodė, kad mokiniams sunkiai sekasi trupmenos.

1. Parašyk trupmeną, kuri rodo geltona spalva nuspalvintą figūros dalį.

a)

____

b)



____

2. Kuri schema a) ar b) atitinka didesnę trupmeną? Kodėl?

____

3.14 pav.: Testo atlikto prieš pamoką ištrauką

- Esu 5 klasės mokinys.
- Jau mokiausi ir paprastąsias ir dešimtaines trupmenas.
- Man nelabai sekasi matematika.
- Sunkiai reiškiu mintis.
- Esu kūrybingas ir noriu laimėti.

3.13 pav.: Antrosios grupės standartinio mokinio portretas, paveikslėlis sukurtas naudojant dirbtinį intelektą

Pirmiausia mokiniai atliko testus (žiūrėti priedą b) ir pakomentavo savo atsakymus interviu metu. Abu mokiniai teisingai įvardija kokias trupmenas atitinka schemos, bet abu neteisingai atsako, kuri iš schemų atitinka didesnę trupmeną (žiūrėti testo ištrauką 3.14 paveiksle).

Atskirai atsakydami į klausimus, abu mokiniai savo atsakymus paaiškina taip: $\frac{3}{5}$ yra daugiau nei $\frac{3}{4}$, nes 5 yra daugiau už 4.

Taip pat mokiniai išreiškia tokias neteisingas taisykles:

- Jei skaitikliai vienodi, reikia žiūrėti į vardiklius, 5 daugiau už 4, todėl $\frac{3}{5} > \frac{3}{4}$".
- Skaičiuojame taip: $5 - 3 = 2$, o $4 - 3 = 1$, $2 > 1$, todėl $\frac{3}{5} > \frac{3}{4}$.

Jau pamokos pradžioje matome, kad mokiniai turi tam tikrų neteisingų įsitikinimų. Turime išsiaiškinti, kokios jų žinios yra klaidingos, bei rasti būdus tai ištaisyti. Pamokos metu buvo pastebėta, kad mokiniai teisingai atlieka užduotis, kurios siūlomos vadovėlyje: teisingai schemai priskiria trupmeną ir atvirkščiai. Bet tam tikros klaidingos žinios jiems trukdo tinkamai atlikti kitas užduotis.

Mokiniai daro šias klaidas:

- painioja skaitiklį ir vardiklį;
- lygina trupmenas pagal vardiklio reikšmę;
- schemoje laiko didesne tą trupmeną, kuri padalinta į daugiau dalių (vardiklis didesnis).

Po pamokos refleksijos nuspręsta, kad svarbu išskirti šiuos dalykus:

- Tiksliai įvardyti ką norima išmokyti (pavyzdžiui ištaisyti tam tikras klaidingas mokinių turimas žinias).
- Pabrėžti kaip matuojamas trupmenos didumas: ant skaičių tiesės didesnė ta trupmena, kuri yra dešiniau; arba didesnė ta trupmena, kurios vietą skaičių tiesėje sujungus su nuliu gauname ilgesnę atkarpą.
- Susieti skirtingas išraiškas: schemą ir skaičių tiesę.

Siūlomas uždavinys padeda trupmenas susieti su skaičių tiesę, tai mokiniams pavyko atlikti, bet to nepakanka, trupmenos didumo supratimui suformuoti, testas po pamokos rodo, kad jų supratimas apie trupmenos dydį nepasikeitė.

Ateityje būtų naudinga paruošti nuoseklų kelių pamokų planą trupmenų mokymui ir jį išbandyti empiriškai. Tekstinių uždavinių panaudojimas matematinės temos pristatymui ir jos žinių gilinimui nėra išnagrinėtas ir tikslingai naudojamas Lietuvoje.

Šiame skyriuje pateikti pavyzdžiai demonstruoja P uždavinių pritaikymą naujoms matematinėms temoms pristatyti, arba pagilinti jau turimas matematines žinias. Uždaviniai 3.1.5, 3.2.3, 3.0.1, 3.2.1, 3.2.3 yra pavyzdžiai uždavinių, kurie inicijuoja diskusijas ir tam tikrą pamokos eigą, kuri padeda gilintis į matematines temas.

Išvados

Darbe ištirti trys skirtingi tekstinių uždavinių tikslai, kiekvienam iš šių tikslų priskiriami skirtingų tipų tekstiniai uždaviniai. Pirmoje dalyje nagrinėjamas tikslas susieti supaprastintą realaus pasaulio situaciją su matematinėmis sąvokomis, šiam tikslui naudojami standartiniai tekstiniai uždaviniai. Atlikto vadovėlių empirinio tyrimo rezultatai atskleidžia tam tikrų tekstinių uždavinių trūkumą Lietuvos vadovėliuose. Taip pat tyrimo metu aprašytas ir pritaikytas statistinis metodas leidžiantis atlikti tyrimus su daugiau šalių ir daugiau vadovėlių kiekvienoje šalyje. Antrojoje dalyje nagrinėjamas mokinių įpročio sklandžiai išreikšti matematines mintis formavimas, matematinio komunikavimo kompetencija; šia tema atlikti trys empiriniai tyrimai (bandymas su dar neskaitančiu vaiku, tyrimas su Lietuvos ir Čekijos penktos klasės mokiniais ir tyrimas su pirmo kurso studentais) naudojant nestandartinius tekstinius uždavinius ir pristatyti tyrimų rezultatai. Trečiojoje dalyje nagrinėjamas P uždavinių panaudojimas mokant ir pristatant naujas matematines temas ir pristatyti du empiriniai tyrimai.

Darbe atskleidžiamos šios svarbios išvados:

- Pradinių klasių vadovėliuose aritmetinių tekstinių uždavinių įvairovė nėra didelė, populiariausi uždaviniai yra lengvi ir vidutinias uždavinių tipai, dalies uždavinių tipų vadovėlyje visai nėra.
- Lietuvos vadovėlyje buvo nustatytas mažesnis matematinių veiklų skaičius, palyginti su Singapūro ir Ispanijos vadovėliais.
- Lietuvoje, Ispanijoje ir Singapūre išryškėja panašus ATU tipų dažnių pasiskirstymas vadovėliuose. Lietuvoje trijų rūšių ATU, sudaro 68,40% visų adityvių ATU. Panašiai Singapūro ir Ispanijos vadovėliuose šie tipai sudaro atitinkamai 64,6% ir 69,3% adityvių ATU.
- Lietuvos vadovėlyje 81,69% visų multiplikatyvių ATU sudaro paprasti santykio ATU. Tuo tarpu Singapūre ir Ispanijoje 75,8% ir 86,8% atitinkamai.
- Vadovėlių tyrimo rezultatai patvirtina hipotezę, kurią pateikė Vicente ir kt. [152], apie organizacinių iliustracijų naudą.

- Norėdami turimo vadovėlio proporcijas lyginti su tam tikru p_0, turime nuspręsti, kokio p_0 siekiame. Tai galime atlikti skirtingais būdais: imdami kaip siekiamybę šalių su aukščiausiais mokinių rezultatais vadovėlius, apklausdami ekspertus ir gaudami tam tikrą p_0.
- Atvejo analizė rodo, kad net neskaitantis vaikas geba teisingai pagrįsti tekstinio uždavinio sprendimą, naudodamas jam žinomą, nematematinę kalbą.
- Tekstinį uždavinį skirtingais formatais galima pateikti skirtingo amžiaus mokiniams ir iš jų tikėtis skirtingų, bet jų amžiui priimtinų ir teisingų sprendimo formų.
- Neskaitančiam mokiniui pateiktas iliustruotas tekstinis uždavinys gali atitikti šiuos samprotavimo žingsnius: surasti dėsningumą, iškelti hipotezę ir ją pagrįsti, argumentuoti.
- Tekstiniai uždaviniai „koks skaičius kur tinka" kelia poreikį argumentavimui. Lietuvos ir Čekijos moksleiviai atsižvelgė į visus tris aspektus: matematinį, kalbinį ir konteksto, tai parodo, kad uždavinio tipas skatina vertinti uždavinio situaciją ir į ją įsigilinti.
- Sprendžiant uždavinį, kuriame reikėjo pateikti dedukcinį argumentavimą grupių darbuose skyrėsi monologų skaičius, rėmimosi pavyzdžiais atvejai, bei pati diskusijos eiga, bet visuose darbuose galima išskirti matematinę diskusiją, kuri remiasi logikos elementais.
- Pastebėjome, kad grupių diskusijose, mokinių grupės, kurios lengviau rado uždavinio su dedukciniu argumentavimu sprendimą dėsto mintis nuosekliau ir aiškiau, pilnais sakiniais ir priešingai: matematinės minties nenuoseklumas susijęs su kalbos skurdumu.
- Alternatyvus trupmenų mokymo būdas, kai trupmenos mokomos kaip matavimai pateikia mokinio formuojamojo vertinimo informaciją.
- Nestandartinių tekstinių uždavinių naudojimas pamokose tarp mokinių iššaukia matematinę diskusiją.

Rekomendacijos

- Rekomenduojama ateityje atlikti tyrimus ne su visais vadovėliais, o su jų puslapių imtimis, kad būtų galimybė apžvelgti daugiau šalių vadovėlių ir įvairius vadovėlius kiekvienoje šalyje.
- Rekomenduojame vadovėlyje įtraukti įvairių tipų tiek adityvių, tiek multiplikatyvių ATU. Atsižvelgiant į tai, kad pradžioje mokiniai žino tik sudėtį ir gali spręsti tik uždavinius, reikalaujančias sudėties operacijos, vėliau jie išmoksta atimtį tik po daugybą ir dalybą, pateikiame hipotetinį užduočių tipų kiekį vadovėlyje.
- Siekiant ugdyti matematinės diskusijos gebėjimus rekomenduojama naudoti iliustruotus tekstinius uždavinius neskaitantiems vaikams, nestandartinius tekstinius uždavinius ir uždavinius, kurie reikalauja matematinio samprotavimo.
- P uždaviniai (ar jų rinkiniai) rekomenduojami naudoti kaip priemonė naujai matematinei temai pristatyti.
- Ateityje rekomenduojama atlikti empirinį tyrimą, kuriame atsitiktinai parinktiems dar neskaitantiems vaikams pateikiami iliustruoti tekstiniai uždaviniai. Taip pat stebėti, ar tokio pat amžiaus vaikai, kurie jau geba skaityti taip pat gerai sprendžia tokio tipo uždavinius, ar jų sprendimo galimybės išmokus skaityti padidėja.
- Rekomenduojame ikimokyklinio amžiaus vaikams, kurie dar negeba skaityti formuluoti uždavinius paveikslėliais, bei formuluoti uždavinių klausimus, kurie skatintų matematinį samprotavimą.
- Lietuvių kalba turi savo taisykles ir žodyną, todėl šią temą vertėtų išnagrinėti plačiau ieškant tiek sunkumų su kuriais gali susidurti mokiniai spręsdami tekstinius uždavinius, tiek kalbos išnaudojimo galimybių.
- „Koks skaičius kur tinka“ tipo uždaviniai rekomenduojami kaip viena iš priemonių lavinti matematinį mąstymą, matematinę kalbą, samprotavimą, bei įsigilinti į uždavinio realią situaciją.
- Įrodymo tekstinius uždavinius rekomenduojama pateikti mokiniams jau pradinėse klasėse ir vėliau kiekvienais metais jas pritaikyti pagal amžių, gebėjimus ir žinias.
- Rekomenduojama mokiniams pritaikyti modifikuotus tekstinius

uždavinius su dedukciniu argumentavimu, prieš tai jiems suteikiant reikiamas žinias.

- Rekomenduojama P uždavinius naudoti siekiant organizuoti matematinę diskusiją ir aptikti mokinių turimus sintetinius modelius.

Literatūra

[1] A. Agresti. *Statistics: The Art & Science of Learning from Data, Books a la Carte Edition*. Addison-Wesley, 2008.

[2] F. Arbaugh, J. Boyle, G. J. Stylianides, M. Steele ir others. *We Reason & We Prove for ALL Mathematics: Building Students' Critical Thinking, Grades 6-12*. Corwin Press, 2018.

[3] C. S. Asterhan ir B. B. Schwarz. Argumentation and explanation in conceptual change: Indications from protocol analyses of peer-to-peer dialog. *Cognitive science*, 33(3):374–400, 2009.

[4] A. Ažubalis. Dvidešimt Prano Mašioto matematikos didaktikos straipsnių. *Lietuvos matematikos rinkinys*, 48:159–164, 2004.

[5] A. P. Ažubalis. Miko petrausko aritmetikos uždavinynai. *Lietuvos matematikos rinkinys. LMD darbai.*, 54(ser. B):75–80, 2013.

[6] N. Balacheff. A study of students' proving processes at the junior high school level. In *Second UCSMP international conference on mathematics education*. NCTM, 1988.

[7] D. L. Ball. With an eye on the mathematical horizon: Dilemmas of teaching elementary school mathematics. *The elementary school journal*, 93(4):373–397, 1993.

[8] D. L. Ball ir H. Bass. Making mathematics reasonable in school. *A research companion to principles and standards for school mathematics*, pages 27–44, 2003.

[9] B. Balčytis. *Matematika 1*. Šviesa, 1982.

[10] J. Banionis. Antanas matulevičius ir jo peterburgietiškas aritmetikos uždavinynas ".

[11] S. Baruk. Wie alt ist der kapitan?[how old is the captain], 1989.

[12] I. E. Berends ir E. C. D. M. van Lieshout. The effect of illustrations in arithmetic problem solving: Effects of increased cognitive load.

Learning and Instruction, 19(4):345–353, 2009.

[13] A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping ir N. Presmeg. Approaches to qualitative research in mathematics education. *USA: Norma Presmeg*, pages 429–466, 2015.

[14] W. Blum. Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*, pages 73–96. Springer, 2015.

[15] A. J. Boonen, B. B. de Koning, J. Jolles ir M. Van der Schoot. Word problem solving in contemporary math education: A plea for reading comprehension skills training. *Frontiers in psychology*, 7: 191, 2016.

[16] D. M. Burton. The history of mathematics: An introduction. *Group*, 3(3):35, 1985.

[17] T. P. Carpenter ir J. M. Moser. The acquisition of addition and subtraction concepts. In H. Ginsburg, editor, *The Development of Mathematical Thinking*, pages 179–212. Academic Press, Orlando, FL, 1984.

[18] T. P. Carpenter ir J. M. Moser. The development of addition and subtraction problem-solving skills. In *Addition and subtraction*, pages 9–24. Routledge, 2020.

[19] T. P. Carpenter, M. K. Corbitt, H. S. Kepner, M. M. Lindquist ir R. E. Reys. Solving verbal problems: Results and implications from national assessment. *The arithmetic teacher*, 28(1):8–12, 1980.

[20] T. P. Carpenter, E. Ansell, M. L. Franke, E. Fennema ir L. Weisbeck. Models of problem solving: A study of kindergarten children's problem-solving processes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(5):428–441, 1993.

[21] T. P. Carpenter, E. Fennema, M. L. Franke, L. Levi ir S. B. Empson. *Children's Mathematics: Cognitively Guided Instruction*. Heinemann, Portsmouth, NH, 1997.

[22] T. P. Carpenter, E. Fennema, M. L. Franke, L. Levi ir S. B. Empson. *Children's mathematics: Cognitively guided instruction*, volume 1. Heinemann Portsmouth, NH, 1999.

[23] C. Y. Charalambous ir D. Pitta-Pantazi. Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. *Educational*

studies in mathematics, 64:293–316, 2007.

[24] D. D. Cummins. Children's interpretations of arithmetic word problems. *Cognition and instruction*, 8(3):261–289, 1991.

[25] G. Daroczy, M. Wolska, D. Meurers ir H.-C. Nuerk. Word problems: A review of linguistic and numerical factors contributing to their difficulty. *Frontiers in Psychology*, 6:348, 2015.

[26] G. Daroczy, M. Wolska, W. D. Meurers ir H.-C. Nuerk. Word problems: A review of linguistic and numerical factors contributing to their difficulty. *Frontiers in psychology*, 6:348, 2015.

[27] J. Davis-Dorsey, S. M. Ross ir G. R. Morrison. The role of context in children's understanding of mathematical word problems. *Journal of Educational Psychology*, 83(3):329–336, 1991.

[28] V. Davydov, S. Gorbov, T. Mukulina, M. Savelyeva ir N. Tabachnikova. Mathematics. moscow, 1999.

[29] D. De Bock, L. Verschaffel, D. Janssens ir W. Van Dooren. The illusion of linearity: Expanding the evidence towards probabilistic reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 35:65–83, 1998.

[30] E. De Corte ir L. Verschaffel. Beginning first graders' initial representation of arithmetic word problems. *The Journal of Mathematical Behavior*, 1985.

[31] E. De Corte ir L. Verschaffel. The effect of semantic structure on first graders' strategies for solving addition and subtraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18 (5):363–381, 1987.

[32] E. De Corte, L. Verschaffel ir B. Greer. *Mathematical Problem Solving and New Information Technologies: Research in Contexts of Practice*. Springer, Berlin, 1996.

[33] V. den Heuvel-Panhuizen, M. van Zanten ir others. Realistic mathematics education: A brief history of a longstanding reform movement. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 17:65–73, 2020.

[34] M. Depape, J.-P. Verhaeghe ir S. Gillis. Teachers' beliefs about solving mathematical word problems: A comparative study. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 17(4):387–410, 2014.

[35] Y. Deringöl. Misconceptions of primary school students about the

subject of fractions. *International Journal of Evaluation and Research in Education*, 8(1):29–38, 2019.

[36] T. Dewolf, W. Van Dooren, K. Hermens ir L. Verschaffel. The impact of illustrations and warnings on solving mathematical word problems realistically. *The Journal of Experimental Education*, 80(1):96–112, 2012.

[37] V. Durand-Guerrier. Semantic perspective in mathematics education. a model on theoretic point of view. In *Proceedings of ICME*, volume 11, 2010.

[38] V. Durand-Guerrier ir G. Arsac. An epistemological and didactic study of a specific calculus reasoning rule. *Educational studies in mathematics*, 60:149–172, 2005.

[39] I. Elia. Word problem solving and pictorial representations: insights from an exploratory study in kindergarten. *ZDM*, 52(1): 17–31, 2020.

[40] I. Elia ir G. Philippou. The functions of pictures in problem solving. *The International Journal of Learning*, 11:353–366, 2004.

[41] S. Elrod. Quantitative reasoning: The next "across the curriculum" movement. *Peer Review*, 16(3):4–8, 2014.

[42] L. S. Fuchs, D. Fuchs, P. M. Seethaler ir C. Craddock. Improving the understanding of fractions: Word problems and their relationship to mathematics. *Journal of Educational Psychology*, 107(3): 547–558, 2015.

[43] L. S. Fuchs, D. Fuchs ir J. K. Gilbert. Cognitive processes in mathematical word problem solving: A synthesis of research. *Learning Disabilities Research & Practice*, 34(4):206–216, 2019.

[44] L. S. Fuchs, D. Fuchs ir S. R. Powell. Future directions in research on mathematical problem solving. *Educational Psychology Review*, 31(4):727–748, 2019.

[45] K. Fuson. Research on whole number addition and subtraction. *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning/Macmillan Publishing Co*, 1992.

[46] F. Gabriel, F. Coché, D. Szucs, V. Carette, B. Rey ir A. Content. A componential view of children's difficulties in learning fractions. *Frontiers in psychology*, 4:715, 2013.

[47] G. A. Goldin ir C. E. McClintock. *Task variables in mathematical problem solving*. Erlbaum, Hillsdale, NJ, 1984.

[48] V. Grabauskienė ir A. Zabulionytė. Verbalinės ir vizualios informacijos pritaikymas kurtiesiems mokiniams sprendžiant tekstinius uždavinius iii klasėje. *Pedagogy Studies/Pedagogika*, 129(1), 2018.

[49] K. Gravemeijer ir J. Terwel. Hans freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. *Journal of curriculum studies*, 32(6):777–796, 2000.

[50] K. P. E. Gravemeijer. Developing realistic mathematics education. 1994.

[51] B. Greer. Multiplication and division as models of situations. *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, pages 276–295, 1992.

[52] B. Greer, L. Verschaffel, W. Van Dooren ir S. Mukhopadhyay. Introduction. making sense of word problems: Past, present, and future. 2009.

[53] B. Gros. *The Future of Ubiquitous Learning: Learning Designs for Emerging Pedagogies*. Springer, New York, 2019.

[54] E. A. Gunderson, N. Hamdan, L. Hildebrand ir V. Bartek. Number line unidimensionality is a critical feature for promoting fraction magnitude concepts. *Journal of Experimental Child Psychology*, 187: 104657, 2019.

[55] K. Gvozdic ir E. Sander. Understanding and solving additive word problems: The role of language and external representations. *ZDM Mathematics Education*, 52(1):163–175, 2020. this issue.

[56] M. S. Hannula. Motivation in mathematics: Goals reflected in emotions. *Educational studies in mathematics*, 63:165–178, 2006.

[57] M. Hegarty, R. E. Mayer ir C. A. Monk. Comprehension of arithmetic word problems: A comparison of successful and unsuccessful problem solvers. *Journal of educational psychology*, 87(1):18, 1995.

[58] J. B. Jaffe ir D. J. Bolger. Cognitive processes, linguistic factors, and arithmetic word problem success: a review of behavioral studies. *Educational Psychology Review*, 35(4):105, 2023.

[59] A. K. Jitendra, K. Hoff ir M. M. Beck. Teaching middle school students with learning disabilities to solve word problems using

a schema-based approach. *Remedial and Special education*, 20(1): 50–64, 1999.

[60] G. Kaiser. Theoretical frameworks and empirical approaches in research on mathematics education. In *Research on Mathematics Education*, pages 1–21. Springer, 2017.

[61] A. Kajander ir M. Lovric. Mathematics textbooks and their potential role in supporting misconceptions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 40(2):173–181, 2009.

[62] E. Karikovas ir V. Miežys. Observations about lithuanian state-level maturity examination in mathematics. *Lietuvos matematikos rinkinys*, 62:34–42, 2021.

[63] B. Kaur ir B. H. Yeap. *Pathways to reasoning and communication in the primary school mathematics classroom: A resource for teachers by teachers*. Centre for Research in Pedagogy and Practice, National Institute of Education, 2009.

[64] B. Kaur, Y. B. Har ir L. H. Kiam. Enhancing the pedagogy of mathematics teachers to emphasize understanding, reasoning and communication in their classrooms (epmt). Technical report, Final Research Report of CRPP, project No. CRP 6/06 BK, 2010.

[65] R. Keijzer. Teaching formal mathematics in primary education. fraction learning as mathematising process. 2003.

[66] R. Keijzer ir J. Terwel. Learning for mathematical insight: a longitudinal comparative study on modelling. *Learning and instruction*, 13(3):285–304, 2003.

[67] I. Kilienė. On a classification of word problems from the first grade lithuanian textbooks. *Lietuvos matematikos rinkinys. Ser. A*, 61:18–24, 2021.

[68] I. Kilienė. Mathematical reasoning at the age of four. In *Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)*, number 33 in Proceedings of CERME, 2022.

[69] I. Kilienė ir R. Norvaiša. Solving word problems with reasoned judgement. *Lithuanian Mathematical Journal*, 62(4):467–480, 2022.

[70] J. Kilpatrick, J. Swafford ir B. Findell. *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. National Academy Press, Washington, DC,

2001.

[71] B. Koichu, R. Parasha ir M. Tabach. Who-is-right tasks as a means for supporting collective looking-back practices. *ZDM–Mathematics Education*, 53:831–846, 2021.

[72] L.-K. Kor, S.-H. Teoh, S. S. E. B. Mohamed ir P. Singh. Learning to make sense of fractions: Some insights from the malaysian primary 4 pupils. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 14(1):169–182, 2018.

[73] V. L. Kouba. Children's solution strategies for equivalent set multiplication and division word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(2):147–158, 1989.

[74] V. L. Kouba, C. A. Brown, T. P. Carpenter, M. M. Lindquist, E. A. Silver ir J. O. Swafford. Results of the fourth naep assessment of mathematics: Number, operations, and word problems. *The Arithmetic Teacher*, 35(8):14–19, 1988.

[75] J. Lave. *Cognition in practice: Mind, mathematics and culture in everyday life*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[76] D. Leiss, S. Schukajlow, W. Blum, R. Messner, R. Pekrun ir M. Müller. The effect of different teaching methods on students' modeling competence: An empirical study. *Journal of Mathematical Behavior*, 29(2):186–199, 2010.

[77] D. Leiss, J. Plath, A. Heinze, S. Schukajlow ir W. Blum. Selecting and interpreting multiple external representations in mathematical modeling tasks: The role of cognitive and metacognitive processes. *Mathematical Thinking and Learning*, 21(2):101–120, 2019.

[78] Y. H. Leong, W. K. Ho ir L. P. Cheng. Concrete-pictorial-abstract: Surveying its origins and charting its future. 2015.

[79] F. K. Lester, J. Garofalo ir D. L. Kroll. Self-regulation in mathematical problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(1):15–22, 1989.

[80] N. P. Loc, D. H. Tong ir P. T. Chau. Identifying the concept fraction of primary school students: The investigation in vietnam. *Educational Research and Reviews*, 12(8):531–539, 2017.

[81] K. Maaß. What are modelling competencies? *ZDM Mathematics Education*, 38(2):113–142, 2006.

[82] P. Mašiotas. Matematikos programas statant. *Lietuvos mokykla*, 1: 1920, 1919.

[83] R. E. Mayer. *Cognitive, Metacognitive, and Motivational Aspects of Problem Solving*. Springer, Berlin, 1998.

[84] T. M. Moleko. Visualization in problem-solving: Teachers' perspectives on the role of language and cognitive processes. *South African Journal of Education*, 41(3):567–582, 2021.

[85] J. Moss ir others. Pipes, tubes, and beakers: New approaches to teaching the rational-number system. *How students learn: Mathematics in the classroom*, pages 121–162, 2005.

[86] K. Mottlová ir J. Slezáková. What number makes sense? standard word problems with nonstandard wording. In *Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)*, number 23, 2022.

[87] J. C. Moyer, M. B. Moyer, L. Sowder ir J. Threadgill-Sowder. Story problem formats: Verbal versus telegraphic. *Journal for Research in mathematics Education*, 15(1):64–68, 1984.

[88] J. T. Mulligan ir M. C. Mitchelmore. Young children's intuitive models of multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(3):309–330, 1997.

[89] I. V. Mullis, M. O. Martin, P. Foy, D. L. Kelly ir B. Fishbein. Timss 2019 international results in mathematics and science. *Retrieved from Boston College, TIMSS & PIRLS International Study Center website: https://timssandpirls. bc. edu/timss2019/international-results*, 2020.

[90] P. Nesher, J. G. Greeno ir M. S. Riley. The development of semantic categories for addition and subtraction. *Educational studies in mathematics*, 13(4):373–394, 1982.

[91] M. Niss ir W. Blum. *The learning and teaching of mathematical modelling*. Routledge, 2020.

[92] R. Norvaiša. Sąvokos, terminai ir simboliai matematikos vadovėliuose. *Lietuvos matematikos rinkinys. Lietuvos matematikų draugijos darbai. Ser. B*, 64:59–74, 2023.

[93] T. Nunes, B. V. Dorneles, P.-J. Lin ir E. Rathgeb-Schnierer. *Teaching and learning about whole numbers in primary school*. Springer Nature,

2016.

[94] T. Palm. The realism of word problems. In *The International Handbook of Mathematics Education*, pages 837–875. Springer, 2002.

[95] E. Polotskaia. *How elementary students learn to mathematically analyze word problems: The case of addition and subtraction*. McGill University (Canada), 2015.

[96] G. Polya. *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1945.

[97] E. Potapovienė, V. Sičiūnienė, M. Stričkienė ir I. Šlaitienė. 2005 m. matematikos mokyklinio brandos egzamino rezultatų kokybinĖ analizĖ. *Lietuvos Respublikos švietimo ir mokslo ministeria Nacionalinis egzaminų centras*, 2005.

[98] L. V. R. Rimšienė, A. Kavaliauskienė. *Serija "TAIP!" Matematika. 1 klasė.* Šviesa, 2018.

[99] B. Ragalytė ir A. Paukštienė. Tarpukario lietuvos matematikos programų palyginimas su 1912 m. vokietijos žemės viurtembergo matematikos programomis. *Lietuvos matematikos rinkinys*, 60:63–69, 2019.

[100] S. K. Reed. *Word Problems: Research and Curriculum Reform*. Erlbaum, Mahwah, NJ, 1999.

[101] D. A. Reid ir C. Knipping. *Proof in mathematics education: Research, learning and teaching*. Brill, 2010.

[102] J. Rellensmann ir S. Schukajlow. The role of knowledge and emotions in drawing for modeling. *Educational Studies in Mathematics*, 95(3):253–270, 2017.

[103] K. Reusser. *From Situation to Equation on Formulation, Understanding and Solving" situation Problems."*. Institute of Cognitive Science, University of Colorado, 1985.

[104] M. S. Riley ir J. G. Greeno. Solving verbal problems: Developmental stages and strategies. *Journal of Educational Psychology*, 75(4): 326–338, 1983.

[105] M. S. Riley, J. G. Greeno ir J. I. Heller. Development of children's problem-solving ability in arithmetic. *Journal of Educational Psychology*, 75(5):753, 1983.

[106] M. S. Riley ir others. Development of children's problem-solving

ability in arithmetic. 1984.

[107] R. Säljö, E. Riesbeck ir J. Wyndhamn. Learning to model: Coordinating natural language and mathematical operations when solving word problems. In *Words and Worlds*, pages 177–193. Brill, 2009.

[108] O. Šalkuvienė. Aritmetinių vaizdinių formavimo iv-v klasėse, taikant virtualiuosius mokymo objektus, teorinis pagrindimas. *Jaunųjų mokslininkų darbai*, (1):70–75, 2013.

[109] E. A. P. Sari ir P. Ayunika. Supporting students' development of early fraction learning. *Unpublished Thesis of Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education, Faculty of Science. The Netherlands: Utrecht University*, 2011.

[110] A. D. Schliemann ir D. W. Carraher. The evolution of mathematical reasoning: Everyday versus idealized understandings. *Developmental Review*, 22(2):242–266, 2002.

[111] A. H. Schoenfeld. Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. *Journal of Educational Psychology*, 80:335–372, 1992.

[112] S. Schukajlow, D. Leiss, R. Pekrun, W. Blum, M. Müller ir R. Messner. Teaching methods for modelling problems and students' task-specific enjoyment, value, interest and self-efficacy expectations. *Educational Studies in Mathematics*, 75(1):71–92, 2010.

[113] S. Schukajlow, J. Blomberg ir K. Rakoczy. The effect of prompting multiple solutions for modeling problems on students' performance. *Educational Studies in Mathematics*, 101(1):61–77, 2019.

[114] C. Setler. How old is the captain: Strategies. *Strategies*, 5(1):34–37, 1994.

[115] A. Sfard. On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, 22(1):1–36, 1991.

[116] J. A. Shahbari ir I. Peled. Modelling in primary school: Constructing conceptual models and making sense of fractions. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 15(2):371–391, 2017.

[117] M. A. Simon, N. Placa, A. Avitzur ir M. Kara. Promoting a concept

of fraction-as-measure: A study of the learning through activity research program. *The Journal of Mathematical Behavior*, 52:122–133, 2018.

[118] L. Skromovaitė. Moksleivių intelekto struktūros ypatumai, tiriant wit metodika. 2014.

[119] M. Stephan, J. Bowers, P. Cobb ir K. Gravemeijer. *Supporting students' development of measuring conceptions: Analyzing students' learning in social context*. NCTM, 2003.

[120] M. Stephan, P. Cobb ir K. Gravemeijer. Chapter 5: Coordinating social and individual analyses: Learning as participation in mathematical practices. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph*, 12:67–102, 2003.

[121] J. W. Stigler, K. C. Fuson, M. Ham ir M. Sook Kim. An analysis of addition and subtraction word problems in american and soviet elementary mathematics textbooks. *Cognition and instruction*, 3(3): 153–171, 1986.

[122] G. A. Stillman. Applying metacognitive strategies during modeling. *Mathematics Education Research Journal*, 23:245–264, 2011.

[123] A. J. Stylianides. *Proving in the elementary mathematics classroom*. Oxford University Press, 2016.

[124] G. J. Stylianides. An analytic framework of reasoning-and-proving. *For the learning of mathematics*, 28(1):9–16, 2008.

[125] J. Sweller. Cognitive load theory, learning difficulty, and instructional design. *Learning and instruction*, 4(4):295–312, 1994.

[126] F. J. Swetz. *Mathematical expeditions: Exploring word problems across the ages*. JHU Press, 2012.

[127] C. Thevenot. Are mental models in word problems activated sequentially? the case of comparison problems. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 63(11):2231–2248, 2010.

[128] C. Thevenot ir P. Barrouillet. On the importance of the problem structure in the mental arithmetic problem-solving process: Evidence from adults and children. *Cognitive Science*, 39(1):32–46, 2015.

[129] D. R. Thompson, S. L. Senk ir G. J. Johnson. Opportunities to learn reasoning and proof in high school mathematics textbooks.

Journal for Research in Mathematics Education, 43(3):253–295, 2012.

[130] P. W. Thompson. Quantitative reasoning, complexity, and additive structures. *Educational studies in Mathematics*, 25(3):165–208, 1993.

[131] A. Treffers. *Three dimensions: A model of goal and theory description in mathematics instruction—The Wiskobas Project*, volume 3. Springer Science & Business Media, 2012.

[132] U. Träff ir M. C. Passolunghi. Reading and numerical processing in children with mathematical difficulties: The role of the arabic and verbal number forms. *Journal of Learning Disabilities*, 48(6): 558–566, 2015.

[133] J. Tubutienė. *4 klasės mokinių, turinčių nedidelių specialiųjų ugdymosi poreikių, tekstinių uždavinių sprendimo ypatumai*. PhD thesis, Siauliai University, 2012.

[134] Y. Uesaka ir E. Manalo. The role of external visual representations in solving math problems: Drawing activity versus other solution strategies. *Learning and Instruction*, 22(1):37–47, 2012.

[135] X. Vamvakoussi ir S. Vosniadou. How many decimals are there between two fractions? aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation. *Cognition and instruction*, 28(2):181–209, 2010.

[136] X. Vamvakoussi ir S. Vosniadou. Bridging the gap between the dense and the discrete: The number line and the "rubber line" bridging analogy. *Mathematical Thinking and Learning*, 14(4):265–284, 2012.

[137] X. Vamvakoussi, K. P. Christou ir S. Vosniadou. Bridging psychological and educational research on rational number knowledge. *Journal of Numerical Cognition*, 4(1):84–106, 2018.

[138] M. Van den Heuvel-Panhuizen ir P. Drijvers. Realistic mathematics education. *Encyclopedia of mathematics education*, pages 713–717, 2020.

[139] W. Van Dooren, S. Lem, H. De Wortelaer ir L. Verschaffel. Improving realistic word problem solving by using humor. *The Journal of Mathematical Behavior*, 53:96–104, 2019.

[140] G. Vergnaud. A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. *Addition*

and subtraction: A cognitive perspective, pages 39–59, 1982.

[141] G. Vergnaud. Multiplicative structures. In R. Lesh ir M. Landau, editors, *Acquisition of mathematics concepts and processes*, pages 127–174. Academic Press, New York, 1983.

[142] G. Vergnaud. The theory of conceptual fields. *Human development*, 52(2):83–94, 2009.

[143] L. Verschaffel ir E. De Corte. Teaching realistic mathematical modeling in the elementary school: A teaching experiment with fifth graders. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(5): 577–601, 1997.

[144] L. Verschaffel, B. Greer ir E. De Corte. Word problems: A vehicle for promoting authentic mathematical understanding and problem solving in the primary school. *Educational Studies in Mathematics*, 42(3):125–144, 2000.

[145] L. Verschaffel, B. Greer, W. Van Dooren ir S. Mukhopadhyay. *Words and worlds: Modeling verbal descriptions of situations*, volume 16. BRILL, 2009.

[146] L. Verschaffel, B. Greer ir E. De Corte. Word problems: A vehicle for promoting authentic mathematical understanding and problem solving in the primary school. *ZDM*, 42(5):455–467, 2010.

[147] L. Verschaffel, F. Depaepe ir et al. A comprehensive analysis of individual differences in mathematical word problem solving: Contributions of cognitive, linguistic, and affective factors. *Learning and Instruction*, 27:64–75, 2013.

[148] L. Verschaffel, B. Greer ir E. De Corte. Word problems: A survey of research. *ZDM Mathematics Education*, 45:377–398, 2013a.

[149] L. Verschaffel, F. Depaepe ir W. Van Dooren. Word problems in mathematics education. *Encyclopedia of mathematics education*, pages 908–911, 2020.

[150] L. Verschaffel, B. Greer ir E. De Corte. Future perspectives on mathematical word problems. *ZDM*, 52(6):1073–1088, 2020.

[151] S. Vicente, J. Orrantia ir L. Verschaffel. Influence of situational and mathematical factors on word problem solving: Using pictorial representations to boost performance. *Educational Psychology*, 27 (2):229–244, 2007.

[152] S. Vicente, L. Verschaffel, R. Sánchez ir D. Múñez. Arithmetic word problem solving. analysis of singaporean and spanish textbooks. *Educational Studies in Mathematics*, 111(3):375–397, 2022.

[153] Visuotinė lietuvių enciklopedija. Euristika, 2024. Accessed: 2024-09-03.

[154] S. Vosniadou, X. Vamvakoussi ir I. Skopeliti. The framework theory approach to the problem of conceptual change. *International handbook of research on conceptual change*, pages 3–34, 2008.

[155] C. Walkington, V. Clinton ir P. Shivraj. The influence of text length on mathematical problem-solving accuracy and reading comprehension. *Journal of Educational Psychology*, 107(2):340–353, 2015.

[156] D. Wells. The penguin book of curious and interesting mathematics. *(No Title)*, 1997.

[157] H. Wu. *Understanding numbers in elementary school mathematics*. American Mathematical Society Providence, 2011.

[158] H.-H. Wu. Teaching school mathematics: Algebra. *vectors*, 150: 269, 2016.

[159] Y. P. Xin. The effect of a conceptual model-based approach on 'additive'word problem solving of elementary students struggling in mathematics. *ZDM*, 51:139–150, 2019.

[160] I. Zenkevičiūtė ir V. Dabrišienė. Statistic analysis of prof. j. matulionis young mathematicians contest tasks. *Lietuvos matematikos rinkinys*, 50:134–139, 2009.

Priedai

a Klausimynas, kurį atliko 1 kurso studentai dalyvavę empiriniame tyrime

Jūs baigėte .... miesto .... mokyklą.
Jūsų grupės eksperimente numeris:

1. Ar pavyko išvesti užduoties situacijos simbolinę reprezentaciją (2 dalis)?

Taip:	Ne:	Negaliu atsakyti: ....

2. Ar pavyko įrodyti užduoties situacijos simbolinę reprezentaciją naudojant dedukciją (3 dalis)?

Taip:	Ne:	Negaliu atsakyti: ....

3. Ar užduoties situacijos reprezentacijos įrodymas padeda geriau suprasti sprendimą?

Taip:	Ne:	Negaliu atsakyti: ....

4. Kuri užduoties dalis jums atrodo sunkesnė, 2 ar 3 dalis?

Pasirinkite atsakymą:

2-a sunkesnė	.....
3-a sunkesnė	.....
abi sunkios	.....
abi lengvos	.....
negaliu atsakyti	.....

5. Ar pritariate įrodymo naudojant dedukciją mokymuisi mokykloje, prieš tai tinkamai pasirengus?

Taip:	Ne:	Negaliu atsakyti: ....

Žymėjimo pavyzdys:

Taip: X	Ne:	Negaliu atsakyti: ....

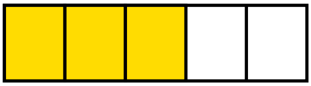
b Mokinių, kuriems buvo pristatytos trupmenos atliktas testas prieš pamoką

VARDAS: ______________ PAVARDĖ: ___________________

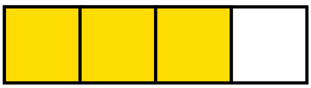
KLASĖ: _________

Atsakyk į klausimus:

- Parašyk trupmeną, kuri rodo geltona spalva nuspalvintą figūros dalį.

a) 

____

b) 

____

Kuri schema a) ar b) atitinka didesnę trupmeną? Kodėl?

____

Palygink (įrašyk > < arba =):

$$5 \underline{\hspace{1.5cm}} 8$$

$$\frac{2}{5} \underline{\hspace{1.5cm}} 2$$

$$\frac{1}{5} \underline{\hspace{1.5cm}} \frac{2}{5}$$

Paaiškink kodėl:

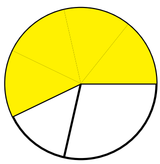
$$\frac{1}{5}\underline{\qquad\qquad}\frac{1}{8}$$

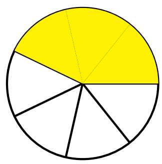
Paaiškink kodėl:

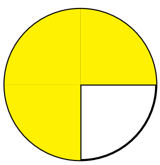
$$\frac{3}{5}\underline{\qquad\qquad}\frac{2}{5}$$

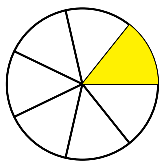
Paaiškink kodėl:

Kurio skritulio nuspalvinta dalis yra $\frac{3}{7}$?

a) 

c) 

b) 

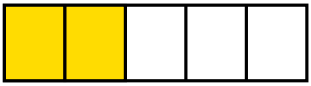
d) 

c Mokinių, kuriems buvo pristatytos trupmenos atliktas testas po pamokos

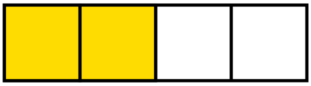
VARDAS: ________________ PAVARDĖ: ______________________
KLASĖ: ___________

Atsakyk į klausimus:

1. Parašyk trupmeną kuri rodo geltona spalva nuspalvintą figūros dalį.

a) 

____

b) 

____

2. Kuri schema a) ar b) atitinka didesnę trupmeną? Kodėl?

____

3. Palygink (įrašyk > < arba =):

$$3 \_\_\_\_\_ 7$$

$$\frac{3}{4} \_\_\_\_\_ 2$$

$$\frac{1}{6} \underline{\qquad} \frac{2}{6}$$

Paaiškink kodėl: ____

$$\frac{1}{6} \underline{\qquad} \frac{1}{7}$$

Paaiškink kodėl: ____

$$\frac{3}{5} \underline{\qquad} \frac{4}{7}$$

Paaiškink kodėl: ____

Summary

Introduction

This work examines the objectives and applications of using word problems in mathematics education. The following goals for the use of word problems in mathematics teaching are identified [149]:

1. To learn how to solve real-life situations by using mathematical modeling and applying the knowledge learned in school.
2. To motivate students to learn mathematics.
3. To develop students' creativity and problem-solving skills.
4. To assist in learning new mathematical topics and acquiring the necessary skills for them.

This work aims to expand the possibilities of using word problems in mathematics education. The study connects different types of word problems with the desired teaching objectives and demonstrates the potential applications of various word problems in mathematics teaching.

S.1 Empirical research: primary grades textbooks analysis

Students encounter quantitative reasoning in primary school. The key feature of quantitative reasoning is that numbers and numerical relationships are secondary and are not included in the primary analysis of the situation; the relationships between quantities are the most important [130]. Quantitative reasoning is essential for solving word problems when using strategies other than directly applying operations based on keywords. There are two types of quantitative reasoning: additive and multiplicative [93].

This study addresses the following research questions:

RQ1: What is the distribution of ATUs in Lithuanian textbooks? How does it differ from those in Spain and Singapore?
RQ2: Can a randomly generated sample of textbook pages be used to analyze the entire textbook?
RQ3: Do the proportions of ATU types in Lithuanian textbooks differ from those in Spain and Singapore?

The mathematics textbook set "Taip" for grades 1-–4 (a total of 12 books) was selected for the empirical study.

Statistical Population

If $A(s)$ is the number of activities in the textbook s, then the population is:

$$y_1(s), y_2(s), \dots, y_{A(s)}(s),$$

where i corresponds to the i-th activity in the textbook s, and $y_i \in B = \{0, 1\}$.

Similarly, if $N(s)$ is the number of ATUs in the textbook, we have the population:

$$x_1(s), x_2(s), \dots, x_{N(s)}(s)$$

where i corresponds to the i-th ATU in the textbook s, and $x_i \in D = \{1, 2, \dots, 34\}$.

Proportions are calculated based on task types, for example:

$$p_{ATU(a)}(s) = \frac{1}{N(s)} \sum_{i=1}^{N(s)} \mathbb{1}_{\text{ATU(a)}}(x_i)(s), \tag{S.1}$$

where $p_{ATU(a)}(s)$ is the proportion of additive ATUs in the textbook s and $ATU(a) = \{x_i(s) : x_i(s) \leq 20\}$.

The hypothesis is tested to check if the proportion equals a desired value p.

Classification of Arithmetic Word Problems

All arithmetic problem activities and other mathematical activities in the textbook were identified, categorized, and assigned to specific types and categories.

A total of 2,626 mathematical activities were found, of which 879 (33.47%) were ATU activities. There were 1,966 arithmetic word problems (ATUs), 53% of which were additive, and 47% multiplicative.

Three out of the 20 types of additive ATUs account for 68.40% of all additive ATUs. These types are considered low- to- medium -complexity ATUs [93, 152]. Three out of the 14 types of multiplicative ATUs make up 81.69% of simple ratio problems: RatioP, Ratio-asis, and Ratio-iklis.

Statistical Model

To determine whether the proportion of a certain type of ATU in a textbook matches the expected proportion, we can analyze a sample of the textbook instead of the entire textbook.

In the case of Lithuania, a random sample of 50 pages was examined. We tested the hypothesis:

H_0 : The distribution of the random sample from s matches the empirical distribution of the entire s according to ATU types.
H_1 : The distribution of the random sample does not match the empirical distribution of the entire s according to ATU types.

We found that the sample matches the textbook regarding the distribution of other mathematical activities and ATUs, the distribution of additive and multiplicative ATUs, and the distribution based on mathematical operations.

Results

• The study does not refute the hypothesis proposed by Vicente et al. [152] regarding the benefits of organizational illustrations.
• The study was conducted by using a sample of the textbook rather than the entire textbook.
• The textbook authors consider mathematical operations but not the types. Some ATU types are not present in the textbooks at all.

S.2 Mathematical Communication Competence

The second section of the work reviews non-standard word problems that develop mathematical reasoning and enhance mathematical communication.

These concepts include creativity (hypothesis generation), problem-solving skills (pattern recognition), argumentation, and deductive reasoning (supporting/rejecting a hypothesis) [124].

S.2.1 Word Problems for Non-Reading Children. Experiment.

It is widely believed that only older students are capable of mathematical reasoning [6]. This experiment aims to show that even a 4-year-old non-reading child can reason about a mathematical concept that has never been introduced to them. A case study was conducted with a 4-year-old child. The problem used in the study [110] with 3rd-grade students was illustrated and adapted for a 4-year-old non-reading child.

Results

- The child solved the problem and explained the solution.
- Without knowing fractions or being able to express thoughts by using the appropriate terminology, the child understood that the bear would receive one part out of four parts (when two cupcakes were halved).
- The child was unable to formulate the idea that the result was less than two whole units but expressed the idea that the objects (even though incomplete) were two.
- Without the teacher's guidance, the child independently used the term "part".

S.2.2 What Numbers Makes Sense Problems. Empirical Study

What Numbers Makes Sensce (WNMS) problems are non-standard word problems that include instructions, numerical values, and a textual description of a situation with blanks to be filled with numerical values. In these problems, the linguistic, mathematical, and contextual aspects are important. *What Numbers Make Sensce* type problems have the potential to develop problem-solving skills, mathematical reasoning, and argumentation skills.

The following research objectives were identified:

TK1: What argumentation techniques do students use when solving WNMS-type word problems together as a class?

TK2: Do the arguments used by students in the Czech Republic and Lithuania differ?

Both Lithuanian and Czech languages have unique rules regarding how numbers are combined with nouns.

In the Czech language, the number groups are as follows:

- The number 1.
- Numbers 2, 3, 4.
- All numbers greater than 4.

In the Lithuanian language, the groups are as follows:

- Numbers that end with the word "one": 1, 21, 31, 41...
- Numbers that end with zero and all numbers from 11 to 19: 10-20, 30, 40, 50, ...
- Numbers that end with digits 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, except for numbers from 12 to 19: 2-9, 22-29, 32-39...

The languages were compared, and numbers were chosen from these groups so that students would solve analogous situations from a linguistic aspect. Two WNMS problems were used in the study. The first problem was designed to introduce the problem type. The second problem included a linguistic aspect. Two experiments were conducted in the Czech Republic and Lithuania. A total of 28 Czech and 20 Lithuanian 5th-grade students participated. The sStudents were given time to solve the problems individually, and then the problems were solved with the entire class.

The results were collected and summarized. The linguistic aspect plays a significant role in WNMS problems, influencing how they are formulated in both the Lithuanian and the Czech languages. Students from both countries considered all three aspects: mathematical, linguistic, and contextual, which indicatesing that this type of problem encourages students to evaluate and engage with the problem's situation. Students from both countries frequently used the reordering method and the guess-and-check strategy. Further research with larger sample sizes and more diverse WNMS problems would reveal the benefits and importance of these problems.

S.2.3 Using Deductive Arguments in Teaching Mathematical Communication. Empirical Study

Teaching mathematical proofs is considered unsuccessful in many countries [6]. Students often lack understanding of how and why to argue and prove statements. Inconsistency and unfounded conclusions are common in both everyday discussions and students' mathematical reasoning. In this empirical study, first-year undergraduate students were given a modified word problem, one part of which asked them to construct a deductive argument, describing the solution using statements and rules of propositional logic. A total of 26 first-year data science students participated in the study. The students were familiar with propositional logic and its rules (Modus Ponens, Modus Tollens, etc.). Seven groups of 3-4 students were formed, and each group's discussion was recorded in the audio format.

Seven audio recordings of 40-–90 minutes each were analyzed, along with the students' solutions and questionnaire responses. A coding system was created, assigning codes to phrases or longer segments of the discussion. The students' conversations were analyzed both in terms of content and as a dialogue.

In terms of content, the discussion codes can be divided into the following categories:

- Introductory discussions;

- Formulating the symbolic representation of the situation and solving the problem;
- Formulating assumptions;
- Drawing conclusions based on assumptions.

Codes were assigned by using the expression xyz, where:

$x \in \{0, 1, 2, 3\}$ -- one of the categories;
$y \in \{M, L, G\}$ — three domains: measurements, logic, general knowledge;
z — the specific action, topic, or area being discussed.

Participants in the survey answered the following questions:

- Were you able to derive a symbolic representation of the situation in the task?
- Were you able to prove the symbolic representation of the situation by using deduction?
- Does the proof help to better understand the solution?
- Which part of the task seemed more difficult, part 2 or part 3?
- Do you agree with the use of proof in schools if students are properly prepared?

Conclusions

The group work varied in the number of monologues, examples used, and the course of the discussion, but in all cases, a mathematical discussion based on elements of logic could be distinguished. Groups that found the solution more easily expressed their thoughts more clearly and coherently, in complete sentences. Word problems can be an effective tool for teaching mathematical discussion, but attention should be paid to their adaptation and preparation according to students' abilities and knowledge.

S.3 Motivating Students to Learn New Mathematical Topics

The study is based on the theory of Realistic Mathematics Education (RME) [138]. This theory involves the use of situations that students can imagine in mathematics teaching. These situations are used as tools for understanding mathematical concepts and as contexts in which students can later apply their mathematical knowledge [138].

The following research questions were raised:

TK1: Can the P problem (problem-solving task) be used as a tool to reveal students' understanding of fractions?
TK2: What misconceptions (synthetic models) do students have about fractions?

A total of 298 third-grade students (aged 8-9) from 14 different schools in Lithuania participated in the study. The study analyzed recordings of remote lessons, students' problem-solving processes, questionnaires, and interview responses. Zoom and Teams platforms were used, and the study took place during the COVID-19 pandemic. Two experimental cycles were conducted.

Results

Students independently arrived at the following correct ideas:

- The larger the denominator, the smaller the fraction.
- The fraction $\frac{2}{2}$ is equal to $\frac{1}{1}$ and both are equal to 1.
- The fraction $\frac{1}{0}$ cannot be marked on a glass.

The synthetic models observed among the students included:

- Understanding fractions with different denominators as separate sets.

- Associating fractions with decimal numbers.
- Linking fractions with the properties of the part-whole model.
- Marking a fraction on the number line where its denominator should be, or as two points: the numerator and the denominator.
- Failing to notice that fractions $\frac{2}{2}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{2}$ are not less than 1.

Based on the RME theory, a sequence of tasks was designed and tested to introduce the mathematical topic. The sequence of tasks was tested with two groups of students. Pre- and post-lesson tests were administered to the students.

During the tests, the following student mistakes were observed:

- Confusing the numerator and the denominator;
- Comparing fractions based on the denominator value;
- Considering the fraction with more parts (larger denominator) to be larger in a diagram.

The proposed task helps link fractions to the number line, but it is not enough to form a complete understanding of the magnitude of a fraction. The post-lesson test showed that students' understanding of fraction size had not changed.

Conclusions

- This study identified three different goals for using word problems, with different types of word problems assigned to each of these goals.
- The variety of arithmetic word problems in primary school textbooks is not extensive. Simple and medium-difficulty word problems are the most common, and some problem types are absent from textbooks.
- The number of mathematical activities in Lithuanian primary school textbooks is lower compared to textbooks from Singapore and Spain.

- Similar trends emerge in Lithuania, Singapore, and Spain regarding which types of ATUs are more common and which are absent from textbooks. In Lithuania, three types of ATUs account for 68.40% of all additive ATUs. Similarly, in Singapore and Spain, these types make up 64.6% and 69.3% of additive ATUs, respectively.
- In the collection of Lithuanian primary school textbooks, 81.69% of all multiplicative ATUs consist of simple ratio ATUs. In contrast, in Singapore and Spain, the figures are 75.8% and 86.8%, respectively.
- The results of the textbook study support the hypothesis proposed by Vicente et al. [152] regarding the benefits of organizational illustrations.
- To compare the proportions in a given textbook with a desired p_0, we must decide on the target p_0. This can be done in various ways, such as using textbooks from countries with the highest student performance, consulting experts, and determining a target p_0.
- The case study shows that even a non-reading child can correctly justify solving a word problem by using familiar, non-mathematical language.
- A word problem can be presented in different formats to students of different ages, with appropriate and correct solutions expected based on their age.
- An illustrated word problem presented to a non-reading student can involve these reasoning steps: identifying a pattern, forming a hypothesis, and justifying or arguing the solution.
- *What Numbers Makes Sensce* type problems encourage argumentation. Students in Lithuania and the Czechia Republic considered all three aspects: mathematical, linguistic, and contextual. This shows that this type of problem encourages engagement with the situation and a deep understanding of the problem.
- In solving a problem requiring deductive reasoning, group work varied in terms of the number of monologues, the use of

examples, and the course of the discussion, but a mathematical discussion based on logic could be identified in all cases.
• Groups that found the solution more easily expressed their thoughts more clearly and coherently, in complete sentences. Conversely, a lack of logical consistency in mathematical thinking is related to poor language skills.
• An alternative method of teaching fractions, in which fractions are taught as measurements, provides formative assessment information about the student's learning progress.
• Using non-standard word problems in lessons triggers mathematical discussion among students.

Recommendations

• It is recommended that future research be conducted on a sample of textbook pages rather than the entire textbook, allowing for a broader review of textbooks from more countries and various textbooks within each country.
• It is recommended that textbooks include a variety of additive and multiplicative ATUs, considering that, initially, students know only addition and can solve problems requiring addition. Later, they learn subtraction, followed by multiplication and division.
• To develop students' mathematical discussion skills, it is recommended to use illustrated word problems for non-reading children, non-standard word problems, and problems that require mathematical reasoning.
• P problems (or sets of problems) are recommended as tools for introducing a new mathematical topic.
• In the future, it is recommended to conduct an empirical study in which illustrated word problems are presented to randomly selected non-reading children. It should also be observed whether children of the same age who can already read solve such problems equally well or if their problem-solving abilities improve after learning to read.

• For preschool children who cannot yet read, it is recommended to formulate problems by using pictures and to frame problem questions that encourage mathematical reasoning.
• The Lithuanian language has its own rules and vocabulary, so this topic should be explored further to identify the challenges students may face when solving word problems and the potential uses of language in problem-solving.
• *What Numbers Makes Sensce* type problems are recommended as one of the tools to develop mathematical thinking, mathematical language, and reasoning, and to gain insight into the real-life situation of the problem.
• Proof-based word problems should be introduced to students as early as primary school and adapted each year according to their age, abilities, and knowledge.
• It is recommended to adapt modified word problems with deductive reasoning for students, after providing them with the necessary knowledge.
• P problems should be used to facilitate mathematical discussions and to detect students' synthetic models.

Trumpos žinios apie disertantą

Ieva Kilienė yra Vilniaus universiteto doktorantė, kurios pagrindinės mokslinių interesų sritys yra tekstiniai uždaviniai, matematikos mokymas pradinėse klasėse ir įrodymo uždaviniai.

Doktorantūros metu doktorantė skaitė pranešimus vienuolikoje konferencijų iš kurių 7 vyko Lietuvoje ir 4 užsienyje. Publikuoti du straipsniai referuojamuose ir turinčiuose citavimo indeksą (ISI Web of Science) leidiniuose, bei keturi straipsniai Europos matematikos mokymo tyrimų kongreso leidiniuose.

Doktorantė (nuo 2020 spalio iki dabar) Vilniaus universitete skaito Matematikos pagrindų pratybas. Bakalauro ir magistro studijas disertantė baigė Vilniaus universitete, darbų vadovas buvo prof. habil. dr. Rimas Norvaiša.

Padėka

Esu labai dėkinga darbo vadovui Prof. Rimui Norvaišai, kuris skyrė savo laiką, bei dalinosi išmintimi ir žiniomis. Jo dėka galėjau stebėti, kaip vyksta tikras mokslinis darbas, bei su kokiu atsidavimu reikėtų jį dirbti.

Dėkoju Prof. Alfredui Račkauskui už įžvalgas, patarimus, jo dėka šiame darbe galima rasti gražius grafikus, bei statistiką. Profesorius dalinosi savo ramiu ir pozityviu požiūriu tais momentais, kai to labai reikėjo.

Prof. Bronei Narkevičienei už svarbias įžvalgas ir patarimus.

Prof. Marijui Radavičiui už idėjas ir pasiūlymus ateities tyrimams.

Ričardui Kudžmai, Remigijui Lapinskui, Vytautui Miežiui, Monikai Grigaliūnienei už bendras diskusijas ir palaikymą matematikos mokymo seminarų metu.

Taip pat esu dėkinga visiems, kurie bent kartą atidžiai klausė, kai aš kalbėjau apie uždavinius, jūsų visų kantrybė atsispindi šiame darbe!

Šeimai ir dukrai už kantrybę.

Užrašams

Ieva Kilienė

Žodinių uždavinių vaidmuo gilinant mokyklinės matematikos žinias

Daktaro disertacija
Gamtos mokslai
Matematika (N – 001)
Santraukos redaktorė: Diana Leleikienė

The Role of Word Problems in Deepening Knowledge in School Mathematics

Doctoral Thesis
Natural sciences
Mathematics (N – 001)
Thesis Editor: Diana Leleikienė

Vilniaus universiteto leidykla
Saulėtekio al. 9, III rūmai, LT-10222 Vilnius
El. p. info@leidykla.vu.lt, www.leidykla.vu.lt
Tiražas 15 egz.