

VILNIAUS UNIVERSITETAS  
FIZINIŲ IR TECHNOLOGIJOS MOKSLŲ CENTRAS

Viktor Novičenko

---

**Fazinės redukcijos ir vidurkinimo metodų  
plėtojimas ir taikymas netiesiniams osciliatoriams**

---

Daktaro disertacija

Fiziniai mokslai  
Fizika (02P)  
Puslaidininkų fizika (P265)

Vilnius, 2014

Daktaro disertacija rengta 2009–2013 metais Fizinių ir technologijos mokslų centro  
Puslaidininkių fizikos institute

**Mokslinis vadovas:**

prof. habil. dr. Kęstutis Pyragas (Fizinių ir technologijos mokslų centras, fiziniai  
mokslai, fizika – 02P, puslaidininkių fizika – P265)

VILNIUS UNIVERSITY  
CENTER FOR PHYSICAL SCIENCE AND TECHNOLOGY

Viktor Novičenko

---

**Development and application of phase reduction  
and averaging methods to nonlinear oscillators**

---

Doctoral dissertation

Physical sciences  
Physics (02P)  
Semiconductor physics (P265)

Vilnius, 2014



# TURINYS

<b>Įvadas</b>	<b>vii</b>
Pagrindiniai darbo tikslai . . . . .	ix
Mokslinis naujumas . . . . .	ix
Ginamieji teiginiai . . . . .	ix
Publikacijų sąrašas . . . . .	x
Darbe naudojamų santrumpų sąrašas . . . . .	xi
Asmeninis autoriaus indėlis . . . . .	xii
Padėka . . . . .	xii
<b>1 Fazinė redukcija</b>	<b>1</b>
1.1 Ribinio ciklo tiesinė stabilumo analizė, Floke teorija . . . . .	1
1.2 Fazinė redukcija, pagrindinės sąvokos . . . . .	5
1.3 Fazės atsako funkcija, jos skaičiavimas ir fizikinė prasmė . . . . .	9
1.4 Lygtis dėl fazės – tikslus išvedimas . . . . .	19
1.5 Kam reikalinga fazinė redukcija . . . . .	22
1.6 Fazinė redukcija sistemoms su delsa . . . . .	27
1.6.1 Fazinės redukcijos išvedimas: lygtis su delsa aproksimuojama paprastosiomis diferencialinėmis lygtimis . . . . .	28
1.6.2 Tiesioginis fazinės redukcijos išvedimas . . . . .	32
1.6.3 Pavyzdžiai: Mackey-Glass ir fazės derinimo kilpos sistemos . . . . .	38
<b>2 Fazinės redukcijos taikymas chaoso valdymui</b>	<b>43</b>
2.1 Chaoso valdymas uždelstuoju grįžtamoju ryšiu . . . . .	43
2.2 Fazės atsako funkcija orbitoms, stabilizuotoms uždelstuoju grįžtamoju ryšiu . . . . .	44
2.3 Išplėstinis uždelstojo grįžtamojo ryšio valdymas esant mažiems delsos išderinimams . . . . .	46
2.3.1 Pavyzdys: Rössler'io sistema . . . . .	51
2.4 Nelyginio skaičiaus topologinis ribojimas . . . . .	54

---

2.5	Apeinant nelyginio skaičiaus topologinį ribojimą: valdymo matricos konstravimo algoritmas . . . . .	58
2.5.1	Pavyzdžiai: Lorenz,o ir Chua sistemos . . . . .	62
<b>3</b>	<b>Neuronų osciliacijų valdymas aukštadažne stimuliacija</b>	<b>65</b>
3.1	Vidurkinimo metodas . . . . .	66
3.2	Neurono stimuliacija – bendrasis aprašymas . . . . .	69
3.3	Hodgkin-Huxley neurono modelis . . . . .	71
3.4	STN neurono modelis . . . . .	78
	<b>Rezultatų santrauka ir išvados</b>	<b>87</b>
	<b>Literatūra</b>	<b>89</b>
	<b>Summary</b>	<b>97</b>

# ĮVADAS

Osciliuojančios sistemos dažnai pasitaiko tiek natūralioje gamtoje, tiek žmogaus sukonstruotose sistemose. Tokių sistemų elgesys dažnai aprašomas netiesinėmis diferencialinėmis lygtimis.

Osciliacijos konservatyviose sistemose, kai fazinėje erdvėje egzistuoja be galo daug viena kitai artimų periodinių sprendinių, yra gerai išnagrinėtas teorinės fizikos uždavinys, kadangi jis iškyla sprendžiant planetų judėjimą. Tuo tarpu ribinio ciklo oscilatoriai, kai fazinėje erdvėje be galo mažoje periodinio sprendinio aplinkoje neegzistuoja kitų periodinių sprendinių, yra nagrinėjami tik pastarąjį šimtmetį. Tokie oscilatoriai sutinkami elektronikoje, robototeknikoje, lazeriuose, cheminėse reakcijose, biologinėse sistemose bei ekonominiuose modeliuose. Ypač didelis susidomėjimas ribinio ciklo oscilatoriais yra pastarąjį dvidešimtmetį, kai pradėjo sparčiai vystytis neuromokslas, nagrinėjantis neurono nuslopinimo ir sužadavimo mechanizmus, neuronų sinchronizacijos ir desinchronizacijos valdymą.

Netiesinės dinamikos moksle, daugeliu atveju norint gauti analizinius rezultatus, stengiamasi „ištiesinti“ nagrinėjamą lygtį konkrečiau sprendinio aplinkoje. Ribinio ciklo atveju už tokį „ištiesinimą“ atsako Floke teorema, suformuluota dar XIX a. pabaigoje. Tačiau esminis pasiekimas buvo padarytas I. Malkin'o XX a. viduryje, kai buvo suformuluotas fazinės redukcijos metodas. Veliau jį nepriklausomai „peratrado“ A. Winfree, nagrinėdamas biologinius ritmus. Metodo esmė yra ta, kad vietoje visų ribinį ciklą aprašančių kintamųjų yra nagrinėjamas vienas skaliarinis kintamasis – fazė. Toks supaprastinimas leidžia gauti analizinius rezultatus silpnai perturbuotam ribinio ciklo oscilatoriui arba oscilatoriams, sujungtiems silpnu ryšiu.

Biologinėse sistemose, lazeriuose ir elektronikoje dažnai pasitiko delsos reiškiniai, kai sistemos dinamika priklauso ne vien tik nuo dabartinių dinaminųjų kintamųjų reikšmių, bet ir nuo jų praeitų reikšmių. Tokias sistemas aprašo diferencialinės lygtys su delsa, kurios, priešingai negu paprastosios diferencialinės lygtys, yra begalinės dimensijos. Todėl oscilatoriams su delsa paranku atlikti fazinę redukciją, nes iš begalinės dimensijos lygties lieka tik viendimensinė. Šiam uždaviniui darbe bus

skirtas didelis dėmesys.

Dinamines sistemas su nereguliariu elgesiu, žinomas kaip chaotinės sistemos, sunku prognozuoti, bet santykinai lengva valdyti. Vienas iš aktualių valdymo teorijos uždavinių yra nestabilių periodinių orbitų stabilizavimas chaotinėje sistemoje. Šiam uždaviniui spręsti K. Pyragas XX a. pabaigoje pasiūlė valdymo metodą, naudojant uždelstąjį grįžtamąjį ryšį. Toks metodas pasirodė labai patrauklus įvairiose eksperimentinėse situacijose. Teoriškai stabilizuotas orbitas aprašo lygtis su delsa, todėl čia taip pat aktuali fazinė redukcija – ji gali parodyti, kada orbita stabilizuojama bei kitas orbitos savybes.

Kitas svarbus netiesinės dinamikos uždavinys, kai sistema yra veikiamą periodine aukšto dažnio išorine jėga. Dažnis yra aukštas ta prasme, kad jis lyginamas su sistemos savaisiais charakteringais dažniais. Mokslas, nagrinėjantis aukšto dažnio jėga veikiamas mechanines sistemas, vadinamas vibracine mechanika. Išorinės jėgos aukštas dažnis gali kardinaliai pakeisti sistemos elgesį, pavyzdžiui, klasikinis vibracinės mechanikos uždavinys yra matematinė švytuoklė, kurios pakabinimo taškas judinamas aukštu dažniu, bet maža amplitudė. Jei dažnis ir amplitudė tenkina tam tikras sąlygas, tai gali stabilizuotis vertikaliai į viršų stovinčios švytuoklės padėtis. Kitas pavyzdys – tai yra smėlis, pabertas ant aukštu dažniu virpinamos nuožulnios plokštumos. Jis gali pradėti „lipti“ į viršų, jei plokštumos pasvyrimo kampas, virpėjimo dažnis ir amplitudė tenkina tam tikras sąlygas. Tokius, atrodytų sveikam protui prieštaraujančius eksperimentus, paaiškina sistemos lygčių matematinė analizė. Fazinė redukcija šiuo atveju nėra tinkamas teorinės analizės įrankis, nes osciliatorius drastiškai pakeičia savo elgesį. Todėl šiuo atveju naudojamas vidurkinimo metodas, kurio esmė yra išeliminuoti narius su aukštu dažniu ir gauti lygtis, aprašančias sistemos dinamiką, suvidurkintą per aukšto dažnio periodą.

Žmonėms, sergantiems Parkinsono liga, kai ligos požymių nepavyksta pašalinti chemiais vaistais, taikoma chirurginė procedūra, vadinama gilumine smegenų stimuliacija, kai tiesiogiai į smegenis implantuojamas elektrodas, aukšto dažnio srove stimuliuojantis tam tikras smegenų sritis. Iš eksperimentų žinoma, kad tai duoda teigiamus rezultatus: sumažėja arba baigiasi nevalingas kūno drebinimas. Kas vyksta su sinchronizuotais neuronais, kurie atsakingi už kūno drebinimą, juos stimuliuojant aukšto dažnio srove, nėra iki galo aišku. Todėl išskyla poreikis naudoti vidurkinimo metodą, analizuojant sistemos dinamines lygtis.



## Pagrindiniai darbo tikslai

1. Sukurti efektyvų fazės atsako funkcijos skaičiavimo algoritmą osciliatorinėms sistemoms, aprašomoms paprastosiomis diferencialinėmis lygtimis.
2. Išplėsti fazinės redukcijos metodą osciliatoriams, aprašomiems diferencialinėmis lygtimis su delsa.
3. Išnagrinėti silpnai išderintą išplėstinio uždelstojo grįžtamojo ryšio valdymo metodą, naudojant fazinės redukcijos priemones.
4. Standartiniam uždelstojo grįžtamojo ryšio metodui sukurti valdymo matricos konstravimo algoritmą, leidžiantį stabilizuoti periodinę orbitą su topologiniu ribojimu.
5. Panaudojant vidurkinimo metodą, išnagrinėti aukštadažnės stimuliacijos įtaką savaiminėms neuronų osciliacijoms.

## Mokslinis naujumas

1. Sukurtas skaitmeninis fazės atsako funkcijos skaičiavimo algoritmas, paremtas linearizuotos lygties dėl nuokrypio integravimu į priekį.
2. Išplėtota fazinės redukcijos teorija sistemoms, aprašomoms diferencialinėmis lygtimis su delsa.
3. Fazinės redukcijos priemonėmis išnagrinėtas silpnai išderintas uždelstojo grįžtamojo ryšio valdymo metodas.
4. Pasiūlytas uždelstojo grįžtamojo ryšio metodo valdymo matricos konstravimo algoritmas, leidžiantis stabilizuoti periodines orbitas su topologiniu ribojimu.
5. Remiantis vidurkinimo metodu, paaiškintas neuronų savaiminių osciliacijų slopinimo mechanizmas, stimuliuojant neuronus aukšto dažnio signalu.

## Ginamieji teiginiai

1. Osciliatoriams, aprašomiems paprastosiomis diferencialinėmis lygtimis, fazės atsako funkciją galima suskaičiuoti integruojant į priekį tiesinę lygtį dėl nuokrypio.

2. Begalomatės fazinės erdvės diferencialinių lygčių sistemą su delsa silpnai sutrikdytiems ribinio ciklo osciliatoriams galima redukuoti į vieną skaliarinę lygtį dėl fazės.
3. Pridėjus prie sistemos uždelstojo grįžtamojo ryšio jėgą, valdomos periodinės orbitos fazės atsako funkcijos forma nepakinta.
4. Orbitos, stabilizuotos silpnai išderintu uždelstuoju grįžtamoju ryšiu, periodą galima nustatyti, panaudojant fazinę redukciją.
5. Tinkamai parinkus valdymo matricą, nestabilios orbitos su topologiniu ribojimu gali būti stabilizuotos standartiniu uždelstojo grįžtamojo ryšio metodu.
6. Neuronų savaimines oscilacijas galima nuslopinti aukšto dažnio stimuliacija bei nuslopinimo mechanizmą suprasti naudojant vidurkinimo metodą.

## Publikacijų sąrašas

### Straipsniai Web of science referuojamuose žurnaluose

[A1] V. Novičenko ir K. Pyragas, Computation of phase response curves via a direct method adapted to infinitesimal perturbations, *Nonlinear Dyn.* **67**, 517–526 (2012)

[A2] V. Novičenko ir K. Pyragas, Phase reduction of weakly perturbed limit cycle oscillations in time-delay systems, *Physica D* **241**, 1090–1098 (2012)

[A3] V. Novičenko ir K. Pyragas, Phase-reduction-theory-based treatment of extended delayed feedback control algorithm in the presence of a small time delay mismatch, *Phys. Rev. E* **86**, 026204 (2012)

[A4] K. Pyragas ir V. Novičenko, Time-delayed feedback control design beyond the odd-number limitation, *Phys. Rev. E* **88**, 012903 (2013)

[A5] K. Pyragas, V. Novičenko ir P. Tass, Mechanism of suppression of sustained neuronal spiking under high-frequency stimulation, *Biol. Cybern.* **107**, 669–684 (2013)

### Tarptautinėse konferencijose

[A6] V. Novičenko ir K. Pyragas, Phase response curves for systems with time delay, *7th European Nonlinear Dynamics Conference (Rome, 2011.07.24-29). Proceedings of the 7th European Nonlinear Dynamics Conference*

[A7] V. Novičenko ir K. Pyragas, Phase response curves for systems with time delay, *XXXI Dynamics Days Europe (Oldenburg, 2011.09.12-16). Abstracts and list of participants*, psl. 197

[A8] V. Novičenko ir K. Pyragas, Analytical expression for the period of orbits stabilized by extended delayed feedback control, *The 5th International Conference (CHAOS 2012) on Chaotic Modeling, Simulation and Applications (Athens, 2012.06.12-15). Book of Abstracts*, psl. 111

[A9] V. Novičenko ir K. Pyragas, Analytical properties of autonomous systems controlled by extended time-delay feedback in the presence of a small time delay mismatch, *XXXIII Dynamics Days Europe (Madrid, 2013.06.03-07). Book of Abstracts*, psl. 145

[A10] K. Pyragas ir V. Novičenko, Beyond the odd number limitation: Control matrix design for time delayed-feedback control algorithm, *XXXIII Dynamics Days Europe (Madrid, 2013.06.03-07). Book of Abstracts*, psl. 251

## Nacionalinėse konferencijose

[A11] V. Novičenko ir K. Pyragas, Spontaninių neurono osciliacijų slopinimo mechanizmas veikiant aukštadažne stimuliacija, *Fizinių ir technologijos mokslų tarpdalykiniai tyrimai (Vilnius, 2011.02.08). Pranešimų santraukos*

[A12] V. Novičenko ir K. Pyragas, Spontaninių neurono osciliacijų slopinimo mechanizmas veikiant aukštadažne stimuliacija, *39-oji Lietuvos nacionalinė fizikos konferencija (Vilnius, 2011.10.6-8). Programa ir pranešimų tezės*, psl. 149

[A13] V. Novičenko ir K. Pyragas, Valdymo matricos konstravimas uždelsto grįžtamojo ryšio valdymo algoritmui, *40-oji Lietuvos nacionalinė fizikos konferencija (Vilnius, 2011.06.10-12). Programa ir pranešimų tezės*, psl. 242

## Darbe naudojamų santrumpų sąrašas

FAF – fazės atsako funkcija

NPO – nestabili periodinė orbita

SDL – skirtuminės diferencialinės lygtys

PDL – paprastosios diferencialinės lygtys

UGR – uždelstasis grįžtamasis ryšys

UGRV – uždelstojo grįžtamojo ryšio valdymas

IUGRV – išplėstinis uždelstojo grįžtamojo ryšio valdymas

PGR – proporcinis grįžtamasis ryšys

AD – aukštas dažnis

GSS – giluminė smegenų stimuliacija

HH – Hodgkin-Huxley

STN – sub-thalamic nucleus

GPe – globus pallidus external

## **Asmeninis autoriaus indėlis**

Autorius išvedė daugumą disertacijoje aprašytų analizinių rezultatų, taip pat atliko skaitmeninius skaičiavimus.

## **Padėka**

Nuoširdžiai dėkoju savo mokslinio darbo vadovui prof. habil. dr. Kęstučiui Pyragui už kantrumą, atidumą, dėmesingumą bei mokslines diskusijas.

Esu dėkingas savo kolegoms Irmantui Ratui ir dr. Viktorui Pyragui už bendradarbiavimą, patarimus ir gerą nuotaiką visą doktorantūros laikotarpį.

Kaip ir kiekvienam žmogui, man svarbi moralinė parama. Dėkoju savo žmonai Astai už palaikymą.

# 1 skyrius: FAZINĖ REDUKCIJA

Šio skyriaus pradžioje supažindinama su Floke teorija – tiesine stabilumo analize ribiniam ciklui. Skyriuje aprašytas fazinės redukcijos metodas, jo pagrindinės sąvokos ir skaitmeniniai rezultatai konkrečioms sistemoms. Taip pat parodytas fazinės redukcijos naudingumas – pateikti pavyzdžiai, kur fazinės redukcijos taikymas yra aktualus. Toliau aprašytas fazinės redukcijos metodo išplėtojimas sistemoms, kurias aprašo diferencialinės lygtys su delsa. Skyrius baigiamas fazinės redukcijos taikymo pavyzdžiais konkrečioms osciliatoriams su delsa.

## 1.1 Ribinio ciklo tiesinė stabilumo analizė, Floke teorija

Tarkime, turime netiesinę dinaminę sistemą, aprašomą paprastosiomis diferencialinėmis lygtimis:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \quad (1.1)$$

čia  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  yra  $n$ -matis vektorius-stulpelis, aprašantis sistemos būseną (čia  $^T$  žymi transponavimo operaciją). Tarkim, kad lygtis (1.1) turi periodinį sprendinį  $\mathbf{x}_c(t + T) = \mathbf{x}_c(t)$  su periodu  $T$ . Norint išsiaiškinti, ar sprendinys  $\mathbf{x}_c(t)$  yra stabilus, reikia žiūrėti, kaip kinta be galo mažas nuokrypis  $\delta\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_c(t)$  (čia  $\mathbf{x}(t)$  yra sutrikdytas sistemos (1.1) sprendinys). Lygtis dėl nuokrypio iki pirmojo Teiloro eilutės skleidimo nario atrodo taip:

$$\delta\dot{\mathbf{x}}(t) = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_c(t))\delta\mathbf{x}(t), \quad (1.2)$$

čia  $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_c)$  yra Jakobiano matrica, paskaičiuota ant periodinio sprendinio. Lygtis (1.2) yra tiesinė lygtis su periodiniais koeficientais, todėl jos sprendiniams galioja superpozicijos principas: jei turime du sprendinius  $\delta\mathbf{x}_A(t)$  ir  $\delta\mathbf{x}_B(t)$ , tai ir  $\mathbf{y}(t) = c_1\delta\mathbf{x}_A(t) + c_2\delta\mathbf{x}_B(t)$  bus taip pat sprendinys (čia  $c_1$  ir  $c_2$  yra bet kokios konstantos). Būtų patogiu bet kokią lygties (1.2) sprendinį išreikšti per bazinius

sprendinius, todėl yra įvedama sąvoka „fundamentaliųjų sprendinių sistema“.  $\phi_1(t)$ ,  $\phi_2(t)$ , ...,  $\phi_n(t)$  sudaro fundamentaliųjų sprendinių sistemą, jei bet koki lygties (1.2) sprendinį galima išreikšti sprendinių  $\phi_1(t)$ ,  $\phi_2(t)$ , ...,  $\phi_n(t)$  tiesine kombinacija. Teisingas ir atvirkščias teiginys: bet kokia  $\phi_1(t)$ ,  $\phi_2(t)$ , ...,  $\phi_n(t)$  tiesinė kombinacija yra lygties (1.2) sprendinys. Funkcijų  $\phi_i(t)$  reikšmės bet kuriuo laiko momentu yra tiesiškai nepriklausomi vektoriai. Tarkime, turime fundamentaliųjų sprendinių sistemą su pradine sąlyga:

$$\phi_i(0) = \mathbf{e}_i \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.3)$$

Čia  $\mathbf{e}_i = (\delta_1^i, \delta_2^i, \dots, \delta_n^i)^T$  – vektorius su visais nuliais, išskyrus vienetą, esantį  $i$ -tajame elemente (čia  $\delta_j^i$  – Kronekerio delta). Lygtis (1.2) turi postūmio simetriją: jei jos bet koki sprendinį pastumtume per periodą  $T$ , tai gauta funkcija irgi bus lygties (1.2) sprendinys. Taigi  $\phi_1(t+T)$ ,  $\phi_2(t+T)$ , ...,  $\phi_n(t+T)$  taip pat sudaro fundamentaliųjų sprendinių sistemą. Panagrinėkime, kaip nauji fundamentalūs sprendiniai išreiškiami per ankstesnius fundamentalius sprendinius. Surašius vektorius-stulpelius  $\phi_i(t)$  paeiliui į matricą  $\Phi(t)$ , gauname tokį transformacijos sąryšį:

$$\Phi(t+T) = \Phi(t)\mathbf{C}, \quad (1.4)$$

čia  $\mathbf{C}$  yra transformacijos matrica su pastoviais koeficientais. Matrica  $\Phi(t)$  vadinama evoliucijos matrica, nes, norint rasti lygties (1.2) sprendinį  $\delta\mathbf{x}(t)$  su pradine sąlyga  $\delta\mathbf{x}(0) = \delta\mathbf{x}_0$ , pakanka pradinę sąlygą padauginti iš evoliucijos matricos:  $\delta\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\delta\mathbf{x}_0$ . Evoliucijos matricai galioja tokie sąryšiai:

$$\dot{\Phi}(t) = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_c(t))\Phi(t) \quad \Phi(0) = \mathbb{I}, \quad (1.5)$$

čia  $\mathbb{I}$  – vienetinė matrica. Jei į (1.4) įrašysime  $t = 0$ , tai pamatysime, kad  $\mathbf{C} = \Phi(T)$ , todėl  $\Phi(t+T) = \Phi(t)\Phi(T)$ . Matrica  $\Phi(T)$  turi specialų pavadinimą – monodromio matrica. Taigi pakanka žinoti evoliucijos matricą per vieną periodą, o tolesnes evoliucijos matricos reikšmes galima gauti ją dauginant iš monodromio matricos. Svarbios yra monodromio matricos tikrinės vertės, nes jos parodys, kaip evoliucionuos pradinė perturbacija  $\delta\mathbf{x}_0$  po laiko  $t = mT$  (čia  $m$  yra sveikas skaičius):

$$\delta\mathbf{x}_m = \Phi^m(T)\delta\mathbf{x}_0. \quad (1.6)$$

Svarbu pažymėti, kad determinantas  $|\Phi(T)| \neq 0$ , todėl visos tikrinės vertės yra nenulinės. Nors Jakobianas  $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_c)$  yra realusis, monodromio matricos tikrinės vertės gali būti ir kompleksinės. Tačiau jei yra kompleksinė vertė, tai yra ir jai

kompleksiškai jungtinė vertė. Bendrai monodromio matricos tikrinės vertės gali būti išsigimusios. Tada reikėtų atskirti, ar jos išsigimusios tik algebriskai, ar ir geometriškai. Mes tiek nesismulkinsime ir tarsime, kad visos tikrinės vertės yra skirtingos, o tuo pačiu ir tikriniai vektoriai yra skirtingi, be to tiesiškai nepriklausomi. Taigi pažymėkime  $\mu_i$  ir  $\mathbf{v}_i$  – matricos  $\Phi(T)$  tikrines vertes ir tikrinius vektorius-stulpelius (čia  $i = 1, 2, \dots, n$ ). Beje,  $\mu_i$  yra vadinami ribinio ciklo  $\mathbf{x}_c(t)$  Floke daugikliais arba multiplikatoriais. Pradinį trikdį  $\delta\mathbf{x}_0$  išskaidžius į tikrinių vektorių  $\mathbf{v}_i$  tiesinę kombinaciją ir (1.6) imant ribą  $m \rightarrow +\infty$ , matome, kad ribinio ciklo  $\mathbf{x}_c(t)$  stabilumą charakterizuos  $|\mu_i|$ . Jei egzistuoja toks  $\mu_i$ , kad  $|\mu_i| > 1$ , tai ribinis ciklas nestabilus.

Atkreipkime dėmesį, kad, jei lygtį (1.2) spręstume su pradine sąlyga  $\mathbf{y}_i(0) = \mathbf{v}_i$ , tai gautas sprendinys  $\mathbf{y}_i(t)$  turėtų tokią savybę:

$$\mathbf{y}_i(t + T) = \mu_i \mathbf{y}_i(t). \quad (1.7)$$

Tuo lengva įsitikinti, nes  $\mathbf{y}_i(t) = \Phi(t)\mathbf{v}_i$ , tuo tarpu  $\mathbf{y}_i(t + T) = \Phi(t + T)\mathbf{v}_i = \Phi(t)\Phi(T)\mathbf{v}_i = \mu_i\Phi(t)\mathbf{v}_i = \mu_i\mathbf{y}_i(t)$ . Teisingas ir atvirkščias teiginys: jei lygties (1.2) netrivialus sprendinys  $\mathbf{y}(t)$  tenkina sąlygą  $\mathbf{y}(t + T) = \alpha\mathbf{y}(t)$ , tai  $\alpha$  yra viena iš monodromio matricos tikrinių verčių, o  $\mathbf{y}(0)$  proporcingas atitinkamam tikriniam vektoriui.

Vieną Floke daugiklį ir jį atitinkantį tikrinį vektorių lengva surasti. Ribinio ciklo išvestinė t.y.  $\mathbf{y}_1(t) = \dot{\mathbf{x}}_c(t)$  yra lygties (1.2) sprendinys. O kadangi  $\dot{\mathbf{x}}_c(t + T) = \dot{\mathbf{x}}_c(t)$ , t.y. galioja (1.7) savybė, tai  $\mu_1 = 1$  ir  $\mathbf{v}_1 = \dot{\mathbf{x}}_c(0)$ . Tai, kad autonominės sistemos (1.1) ribinis ciklas  $\mathbf{x}_c(t)$  visada turi vienetinį Floke daugiklį, yra gana akivaizdu: jei sutrikdysime sistemą be galo mažu trikdžiu išilgai periodinės orbitos, tai liksim ant tos orbitos, tik būsim šiek tiek pasistūmę į priekį nuo pradinio taško. Suintegravus sutrikdytą sistemą per vieną periodą, trikdys nei padidės, nei sumažės, ką ir parodo Floke daugiklis  $\mu_1 = 1$ .

Kartais vietoje Floke daugiklių yra naudojama kita sąvoka – Floke eksponentė. Ji apibrėžiama kaip

$$\lambda_i = \frac{\ln \mu_i}{T}. \quad (1.8)$$

Kadangi  $\mu_i$  gali būti neigiamas arba kompleksinis, tai Floke eksponentės randamos nevienareikšmiškai, nes kompleksinio skaičiaus  $z = re^{i\varphi}$  logaritmas skaičiuojamas taip:  $\ln z = \ln r + i(\varphi + 2\pi k)$  (čia  $k$  – bet koks sveikas skaičius). Tačiau patogumo dėlei galima visada imti  $k = 0$ .

Visus  $N$  sprendinius  $\mathbf{y}_i(t)$  su pradinėmis sąlygomis  $\mathbf{y}_i(0) = \mathbf{v}_i$  patogiu perrašyti taip:

$$\mathbf{y}_i(t) = \mathbf{u}_i(t) \exp(\lambda_i t). \quad (1.9)$$

Funkcija  $\mathbf{u}_i(t)$  yra vadinama Floke moda. Kadangi galioja (1.7), tai Floke moda yra periodinė funkcija:  $\mathbf{u}_i(t+T) = \mathbf{u}_i(t)$ . Pirma Floke moda yra ribinio ciklo išvestinė, t.y.  $\mathbf{u}_1(t) = \dot{\mathbf{x}}_c(t)$ . Kitas Floke modas galima rasti taip:

$$\mathbf{u}_i(t) = \mathbf{y}_i(t) \exp(-\lambda_i t). \quad (1.10)$$

Pastarąją išraišką reikėtų detaliau aptarti, kai  $\lambda_i$  yra kompleksinis. Galimi du atvejai: arba  $\mu_i$  yra neigiamas, arba  $\mu_i$  yra kompleksinis. Taigi, jei  $\mu_i$  yra realusis ir neigiamas, tada tikrinis vektorius  $\mathbf{v}_i$  yra realusis, o Floke eksponentė kompleksinė:  $\lambda_i = \ln|\mu|/T + i\pi/T$ . Floke moda tuomet bus kompleksinė:

$$\mathbf{u}_i(t) = \mathbf{y}_i(t) \exp\left(-\frac{\ln|\mu_i|}{T}t\right) \exp\left(-\frac{i\pi}{T}t\right). \quad (1.11)$$

Kitas, sudėtingesnis atvejis, kai pats  $\mu_i$  yra kompleksinis dydis. Tuomet yra ir jam kompleksiskai jungtinis  $\mu_j = \mu_i^*$ . Atitinkami tikriniai vektoriai  $\mathbf{v}_i$  ir  $\mathbf{v}_j$  taip pat yra vienas kitam kompleksiskai jungtiniai:  $\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_i^*$ . Be to,  $\Re(\mathbf{v}_i)$  ir  $\Im(\mathbf{v}_i)$  bus tiesiškai nepriklausomi vektoriai. Todėl skleidžiant lygties (1.2) pradinį trikdžio vektorių  $\delta\mathbf{x}_0$  monodromio matricos tikriniais vektoriais, gausime tokią sumą:  $\delta\mathbf{x}_0 = \dots + c_1\Re(\mathbf{v}_i) + c_2\Im(\mathbf{v}_i) + \dots$ . Ji perrašoma tokiu pavidalu:  $\delta\mathbf{x}_0 = \dots + c\mathbf{v}_i + (c\mathbf{v}_i)^* + \dots$ , čia  $c = \frac{1}{2}(c_1 - ic_2)$ . Taigi Floke moda, atitinkanti Floke daugiklį  $\mu_i = |\mu_i| \exp(i\varphi_i)$ , bus

$$\mathbf{u}_i(t) = [\mathbf{y}_i^{Re}(t) + i\mathbf{y}_i^{Im}(t)] \exp\left(-\frac{\ln|\mu_i|}{T}t\right) \exp\left(-\frac{i\varphi_i}{T}t\right), \quad (1.12)$$

čia  $\mathbf{y}_i^{Re}(t)$  ir  $\mathbf{y}_i^{Im}(t)$  yra (1.2) lygties sprendiniai su pradinėmis sąlygomis  $\Re(\mathbf{v}_i)$  ir  $\Im(\mathbf{v}_i)$ , o  $\varphi_i$  kompleksinio skaičiaus  $\mu_i$  fazė.

Panaudojus Floke modas, lygties (1.2) sprendinį galima užrašyti taip:

$$\delta\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{u}_1(t) \exp(\lambda_1 t) + \dots + c_n\mathbf{u}_n(t) \exp(\lambda_n t), \quad (1.13)$$

čia  $c_i$  yra pradinės sąlygos skleidimo koeficientai.

Paprastai Floke modos ieškomos ne iš (1.10), (1.11) ir (1.12), o iš lygties (1.2). Atliekant kintamųjų pakeitimą  $\delta\mathbf{x}(t) = \mathbf{u}(t) \exp(\lambda t)$ , gauname lygtį:

$$\dot{\mathbf{u}}(t) + \lambda\mathbf{u}(t) = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_c(t))\mathbf{u}(t), \quad (1.14)$$

čia  $\lambda$  ir  $\mathbf{u}(t)$  yra nežinomieji. Ją reikia spręsti su sąlyga, kad  $\mathbf{u}(t+T) = \mathbf{u}(t)$ . Todėl susiduriame su kraštinių sąlygų uždaviniu.

Apibendrinant šį skirsnį galima pasakyti, kad tiesioginis Floke modų žinojimas



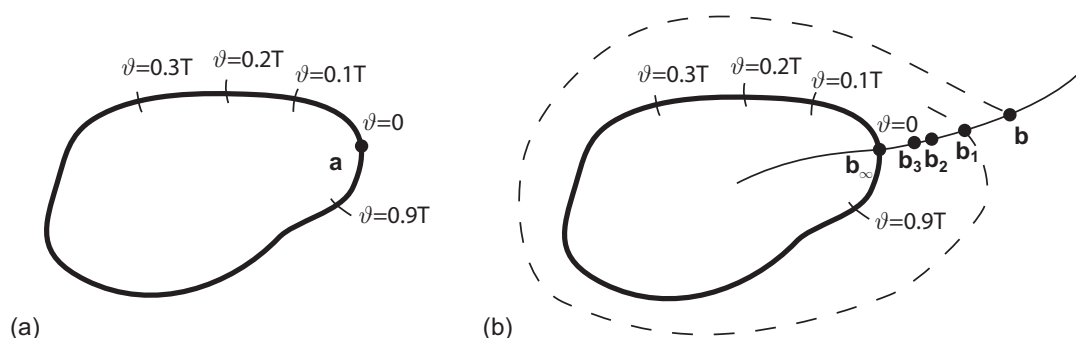
paprastai nėra labai reikalingas dalykas. Užtat Floke daugikliai turi daug naudingos informacijos. Pavyzdžiui, jei ribinis ciklas yra stabilus, toks, kad  $\mu_1 = 1$ , o kiti  $|\mu_i| < 1$ , tai silpnai sutrikdžius sistemą ir ją integruojant į priekį, trikdžio vektorius galiausiai pasidarys lygiagretus ribiniam ciklui. Be to, jo ilgį apibrėš skleidimo  $\delta \mathbf{x}(0) = c_1 \mathbf{x}_c(0) + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots$  konstanta  $c_1$ .

Pati Floke teorema sako apie kintamųjų pakeitimą, kuris tiesinę lygtį su periodiniais koeficientais (1.2) pakeičia tiesine lygtimi su pastoviais koeficientais [1].

## 1.2 Fazinė redukcija, pagrindinės sąvokos

Fazinė redukcija yra matematinis instrumentas, leidžiantis redukuoti sistemos dinamiką su stabilium ribiniu ciklu: vietoje visų ribinį ciklą aprašančių kintamųjų, yra nagrinėjama vieno skaliarinio kintamojo dinamika [2, 3]. Tas skaliarinis kintamasis ir yra vadinamas faze.

Taigi pradžioje turime  $n$ -dimensinio stabilaus ribinio ciklo dinamikos lygtį (1.1). Tarkim jo periodas  $T$ , o pats ribinis ciklas yra toks, kad jo Floke daugikliai  $|\mu_i| < 1$ , išskyrus trivialų Floke daugiklį, kuris yra  $\mu_1 = 1$ . Lygties (1.1) sprendinį su pradine sąlyga  $\mathbf{x}_0$  pažymėkime  $\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}_0, t)$ . Toliau kiekvienam taškui  $n$ -matėje fazinėje erdvėje yra priskiriama fazė. Kitaip tariant, įvedamas skaliarinis laukas  $\vartheta(\mathbf{x})$ . Pirmiausia fazė apibrėžiama ribinio ciklo taškams. Išsirenkamas pradinis taškas ant ribinio ciklo, kurį vadinsime nulinės fazės tašku (pažymėkime jį  $\mathbf{a}$ ). Kitiems ribinio ciklo taškams priskiriame fazę, lygią minimaliam laikui, kurį reikėtų laukti, kol sprendinys ateis į norimą tašką, startavus iš  $\mathbf{a}$ . Matematiškai tai užrašoma taip:  $\vartheta(\boldsymbol{\psi}(\mathbf{a}, t)) = t \pmod{T}$ . Tokiu būdu sprendiniui, apeinant ribinį ciklą, jo fazė tolygiai didėja nuo 0 iki  $T$  (žr. 1.1 pav. (a)).



1.1 pav.: Ribinio ciklo dvimatėje fazinėje erdvėje pavyzdys. (a) – fazė apibrėžiama ant ribinio ciklo taip, kad ji tolygiai didėtų nuo 0 iki  $T$ , apeinant ribinį ciklą. (b) – fazės apibrėžimas taškams, nepriklausantiems ribiniam ciklui. Brūkšninė linija rodo, kaip elgsis sprendinys, jei pradinė sąlyga yra lygi  $\mathbf{b}$ . Taškai  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{b}_1$ ,  $\mathbf{b}_2$  ir t.t. yra ant linijos, kuri vadinama izochrona.

Dabar apibrėšime fazę likusiems fazinės erdvės taškams (čia reikia atkreipti dėmesį, kad sąvoka „fazinė erdvė“ su žodžiais „fazė“ ir „fazinė redukcija“ neturi nieko bendro). Jei taškas  $\mathbf{b}$  nepriklauso ribiniam ciklui, jam suteikiam tokią fazę, kokią turėtų sprendinys, startavus nuo taško  $\mathbf{b}$  ir integruojant be galo daug ribinio ciklo periodų. Kitaip tariant, jei startuotume nuo  $\mathbf{b}$  ir suintegruotume sistemą per vieną ribinio ciklo periodą, tai atsidurtume taške  $\mathbf{b}_1$ . Jei suintegruotume dar per vieną periodą, tai atsidurtume taške  $\mathbf{b}_2$  ir t.t. (žr. 1.1 pav. (b)) Galiausiai taškas  $\mathbf{b}_\infty$  bus ant ribinio ciklo ir turės savo apibrėžtą fazę  $\vartheta(\mathbf{b}_\infty)$ , taigi visiems taškams  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{b}_1$ ,  $\mathbf{b}_2$  ir t.t. priskiriam tą pačią fazę kaip ir taškui  $\mathbf{b}_\infty$ . Matematiškai tai užsirašytų taip:  $\vartheta(\mathbf{b}) = \lim_{m \rightarrow \infty} \vartheta(\boldsymbol{\psi}(\mathbf{b}, mT))$ , čia  $m$  – sveikas skaičius. Tokiu būdu kiekvienas fazinės erdvės taškas, esantis ribinio ciklo pritraukimo baseine, turi priskirtą fazę.

Taškai, turintys tą pačią fazės reikšmę, vadinami izochrona. Izochrona yra  $n - 1$  dimensijos daugdara. Jei sistema yra dvimatė, tai izochrona yra vienmatė kreivė dvimatėje erdvėje (žr. 1.1 pav. (b)). Jei du taškai  $\mathbf{b}$  ir  $\mathbf{b}_1$  priklauso tai pačiai izochronai, tai:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\boldsymbol{\psi}(\mathbf{b}, t) - \boldsymbol{\psi}(\mathbf{b}_1, t)] = 0. \quad (1.15)$$

Pasirinkus pradinę sąlygą ant ribinio ciklo, sprendinio fazės dinamiką aprašys lygtis

$$\dot{\vartheta}(t) = 1. \quad (1.16)$$

Jei pradinę sąlygą pasirinktume ne ant ribinio ciklo (pvz., tašką  $\mathbf{b}$  iš 1.1 pav.), tai tokio sprendinio fazės dinamiką taip pat aprašys lygtis (1.16). Tuo galima lengvai įsitikinti. Įrodykim tokį teiginį: jei dviejų sprendinių pradinės sąlygos priklauso tai pačiai izochronai, tai suintegravus juos abu per laisvai pasirinktą laiką  $\Delta t$ , gausime du taškus, kurie taip pat bus ant vienos izochronos. Turime  $\vartheta(\mathbf{b}) = \vartheta(\mathbf{b}_1)$ . Dabar pirmam ir antram sprendiniams po laiko  $\Delta t$  turime:

$$\vartheta(\boldsymbol{\psi}(\mathbf{b}, \Delta t)) = \lim_{m \rightarrow \infty} \vartheta(\boldsymbol{\psi}(\mathbf{b}, mT + \Delta t)), \quad (1.17a)$$

$$\vartheta(\boldsymbol{\psi}(\mathbf{b}_1, \Delta t)) = \lim_{m \rightarrow \infty} \vartheta(\boldsymbol{\psi}(\mathbf{b}_1, mT + \Delta t)). \quad (1.17b)$$

Kadangi  $\mathbf{b}$  ir  $\mathbf{b}_1$  priklauso tai pačiai izochronai, tai pasinaudojus (1.15) gauname:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} [\boldsymbol{\psi}(\mathbf{b}, mT + \Delta t) - \boldsymbol{\psi}(\mathbf{b}_1, mT + \Delta t)] = 0, \quad (1.18)$$

o tuo pačiu ir  $\vartheta(\boldsymbol{\psi}(\mathbf{b}, \Delta t)) = \vartheta(\boldsymbol{\psi}(\mathbf{b}_1, \Delta t))$ . Taigi du sprendiniai visą laiką išlieka ant tos pačios izochronos. Todėl nesvarbu, ar pradėsime integruoti nuo taško  $\mathbf{b}$  ar nuo taško  $\mathbf{b}_\infty$ , kuris yra ant ribinio ciklo, jų fazės bet kada sutaps, todėl ir fazės

dinamika bus ta pati.

Irodykime dar vieną svarbią skaliarinio lauko  $\vartheta(\mathbf{x})$  savybę. Raskime fazės dinamiką lygties (1.1) sprendiniui  $\mathbf{x}(t)$ , tiesiogiai diferencijuodami  $\vartheta(\mathbf{x}(t))$  pagal laiką:

$$\frac{d}{dt}\vartheta(\mathbf{x}(t)) = [\nabla\vartheta(\mathbf{x}(t))]^T \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \quad (1.19)$$

čia  $\nabla\vartheta(\mathbf{x}) = (\partial\vartheta/\partial x_1, \partial\vartheta/\partial x_2, \dots, \partial\vartheta/\partial x_n)^T$  yra fazės gradientas, paskaičiuotas taške  $\mathbf{x}$ . (1.19) lygtyje  $^T$  žymi transponavimo operaciją, nes tiek  $\nabla\vartheta(\mathbf{x})$ , tiek  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  yra vektoriai-stulpeliai. Iš kitos pusės, žinome, kad galioja (1.16), todėl fazės laukui  $\vartheta$  bet kuriame taške  $\mathbf{x}$  galioja:

$$\nabla\vartheta^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 1. \quad (1.20)$$

Izochronas analitiškai retai kada pavyksta rasti, tačiau paprastoms dinaminėms sistemoms tą galima padaryti. Panagrinėkime čia keletą pavyzdžių. Tarkim, turime antros eilės dinaminę sistemą, kurią aprašo kompleksinis dydis  $z(t)$ :

$$\dot{z}(t) = F(z). \quad (1.21)$$

Jei, perrašę sistemą polinėse koordinatėse, gauname tokią išraišką:

$$\dot{r} = f(r), \quad (1.22a)$$

$$\dot{\varphi} = g(r), \quad (1.22b)$$

t.y. funkcijos  $f$  ir  $g$  nepriklauso nuo  $\varphi$ , tada galima gauti analizinę izochronos išraišką. Sąlyga (1.22a) reiškia, kad ribinis ciklas yra apskritimo formos, o sąlyga (1.22b) reiškia, kad apskritimas apeinamas tolygiai. Papildomos sąlygos sistemai (1.22) yra šios:  $f(0) = 0$  – reikalaujame tolydaus vektorinio lauko taške  $F(z = 0)$ ;  $f(r_0) = 0$  – ribinio ciklo ties  $r = r_0$  egzistavimas;  $\frac{df(r_0)}{dr} < 0$  – ribinio ciklo stabilumas. Kampinį greitį ant ribinio ciklo pažymėsime  $\omega = g(r_0)$ . Tada periodas  $T = 2\pi/\omega$ . Kad surastume izochronas, reikia rasti fazės lauką (funkciją  $\vartheta(r, \varphi)$ ), kuris tenkintų sąlygą  $d\vartheta/dt = 1$  su bet kokiais (1.22) lygties sprendiniais  $r(t)$  ir  $\varphi(t)$ . Pažymėtina, kad fazę  $\vartheta$  reiktų skirti nuo polinės koordinatės  $\varphi$ . Ieškome fazės lauko tokia forma:

$$\vartheta(r, \varphi) = \frac{\varphi}{\omega} + h(r), \quad (1.23)$$

čia  $h(r)$  – kol kas nežinoma funkcija. Jei nulinės fazės tašką pasirenkame  $\varphi = 0$ , tai  $h(r_0) = 0$ , kadangi ant ribinio ciklo polinė koordinatė yra proporcinga fazei. Dabar

ieškome fazės išvestinės:

$$\dot{\vartheta} = \frac{g(r)}{\omega} + \frac{dh}{dr} f(r) = 1. \quad (1.24)$$

Iš čia randame:

$$h(r) = \int_{r_0}^r \frac{\omega - g(s)}{\omega f(s)} ds. \quad (1.25)$$

Tokia  $h(r)$  funkcija tenkins reikalavimą  $h(r_0) = 0$ , todėl izochrona tenkins lygtį:

$$\vartheta(r, \varphi) = \frac{\varphi}{\omega} + \int_{r_0}^r \frac{\omega - g(s)}{\omega f(s)} ds = \text{const.} \quad (1.26)$$

Išnagrinėkime keletą konkrečių pavyzdžių.

**Pavyzdys 1:** Turime Landau-Stuart osciliatorių:

$$\dot{z} = (1 + i)z - z|z|^2. \quad (1.27)$$

Radiuso dinamika aprašoma funkcija  $f(r) = r - r^3$ , o polinė koordinatė  $g(r) = 1$ . Kadangi  $\omega = 1$ , tai izochronos lygtis yra:

$$\vartheta(r, \varphi) = \varphi + \int_{r_0}^r \frac{1 - g(s)}{f(s)} ds = \varphi. \quad (1.28)$$

**Pavyzdys 2:** Modifikuotas Landau-Stuart osciliatorius:

$$\dot{z} = (1 + i)z + (-1 + ib)z|z|^2, \quad (1.29)$$

čia  $b$  – realusis dydis nelygus minus vienam. Lygtis polinėje koordinatėse sistemoje:

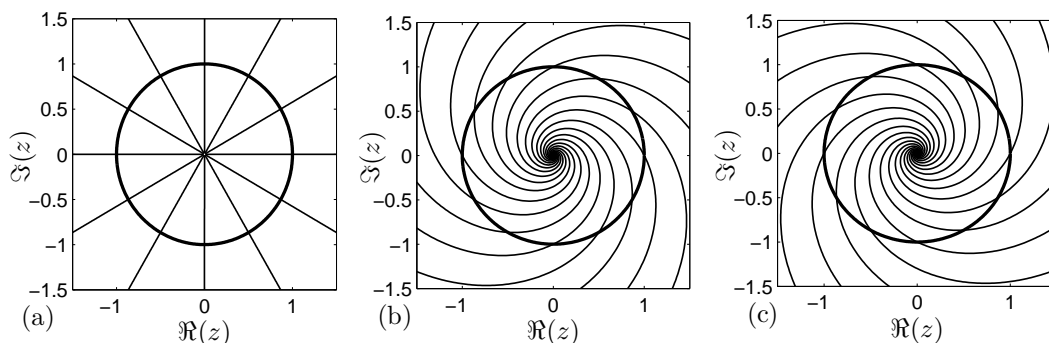
$$\dot{r} = r - r^3, \quad (1.30a)$$

$$\dot{\varphi} = 1 + br^2. \quad (1.30b)$$

Ribinis ciklas yra ties  $r_0 = 1$ . Tada kampinis dažnis  $\omega = 1 + b$ . Taigi izochronos lygtis:

$$\vartheta(r, \varphi) = \frac{\varphi}{1 + b} + \frac{b}{1 + b} \ln r. \quad (1.31)$$

Gautos izochronos yra pavaizduotos 1.2 pav.



1.2 pav.: Sistemos (1.29) ribinis ciklas ir jo izochronos prie įvairių parametro  $b$  verčių. (a) – parametras  $b = 0$ ; (b) – parametras  $b = 2$ ; (c) – parametras  $b = -2$ .

### 1.3 Fazės atsako funkcija, jos skaičiavimas ir fizikinė prasmė

Nesutrikdytos sistemos (1.1) su stabiliu ribiniu ciklu fazės dinamika yra triviali, todėl ji nėra naudinga. Kitas reikalas, kai sistema yra sutrikdyta. Yra žinoma, kad osciliatoriai, veikiami išoriniu signalu arba signalais iš kitų osciliatorių, gali vaizduoti labai įvairų elgesį [2, 3, 4]. Tokių sistemų analizė gali iš esmės supaprastėti, jei perturbacija yra maža. Čia ir yra naudingas fazinės redukcijos metodas. Jis paremtas teiginiu, kad, nors silpnas trikdys sutrikdo osciliatoriaus amplitudę ir fazę, tačiau amplitudė greitai relaksuoja prie savo tikrosios vertės, tuo tarpu fazės trikdys išlieka ir jį reikia įskaityti. Svarbi ribinio ciklo charakteristika, ateinanti iš fazinės redukcijos metodo, yra jo fazės atsako funkcija (FAF). FAF aprašo osciliatoriaus fazės pokytį, kaip atsaką į impulso formos perturbaciją, paskaičiuotą kiekviename ribinio ciklo taške. Istoriskai, FAF formalizmą pradėjo naudoti Hastings’as ir Sweeney’as [5] nagrinėdami širdies ritmų persijungimą [6], o vėliau jis buvo pritaikytas kitiems osciliatoriams. FAF žinojimas leidžia lengvai numatyti osciliatoriaus elgesį, kai jis yra veikiamas bet kokios formos silpnu išoriniu signalu arba silpnais signalais iš kitų osciliatorių. Pavyzdžiui, FAF leidžia numatyti osciliatoriaus sinchronizaciją su išoriniu periodiniu signalu ir fazės pagavą su kitais sujungtais osciliatoriais [4]. Be to, FAF žinojimo dažniausiai pakanka, kad suprastume kolektyvines dinamines savybes, tokias kaip koherentines oscilacijas, keliaujančias bangas ir struktūrų susidarymą [2, 3].

FAF ypač svarbi kardiologijoje ir neuromoksle. Širdies sistemose FAF koncepcija naudinga, suprantant įvairių aritmijų atsiradimus [7, 8, 9]. Neuromoksle fazinės redukcijos modeliai iš esmės supaprastina detalių biologinių modelių kompleksumą [10, 11, 12, 13]. FAF taip pat naudinga valdymo uždaviniuose, konstruojant įvairius

neurono stimuliavimo algoritmus [14, 15].

FAF gali būti išmatuota eksperimentiškai [16, 17, 18] arba apskaičiuota teoriškai [13, 19, 20, 21, 22]. Teoriniam apskaičiavimui, aišku, reikia žinoti modelio lygtis. Paprastiems osciliatorių modeliams FAF gali būti paskaičiuota analiziškai [19, 20, 22]. Tačiau daugumoje atvejų analizinis priėjimas neduoda rezultatų ir yra būtina naudoti skaitmeninius metodus [13, 21]. Yra dvi bazinės idėjos skaitmeniniam FAF apskaičiavimui. Viena iš jų yra paremta tiesioginiu osciliatoriaus atsako į trumpą impulsą visuose ribinio ciklo taškuose apskaičiavimu [23]. Algoritmas yra paprastas, bet netikslus, kadangi turime reikalą su baigtinės amplitudės perturbacija. Kita idėja yra linearizuoti sistemą ribinio ciklo aplinkoje ir spręsti tiesinę jungtinę lygtį [10, 12, 24, 25]. Toks algoritmas nėra trivialus, nes ieškomas jungtinės lygties sprendinys yra nestabilus ir reikalauja lygties integravimo atgal. Nepaisant to, šis algoritmas laikomas standartiniu skaičiuojant FAF. Pavyzdžiui, jis yra įgyvendintas populiariame pakete XPPAUT [24]. Šiame skirsnyje mes apžvelgsime šiuos algoritmus, taip pat pateiksime mūsų pasiūlytą skaitmeninį FAF skaičiavimo algoritmą [A1], kuris remiasi tiesioginio algoritmo adaptavimu be galo mažoms perturbacijoms.

Taigi, tarkime, turime sutrikdytą osciliatorių:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \varepsilon \mathbf{g}(t), \quad (1.32)$$

čia  $\mathbf{g}(t)$  yra vektorinė nuo laiko priklausanti perturbacija, o  $\varepsilon$  mažas parametras. Sistemos (1.32) fazės dinamiką galima gauti analogiškai, kaip ir darėme anksčiau, pasinaudoję (1.20) gauname:

$$\frac{d}{dt} \vartheta(\mathbf{x}(t)) = 1 + \varepsilon \cdot \nabla \vartheta^T(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{g}(t). \quad (1.33)$$

Esant mažai perturbacijai, sistemos trajektorija bus arti ribinio ciklo. Todėl fazės gradientą, esantį pastarojoje lygtyje, galime skaičiuoti ant ribinio ciklo taške  $\mathbf{x}_c(\vartheta)$ , kuris yra ant tos pačios izochronos, kaip ir taškas  $\mathbf{x}(t)$ . Kitaip tariant,  $\nabla \vartheta(\mathbf{x}(t)) \approx \nabla \vartheta(\mathbf{x}_c(\vartheta))$ . Ši vektorinė  $T$ -periodinė funkcija ir yra vadinama fazės atsako funkcija. Ją žymėsime  $\mathbf{z}(\vartheta)$ , o jos  $i$ -toji komponentė skaičiuojama taip:

$$z_i(\vartheta) = \frac{\partial \vartheta(\mathbf{x}_c(\vartheta))}{\partial x_i}. \quad (1.34)$$

Taigi lygties (1.32) fazės redukuotas modelis  $\varepsilon$  tikslumu atrodo taip:

$$\dot{\vartheta}(t) = 1 + \varepsilon \mathbf{z}^T(\vartheta) \cdot \mathbf{g}(t). \quad (1.35)$$

FAF turi savyje visą reikiamą informaciją apie ribinį ciklą, kad paskaičiuotume fazės dinamiką esant silpnai perturbacijai. Iš (1.34) matyti FAF fizikinė prasmė: jos  $i$ -oji komponentė parodo, kiek bus perturbuota sistemos fazė, jei sistemai, esant taške  $\mathbf{x}_c(\vartheta)$ , suteiktume be galo mažą trikdį išilgai teigiamos  $x_i$  krypties.

FAF dažniausiai skaičiuojama skaitmeniškai, tačiau kai kurioms sistemoms ją galima paskaičiuoti ir analiziškai. Panagrinėkime praeitame skirsnyje nagrinėtą sistemą (1.21). Tegul kompleksinis dydis  $z(t) = x(t) + iy(t)$ . Tuomet pagal (1.34) FAF bus išvestinės

$$z_1(\vartheta) = \frac{\partial \vartheta}{\partial x}, \quad (1.36a)$$

$$z_2(\vartheta) = \frac{\partial \vartheta}{\partial y}, \quad (1.36b)$$

paskaičiuotos ant ribinio ciklo  $x_c(t) = r_0 \cos(\omega t)$  ir  $y_c(t) = r_0 \sin(\omega t)$ . Žinodami  $\vartheta(x, y)$  arba polinėse koordinatėse  $\vartheta(r, \varphi)$  (o jį žinom iš (1.26)) galime nesunkiai paskaičiuoti FAF. Skaičiuodami  $\partial \vartheta / \partial r$  taške  $r_0$  susiduriame su neapibrėžtumu, todėl apibrėžkime tokią ribą:

$$p = \lim_{r \rightarrow r_0} \frac{\omega - g(r)}{f(r)}. \quad (1.37)$$

Tuomet FAF gauname:

$$z_1(\vartheta) = -\frac{\sqrt{(pr_0)^2 + 1}}{r_0 \omega} \sin(\omega \vartheta - \alpha), \quad (1.38a)$$

$$z_2(\vartheta) = \frac{\sqrt{(pr_0)^2 + 1}}{r_0 \omega} \cos(\omega \vartheta - \alpha), \quad (1.38b)$$

čia  $\alpha$  toks kampas, kad  $\sin \alpha = pr_0 / \sqrt{(pr_0)^2 + 1}$ , o  $\cos \alpha = 1 / \sqrt{(pr_0)^2 + 1}$ . Taigi iš (1.38) matyti, kad FAF yra harmoninė funkcija.

Dabar apžvelgsime skaitmeninius FAF skaičiavimo būdus.

**Tiesioginis metodas:** Šis metodas remiasi tiesioginiu sistemos atsako į specifinį trikdį skaičiavimu [23]. Tarkim neperturbuotos sistemos (1.1) pradinės sąlygos yra pasirinktos ant ribinio ciklo su tam tikra faze  $\vartheta$  t.y.  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_c(\vartheta)$ . Dabar pridėkime mažą perturbaciją  $\Delta x_i$  prie  $i$ -tosios pradinio vektoriaus  $\mathbf{x}_0$  komponentės, paliekant kitas komponentes neperturbuotas. Pagal FAF apibrėžimą (1.34) perturbuotos sistemos fazė pakis per dydį  $\Delta x_i z_i(\vartheta)$ , turint omeny, kad  $\Delta x_i$  pakankamai mažas. O tai reiškia, kad sistemos (1.1) sprendinys su perturbuota pradine sąlyga konverguos prie  $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}_c(\vartheta + \Delta x_i z_i(\vartheta) + t)$ , kai  $t \rightarrow \infty$ .

Praktiškai algoritmas įgyvendinamas tokiu būdu. Duotai fazei  $\vartheta$  suskaičiuojamos sutrikdyta ir nesutrikdyta pradinės sąlygos. Tada startuojant iš sutrikdytos

pradinės sąlygos, sistema integruojama per pakankamai daug sveikų periodų skaičių, kol sistema atsiduria ant ribinio ciklo. Tada įvertinamas fazės skirtumas  $\Delta\vartheta(\vartheta)$  tarp nesutrikdytos pradinės sąlygos ir sutrikdytos bei suintegruotos sistemos galinės sąlygos. Iš to skaičiuojama FAF  $z_i(\vartheta) = \Delta\vartheta(\vartheta)/\Delta x_i$ . Nors algoritmas labai paprastas, tačiau turi daug tikslumo trūkumų: neaišku kaip tinkamai pasirinkti  $\Delta x_i$ , kiek sveikų periodų integruoti sutrikdytą sistemą ir kaip tinkamai įvertinti  $\Delta\vartheta(\vartheta)$ .

**Jungtinės lygties metodas:** Šis metodas remiasi Malkino darbais [26, 27]. Juose parodyta, kad FAF yra  $T$ -periodinis lygties

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = - [D\mathbf{f}(\mathbf{x}_c(t))]^T \mathbf{z}(t) \quad (1.39)$$

sprendinys su pradine sąlyga  $\mathbf{z}^T(0) \cdot \dot{\mathbf{x}}_c(0) = 1$ . Lygtis (1.39) yra jungtinė (1.2) lygčiai. Šios lygtys turi tokią savybę, kad paėmus bet kokius (nebūtinai periodinius) tiesiogines lygties  $\delta\mathbf{x}(t)$  ir jungtinės lygties  $\mathbf{z}(t)$  sprendinius, jų skaliarinė sandauga nepriklauso nuo laiko:

$$\mathbf{z}^T(t) \cdot \delta\mathbf{x}(t) = \text{const.} \quad (1.40)$$

Pastarąją lygybę lengva įrodyti diferencijuojant ją pagal laiką.

Taigi lygtis (1.39) duoda alternatyvų būdą skaitmeniškai rasti FAF. Deja periodinio lygties (1.39) sprendinio radimas nėra toks trivialus. Dėl periodiškumo  $\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}(T)$  mes susiduriame su kraštinių sąlygų uždaviniu. Kadangi Jakobianas (1.39) lygtyje priklauso nuo ribinio ciklo  $\mathbf{x}_c(t)$ , atrodo protinga integruoti (1.39) kartu su (1.1) pasirinkus pradines sąlygas ant ribinio ciklo. Deja, toks integravimas neveiksmingas, nes periodinis sprendinys yra nestabilus. Iš tiesų, jei panagrinėtume lygties (1.2) sprendinį, jį išskaidžius Floke modomis (1.13), pamatytume, kad visos komponentės, išskyrus pirmą, eksponentiškai slops. Tuo tarpu, kadangi galioja (1.40), tai jungtinės lygties sprendinys eksponentiškai augs. Be to augimas bus tuo didesnis, kuo didesnis bus tiesioginės lygties sprendinio slopimas. Todėl Ermentrout'as pasiūlė (1.39) integruoti atgal laike [10, 12] ir įgyvendino šią idėją XPPAUT pakete [24]. Integruojant atgal (1.39), nusistovi periodinis sprendinys, kuris ir atitinka FAF. Bet atgalinis integravimas (1.39) kartu su (1.1) neįmanomas, nes tuomet ribinio ciklo sprendinys  $\mathbf{x}_c(t)$  tampa nestabilus. Todėl pradžioje (1.1) integruojama į priekį, ir randamas sistemos Jakobianas. Tuomet (1.39) integruojama atgal. Bet naudojant kintamo žingsnio Runge-Kuto algoritmą (kuris standartiškai yra naudojamas daugelyje skaitmeninio skaičiavimo paketų), prireikia žinoti Jakobianą kitais laiko momentais, nei jis buvo rastas (1.1) integruojant į priekį. Todėl jį tenka aproksimuoti. Kita jungtinės lygties metodo problema atsiranda, jei ribinis ciklas yra silpnai stabilus, nes atgalinis integravimas lėtai konverguoja prie periodinio spren-



dinio.

Pažymėtina, kad neseniai Govaerts ir Sautois pasiūlė jungtinio metodo modifikaciją [25]. Čia stabilus ribinis ciklas randamas sprendžiant kraštinių verčių uždavinį. O FAF randamas kaip šalutinis produktas, kraštinio uždavinio sprendimo metu. Kraštinių verčių uždavinys yra sprendžiamas kolokacijų metodu Gauso taškuose. Metodas pradedamas nuo periodinio sprendinio spėjimo ir tada iteruojant spėjamas sprendinys artėja prie tikslaus sprendinio. Todėl toks FAF skaičiavimas naudingas, kai jį reikia rasti prie įvairių parametrų reikšmių. Nežymiai pakeitus sistemos parametrus, jos FAF bus panaši į prieš tai esančią FAF, todėl pradinis spėjimas bus arti tikslaus sprendinio, kas lems greitą konvergavimą. Tačiau, kaip patys autoriai pažymėjo, jų metodas nėra tinkamas, kai reikia rasti vieną ar kelias FAF.

**Tiesioginio metodo adaptavimas be galo mažoms perturbacijoms:** Šis metodas yra aprašytas [A1] darbe. Pradėkime nuo lygties, aprašančios be galo mažos perturbacijos dinamiką ribinio ciklo aplinkoje:

$$\delta \mathbf{x}(t) = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_c(t + \vartheta))\delta \mathbf{x}(t). \quad (1.41)$$

Pažymėtina, kad pastaroji lygtis gali būti integruojama kartu su (1.1). Todėl mums nereikia Jakobiano interpoliavimo, priešingai nei jungtinės lygties metode.

Norėdami rasti  $i$ -tąją FAF komponentę prie fazės  $\vartheta$ , pasirinkime lygties (1.41) pradinę sąlygą  $\delta \mathbf{x}(0) = (\delta_1^i, \delta_2^i, \dots, \delta_n^i)^T$ , t.y. visas komponentes, lygias nuliui, išskyrus  $i$ -tąją, kuri prilyginta vienetui. Dabar suintegruokime (1.41) lygtį per  $m$  periodų ( $m$  – sveikas skaičius) ir raskime  $\delta \mathbf{x}(mT)$ . Kadangi ribinis ciklas yra stabilus, vektorius  $\delta \mathbf{x}(mT)$  taps lygiagretus greičio vektoriui  $\mathbf{V}(\vartheta) \equiv \dot{\mathbf{x}}_c(\vartheta) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_c(\vartheta))$ , kai  $m \rightarrow \infty$ . Pagal apibrėžimą  $z_i(\vartheta)$  lygi perturbuotos sistemos fazės pokyčiui, t.y.  $\lim_{m \rightarrow \infty} \delta \mathbf{x}(mT) = \mathbf{V}(\vartheta)z_i(\vartheta)$ . Pastarąją lygybę galima perrašyti taip:

$$z_i(\vartheta) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{V}^T(\vartheta)\delta \mathbf{x}(mT)}{\mathbf{V}^T(\vartheta)\mathbf{V}(\vartheta)}. \quad (1.42)$$

Ši lygtis leidžia paskaičiuoti FAF integruojant (1.41) į priekį kartu su (1.1). Toks algoritmas gali būti pagerintas. Pagal (1.42) mes turime integruoti lygtis per  $m$  periodų, kol trikdžio vektorius  $\delta \mathbf{x}(mT)$  taps lygiagretus greičio vektoriui  $\mathbf{V}(\vartheta)$ . Integravimo periodų skaičius gali būti labai didelis, jei ribinis ciklas silpnai stabilus. Mes galime išvengti nereikalingo integravimo per daug periodų, jei vietoje lygties (1.41) nagrinėtume lygtį dėl evoliucijos matricos. Norint išgauti informaciją apie FAF, pakanka žinoti evoliucijos matricą, suintegruotą per vieną periodą. Taigi skirtinguose fazės taškuose  $\vartheta$  įveskime  $n \times n$  fundamentinę matricą  $\Phi_\vartheta(t)$ , kurią

apibrėžia lygtis:

$$\dot{\Phi}_\vartheta(t) = Df(\mathbf{x}_c(t + \vartheta)) \Phi_\vartheta(t), \quad (1.43)$$

su pradine sąlyga  $\Phi_\vartheta(0) = \mathbb{I}_n$ , čia  $\mathbb{I}_n$  yra  $n \times n$  vienetinė matrica. FAF skaičiavimui prie konkretaus  $\vartheta$  reikia žinoti monodromio matricą, t.y.  $\Phi_\vartheta(T)$ . Padalinkim periodą  $T$  į  $N$  lygių intervalų  $\Delta t = T/N \equiv \Delta\vartheta$  ir apibrėžkime  $N$  mazginių taškų  $\mathbf{x}_c(\vartheta_k)$  ant ribinio ciklo su lygiais fazės tarpais  $\vartheta_k = k\Delta\vartheta$ ,  $k = 0, 1, \dots, N - 1$ . Įveskim paprastesnę žymėjimą  $\Phi_{\vartheta_k}(t) \equiv \Phi_k(t)$ . Kad rastume monodromio matricą  $\Phi_k(T)$ , kiekviename mazginiame taške pakanka integruoti (1.43) per mažą laiko intervalą  $t \in [0, \Delta\vartheta]$  tarp gretimų mazginių taškų skaičiuojant pagalbinės matricas  $\Phi_0(\Delta\vartheta), \Phi_1(\Delta\vartheta), \dots, \Phi_{N-1}(\Delta\vartheta)$ . Tuomet ieškoma monodromio matrica  $\Phi_k(T)$  bet kuriam mazginiam taškui randama kaip pagalbinių matricų sandauga:

$$\Phi_k(T) = \Phi_{k-1}(\Delta\vartheta) \cdots \Phi_0(\Delta\vartheta) \Phi_{N-1}(\Delta\vartheta) \cdots \Phi_k(\Delta\vartheta). \quad (1.44)$$

Pažymėtina, kad visas lygties (1.43) integravimo laikas, skaičiuojant pagalbinės matricas  $\Phi_k(\Delta\vartheta)$ , yra lygus vienam apėjimui apie ribinį ciklą. Visos reikiamos monodromio matricos  $\Phi_k(T)$  randamos dauginant matricas  $\Phi_k(\Delta\vartheta)$  skirtinga tvarka.

Toliau parodysime, kaip iš monodromio matricos  $\Phi_k(T)$  paskaičiuoti FAF  $k$ -tajame mazginiame taške  $\mathbf{z}(\vartheta_k)$ . Kad supaprastintume rašymą, indekso  $k$  nerašysime, tačiau turėsime omeny, kad visa tai galioja prie bet kurios fazės reikšmės  $\vartheta$ .

Naudojant fundamentinę matricą  $\Phi(T)$ , trikdį (1.42) išraiškoje galima užrašyti taip:

$$\delta\mathbf{x}(mT) = \Phi^m(T) \delta\mathbf{x}(0). \quad (1.45)$$

Kad supaprastintume pastarąją lygtį, mes naudosime spektrinę dekompoziciją, paremtą Floke teorija. Mes žinome, kad fundamentinė matrica nėra singuliari ir turi dešiniuosius  $\mathbf{v}_i$  ir kairiuosius  $\mathbf{w}_i$  tikrinius vektorius:

$$\Phi(T)\mathbf{v}_i = \mu_i\mathbf{v}_i, \quad (1.46a)$$

$$\mathbf{w}_i^T \Phi(T) = \mu_i \mathbf{w}_i^T, \quad (1.46b)$$

čia  $\mu_i$  yra ribinio ciklo Floke daugikliai. Jie tenkina charakteristinę lygtį:

$$|\Phi(T) - \mu\mathbb{I}_n| = 0. \quad (1.47)$$

Vienas iš Floke daugiklių aprašo trikdį išilgai ribinio ciklo  $\mu_1 = 1$ , kiti  $|\mu_i| < 1$ .

Be to, kairieji ir dešinieji tikriniai vektoriai yra ortogonalūs vienas kitam:

$$\mathbf{w}_i^T \mathbf{v}_j = 0, \quad \text{kai } i \neq j. \quad (1.48)$$

Dabar pradinį trikdį  $\delta \mathbf{x}(0)$  išskleiskime dešiniaisiais tikriniais vektoriais:

$$\delta \mathbf{x}(0) = c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_n \mathbf{v}_n, \quad (1.49)$$

ir įrašę jį į (1.45) dideliems  $m$  gauname:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \delta \mathbf{x}(mT) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mu_i^m c_i \mathbf{v}_i = c_1 \mathbf{v}_1. \quad (1.50)$$

Pirmą dešinįjį tikrinį vektorių galime pasirinkti lygų greičiui t.y.  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{V}$ . Tuomet (1.50) įstačius į (1.42), gauname, kad FAF lygi pirmam skleidinio koeficientui:

$$z_i = c_1. \quad (1.51)$$

Dabar padauginkime skleidinį (1.49) iš kairiojo tikrinio vektoriaus  $\mathbf{w}_1^T$  ir panaudoję ortogonalumo savybę (1.48) gauname:

$$z_i = \frac{\mathbf{w}_1^T \delta \mathbf{x}(0)}{\mathbf{w}_1^T \mathbf{V}}. \quad (1.52)$$

Kadangi pradinė perturbacija  $\delta \mathbf{x}(0)$  turi tik  $i$ -tąjį nenulinį elementą, lygtyje galima suprastinti  $\mathbf{w}_1^T \delta \mathbf{x}(0) = \mathbf{w}_1^T [i]$ , čia  $\mathbf{w}_1^T [i]$  yra  $i$ -toji vektoriaus  $\mathbf{w}_1$  komponentė. Tokiu būdu visas FAF komponentes galima rasti iš:

$$\mathbf{z} = \frac{\mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1^T \mathbf{V}}. \quad (1.53)$$

Ši lygtis atspindi pagrindinę mūsų algoritmo idėją. Mes matome, kad FAF radimas susiveda į kairiojo tikrinio vektoriaus radimą, kuris tenkina matricinę lygtį  $\mathbf{w}_1^T [\Phi(T) - \mathbb{I}_n] = 0$ . Kadangi tikriniai vektoriai ieškomi konstantos tikslumu, tai pirmą komponentę galime pasirinkti lygią vienetui:  $\mathbf{w}_1^T [1] = 1$ . Tada kitas komponentes  $\mathbf{w}_1^T [2 : n]$  randame iš  $n - 1$  tiesinių lygčių sistemos:

$$\mathbf{w}_1^T [2 : n] \{ \Phi(T)[2 : n; 2 : n] - \mathbb{I}_{n-1} \} = -\Phi(T)[1; 2 : n], \quad (1.54)$$

čia  $\Phi(T)[2 : n; 2 : n]$  yra submatrica, pagaminta iš matricos  $\Phi(T)$ , pašalinant pirmą eilutę ir pirmą stulpelį.

Taigi mes naudojame (1.53), kad rastume FAF mazginiuose taškuose  $\vartheta_k = k\Delta\vartheta$ , kai yra žinomos monodromio matricos  $\Phi_k(T)$ . Apibendrinant, algoritmą galima suvesti į tris žingsnius:

- 1 žingsnis.** Rasti  $N$  mazginių taškų ant ribinio ciklo, kurių fazės paskirstytos tolygiai  $\vartheta_k = k\Delta\vartheta$ , ir paskaičiuoti pagalbines matricas  $\Phi_k(\Delta\vartheta)$  integruojant (1.1) ir (1.43) intervale  $t \in [0, \Delta\vartheta]$ .
- 2 žingsnis.** Kiekviename mazginiame taške rasti monodromio matricą  $\Phi_k(T)$ , dauginant pagalbines matricas  $\Phi_k(\Delta\vartheta)$  vis skirtinga tvarka, kaip parodyta (1.44) lygtyje.
- 3 žingsnis.** Išspręsti tiesinę lygtį (1.54) ir, radus kairįjį tikrinį vektorių  $\mathbf{w}_1(\vartheta_k)$ , suskaičiuoti FAF kiekviename mazginiame taške pagal (1.53).

Reikia pažymėti, kad algoritmo realizavimui reikia iš anksto žinoti pradinę sąlygą ant ribinio ciklo  $\mathbf{x}_c(0)$  ir ribinio ciklo periodą  $T$ . Jei su pradine sąlyga paprastai problemų nebūna, tai tikslaus periodo radimas ne toks jau trivialus. Aptarkime skaitmeninį algoritmą, skirtą periodui rasti. Reikia paimti pradines sąlygas  $\mathbf{x}_c(0)$  ir integruoti lygtį (1.1) per laiką  $T_1$ , kuris apytiksliai lygus periodui  $T$ . Gausime kitą tašką ant ribinio ciklo  $\mathbf{x}_c(T_1)$ , o periodas bus  $T = T_1 + \Delta T$  (čia  $\Delta T$  gali būti tiek teigiamas, tiek neigiamas dydis). Taigi reikia rasti  $\Delta T$ . Šiuo tikslu įveskime naują  $n + 1$  dimensijos dinaminę sistemą:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = -2 \left[ (\tilde{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}_c(0))^T \cdot \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}(t)) \right] \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}(t)), \quad (1.55a)$$

$$\dot{\tau}(t) = -2 \left[ (\tilde{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}_c(0))^T \cdot \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}(t)) \right], \quad (1.55b)$$

čia dydis laužtiniuose skliaustuose yra skaliaras. Jei (1.55) integruotume iš pradinių sąlygų  $\tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}_c(T_1)$  ir  $\tau(0) = T_1$ , tai sprendinys eksponentiškai artėtų prie  $\tilde{\mathbf{x}}(t = \infty) = \mathbf{x}_c(0)$  ir  $\tau(t = \infty) = T$ . Taigi periodą galima rasti tuo pačiu tikslumu, kokiu yra sprendžiama diferencialinė lygtis.

Dabar aptarkime skaitmeninių metodų tikslumą FAF radimui. Tiesioginis FAF radimo metodas turi daug problemų su tikslumu, nes operuoja su baigtinėmis perturbacijomis. Jungtinės lygties metodo tikslumą lemia tiek diferencialinės lygties sprendimo tikslumas, tiek Jakobiano interpoliavimo tikslumas, todėl suminę FAF paklaidą įvertinti sunku. Ypač blogai veikia jungtinės lygties metodas, kai ribinis ciklas silpnai stabilus. Nes tada integruojant (1.39) lygtį atgal, jos sprendinys lėtai artėja prie periodinės funkcijos. Tuo tarpu mūsų metodo (tiesioginio metodo adaptavimas be galo mažoms perturbacijoms) tikslumą lemia tik diferencialinės lygties

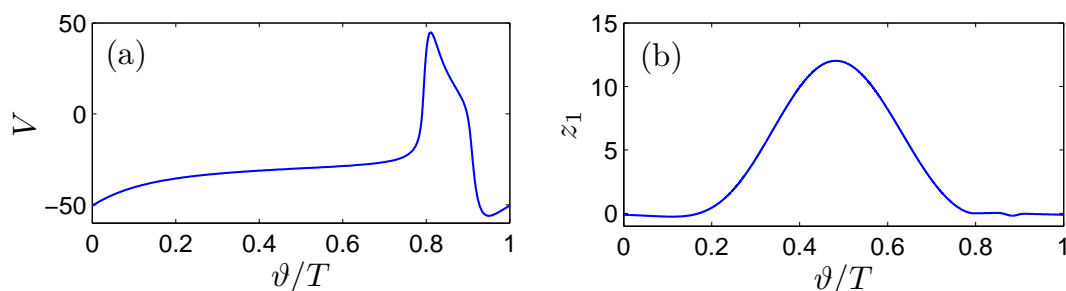
sprendimo tikslumas. Bet atsiranda kita problema – norint tankiai rasti FAF, reikia pasirinkti daug mazginių taškų, o tai didina skaičiavimo laiką. Reikia atkreipti dėmesį, kad mazginiai taškai nebūtinai turi būti prasiskyrę vienodos fazės tarpais. Jei kažkuriame atkarpoje FAF kinta staigiai, tai ten mazginius taškus galima pasirinkti tankiai, o kur FAF kinta nedaug – retai.

Toliau pažiūrėkime į konkrečių dinaminų sistemų FAF. Morris-Lecar neurono modelis [28] yra dviejų dimensijų dinaminė sistema:

$$C\dot{V} = -g_{Ca}m_{\infty}(V)(V - V_{Ca}) - g_K\omega(V - V_K) - g_l(V - V_l) + I_0, \quad (1.56a)$$

$$\dot{\omega} = \phi[\omega_{\infty}(V) - \omega]/\tau_{\omega}(V), \quad (1.56b)$$

čia  $m_{\infty}(V) = 0.5\{1 + \text{th}[(V - V_1)/V_2]\}$ ,  $\omega_{\infty}(V) = 0.5\{1 + \text{th}[(V - V_3)/V_4]\}$  ir  $\tau_{\omega}(V) = 1/\text{ch}[(V - V_3)/(2V_4)]$ . Parametrų reikšmės yra:  $C = 5.0 \mu\text{F}/\text{cm}^2$ ;  $g_{Ca} = 4.0 \mu\text{S}/\text{cm}^2$ ;  $g_K = 8.0 \mu\text{S}/\text{cm}^2$ ;  $g_l = 2.0 \mu\text{S}/\text{cm}^2$ ;  $V_{Ca} = 120 \text{ mV}$ ;  $V_K = -80 \text{ mV}$ ;  $V_l = -60 \text{ mV}$ ;  $V_1 = -1.2 \text{ mV}$ ;  $V_2 = 18.0 \text{ mV}$ ;  $V_3 = 12.0 \text{ mV}$ ;  $V_4 = 17.4 \text{ mV}$ ;  $\phi = 1/15 \text{ s}^{-1}$ ;  $I_0 = 40 \mu\text{A}/\text{cm}^2$ . Tokios sistemos pirma ribinio ciklo komponentė ir pirma FAF komponentė yra pavaizduotos 1.3 pav.



1.3 pav.: Moris-Lecar neurono modelio (1.56) ribinis ciklas ir jo FAF paskaičiuota naudojant mūsų metodą su  $N = 100$  mazginių taškų. (a) – ribinio ciklo pirma komponentė; (b) – FAF pirma komponentė.

Kita dinaminė sistema, kuriai skaičiavom FAF yra Hodgkin-Huxley neurono modelis [29]. Parametrus parinkome taip, kad sistema turėtų du stabilūs ribinius ciklus, esančius labai arti vienas kito fazinėje erdvėje. Tokioje vietoje tiesioginis FAF skaičiavimo metodas susidurtų su sunkumais. Hodgkin-Huxley sistema yra keturių

dimensijų ir atrodo taip:

$$\begin{aligned} C\dot{V} &= -g_{Na}m^3h(V - V_{Na}) - g_Kn^4(V - V_K) \\ &\quad -g_l(V - V_l) + I_0, \end{aligned} \quad (1.57a)$$

$$\dot{m} = \alpha_m(V)(1 - m) - \beta_m(V)m, \quad (1.57b)$$

$$\dot{h} = \alpha_h(V)(1 - h) - \beta_h(V)h, \quad (1.57c)$$

$$\dot{n} = \alpha_n(V)(1 - n) - \beta_n(V)n, \quad (1.57d)$$

čia

$$\alpha_m(V) = (2.5 - 0.1V)/[\exp(2.5 - 0.1V) - 1], \quad (1.58a)$$

$$\beta_m(V) = 4 \exp(-V/18), \quad (1.58b)$$

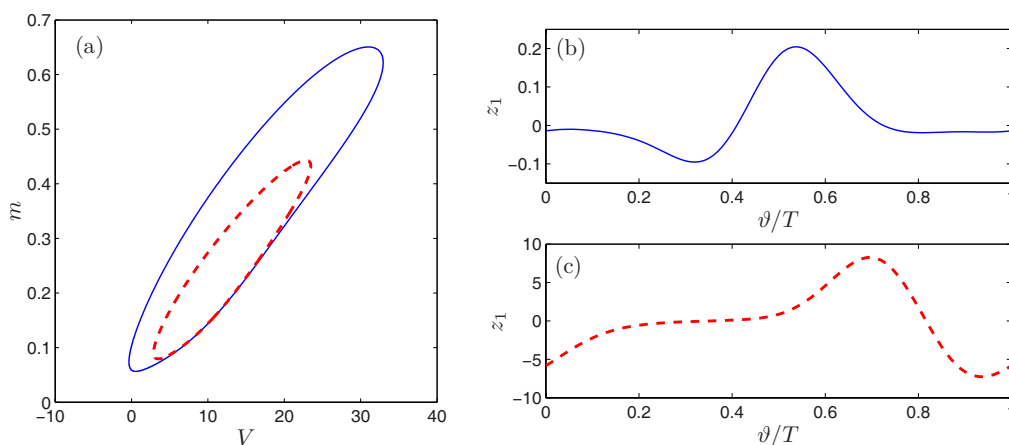
$$\alpha_h(V) = 0.07 \exp(-V/20), \quad (1.58c)$$

$$\beta_h(V) = 1/[\exp(3 - 0.1V) + 1], \quad (1.58d)$$

$$\alpha_n(V) = (0.1 - 0.01V)/[\exp(1 - 0.1V) - 1], \quad (1.58e)$$

$$\beta_n(V) = 0.125 \exp(-V/80). \quad (1.58f)$$

Sistemos parametrų reikšmės, kai egzistuoja du stabilūs ribiniai ciklai yra:  $C = 1 \mu\text{F}/\text{cm}^2$ ;  $g_{Na} = 120 \text{ mS}/\text{cm}^2$ ;  $g_K = 36 \text{ mS}/\text{cm}^2$ ;  $g_l = 0.3 \text{ mS}/\text{cm}^2$ ;  $V_{Na} = 85.7 \text{ mV}$ ;  $V_K = -11 \text{ mV}$ ;  $V_l = 10.559 \text{ mV}$ ;  $I_0 = 41 \mu\text{A}/\text{cm}^2$ . Sistemos ribinių ciklų projekcijos ir jų FAF yra pavaizduotos 1.4 pav.



1.4 pav.: Hodgkin-Huxley neurono modelis (1.57). Du stabilūs ribiniai ciklai ir jų FAF paskaičiuotos naudojant mūsų metodą su  $N = 100$  mazginių taškų. (a) – ribinių ciklų projekcijos į  $(V, m)$  plokštumą; (b) – didesnio ribinio ciklo FAF pirma komponentė; (c) – mažesnio ribinio ciklo FAF pirma komponentė.

Kita sistema, kuriai skaičiavome FAF, yra Hindmarsh-Rose neurono modelis [30].

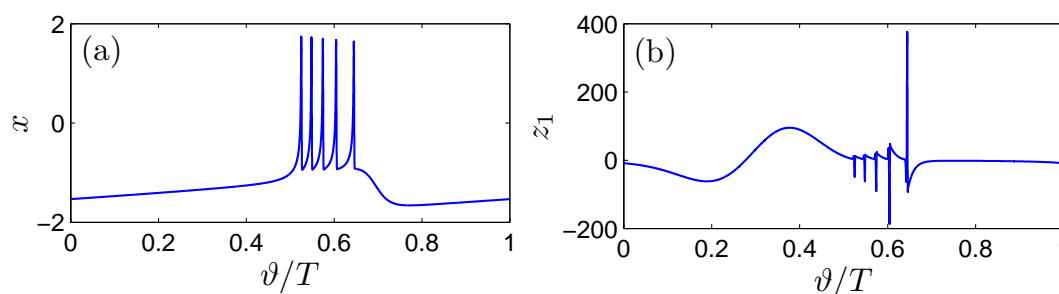
Sistemos ribinis ciklas pasižymi tuo, kad vienur dinaminiai kintamieji beveik nekinta, o kitur kinta staigiai (relaksaciniai virpesiai). Jungtinės lygties metodas tokioms sistemoms FAF skaičiuoja lėtai, nes staigaus kitimo vietoje Jakobianą reikia interpoluoti naudojant aukštos eilės splainus. Kitaip sprendinys niekad nesukonverguoja į periodinį sprendinį. Tuo tarpu mūsų metodo tikslumas nėra jautrus staigiems svyravimams. Sistemos dinamiką aprašo trys dinaminiai kintamieji:

$$\dot{x} = y + ax^2 - x^3 - z + I, \quad (1.59a)$$

$$\dot{y} = 1 - bx^2 - y, \quad (1.59b)$$

$$\dot{z} = r[s(x - x_R) - z]. \quad (1.59c)$$

Parametrų reikšmės yra:  $a = 3$ ;  $I = 1.3$ ;  $b = 5$ ;  $r = 0.001$ ;  $s = 4$ ;  $x_R = -1.6$ . Hindmarsh-Rose sistemos ribinis ciklas ir jo FAF pavaizduoti 1.5 pav.



1.5 pav.: Hindmarsh-Rose neurono modelis (1.59). Stabilus ribinis ciklas ir jo FAF paskaičiuota naudojant mūsų metodą su  $N = 1000$  mazginių taškų. (a) – ribinio ciklo pirmą komponentę; (b) – FAF pirmą komponentę.

## 1.4 Lygtis dėl fazės – tikslus išvedimas

Šiame skirsnyje mes pateiksime tikslesnį, matematinę prasmę, lygties dėl fazės dinamikos (1.35) išvedimą bei parodysime, kad FAF yra jungtinės lygties (1.39) periodinis sprendinys. Iš esmės tai yra Malkino teoremos, suformuluotos [26, 27] darbuose, pakartojimas. Vėliau, skirsnyje 1.6.2, bus pakartotas šis išvedimas, taikant jį diferencialinėms lygtims su delsa. Tačiau iškart suprasti 1.6.2 skirsnį gali būti per daug sudėtinga, todėl pradžioje yra patogiau susipažinti su išvedimu ribiniam ciklui, aprašomam paprastosiomis diferencialinėmis lygtimis.

Tarkim, mes domimės sutrikdyto osciliatoriaus (1.32) dinamika  $\varepsilon$  eilės tikslumu. Kitaip tariant, visus aukštesnės eilės narius, t.y.  $\varepsilon^2$ ,  $\varepsilon^3$  ir t.t., mes iškart atmesime. Jei naudotume reguliarią trikdžių teoriją, tai (1.32) lygties sprendinio ieškotume

tokiu būdu:

$$\mathbf{x}(t) \approx \mathbf{x}_c(t) + \varepsilon \mathbf{x}^{(1)}(t). \quad (1.60)$$

Skleidinys (1.60) gal ir būtų geras, jei mus domintų trumpa dinamika, kai  $t$  yra vieneto eilės. Tačiau, kai laikai taps labai dideli, t.y.  $t \sim 1/\varepsilon$ , skleidinys (1.60) nebepasiteisins. Įsivaizduokime, kad lygtyje (1.32) turime tokį trikdį  $\varepsilon \mathbf{g}(t)$ , kad jis po kiekvieno periodo pastumia sutrikdytą osciliatorių per  $\Delta$  išilgai ribinio ciklo. Aišku  $\Delta$  yra  $\varepsilon$  eilės. Bet po laiko  $t \sim 1/\varepsilon$ , suminis trikdys jau būtų vieneto eilės, tuo tarpu skleidinys (1.60) reikalauja  $\varepsilon$  eilės trikdžio. Todėl sutrikdyto sprendinio ieškosime taip:

$$\mathbf{x}(t) \approx \mathbf{x}_c(\vartheta(t)) + \varepsilon \mathbf{x}^{(1)}(t), \quad (1.61)$$

čia  $\vartheta(t)$  yra sutrikdyto sprendinio fazė. Dabar jau informaciją apie postūmius išilgai ribinio ciklo saugo fazės dinamika, todėl  $\varepsilon \mathbf{x}^{(1)}(t)$  liks  $\varepsilon$  eilės narys net kai  $t \sim 1/\varepsilon$ . Pritaikykime Floke teoriją trikdžiui  $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ . Jis bus sudarytas iš Floke modų tiesinės kombinacijos, t.y.  $\mathbf{x}^{(1)} = \sum_i c_i \mathbf{u}_i$ . Bet pirma Floke moda negali įeiti į trikdį, nes ji atitinka trikdį išilgai ribinio ciklo. Jei pirma Floke moda įeitų į trikdį  $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ , tuomet sprendinio (1.61) fazė būtų ne  $\vartheta$ , o  $\vartheta + \varepsilon c_1 \mathbf{u}_1$ . Taigi:

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \sum_{i=2}^n c_i(t) \mathbf{u}_i(\vartheta(t)). \quad (1.62)$$

Dabar (1.62) įrašome į (1.61), o jį savo ruožtu įrašome į sutrikdytą lygtį (1.32) ir gauname:

$$\begin{aligned} r \frac{d\mathbf{x}_c(\vartheta)}{d\vartheta} \dot{\vartheta}(t) + \varepsilon \sum_{i=2}^n \dot{c}_i(t) \mathbf{u}_i(\vartheta) + \varepsilon \sum_{i=2}^n c_i(t) \frac{d\mathbf{u}_i(\vartheta)}{d\vartheta} \dot{\vartheta}(t) = \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}_c(\vartheta)) + \varepsilon D\mathbf{f}(\mathbf{x}_c(\vartheta)) \sum_{i=2}^n c_i(t) \mathbf{u}_i(\vartheta) + \varepsilon \mathbf{g}(t). \end{aligned} \quad (1.63)$$

Mes žinome, kad  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_c(\vartheta)) = d\mathbf{x}_c(\vartheta)/d\vartheta$ . Dar pasinaudokime lygtimi dėl Floke modų (1.14):

$$\frac{d\mathbf{u}_i(\vartheta)}{d\vartheta} = -\lambda_i \mathbf{u}_i(\vartheta) + D\mathbf{f}(\mathbf{x}_c(\vartheta)) \mathbf{u}_i(\vartheta). \quad (1.64)$$

Įrašę (1.64) į (1.63) ir tinkamai sugrupavę visus narius, gausime:

$$\begin{aligned} r \left( \dot{\vartheta}(t) - 1 \right) \left[ \frac{d\mathbf{x}_c(\vartheta)}{d\vartheta} + \varepsilon \sum_{i=2}^n c_i(t) D\mathbf{f}(\mathbf{x}_c(\vartheta)) \mathbf{u}_i(\vartheta) \right] = \\ \varepsilon \sum_{i=2}^n \{ \lambda_i c_i(t) \mathbf{u}_i(\vartheta) + \dot{c}_i(t) \mathbf{u}_i(\vartheta) \} + \varepsilon \mathbf{g}(t). \end{aligned} \quad (1.65)$$

Dabar pažiūrėkime atidžiau į pastarąją lygtį. Dešinėje lygybės pusėje visi nariai



yra  $\varepsilon$  eilės, todėl ir kairėje pusėje reiktų palikti  $\varepsilon$  eilės narius. Fazės dinamikos mes ieškome  $\varepsilon$  eilės tikslumu, t.y.  $\dot{\vartheta}(t) = 1 + \varepsilon h$ , čia  $h$  yra mūsų ieškoma išraiška. Todėl kairėje lygybės pusėje laužtiniuose skliaustuose reikia palikti tik vieneto eilės narius. Taigi atmetę antrą narį, laužtiniuose skliaustuose gauname:

$$\left(\dot{\vartheta}(t) - 1\right) \frac{d\mathbf{x}_c(\vartheta)}{d\vartheta} = \varepsilon \sum_{i=2}^n \{\lambda_i c_i(t) \mathbf{u}_i(\vartheta) + \dot{c}_i(t) \mathbf{u}_i(\vartheta)\} + \varepsilon \mathbf{g}(t). \quad (1.66)$$

Iš pastarosios lygties gerai matyti, kodėl yra reikalingas jungtinės lygties periodinis sprendinys. Monodromio matrica  $\Phi_\vartheta(T)$ , kuriai galioja (1.43), turi dešiniuosius ir kairiuosius tikrinius vektorius. Dešinieji tikriniai vektoriai kaip tik ir yra Floke modos  $\mathbf{u}_i(\vartheta)$ . Kadangi tikriniais vektoriams galioja (1.46), patogų lygtį (1.66) padauginti iš kairės pusės iš pirmojo kairiojo tikrinio vektoriaus  $\mathbf{w}_1^T(\vartheta)$ . Parodykim, kokią gi lygtį tenkina  $\mathbf{w}_1(\vartheta)$ . Kadangi  $[\Phi_\vartheta^T(T) - \mathbb{I}_n] \mathbf{w}_1(\vartheta) = 0$ , tai diferencijuojant abi puses pagal  $\vartheta$  gausime:

$$\frac{d\Phi_\vartheta^T(T)}{d\vartheta} \mathbf{w}_1(\vartheta) + [\Phi_\vartheta^T(T) - \mathbb{I}_n] \frac{d\mathbf{w}_1(\vartheta)}{d\vartheta} = 0. \quad (1.67)$$

Monodromio matricos išvestinę pagal fazę galima rasti iš (1.43) lygties (tam reikės pasinaudoti  $\Phi_\vartheta(t+a) = \Phi_{\vartheta+a}(t) \Phi_\vartheta(a)$  savybe) ir ji yra:

$$\frac{d\Phi_\vartheta(T)}{d\vartheta} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_c(\vartheta)) \Phi_\vartheta(T) - \Phi_\vartheta(T) D\mathbf{f}(\mathbf{x}_c(\vartheta)). \quad (1.68)$$

Pastarąją lygtį įrašę į (1.67) gauname:

$$[\Phi_\vartheta^T(T) - \mathbb{I}_n] \left( \frac{d\mathbf{w}_1(\vartheta)}{d\vartheta} + D\mathbf{f}^T(\mathbf{x}_c(\vartheta)) \mathbf{w}_1(\vartheta) \right) = 0. \quad (1.69)$$

Taigi pirmas kairysis tikrinis vektorius yra periodinė funkcija, kuriai galioja jungtinė lygtis:

$$\frac{d\mathbf{w}_1(\vartheta)}{d\vartheta} = -D\mathbf{f}^T(\mathbf{x}_c(\vartheta)) \mathbf{w}_1(\vartheta). \quad (1.70)$$

Pastaroji lygtis yra tiesinė, todėl turi daug periodinių sprendinių besiskiriančių per konstantą. Jei periodinį sprendinį, normuotą į pirmą Floke modą, pažymėtume kaip  $\mathbf{z}(\vartheta)$  (normavimo sąlyga  $\mathbf{z}^T(0) \dot{\mathbf{x}}_c(0) = 1$ ), tai (1.66) po daugybos iš  $\mathbf{z}^T(\vartheta)$  pavirs į:

$$\dot{\vartheta}(t) = 1 + \varepsilon \mathbf{z}^T(\vartheta) \mathbf{g}(t). \quad (1.71)$$

$\mathbf{z}(\vartheta)$  ir yra vadinamas ribinio ciklo FAF. Atkreipkime dėmesį, kad žinant ribinio ciklo FAF, iš lygties (1.71) galima rasti fazės dinamiką  $\varepsilon$  tikslumu. Tačiau tokios

žinios neleidžia rasti pačio sprendinio  $\varepsilon$  tikslumu. Nes, jei pasižiūrėti į (1.61), tai  $\mathbf{x}^{(1)}(t)$  lieka nežinomas. Užtat fazės dinamikos lygtis (1.71) priklauso tik nuo išorinio signalo  $\varepsilon \mathbf{g}(t)$  ir nepriklauso nuo sprendinio  $\mathbf{x}(t)$ .

## 1.5 Kam reikalinga fazinė redukcija

Šiame skirsnyje parodysime, ką galima paskaičiuoti, žinant ribinio ciklo fazės dinamiką.

**Perturbuoto ribinio ciklo periodo skaičiavimas:** Įsivaizduokime, kad turime perturbuotą osciliatorių (1.32). Tik perturbacija  $\varepsilon \mathbf{g}(t)$  ne tiesiogiai priklauso nuo laiko, o priklauso nuo sistemos būsenos t.y.  $\mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t))$ . Jei  $\varepsilon$  mažas, tai sistema vaizduos periodinį elgesį su nauju periodu  $T_1$ , kuris skirsis nuo neperturbuotos sistemos periodo  $T$  per  $\varepsilon$  eilės dydį. Jį galima paskaičiuoti naudojant fazės dinamikos lygtį.

Taigi perturbuotos sistemos fazė pakinta nuo 0 iki  $T$  per laiką  $T_1$ . Fazės dinamiką aprašo lygtis:

$$\dot{\vartheta}(t) = 1 + \varepsilon \mathbf{z}^T(\vartheta) \mathbf{g}(\mathbf{x}(t)), \quad (1.72)$$

čia  $\mathbf{x}(t)$  yra sutrikdytos sistemos sprendinys. Kadangi mus domina dydžiai iki  $\varepsilon$  eilės, tai (1.72) vietoje  $\mathbf{x}(t)$  galima įrašyti nesutrikdyto oscilatoriaus sprendinį  $\mathbf{x}_c(\vartheta)$ . Taigi iš pastarosios lygties gauname tokius integralus:

$$\int_0^T \frac{1}{1 + \varepsilon \mathbf{z}^T(\vartheta) \mathbf{g}(\mathbf{x}_c(\vartheta))} d\vartheta = \int_0^{T_1} dt. \quad (1.73)$$

Pastarosios lygties dešinioji pusė lengvai suintegruojama, o kairiąją pusę išskleidžiame Teiloro eilute ir paliekame nulinį ir pirmą narį. Tokiu būdu:

$$T_1 = T - \varepsilon \int_0^T \mathbf{z}^T(\vartheta) \mathbf{g}(\mathbf{x}_c(\vartheta)) d\vartheta. \quad (1.74)$$

Pastaroji formulė parodo, koks bus perturbuotos sistemos periodas, kai perturbacija priklauso nuo pačios sistemos būsenos.

**Beveik identiškų osciliatorių sujungtų silpnu ryšiu analizė:** Įsivaizduokime, kad turime  $N$  beveik identiškų osciliatorių. Ryšys tarp osciliatorių yra globalus (kiekvienas oscilatorius yra sujungtas su kiekvienu), be to jis yra silpnas. Taigi  $k$ -tąją osciliatorių aprašo lygtis:

$$\dot{\mathbf{x}}_k(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k(t)) + \varepsilon \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_k(t)) + \varepsilon \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N \mathbf{g}_{kl}(\mathbf{x}_k(t), \mathbf{x}_l(t)), \quad (1.75)$$

čia dešinėje lygties pusėje pirmasis narys yra vidutinis vektorinis laukas visiems osciliatoriams. Antrasis narys yra vektorinio lauko pataisa, kuri yra visiems osciliatoriams skirtinga, be to ji yra  $\varepsilon$  eilės. Trečiasis narys aprašo sujungimo funkciją. Vidutinio osciliatoriaus, t.y.  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ , periodinį sprendinį žymėsime kaip visada  $\mathbf{x}_c(t+T) = \mathbf{x}_c(t)$ , o jo FAF  $\mathbf{z}(t)$ . Taigi, jei lygties (1.75) antrąjį ir trečiąjį narių interpretuosime kaip trikdį, tai  $k$ -tojo osciliatoriaus fazė bus:

$$\dot{\vartheta}_k(t) = 1 + \varepsilon \mathbf{z}^T(\vartheta_k) \left[ \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_c(\vartheta_k)) + \sum_l \mathbf{g}_{kl}(\mathbf{x}_c(\vartheta_k), \mathbf{x}_c(\vartheta_l)) \right]. \quad (1.76)$$

Čia mes vietoje  $\mathbf{x}_k(t)$  parašėme  $\mathbf{x}_c(\vartheta_k)$ . Taip galima daryti, nes nulinės eilės tikslumu šie dydžiai sutampa. Dabar įveskime naujus kintamuosius  $\vartheta_k(t) = t + \varphi_k(t)$ , kurie išeliminuos trivialų fazės augimą. Naujųjų kintamųjų dinamika bus:

$$\dot{\varphi}_k(t) = \varepsilon \mathbf{z}^T(t + \varphi_k) \left[ \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_c(t + \varphi_k)) + \sum_l \mathbf{g}_{kl}(\mathbf{x}_c(t + \varphi_k), \mathbf{x}_c(t + \varphi_l)) \right]. \quad (1.77)$$

Kintamasis  $\varphi_k(t)$  turi savyje greitas osciliacijas ir lėtą dinamiką. Greitos osciliacijos atsiranda, nes dešinioji diferencialinės lygties pusė priklauso nuo  $t$ , be to, ta priklausomybė periodinė. Lėta dinamika atsiranda, nes priekyje stovi mažas dydis  $\varepsilon$ . Nagrinėjant tokius reiškinius kaip sinchronizacija, įdomi yra lėta dinamika, todėl būtų naudinga gauti  $\varphi_k(t)$  dinamiką, suvidurkintą per greitų osciliacijų periodą  $T$ . Už tai atsako vidurkinimo teorema, kuri bus pateikta 3.1 skirsnyje. Pasinaudoję ja, gauname suvidurkintą  $\varphi_k(t)$  dinamiką (aš suvidurkintą dydį žymėsiu ta pačia raide):

$$\dot{\varphi}_k(t) = \varepsilon \left[ \omega_k + \sum_l H_{kl}(\varphi_l - \varphi_k) \right], \quad (1.78)$$

čia yra įvesti tokie žymėjimai:

$$\omega_k = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{z}^T(s) \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_c(s)) ds, \quad (1.79a)$$

$$H_{kl}(\chi) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{z}^T(s) \mathbf{g}_{kl}(\mathbf{x}_c(s), \mathbf{x}_c(\chi + s)) ds. \quad (1.79b)$$

Funkcija  $H_{kl}(\chi)$  yra periodinė, todėl ją patogų skleisti Furje eilute. Jei paliksime tik pirmąją harmoniką, tai gausime taip vadinamą Kuramoto fazinį modelį, kuris yra detalai išnagrinėtas [2]:

$$\dot{\varphi}_k(t) = \varepsilon \left[ \omega_k + \sum_l c_{kl} \sin(\varphi_l - \varphi_k + \psi_{kl}) \right]. \quad (1.80)$$

Dabar panagrinėkime atskirą atvejį. Turime du osciliatorius, sujungtus simetri-

niu ryšiu, t.y.  $\mathbf{g}_{12}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{g}_{21}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . Jų fazes aprašys lygtys (įveskime lėtąjį laiką  $\tau = \varepsilon t$ ):

$$\frac{d\varphi_1}{d\tau} = \omega_1 + H(\varphi_2 - \varphi_1), \quad (1.81a)$$

$$\frac{d\varphi_2}{d\tau} = \omega_2 + H(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (1.81b)$$

Jei mes domimės jų sinchronizacija, tai reikia žiūrėti ar fazių skirtumas  $\chi = \varphi_1 - \varphi_2$  nusistovi, ar pastoviai kinta. Lygtis dėl fazių skirtumo bus:

$$\frac{d\chi}{d\tau} = \omega_1 - \omega_2 + H^-(\chi), \quad (1.82)$$

čia funkcija  $H^-(\chi) = H(-\chi) - H(\chi)$  yra funkcijos  $H(\chi)$  nelyginė dalis. Jos maksimali vertė  $\max[H^-(\chi)]$  ir nulems didžiausią osciliatorių dažnių išderinimą  $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ , prie kurio tie osciliatoriai dar lieka sinchronizuoti.

**Arnoldo liežuviai periodiniam trikdžiui ir optimalios signalo formos radimas:** Dabar vėl sugrįžkime prie vieno perturbuoto osciliatoriaus (1.32). Įsivaizduokime, kad išorinis trikdys  $\mathbf{g}(t)$  yra periodinė funkcija su periodu  $T_1$ , artimu ribinio ciklo periodui  $T$ . Dar tarkime, kad  $\mathbf{g}(t)$  visos komponentės yra lygios nuliui, išskyrus pirmąją  $g_1(t)$ . Taip paprastai būna stimuliuojant neuronus, nes pirmoji komponentė yra neurono membranos potencialas, kuris yra veikiamas. Jei išorinio trikdžio amplitudė yra lygi nuliui, tai sistema svyruoja savuoju periodu  $T$ . Jei amplitudė yra labai didelė, tai sistema svyruoja išorinio trikdžio periodu  $T_1$ . Egzistuoja slenkstinė amplitudės vertė, kuriai esant sistema „prisiriša“ prie išorinio trikdžio svyravimų. Ją galima rasti naudojant fazinę redukciją, kai dažnių išderinimas  $\Delta f = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T}$  yra mažas.

Taigi iš lygties (1.32) gauname fazės dinamikos lygtį:

$$\dot{\vartheta}(t) = 1 + \varepsilon z_1(\vartheta)g_1(t), \quad (1.83)$$

čia funkcija  $g_1$  turi savybę  $g_1(t + T_1) = g_1(t)$ . Jei sistema sinchronizuosis su išorine jėga, tai jos fazė per laiką  $T_1$  turi padidėti nuo 0 iki  $T$ . Įvedame tokį keitinį:  $\vartheta(t) = t\frac{T}{T_1} + \varphi(t)$ . Kintamojo  $\varphi(t)$  dinamika, suvidurkinta per periodą  $T_1$ , parodys ar sistema sinchronizavosi su išorine jėga. Sinchronizacija bus pasiekta tada, kai suvidurkintas kintamasis  $\varphi(t)$  nepriklausys nuo laiko. Taigi lygtis dėl  $\varphi(t)$ :

$$\dot{\varphi}(t) = -\Delta f T + \varepsilon z_1\left(\frac{T}{T_1}t + \varphi\right)g_1(t). \quad (1.84)$$

Vėl gi naudosime vidurkinimo teoremą.  $\Delta f$  yra  $\varepsilon$  eilės dydis, be to dešinioji lygties

(1.84) pusė priklauso nuo  $t$  periodiškai su periodu  $T_1$ . Todėl dydžio  $\varphi(t)$  dinamiką, suvidurkintą per periodą  $T_1$ , aprašys diferencialinė lygtis:

$$\dot{\varphi}(t) = -\Delta f T + \varepsilon H(\varphi), \quad (1.85)$$

čia  $H(\varphi) = \frac{1}{T} \int_0^T z_1(s + \varphi) g_1\left(\frac{T_1}{T}s\right) ds$ . Iš pastarosios lygties gerai matyti kada  $\varphi(t)$  nepriklausys nuo laiko. Kritinis  $\varepsilon$ , prie kurio įvyksta sinchronizacija, priklauso nuo  $\Delta f$  ženklo:

$$\varepsilon_c = \begin{cases} \frac{T\Delta f}{\max[H(\varphi)]} & \text{kai } \Delta f > 0 \\ \frac{T\Delta f}{\min[H(\varphi)]} & \text{kai } \Delta f < 0 \end{cases} \quad (1.86)$$

Atsakymas (1.86) skirtas uždaviniui, kai ieškoma mažiausio teigiamo  $\varepsilon$ , reikalingo sinchronizacijai pasiekti prie konkrečios fiksuotos išorinės jėgos, aprašomos funkcija  $g_1(t)$ .

Suformuluokim kitokį uždavinį. Išorinės jėgos galia, kuria yra veikiamas osciliatorius, skaičiuojama taip:

$$P = \frac{\varepsilon^2}{T_1} \int_0^{T_1} g_1^2(s) ds = \varepsilon^2 \langle g_1^2(s) \rangle, \quad (1.87)$$

čia ir toliau tekste kampiniais skliaustais  $\langle \dots \rangle$  žymėsime periodinės funkcijos vidurkinimą per jos periodą. Mūsų uždavinys yra toks: prie duoto fiksuoto išderinimo  $\Delta f$  rasti optimalią išorinės jėgos formą  $g_1(t)$ , kuriai esant sinchronizacija yra pasiekiamą su minimalia galia  $P$ . Uždavinys yra variacinis, todėl reikės ieškoti funkcionalo minimumo. Spręskime šį uždavinį, kai  $\Delta f$  yra teigiamas. Varijuojant  $g_1(t)$ , galima variuoti tiek funkcijos formą tiek funkcijos amplitudę, tačiau amplitudės variavimas nereikalingas. Todėl tarkime, kad  $g_1(t)$  tenkina sąlyga:

$$\langle g_1^2(s) \rangle = 1. \quad (1.88)$$

Vietoje to, kad ieškoti  $P$  minimumo, patogiau yra ieškoti  $1/P$  maksimumo. Tašką, kur funkcija  $H(\varphi) = \langle z_1(s + \varphi) g_1\left(\frac{T_1}{T}s\right) \rangle$  įgyja maksimumą, tinkamai parinkus pradinę fazę, visada galima prilyginti 0. Todėl, neprarandant bendrumo galima tarti, kad  $\max[H(\varphi)] = H(0)$ . Taigi pasinaudoję (1.86) tuo atveju, kai  $\Delta f > 0$ , gauname funkcionalą, kurį reikia maksimizuoti:

$$J[g_1] = \frac{1}{\varepsilon_c^2[g_1]} = \frac{\langle z_1(s) g_1\left(\frac{T_1}{T}s\right) \rangle^2}{(T\Delta f)^2}, \quad (1.89)$$

su sąlyga, kad galioja (1.88). Todėl konstruojame pagalbinį funkcionalą:

$$\bar{J}[g_1] = \frac{\langle z_1 g_1 \rangle^2}{(T \Delta f)^2} + \lambda (\langle g_1^2 \rangle - 1), \quad (1.90)$$

kur  $\lambda$  yra neapibrėžtinis Lagranžo daugiklis. Funkcionalo variacija:

$$\delta \bar{J} = 2 \left\langle \left( \frac{\langle z_1 g_1 \rangle}{(T \Delta f)^2} z_1 + \lambda g_1 \right) \delta g_1 \right\rangle, \quad (1.91)$$

su bet kokia funkcija  $\delta g_1$  ekstremumo taške turi būti lygi nuliui. Todėl:

$$g_1(t) = -\frac{\langle z_1 g_1 \rangle}{\lambda (T \Delta f)^2} z_1 \left( \frac{T}{T_1} t \right). \quad (1.92)$$

Pastarąją išraišką įrašę į (1.88) randame Lagranžo neapibrėžtinį daugiklį:

$$\lambda = \pm \frac{\langle z_1 g_1 \rangle}{(T \Delta f)^2} \sqrt{\langle z_1^2 \rangle}. \quad (1.93)$$

Ženkla prie Lagranžo daugiklio reikia parinkti tokį, kad  $\langle z_1 g_1 \rangle > 0$ . Todėl (1.92) virsta į:

$$g_1(t) = \frac{z_1 \left( \frac{T}{T_1} t \right)}{\sqrt{\langle z_1^2 \rangle}}. \quad (1.94)$$

Kad rastume optimalią formą, kai  $\Delta f$  yra neigiamas, iš esmės niekas nesikeičia, tik tada Lagranžo daugiklio ženklą reikia parinkti taip, kad  $\langle z_1 g_1 \rangle < 0$ . Todėl pilnas atsakymas būtų toks:

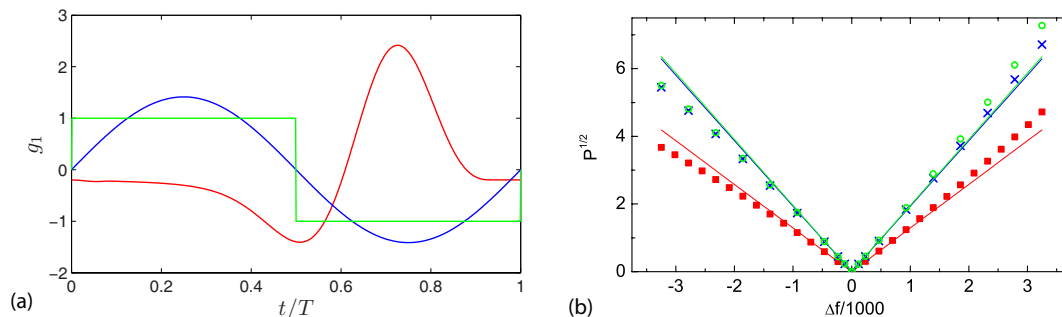
$$g_1(t) = \text{sgn}(\Delta f) \frac{z_1 \left( \frac{T}{T_1} t \right)}{\sqrt{\langle z_1^2 \rangle}}, \quad (1.95)$$

kur  $\text{sgn}(x)$  yra ženklo funkcija lygi  $\pm 1$  priklausomai nuo  $x$ -o ženklo. Dabar galime užrašyti minimalią galią priklausomai nuo išderinimo:

$$P = \frac{(T \Delta f)^2}{\langle z_1^2 \rangle}. \quad (1.96)$$

Aptarkime rezultatus (1.95) ir (1.96), kurie taip pat yra gauti [31]. Matome, kad šaknis iš galios tiesiškai priklauso nuo išderinimo. Kitas įdomus rezultatas yra tai, kad optimali išorinės jėgos forma yra proporcinga FAF. Toks rezultatas yra visai logiškas: osciliatorių reikia veikti tose vietose, kur jo jautrumas perturbacijoms yra didžiausias. Kadangi FAF rodo fazės (o tuo pačiu ir periodo) jautrumą perturbacijai, tai logiška stipriau perturboti osciliatorių tose vietose, kur FAF įgyja didesnę vertę.

Neuromoksle, kai šnekama apie neurono stimuliavimą, dažnai stimuliavimo sig-



1.6 pav.: Arnoldo liežuviai Hodgkin-Huxley neuronui. (a) – trys įvairios stimuliavimo signalo formos: mėlyna – sinusas, žalia – stačiakampis ir raudona – FAF pirma komponentė sunormuota į krūvio balansą. (b) – slenkstinės galios priklausomybė nuo išderinimo. Simboliais yra pavaizduotos skaitmeninės vertės, tuo tarpu tiesės gautos iš (1.86) lygties. Žalia ir mėlyna linijos yra arti viena kitos. Esant mažam išderinimui simboliai gulasi ant tiesių. Matome, kad raudona kreivė duoda mažiausią galią.

nalas turi tenkinti krūvio balanso sąlygą. Jei stimuliuotume neuroną nesilaikant krūvio balanso, tai susikaupęs krūvis neurono viduje galiausiai suardys jį. Todėl perspręskim optimalios signalo formos radimo uždavinį, naudojant papildomą sąlygą dėl krūvio balanso:

$$\langle g_1 \rangle = 0. \quad (1.97)$$

Iš esmės viskas atsikartoja, tik funkcionale (1.90) atsiranda papildoma sąlyga (1.97) su papildomu Lagranžo daugikliu. Tuomet rezultatai (1.95) ir (1.96) pakinta taip:

$$g_1(t) = \operatorname{sgn}(\Delta f) \frac{z_1 \left( \frac{T}{T_1} t \right) - \langle z_1 \rangle}{\sqrt{\langle z_1^2 \rangle - \langle z_1 \rangle^2}}, \quad (1.98)$$

$$P = \frac{(T\Delta f)^2}{\langle z_1^2 \rangle - \langle z_1 \rangle^2}. \quad (1.99)$$

Kad parodytume signalo formos (1.98) optimalumą, mes Hodgkin-Huxley neuronui (1.57), esant trims skirtingiems stimuliavimo signalams (sinusui, stačiakampiam ir optimaliam iš lygties (1.98)), skaitmeniškai paskaičiavome slenkstinę galią, kuriai esant neuronas sinchronizuojausi su išoriniu signalu. Tokie grafikai yra vadinami Arnoldo liežuviais. Rezultatai yra pateikti 1.6 pav.

## 1.6 Fazinė redukcija sistemoms su delsa

Laiko delsos reiškiniai yra dažnai sutinkami tiek natūraliose tiek inžinerinėse sistemose. Jie atsiranda dėl poveikio perdavimo baigtiniu greičiu tarp kompleksinės

sistemos sudedamųjų dalių arba kaip vėlinimas dėl informacijos apdorojimo. Sistemos su delsa buvo plačiai studijuojamos tokiose srityse kaip biologija [32, 33], populiacijų dinamika [34], neuroniniai tinklai [35], grįžtamuoju ryšiu valdomos mechaninės sistemos [36], staklių ir kitų elektromechaninių įrenginių vibracijos [37], lazeriai [38] ir t.t. (detalesnė apžvalga [39]). Uždelstasis grįžtamasis ryšys pasirodė kaip labai efektyvus būdas stabilizuoti nestabilias periodines orbitas (NPO) arba rimties taškus chaotiškose sistemose, naudojant neinvazinę jėgą [40, 41, 42].

Sistemos su delsa yra aprašomos skirtuminėmis diferencialinėmis lygtimis (SDL). Bendrai, SDL yra sudėtingesnės nei paprastosios diferencialinės lygtys (PDL), kadangi jų fazinė erdvė yra begalinės dimensijos. Tačiau esant kai kurioms sąlygoms, sistemų su delsa fazinė erdvė gali būti sumažinta, ir jų dinamika gali būti aprašoma PDL sistema. Tokia situacija susidaro, pvz., Hopfo bifurkacijos metu, kai sistemos su delsa dinamika redukuojama iki normalinės formos dinamikos ant centrinės daugdaros paviršiaus, kuri aprašo mažo ribinio ciklo atsiradimą (pvz. [43]). Jei sistema su delsa yra toli nuo bifurkacijos taško, jos dinamiką taip pat kartais pavyksta redukuoti. O būtent, jei ji turi stabilų ribinį ciklą (jis gali būti toli nuo bifurkacijos taško) ir jis perturbuojamas maža nuo laiko priklausančia perturbacija, tuomet sistemos lygtis galima redukuoti iki lygties dėl vieno skaliarinio kintamojo. Ši technika, leidžianti tokią redukciją, vadinama fazinės redukcijos metodu. Pirmą kartą fazinė redukcija osciliatoriams su delsa buvo parodyta [A2,A6] darbuose.

### 1.6.1 Fazinės redukcijos išvedimas: lygtis su delsa aproksimuojama paprastosiomis diferencialinėmis lygtimis

Šiame skirsnyje mes pateiksime „euristinį“ fazinės redukcijos išvedimą sistemoms, aprašomoms SDL. Mes pakeisime SDL į PDL sistemą, naudojant pernašos lygtį. Pernašos lygtis modeliuos uždelstus kintamuosius, esančius SDL. Diskretizuojant erdvinį kintamąjį pernašos lygtyje, mes transformuosime SDL į baigtinę PDL sistemą. Šiai sistemai mes pritaikysime klasikinę fazinės redukcijos procedūrą ir tada, artinant diskretizacijos žingsnį į nulį, gausime fazinę redukciją originaliai SDL. Kitas išvedimas, tiesiogiai iš SDL, bus pateiktas 1.6.2 skirsnyje.

Taigi pradėkime nuo silpnai perturbuoto ribinio ciklo osciliatoriaus, aprašomo SDL:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t - \tau)) + \varepsilon \mathbf{g}(t). \quad (1.100)$$

Čia  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  yra  $n$ -matis vektorius stulpelis,  $\tau$  yra delsos laikas ir  $\varepsilon \mathbf{g}(t) = \varepsilon (g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t))^T$  maža nuo laiko priklausanti perturbacija, kur  $\varepsilon \ll 1$  yra mažas parametras. Mes tariame, kad kai  $\varepsilon = 0$ , sistema turi stabilų ribinį



ciklą  $\mathbf{x}_c(t)$  su periodu  $T$ :  $\mathbf{x}_c(t) = \mathbf{x}_c(t + T)$ .

Fiziškai sistemoje (1.100) laiko delsa gali būti įgyvendinta naudojant delsos liniją, kuri gali būti modeliuojama pernašos lygtimi. Tuomet lygtį (1.100) galima perrašyti matematiškai ekvivalenčia forma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\xi}(\tau, t)) + \varepsilon \mathbf{g}(t), \quad (1.101a)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}(s, t)}{\partial t} = -\frac{\partial \boldsymbol{\xi}(s, t)}{\partial s}, \quad \boldsymbol{\xi}(0, t) = \mathbf{x}(t), \quad (1.101b)$$

čia  $\boldsymbol{\xi}$  yra vektorinis kintamasis pernašos lygtyje, o  $s \in [0, \tau]$  yra erdvinis kintamasis. Mes pasirinkome delsos linijos ilgį lygų  $\tau$ , o bangos sklidimo greitį lygų vienetui. Todėl signalas, įeinantis į delsos liniją  $\boldsymbol{\xi}(0, t) = \mathbf{x}(t)$ , yra pavėlinamas išėjime per laiką  $\tau$ :  $\boldsymbol{\xi}(\tau, t) = \mathbf{x}(t - \tau)$ .

Dabar mes diskretizuojame erdvinį kintamąjį pernašos lygtyje, padalindami jį į  $N$  lygius intervalus  $s_i = i\tau/N$ ,  $i = 0, \dots, N$  ir aproksimuojame lygties (1.101b) erdvinį kintamąjį baigtiniu skirtumu  $[\partial \boldsymbol{\xi}(s, t)/\partial s]_{s=s_i} \approx [\boldsymbol{\xi}(s_i, t) - \boldsymbol{\xi}(s_{i-1}, t)]N/\tau$ . Pažymėję  $\mathbf{x}_0(t) = \mathbf{x}(t)$  ir  $\mathbf{x}_i(t) = \boldsymbol{\xi}(i\tau/N, t) \approx \mathbf{x}(t - i\tau/N)$ ,  $i = 1, \dots, N$  mes gauname sistemą iš  $n \times (N + 1)$  PDL:

$$\dot{\mathbf{x}}_0(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{x}_N(t)) + \varepsilon \mathbf{g}(t), \quad (1.102a)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) = [\mathbf{x}_0(t) - \mathbf{x}_1(t)]N/\tau, \quad (1.102b)$$

$$\vdots$$

$$\dot{\mathbf{x}}_N(t) = [\mathbf{x}_{N-1}(t) - \mathbf{x}_N(t)]N/\tau, \quad (1.102c)$$

kuri aproksimuoja lygtis (1.101), o tuo pačiu ir pagrindinę lygtį (1.100). Kai  $N \rightarrow \infty$ , lygčių sistema (1.102) transformuojasi į lygtis (1.101) ir tokiu būdu jos sprendinys artėja prie sprendinio lygties su delsa (1.100) t.y.  $\mathbf{x}_0(t) \rightarrow \mathbf{x}(t)$ . Pažymėtina, kad bet kuriam baigtiniam  $N$ , sistema (1.102) susideda iš baigtinio skaičiaus PDL, todėl jai galioja visi prieš tai suformuluoti rezultatai iš fazinės redukcijos. Sistemą

(1.102) galima suvesti į lygtį (1.32) naudojant tokius žymėjimus:

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0(t) \\ \mathbf{x}_1(t) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_N(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{x}_N(t)) \\ [\mathbf{x}_0(t) - \mathbf{x}_1(t)] N/\tau \\ \vdots \\ [\mathbf{x}_{N-1}(t) - \mathbf{x}_N(t)] N/\tau \end{pmatrix}, \quad (1.103)$$

$$\mathbf{G}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{g}(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tokiuose žymėjimuose neperturbuotos sistemos (1.102) Jakobiano matrica užrašoma taip:

$$D\mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}(t) & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{B}(t) \\ N/\tau & -N/\tau & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & N/\tau & -N/\tau & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -N/\tau \end{pmatrix}, \quad (1.104)$$

čia  $\mathbf{A}(t) = [D_1 \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_N)]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_c(t)}$  ir  $\mathbf{B}(t) = [D_2 \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_N)]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_c(t)}$  yra  $T$  periodinės  $n \times n$  Jakobiano matricos paskaičiuotos ant sistemos ribinio ciklo. Simboliai  $D_1$  ir  $D_2$  žymi funkcijos  $\mathbf{f}$  vektorines išvestines pagal pirmąjį ir antrąjį argumentą. Jungtinė lygtis (1.39) tokiai sistemai užrašoma taip:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{z}}_0(t) \\ \dot{\mathbf{z}}_1(t) \\ \dot{\mathbf{z}}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{z}}_N(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{A}^T(t) & -N/\tau & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & N/\tau & -N/\tau & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & N/\tau & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mathbf{B}^T(t) & 0 & 0 & \cdots & N/\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{z}_0(t) \\ \mathbf{z}_1(t) \\ \mathbf{z}_2(t) \\ \vdots \\ \mathbf{z}_N(t) \end{pmatrix}, \quad (1.105)$$

o pradinės sąlygos dėl FAF užrašoma taip:

$$\sum_{i=0}^N \mathbf{z}_i^T(0) \dot{\mathbf{x}}_{ci}(0) = 1. \quad (1.106)$$

Kadangi sistemoje (1.102) perturbuojama tik pirmoji lygtis, t.y. (1.102a), tai lygtyje dėl fazės dinamikos bus tik pirmoji FAF komponentė. Taigi lygtis dėl fazės atrodys

taip:

$$\dot{\vartheta}(t) = 1 + \varepsilon \mathbf{z}_0^T(\vartheta) \mathbf{g}(t). \quad (1.107)$$

Lygtys (1.105), (1.106) ir (1.107) aprašo fazinę redukciją sistemos (1.102), kuri savo ruožtu aproksimuoja SDL (1.100) sprendinį. Dabar turime imti ribą  $N \rightarrow \infty$  ir žiūrėti kaip transformuojasi rezultatai (1.105), (1.106) ir (1.107). Toks uždavinys yra priešingas diskretizavimo uždaviniui. Kadangi (1.105) sistema panaši į sistemą (1.102), mes spėjame, kad transformacija iš PDL sistemos į SDL gali būti atlikta naudojant tokį pakeitimą:  $\mathbf{z}_0(t) = \mathbf{z}(t)$  ir

$$\mathbf{z}_i(t) = \frac{\tau}{N} \mathbf{B}^T \left( t + \tau - \frac{(i-1)\tau}{N} \right) \mathbf{z} \left( t + \tau - \frac{(i-1)\tau}{N} \right), \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.108)$$

Įrašius šią išraišką į (1.105), dėl funkcijos  $\mathbf{z}(t)$  mes gauname (riboje, kai  $N \rightarrow \infty$ ) tokią SDL:

$$\dot{\mathbf{z}}^T(t) = -\mathbf{z}^T(t) \mathbf{A}(t) - \mathbf{z}^T(t + \tau) \mathbf{B}(t + \tau), \quad (1.109)$$

čia  $\mathbf{A}(t)$  ir  $\mathbf{B}(t)$  yra  $T$  periodinės Jakobiano matricos, kurios yra vektorinės funkcijos  $\mathbf{f}$  išvestinės pagal pirmąjį ( $D_1$ ) ir antrąjį ( $D_2$ ) argumentą, paskaičiuotos ant neperturbuotos sistemos (1.100) ribinio ciklo:

$$\mathbf{A}(t) = D_1 \mathbf{f}(\mathbf{x}_c(t), \mathbf{x}_c(t - \tau)), \quad (1.110a)$$

$$\mathbf{B}(t) = D_2 \mathbf{f}(\mathbf{x}_c(t), \mathbf{x}_c(t - \tau)). \quad (1.110b)$$

Pradinės sąlygos lygčiai (1.109) yra gaunamos iš (1.106) imant ribą  $N \rightarrow \infty$ :

$$\mathbf{z}^T(0) \dot{\mathbf{x}}_c(0) + \int_{-\tau}^0 \mathbf{z}^T(\tau + s) \mathbf{B}(\tau + s) \dot{\mathbf{x}}_c(s) ds = 1. \quad (1.111)$$

Galiausiai lygtis dėl fazės įgyja pavidalą:

$$\dot{\vartheta}(t) = 1 + \varepsilon \mathbf{z}^T(\vartheta) \mathbf{g}(t). \quad (1.112)$$

Taigi lygtys (1.109), (1.111) ir (1.112) aprašo fazinės redukcijos metodo taikymą silpnai perturbuotiems ribinio ciklo osciliatoriams, aprašomiems lygtimis su delsa (1.100). Pažymėtina, kad pati lygtis (1.100) yra begalinės dimensijos, tuo tarpu redukuota iki fazės lygtis (1.112) yra vienam skaliariniam kintamajam  $\vartheta$ . Perturbuotos sistemos fazės dinamika yra pilnai apibrėžta sistemos FAF  $\mathbf{z}(\vartheta)$ , kuri tenkina jungtinę lygtį (1.109) su pradine sąlyga (1.111). Skirsnyje 1.6.2 mes gausime tuos pačius rezultatus neaproksimuodami SDL baigtine PDL lygčių sistema. Mes tiesiogiai pritaikysime fazinę redukciją SDL nenaudodami teorinių rezultatų žinomų iš

PDL sistemų.

Skirsnyje 1.6.3 mes skaitmeniškai parodysime mūsų pateiktų rezultatų galiojimą. Skaitmeniniam SDL integravimui mes naudojame MATLAB'o funkciją `dde23`. Pažymėtina, kad jungtinės lygties (1.109) periodinis sprendinys yra nestabilus kaip ir jį atitinkantis PDL sistemos (1.105) sprendinys. Norint rasti FAF, mes naudojame tą patį „triuką“, kaip ir PDL atveju, t.y. mes integruojame jungtinę lygtį (1.109) atgal. Kadangi funkcija `dde23` gali integruoti SDL tik į priekį, mes perrašome jungtinę lygtį apgręžtam laiko kintamajam. Mes apibrėžiam naujas funkcijas  $\bar{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{z}(-t)$ ,  $\bar{\mathbf{A}}(t) = \mathbf{A}(-t)$  ir  $\bar{\mathbf{B}}(t) = \mathbf{B}(-t)$ . Tuomet jungtinė lygtis (1.109) transformuojasi į:

$$\dot{\bar{\mathbf{z}}}^T(t) = \bar{\mathbf{z}}^T(t)\bar{\mathbf{A}}(t) + \bar{\mathbf{z}}^T(t - \tau)\bar{\mathbf{B}}(t - \tau), \quad (1.113)$$

kurią galima integruoti į priekį naudojant `dde23` funkciją. Kadangi ši lygtis yra tiesinė, mes galime pradėti iš bet kokių pradinių sąlygų ir integruoti ją tol, kol sprendinys sukonverguos į periodinį sprendinį. Tuomet tą periodinį sprendinį galime sunormuoti, kad būtų tenkinama pradinė sąlyga (1.111). Pažymėtina, kad jungtinės lygties atgaliniam integravimui reikia žinoti  $T$  periodines matricas  $\mathbf{A}(t)$  ir  $\mathbf{B}(t)$ . Šios matricos turi būti surastos iš anksto tiesiogiai integruojant neperturbuotą pagrindinę lygtį (1.100).

## 1.6.2 Tiesioginis fazinės redukcijos išvedimas

Šiame skirsnyje mes aprašysime tiesioginį fazinės redukcijos metodo išvedimą sistemoms, aprašomoms SDL (1.100). Priešingai negu praeitame skirsnyje, mes neaprosimuosime SDL PDL sistema.

Taigi pradžioje panagrinėkime neperturbuotą sistemą (1.100), kai  $\varepsilon = 0$ :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t - \tau)), \quad (1.114)$$

čia  $\mathbf{x}(t)$  yra  $n$ -dimensinis vektorius stulpelis iš vektorinės erdvės  $\Gamma$ . Jei mus domina lygties sprendinys, kai  $t \geq 0$ , yra būtina užduoti būsenos vektorių  $\mathbf{x}(t)$  visame intervale  $[-\tau, 0]$ :

$$\mathbf{x}(s) = \boldsymbol{\chi}(s), \quad -\tau \leq s \leq 0, \quad (1.115)$$

čia  $\boldsymbol{\chi}(s)$  yra tolydi vektorinės reikšmės pradinė funkcija iš funkcijų erdvės  $\mathcal{C}$ . Čia  $\mathcal{C}$  yra Banacho tolydžių funkcijų, atvaizduojančių iš intervalo  $[-\tau, 0]$  į  $\mathbb{R}^n$ , erdvė. Kad užtikrintume lygties (1.114) sprendinio vienareikšmiškumą, mes negalime apsiriboti vektorine erdve  $\Gamma$ . Sistemos su delsa būseną laiko momentu  $t$  aprašo išplėstinis būsenos vektorius  $\mathbf{x}^{(t)}(s) \in \mathcal{C}$  sukonstruotas iš intervalo  $[t - \tau, t]$  remiantis tokia

taisykle (žr., pvz., [44]):

$$\mathbf{x}^{(t)}(s) = \mathbf{x}(t + s), \quad -\tau \leq s \leq 0. \quad (1.116)$$

Mes tariame, kad sistema (1.114) turi stabilųjį ribinį ciklą  $\mathbf{x}_c(t) = \mathbf{x}_c(t + T)$ . Apibrėžkime pradinę būseną ant ribinio ciklo iš funkcijų erdvės  $\mathcal{C}$  kaip  $\boldsymbol{\chi}_c^{(0)}(s) = \mathbf{x}_c^{(0)}(s)$  ir priskirkime jai fazę  $\vartheta = 0$ . Tada likusių ribinio ciklo būsenų  $\mathbf{x}_c^{(t)}(s)$  fazę mes apibrėšime kaip  $\vartheta(\mathbf{x}_c^{(t)}(s)) = t \pmod{T}$ . Fazė kinta intervale  $[0, T]$  ir tenkina paprastąją diferencialinę lygtį  $\dot{\vartheta} = 1$ .

Dabar mūsų tikslas yra išplėsti fazės apibrėžimą taškams, nepriklausantiems ribiniam ciklui. O tiksliau mums reikia fazės apibrėžimo būsenoms artimoms ribiniam ciklui  $\mathbf{x}^{(t)}(s) = \mathbf{x}_c^{(t)}(s) + \delta\mathbf{x}^{(t)}(s)$ , kur trikdžio dinamika  $\delta\mathbf{x}^{(t)}(s) = \delta\mathbf{x}(t + s)$  gali būti aprašyta tiesine lygtimi:

$$\delta\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t - \tau)\delta\mathbf{x}(t - \tau). \quad (1.117)$$

Čia  $\mathbf{A}(t)$  ir  $\mathbf{B}(t)$  yra  $T$  periodinės Jakobiano matricos, apibrėžtos pagal (1.110). Toliau mums reikia lygties, kuri būtų jungtinė (1.117) lygčiai. Tokia lygtis yra apibrėžiama vektoriui eilutei  $\mathbf{z}^T(t)$  tokiu būdu (žr. [45], psl. 359):

$$\dot{\mathbf{z}}^T(t) = -\mathbf{z}^T(t)\mathbf{A}(t) - \mathbf{z}^T(t + \tau)\mathbf{B}(t + \tau). \quad (1.118)$$

Pagrindinė jungtinės lygties sprendinio  $\mathbf{z}(t)$  savybė yra ta, kad bitiesinė forma, apibrėžta kaip:

$$(\mathbf{z}(t), \delta\mathbf{x}(t)) = \mathbf{z}^T(t)\delta\mathbf{x}(t) + \int_{-\tau}^0 \mathbf{z}^T(t + \tau + s)\mathbf{B}(t + \tau + s)\delta\mathbf{x}(t + s)ds \quad (1.119)$$

nepriklauso nuo laiko, t.y.  $(\mathbf{z}(t), \delta\mathbf{x}(t)) = \text{const}$ . Iš tikrųjų, tiesiogiai diferencijuojant (1.119) yra lengva parodyti, kad jos išvestinė lygi nuliui [45].

Mes tariame, kad visi lygties (1.118) sprendiniai gali būti išskaidyti Floke modom. Lygtis dėl Floke modų gaunama naudojant keitinį

$$\delta\mathbf{x}(t) = \exp(\lambda t)\mathbf{u}(t) \quad (1.120)$$

ir užsirašoma taip:

$$\dot{\mathbf{u}}(t) + \lambda\mathbf{u}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}(t - \tau)e^{-\lambda\tau}\mathbf{u}(t - \tau). \quad (1.121)$$

Čia  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t + T)$  yra  $T$  periodinė Floke moda ir  $\lambda$  yra Floke eksponentė. Lygtis

(1.121) turi be galo daug tiesiškai nepriklausomų periodinių sprendinių  $\mathbf{u}_i(t)$  su skirtingomis eksponentėmis  $\lambda_i$ . Viena iš jų yra  $\lambda_1 = 0$ , ji aprašo trikdį išilgai ribinio ciklo. Šios eksponentės Floke modą galima pasirinkti kaip ribinio ciklo išvestinę, t.y.  $\mathbf{u}_1(t) = \dot{\mathbf{x}}_c(t)$ . Lengva parodyti, kad tokia funkcija tenkina (1.121), kai  $\lambda = 0$ . Likusių Floke eksponenčių realiosios dalys yra neigiamos  $\Re(\lambda_i) < 0$ ,  $i = 2, \dots, \infty$ , nes ribinis ciklas yra stabilus.

Irašę Floke sprendinį  $\delta\mathbf{x}(t) = \exp(\lambda_i t)\mathbf{u}_i(t)$  į (1.119) ir reikalaujant, kad jungtinis vektorius būtų  $T$  periodinė funkcija,

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{z}(t + T), \quad (1.122)$$

mes parodome, kad bitiesinė forma (1.119) su visom, išskyrus pirmą, Floke modom tampa lygi nuliui:

$$\mathbf{z}^T(t)\mathbf{u}_i(t) + \int_{-\tau}^0 \mathbf{z}^T(t + \tau + s)\mathbf{B}(t + \tau + s)\mathbf{u}_i(t + s)e^{\lambda_i s} ds = 0, \quad i \geq 2. \quad (1.123)$$

Kadangi (1.118) yra tiesinė ir turi sprendinius su laisvai pasirenkama amplitude, mes galime reikalauti, kad bitiesinė forma su pirmąja Floke moda būtų lygi vienetui:

$$\mathbf{z}^T(t)\mathbf{u}_0(t) + \int_{-\tau}^0 \mathbf{z}^T(t + \tau + s)\mathbf{B}(t + \tau + s)\mathbf{u}_0(t + s) ds = 1. \quad (1.124)$$

Mes panaudosime šias lygybes, kai nagrinėsime sutrikdytą SDL.

Dabar mes apibrėšime fazę būsenoms, nepriklausančioms ribiniam ciklui. Nors mes turime reikalą su be galo dimensine erdve, fazės apibrėžimas taškams, nutolusiems nuo ribinio ciklo, naudojamas PDL atveju, gali būti pritaikytas SDL atveju. Panagrinėkime dvi būsenas funkcijų erdvėje  $\mathcal{C}$ , vieną ant ribinio ciklo su faze  $\vartheta$ ,  $\boldsymbol{\chi}_c^{(\vartheta)}(s) = \mathbf{x}_c^{(\vartheta)}(s) = \mathbf{x}_c(\vartheta + s)$  ir kitą už ribinio ciklo, kurią mes pažymime kaip  $\boldsymbol{\chi}^{(\vartheta)}(s)$ . Mes interpretuojame būsenas  $\boldsymbol{\chi}_c^{(\vartheta)}(s)$  ir  $\boldsymbol{\chi}^{(\vartheta)}(s)$  kaip dvi skirtingas pradines sąlygas SDL (1.114) ir nagrinėjame jų evoliuciją laike. Pirmosios būsenos evoliuciją užduoda ribinio ciklo sprendinys  $\mathbf{x}_c^{(\vartheta+t)}(s) = \mathbf{x}_c(\vartheta + t + s)$ . Antrosios būsenos evoliuciją užduoda sistemos (1.114) sprendinys su pradine sąlyga  $\boldsymbol{\chi}^{(\vartheta)}(s)$ . Mes pažymėsime šį sprendinį kaip  $\mathbf{x}^{(t)}(s)$ . Sakome, kad būsenos  $\boldsymbol{\chi}^{(\vartheta)}(s)$  fazė yra  $\vartheta$  (ta pati kaip ir būsenos  $\boldsymbol{\chi}_c^{(\vartheta)}(s)$ , priklausančios ribiniam ciklui), jei abiejų būsenų evoliucija asimptotiškai sutampa, t.y.  $\mathbf{x}^{(t)}(s) \rightarrow \mathbf{x}_c^{(\vartheta+t)}(s) = \mathbf{x}_c(\vartheta + t + s)$  kai  $t \rightarrow \infty$ .

Panaudojant Floke teoriją, mes galime priskirti fazes būsenoms, artimoms ribiniam ciklui, tokiu būdu. Paimkime būseną  $\boldsymbol{\chi}_c^{(\vartheta)}(s) = \mathbf{x}_c^{(\vartheta)}(s)$  ant ribinio ciklo su faze

$\vartheta$  ir šiek tiek perturbuokime ją „išilgai“  $i$ -tosios Floke modos

$$\mathbf{x}_i^{(\vartheta)}(s) = \mathbf{x}_c^{(\vartheta)}(s) + \varepsilon e^{\lambda_i s} \mathbf{u}_i(\vartheta + s). \quad (1.125)$$

Mes tariame, jog  $\varepsilon$  yra pakankamai mažas, kad perturbacijos dinamika yra pilnai aprašoma linearizuota lygtimi. Tuomet (1.114) sprendinys su pradine sąlyga (1.125) atrodys taip:

$$\mathbf{x}^{(t)}(s) = \mathbf{x}_c^{\vartheta+t}(s) + \varepsilon e^{\lambda_i(t+s)} \mathbf{u}_i(\vartheta + t + s). \quad (1.126)$$

Jei mes nagrinėsime ne pirmąją Floke modą ( $i \neq 1$ ), tuomet  $\Re(\lambda_i) < 0$  ir paskutinis narys dešiniojoje lygybės (1.126) pusėje dingsta, kai  $t \rightarrow \infty$ . Todėl pagal pateiktą apibrėžimą, būseną (1.126) turi fazę  $\vartheta$ . Kadangi tai galioja bet kuriam  $i \geq 2$ , bendra išraiška būsenai su faze  $\vartheta$  gali būti užrašyta:

$$\mathbf{x}^{(\vartheta)}(s) = \mathbf{x}_c^{(\vartheta)}(s) + \varepsilon \sum_{i=2}^{\infty} c_i e^{\lambda_i s} \mathbf{u}_i(\vartheta + s), \quad (1.127)$$

čia  $c_i$  yra bet kokios konstantos. Jei užfiksuosime  $\vartheta$  ir variuosime  $c_i$ , mes gausime izochronos „paviršių“ funkcijų erdvėje  $\mathcal{C}$  arti ribinio ciklo būsenos  $\mathbf{x}_c^{(\vartheta)}(s)$ . Tariame, kad bet kokia būseną artima ribiniam ciklui gali būti užrašyta (1.127) pavidalu. Tai iš tikrųjų griežtai nėra teisinga, pvz. [46] yra parodyta, kad be galo dimensinėje erdvėje gali būti tokie trikdžiai, kurie gęsta greičiau negu eksponentiškai. Tačiau šiuo atveju mums svarbus pats gesimas.

Dabar panagrinėkime perturbuotą SDL:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t - \tau)) + \varepsilon \mathbf{g}(t). \quad (1.128)$$

Mes tariame, kad perturbacija yra maža ir sistema visą laiką išlieka arti ribinio ciklo, todėl būseną visada galima užrašyti (1.127) pavidalu. Taigi mes ieškome (1.128) sprendinio tokia forma, tardami, kad  $\vartheta = \vartheta(t)$  ir  $c_i = c_i(t)$  yra nuo laiko priklausančios funkcijos:

$$\mathbf{x}(t + s) = \mathbf{x}_c(\vartheta(t) + s) + \varepsilon \sum_{i=2}^{\infty} c_i(t) e^{\lambda_i s} \mathbf{u}_i(\vartheta(t) + s), \quad s \in [-\tau, 0]. \quad (1.129)$$

Panaudoję (1.128) ir (1.129), mes norime išvesti diferencialinę lygtį fazei  $\vartheta(t)$ . Kadangi apsiribojame  $\varepsilon$  tikslumu, tokią lygtį galima užrašyti taip:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = 1 + \varepsilon q(\vartheta, t), \quad (1.130)$$

čia  $q(\vartheta, t)$  yra mūsų ieškoma skaliarinė funkcija.

Imdami (1.129) lygtyje  $s = 0$  ir  $s = -\tau$ , mes gauname

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_c(\vartheta) + \varepsilon \sum_{i=2}^{\infty} c_i(t) \mathbf{u}_i(\vartheta), \quad (1.131)$$

$$\mathbf{x}(t - \tau) = \mathbf{x}_c(\vartheta - \tau) + \varepsilon \sum_{i=2}^{\infty} c_i(t) e^{-\lambda_i \tau} \mathbf{u}_i(\vartheta - \tau). \quad (1.132)$$

Įrašę šias išraiškas į (1.128) dešiniąją lygybės pusę ir išskleidę netiesinę funkciją Teiloro eilute iki pirmojo nario, gauname:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = & \mathbf{f}(\mathbf{x}_c(\vartheta), \mathbf{x}_c(\vartheta - \tau)) + \varepsilon \sum_{i=2}^{\infty} c_i(t) [\mathbf{A}(\vartheta) \mathbf{u}_i(\vartheta) + \\ & \mathbf{B}(\vartheta - \tau) \mathbf{u}_i(\vartheta - \tau) e^{-\lambda_i \tau}] + \varepsilon \mathbf{g}(t). \end{aligned} \quad (1.133)$$

Pirmasis narys dešiniojoje lygybės pusėje atitinka pirmąją Floke modą, tai yra  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_c(\vartheta), \mathbf{x}_c(\vartheta - \tau)) = d\mathbf{x}_c(\vartheta)/d\vartheta = \mathbf{u}_1(\vartheta)$ . Išraišką laužtiniuose skliaustuose galima supaprastinti pasinaudojus (1.121). Tuomet (1.133) transformuojasi į:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}_1(\vartheta) + \varepsilon \sum_{i=2}^{\infty} c_i(t) \left[ \lambda_i \mathbf{u}_i(\vartheta) + \frac{d\mathbf{u}_i}{d\vartheta} \right] + \varepsilon \mathbf{g}(t). \quad (1.134)$$

Dabar išdiferencijuokime (1.131) pagal  $\vartheta$ :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} \frac{d\vartheta}{dt} = \mathbf{u}_1(\vartheta) + \varepsilon \sum_{i=2}^{\infty} \left[ \frac{dc_i}{dt} \frac{d\vartheta}{dt} \mathbf{u}_i(\vartheta) + c_i(t) \frac{d\mathbf{u}_i}{d\vartheta} \right]. \quad (1.135)$$

Išreiškę  $d\mathbf{x}/dt$  iš (1.134) ir (1.135) gauname:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1(\vartheta) + \varepsilon \sum_{i=2}^{\infty} c_i(t) \left[ \lambda_i \mathbf{u}_i(\vartheta) + \frac{d\mathbf{u}_i}{d\vartheta} \right] + \varepsilon \mathbf{g}(t) = \\ \frac{d\vartheta}{dt} \left[ \mathbf{u}_1(\vartheta) + \varepsilon \sum_{i=2}^{\infty} c_i(t) \frac{d\mathbf{u}_i}{d\vartheta} \right] + \varepsilon \sum_{i=2}^{\infty} \frac{dc_i}{dt} \mathbf{u}_i(\vartheta). \end{aligned} \quad (1.136)$$

Įrašę  $d\vartheta/dt = 1 + \varepsilon q(\vartheta, t)$  iš (1.130) ir atmetę aukštesnės eilės narius, lygtis supaprastėja iki:

$$q(\vartheta, t) \mathbf{u}_1(\vartheta) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{u}_i(\vartheta) \left[ \lambda_i c_i(t) - \frac{dc_i}{dt} \right] + \mathbf{g}(t). \quad (1.137)$$

Kitas žingsnis yra (1.129) diferencijavimas pagal  $s$  ir pagal  $t$ . Matyti, kad kairiosios lygybės pusės išvestinė pagal  $s$  ir pagal  $t$  sutampa. Todėl tas pats galioja ir dešiniąją lygybės pusę. Diferencijuodami dešiniąją pusę pagal  $s$  ir  $t$  ir jas sulyginę mes



gauname:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1(\vartheta + s) + \varepsilon \sum_{i=2}^{\infty} c_i(t) e^{\lambda_i s} \left[ \lambda_i \mathbf{u}_i(\vartheta + s) + \frac{d\mathbf{u}_i(\vartheta + s)}{d\vartheta} \right] = \\ \frac{d\vartheta}{dt} \left[ \mathbf{u}_1(\vartheta + s) + \varepsilon \sum_{i=2}^{\infty} c_i(t) \frac{d\mathbf{u}_i(\vartheta + s)}{d\vartheta} e^{\lambda_i s} \right] + \\ \varepsilon \sum_{i=2}^{\infty} \frac{dc_i}{dt} \mathbf{u}_i(\vartheta + s) e^{\lambda_i s}, \quad s \in (-\tau, 0). \end{aligned} \quad (1.138)$$

Ši lygybė galioja atvirame intervale  $s \in (-\tau, 0)$ , kadangi (1.129) išvestinės neapibrėžtos ant intervalo kraštų  $s = -\tau$  ir  $s = 0$ . Kad supaprastintume (1.138), mes vėl naudojame (1.130) ir atmetame aukštesnius už  $\varepsilon$  narius:

$$q(\vartheta, t) \mathbf{u}_1(\vartheta + s) = \sum_{i=2}^{\infty} e^{\lambda_i s} \mathbf{u}_i(\vartheta + s) \left[ \lambda_i c_i(t) - \frac{dc_i}{dt} \right], \quad s \in (-\tau, 0). \quad (1.139)$$

Dabar, pasinaudoję bitiesinės formos savybėmis (1.123) ir (1.124), iš lygčių (1.137) ir (1.138) mes galime išvesti paprastą išraišką nežinomai funkcijai  $q(\vartheta, t)$ . Kad tai padarytume, padauginkime (1.139) iš kairės pusės iš  $\mathbf{z}^T(\vartheta + \tau + s) \mathbf{B}(\vartheta + \tau + s)$  ir integruokime ją pagal  $s$  intervale  $(-\tau, 0)$ . Integravimo rezultatą pridėdame prie lygties (1.137), padaugintos iš kairės pusės iš  $\mathbf{z}^T(\vartheta)$ . Tada, naudodamiesi savybėmis (1.123) ir (1.124), gauname:

$$q(\vartheta, t) = \mathbf{z}^T(\vartheta) \mathbf{g}(t). \quad (1.140)$$

Įrašę pastarąją lygybę į (1.130), mes galiausiai gauname lygtį dėl fazės:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = 1 + \varepsilon \mathbf{z}^T(\vartheta) \mathbf{g}(t), \quad (1.141)$$

čia  $\mathbf{z}(\vartheta)$  yra jungtinės lygties (1.118) periodinis sprendinys. Pradinę sąlygą jungtinei lygčiai galima gauti iš (1.124), įrašius  $t = 0$  ir turint omeny, kad  $\mathbf{u}_1(t) = \dot{\mathbf{x}}_c(t)$ :

$$\mathbf{z}^T(0) \dot{\mathbf{x}}_c(0) + \int_{-\tau}^0 \mathbf{z}^T(\tau + s) \mathbf{B}(\tau + s) \dot{\mathbf{x}}_c(s) ds = 1. \quad (1.142)$$

Tokiu būdu SDL fazės dinamika yra pilnai apibrėžta (1.118), (1.141) ir (1.142) lygtimis. Jos yra ekvivalenčios (1.109), (1.112) ir (1.111) lygtims, išvestoms praeitame skirsnyje.

### 1.6.3 Pavyzdžiai: Mackey-Glass ir fazės derinimo kilpos sistemos

Dabar panagrinėkime konkrečias sistemas su delsa ir pritaikykime joms fazinę redukciją.

**Mackey-Glass sistema:** Viena iš paprasčiausių sistemų su delsa yra Mackey-Glass sistema, aprašoma tokia lygtimi [33]:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{ax(t-\tau)}{1+x^b(t-\tau)} - x(t) + \varepsilon g(t). \quad (1.143)$$

Šis modelis buvo pasiūlytas, norint aprašyti kraujo ląstelių generavimą pacientams sergantiems leukemija. Vėliau ši lygtis tapo populiari chaoso teorijoje kaip modelis vaizduojantis daugiadimensinį chaosą ir naudojamas testuojant įvairius chaotiškų laikinių sekų analizės metodus bei chaoso valdymo algoritmus ir t.t. Elektroninis šios sistemos analogas buvo įgyvendintas [47]. Priklausomai nuo parametrų, Mackey-Glass sistema gali vaizduoti labai įvairius dinامينius režimus. Jei imsime parametrus  $a = 2$ ,  $b = 10$  ir didinsim delsos laiką  $\tau$ , mes pirmiausia matysime periodo dvigubinimosi scenarijų, paskui chaosą, ir galiausiai hiperchaosą su tolygiai didėjančia keistojo atraktoriaus dimensija. Čia mes pasirinksim tokius parametrus  $a = 2$ ,  $b = 10$  ir  $\tau = 0.7$ , kad kai  $\varepsilon = 0$  Mackey-Glass sistema turėtų stabilųjį ribinį ciklą su periodu  $T \approx 2.29584$ .

Pirmiausia mes patikrinsime ar jungtinės lygties (1.109) periodinis sprendinys sutampa su FAF. Todėl paskaičiuosime FAF kaip sistemos atsaką į trumpą impulsą, suteikta įvairiuose fazės taškuose.

Pirmiausia mes integruojame laisvą ( $\varepsilon = 0$ ) Mackey-Glass sistemą (1.143) pakankamai ilgą laiką, kol sprendinys tampa periodinis. Šis sprendinys  $x_c(\vartheta)$  yra pavaizduotas 1.7 (a) pav. kaip funkcija nuo fazės. Tuomet prie užduotos fazės  $\vartheta$  mes perturbuojame sistemą trumpu impulsu  $\varepsilon g(t) = \varepsilon \delta(t - \vartheta)$ , kur  $\delta(t)$  yra Dirako delta funkcija. Kaip buvo parodyta skirsnyje 1.6.2, SDL būseną ant ribinio ciklo aprašo funkcija  $x_c(\vartheta + s)$ ,  $s \in [-\tau, 0]$ . Todėl duotame fazės taške perturbuota būseną bus:

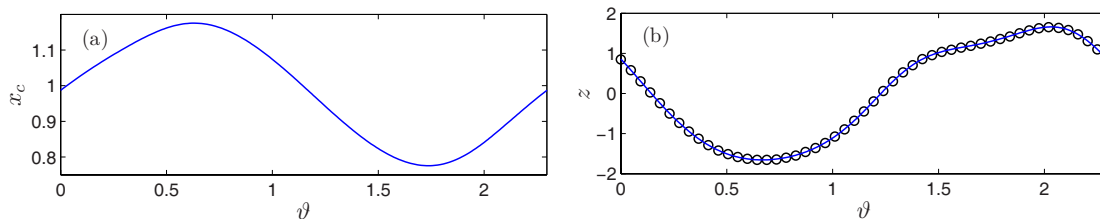
$$\chi(\vartheta + s) = \begin{cases} x_c(\vartheta + s) + \varepsilon & \text{kai } s = 0, \\ x_c(\vartheta + s) & \text{kai } s \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (1.144)$$

Mes startuojame nuo perturbuotos būsenos (1.144) ir integruojame lygtį (1.143) per keletą periodų  $mT$  (čia  $m$  yra pakankamai didelis sveikas skaičius), kol sprendinys

priartėja prie ribinio ciklo,

$$x(\vartheta + s + mT) \rightarrow x_c(\vartheta + \Delta\vartheta + s), \quad s \in [-\tau, 0]. \quad (1.145)$$

Tada mes įvertiname fazės pokytį  $\Delta\vartheta$ , lygindami jį su neperturbuotu sprendiniu. FAF reikšmė prie fazės  $\vartheta$  pagal apibrėžimą skaičiuojama iš santykio  $\Delta\vartheta/\varepsilon$ , kai  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Šis rezultatas, kai  $\varepsilon = 10^{-5}$ , 1.7 (b) yra pavaizduotas apskritimais pav.



1.7 pav.: (a) – ribinio ciklo sprendinys ir (b) – FAF Mackey-Glass sistemos (1.143), kai  $a = 2$ ,  $b = 10$  ir  $\tau = 0.7$ . (b) dalyje apskritimais parodyta FAF vertė suskaičiuota iš sistemos atsako į trumpą impulsą, tuo tarpu ištisinė kreivė vaizduoja jungtinės lygties (1.109) periodinį sprendinį.

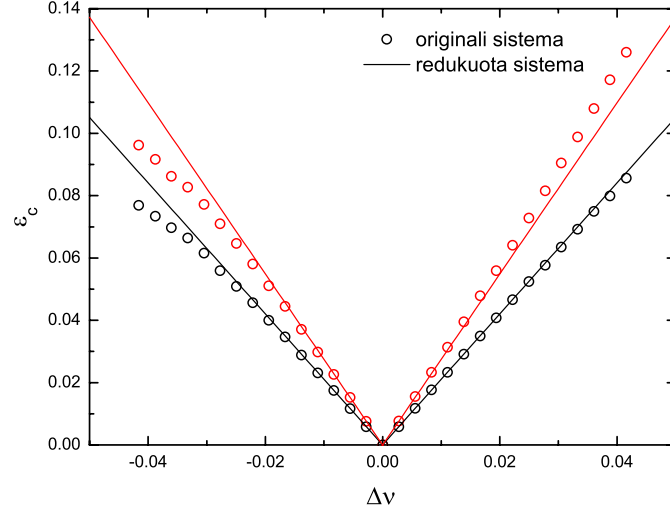
1.7(b) pav. mes lyginam šį rezultatą su FAF paskaičiuota iš jungtinės lygties (1.109). Pažymėtina, kad Jakobianai (1.110) Mackey–Glass lygties yra skaliarinės funkcijos:

$$\mathbf{A}(t) = -1, \quad \mathbf{B}(t) = a \frac{1 + (1 - b)x_c^b(t - \tau)}{[1 + x_c^b(t - \tau)]^2}. \quad (1.146)$$

Jungtinės lygties periodinis sprendinys tenkinantis pradines sąlygas (1.111), buvo rastas naudojant atgalinį integravimą, kaip aprašyta 1.6.1 skirsnyje. Šis sprendinys ištisine kreive pavaizduotas 1.7(b) pav. Kaip matyti iš paveikslo, abu metodai duoda tą patį rezultatą. Tai patvirtina jungtinės lygties (1.109) ir pradinių sąlygų (1.111) galiojimą.

Pažymėtina, kad FAF skaičiavimas iš jungtinės lygties yra geresnis nei metodas parentas atsaku į trumpą impulsą, nes jis duoda tikslesnius rezultatus. Taip yra, nes šis metodas parentas be galo maža perturbacija, tuo tarpu, žiūrint atsaką į trumpą impulsą, mes naudojame baigtinę perturbaciją.

Kad patikrintume fazės dinamikos lygties (1.112) galiojimą, mes nagrinėjome Mackey-Glass sistemos sinchronizaciją su išoriniu harmoniniu signalu, kuris užsirašo  $\varepsilon g(t) = \varepsilon \sin(2\pi\nu t)$ , bei su stačiakampiu signalu  $\varepsilon g(t) = \varepsilon \text{sign}[\sin(2\pi\nu t)]$ . Perturbacijos dažnis  $\nu$  yra artimas savajam sistemos dažniui  $1/T$ . Mes skaičiavome slenkstinės amplitudės  $\varepsilon = \varepsilon_c$  priklausomybę nuo išderinimo  $\Delta\nu = \nu - 1/T$  (Arnoldo liežuviai) dviem metodais: tiesiogiai integrudami SDL (1.143) ir iš fazės dinamikos lygties (1.112) su FAF  $z(\vartheta)$ , kurią radome iš jungtinės lygties. Jei išderinimas



1.8 pav.: Mackey-Glass sistemos Arnoldo liežuviai (priklausomybė slenkstinės amplitudės  $\varepsilon_c$  nuo dažnių išderinimo  $\Delta\nu = 1/T - \nu$ ) esant sinusinei (raudona) ir stačiakampei (juoda) signalo formai. Apskritimais pavaizduoti rezultatai gauti iš tiesioginio lygties (1.143) integravimo. Linijos gautos iš (1.147), kuri išvesta iš fazinės redukcijos.

pakankamai mažas, lygtis dėl fazės Arnoldo liežuviams duoda tokias reikšmes:

$$\varepsilon_c = \begin{cases} \Delta\nu T / \min[H(\vartheta)] & \text{kai } \Delta\nu \leq 0, \\ \Delta\nu T / \max[H(\vartheta)] & \text{kai } \Delta\nu > 0. \end{cases} \quad (1.147)$$

Čia  $\min[H(\vartheta)]$  ir  $\max[H(\vartheta)]$  pažymėtos minimali ir maksimali periodinės funkcijos  $H(\vartheta) = H(\vartheta + T)$  vertės, kai:

$$H(\vartheta) = \frac{1}{\Theta} \int_0^\Theta z\left(\vartheta + \frac{T}{\Theta}t\right) g(t) dt, \quad (1.148)$$

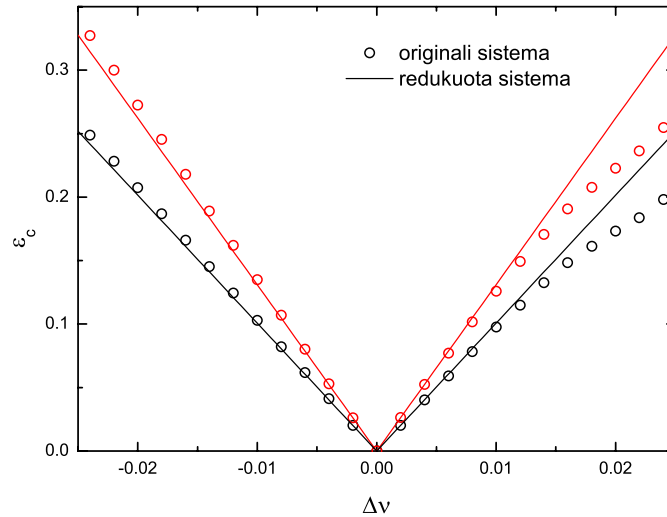
čia  $\Theta = 1/\nu$  yra išorinės perturbacijos periodas  $g(t) = g(t + \Theta)$ .

1.8 Pav. Arnoldo liežuviai, paskaičiuoti pirmuoju ir antruoju metodu, pavaizduoti atitinkamai apskritimais ir linijom. Kaip matyti iš paveikslo, abu metodai prie mažų išderinimų duoda tą patį rezultatą. Tai patvirtina praeituose skirsniuose išvestos fazinės redukcijos teisingumą.

Fazės dinamikos lygties (1.112) privalumas, lyginant su originalia SDL (1.143), yra tas, kad jos pagalba galima paprastai išanalizuoti sistemos atsaką į bet koki silpną nuo laiko priklausantį trikdį.

**Fazės derinimo kilpos sistema:** Kitas SDL pavyzdys yra taip vadinama fazės derinimo kilpos sistema, aprašoma tokia lygtimi [48]:

$$\dot{x} = -R \sin[x(t-1)] + \varepsilon g(t), \quad (1.149)$$



1.9 pav.: Sistemos (1.149) Arnoldo liežuviai (priklausomybė slenkstinės amplitudės  $\varepsilon_c$  nuo dažnių išderinimo  $\Delta\nu = 1/T - \nu$ ) esant sinusinei (raudona) ir stačiakampei (juoda) signalo formai. Apskritimais pavaizduoti rezultatai gauti iš tiesioginio lygties (1.149) integravimo. Linijos gautos iš (1.147), kuri išvesta iš fazinės redukcijos.

Sistemos parametrai parinkti taip ( $R = 2$ ), kad, kai  $\varepsilon = 0$ , sistema vaizduotų periodines osciliacijas su periodu  $T \approx 4$ . Vėl, kaip ir ankščiau, skaičiavome Arnoldo liežuvius sinusiniam  $g(t) = \sin(2\pi\nu t)$  ir stačiakampiam  $g(t) = \text{sign}[\sin(2\pi\nu t)]$  periodiniams signalams. Rezultatai, kai išderinimas yra mažas  $\Delta\nu = \nu - 1/T$ , pavaizduoti 1.9 pav. Vėl gi matome, kad redukuotos sistemos rezultatai gerai sutampa su rezultatais, gautais tiesiogiai integruojant (1.149) lygtį.



## 2 skyrius: FAZINĖS REDUKCIJOS TAIKYMAS CHAOSO VALDYMUI

Chaos valdymo uždavinys, stabilizuojant nestabilias periodines orbitas (NPO), esančias keistajame atraktoriuje, yra svarbus netiesinės dinamikos skyrius, nes sistemos nereguliari dinamika pakeičiama lengvai prognozuojamu periodiniu elgesiu. Pirmasis darbas šia tema yra [49], kur autoriai pasiūlė metodą stabilizuoti NPO chaotinėje sistemoje naudojant neinvazyvią jėgą, kuri, pasiekus stabilizavimą, virsta nuliu. Po to buvo pasiūlyta daug metodų NPO stabilizavimui. Vienas iš jų yra stabilizavimas naudojant uždelstąjį grįžtamąjį ryšį (UGR) [40]. Šiame skyriuje mes aptarsime uždelstojo grįžtamojo ryšio valdymą (UGRV) ir kokius rezultatus galima gauti naudojant fazinę redukciją sistemoms valdomoms UGR. Tokias sistemas aprašo lygtis su delsa ir, jei yra pasiekama stabilizacija, sistema tampa stabiliu periodiniu osciliatoriumi. Todėl čia tinka rezultatai gauti 1.6 skirsnyje.

### 2.1 Chaos valdymas uždelstuoju grįžtamoju ryšiu

Pirmą kartą NPO, esančių chaotinėje sistemoje, stabilizavimas naudojant UGR buvo pasiūlytas Kęstučio Pyrago 1992 m. [40], o įgyvendintas elektroninėje schemoje 1993 m. [50]. Metodo esmė yra ta, kad valdymo jėga yra konstruojama kaip skirtumas tarp dabartinės būsenos ir būsenos uždelstos per vieną periodą. Tokį valdymą galima taikyti beveik nieko iš anksto nežinant apie sistemą, nes jėga konstruojama iš stebimo signalo. Metodas pasirodė labai patrauklus eksperimentatoriams, nes yra lengvai įgyvendinamas. Jis buvo sėkmingai įdiegtas daugelyje realių eksperimentų iš įvairių sričių, tokių kaip elektronika, lazeriai, chemija, biologija, medicina ir t.t. (detalesnei apžvalgai žr. [51, 52, 53, 54, 55, 56] ir [57]). Vienas iš įdomesnių UGRV įgyvendinimų yra adatos, esančios atominės jėgos mikroskope, chaotinio virpėjimo pašalinimas, o tai padidina mikroskopo skiriamąją gebą [58].

Klasikinis UGRV algoritmas trijų dimensijų sistemai užrašomas taip:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + K \begin{pmatrix} 0 \\ x_2(t - \tau) - x_2(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

čia  $K$  yra valdymo stipris (skaliojas),  $\tau$  yra delso laikas. Jei  $K = 0$ , gauname laisvą sistemą, kuri, tarkime, turi nestabilių ribinį ciklą  $\mathbf{x}_c(t + T) = \mathbf{x}_c(t)$ . Jei  $\tau = T$ , tai sistema (2.1) taip pat turi ribinį ciklą  $\mathbf{x}_c(t)$ , kuris gali būti ir stabilus prie tam tikrų  $K$  verčių. Dažniausiai  $K$  vertei egzistuoja stabilumo intervalas, kur, pasirinkus bet kokią vertę iš to intervalo, orbita tampa stabili. Tačiau ne visada stabilumo intervalas turi būti. Pavyzdžiui, chaotinėje sistemoje aukštesnės eilės orbitoms (konkrečiai Rössler'io sistemos periodo–8 orbitai) stabilumo intervalas išnyksta, didinant orbitos eilę.

Jei yra galimybė sistemoje matuoti visus kintamuosius ir veikti visus kintamuosius, tai UGRV algoritmas tokiu atveju užrašomas taip:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{K} [\mathbf{x}(t - \tau) - \mathbf{x}(t)], \quad (2.2)$$

čia  $\mathbf{K}$  yra matrica. Vėliau skirsnyje 2.5 bus parodytas atvejis, kai orbitos nepavyksta stabilizuoti matuojant tik vieną kintamąjį, tačiau pavyksta matuojant kelis.

## 2.2 Fazės atsako funkcija orbitoms, stabilizuotoms uždelstuoju grįžtamoju ryšiu

Jei lygtyje (2.2) matrica  $\mathbf{K}$  ir delso laikas  $\tau$  parinkti tinkamai, tai periodinė orbita stabilizuosis. O tai reiškia, kad mes turime stabilų ribinį ciklą sistemoje, kurią aprašo SDL. Pritaikę 1.6 skirsnyje gautus rezultatus, galime paskaičiuoti tokios orbitos FAF.

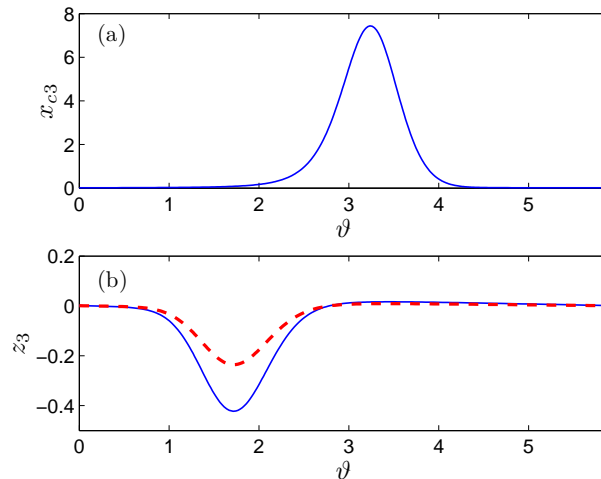
FAF skaičiuojama iš (1.109) lygties. Mūsų atveju Jakobiano matricos pagal (1.110) bus  $\mathbf{A}(t) = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_c(t)) - \mathbf{K}$  ir  $\mathbf{B}(t) = \mathbf{K}$ . Tuomet jungtinė lygtis užrašoma taip:

$$\dot{\mathbf{z}}^T(t) = -\mathbf{z}^T(t)\mathbf{A}_0(t) - [\mathbf{z}^T(t + \tau) - \mathbf{z}^T(t)]\mathbf{K}, \quad (2.3)$$

čia  $\mathbf{A}_0(t) = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_c(t))$  yra laisvos sistemos Jakobianas paskaičiuotas ant NPO  $\mathbf{x}_c(t)$ . Pradinės sąlygos (1.111) tokiai sistemai rašomos taip:

$$\mathbf{z}^T(0)\dot{\mathbf{x}}_c(0) + \int_{-\tau}^0 \mathbf{z}^T(\tau + s)\mathbf{K}\dot{\mathbf{x}}_c(s)ds = 1. \quad (2.4)$$





2.1 pav.: Rössler’io sistemos periodo–1 orbita ir jos FAF. (a) – orbitos trečioji komponentė ir (b) – FAF trečioji komponentė paskaičiuota prie  $K_1 = 0.15$  (ištininė linija) ir  $K_1 = 0.15$  (brūkšninė linija) valdymo parametro reikšmių.

Stabilizuotos orbitos FAF yra lygties (2.3) periodinis sprendinys  $\mathbf{z}^T(t) = \mathbf{z}^T(t + T)$ . Kadangi  $\tau = T$ , tai (2.3) lygtyje paskutinis narys išnyksta. Todėl stabilizuotos orbitos FAF taip pat tenkina ir laisvos sistemos jungtinę lygtį:

$$\dot{\mathbf{z}}^T(t) = -\mathbf{z}^T(t)\mathbf{A}_0(t). \quad (2.5)$$

Deja ši lygtis sunkiai panaudojama skaitmeniniam FAF skaičiavimui, nes jos periodinis sprendinys nestabilus integruojant tiek į priekį, tiek atgal. Taip atsitinka, nes bet kokia NPO chaotinėje sistemoje turi Floke eksponentes su teigiama ir neigiama realiaja dalimi. Kad rastume FAF prie konkrečios  $\mathbf{K}$  vertės, mes galime naudoti (2.3), nes ji duos periodinį sprendinį atgaliniame integravime, jei tik  $\mathbf{K}$  parinktas iš stabilumo intervalo. Vis dėlto (2.5) naudinga, nes leidžia padaryti svarbią išvadą apie FAF formą. (2.5) nepriklauso nuo valdymo matricos  $\mathbf{K}$ , todėl FAF forma yra invariantinė  $\mathbf{K}$  atžvilgiu [A2]. Valdymo matrica  $\mathbf{K}$  daro įtaką tik FAF amplitudei. Tą įtaką galima įvertinti iš pradinių sąlygų (2.4) ir mums nereikia integruoti (2.3) kiekvienai skirtingai  $\mathbf{K}$  reikšmei. Išivaizduokime, kad iš (2.3) ir (2.4) mes radome FAF  $\mathbf{z}^{(1)}(\vartheta)$  orbitai stabilizuotai naudojant valdymo matricą  $\mathbf{K}_1$ . Tada FAF  $\mathbf{z}^{(2)}(\vartheta)$  prie kitos valdymo matricos  $\mathbf{K}_2$  bus proporcinga  $\mathbf{z}^{(1)}(\vartheta)$ :

$$\mathbf{z}^{(2)}(\vartheta) = \alpha \mathbf{z}^{(1)}(\vartheta), \quad (2.6)$$

čia proporcingumo koeficientas  $\alpha$  gali būti surastas iš (2.4):

$$\alpha = \left[ \mathbf{z}^{(1)T}(0)\dot{\mathbf{x}}_c(0) + \int_{-\tau}^0 \mathbf{z}^{(1)T}(\tau + s)\mathbf{K}_2\dot{\mathbf{x}}_c(s)ds \right]^{-1}. \quad (2.7)$$

Kad parodytume FAF formos invariantiškumą, mes Rössler'io sistemoje (sistemos lygtys bus užrašytos 2.3.1 skirsnyje) stabilizavome periodo–1 orbitą, kurios  $T \approx 5.881$ , naudodami valdymo matricą su visais nuliais, išskyrus elementą (2, 2), kurią mes pažymėsime tiesiog  $K$ . Tada iš jungtinės lygties radome FAF prie dviejų skirtingų  $K$  verčių. Paskaičiavę  $\alpha$  iš (2.7), gavome, kad  $\alpha \approx 0.558$ , tai visiškai atitinka suskaičiuotas FAF. Rezultatai yra pavaizduoti 2.1 pav.

## 2.3 Išplėstinis uždelstojo grįžtamojo ryšio valdymas esant mažiems delsos išderinimams

Po to, kai buvo pasiūlytas UGRV metodas, atsirado daug jo variacijų, vienaip ar kitaip patobulinančių metodą. Vienas iš sėkmingiausių patobulinimų yra išplėstinis uždelstojo grįžtamojo ryšio valdymas (IUGRV) [59], kuris užrašomas taip:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{K} \sum_{j=1}^{\infty} R^{j-1} [\mathbf{x}(t - j\tau) - \mathbf{x}(t - (j-1)\tau)], \quad (2.8)$$

čia  $R$  yra skaliarinis dydis, vadinamas atminties parametru. Kad begalinė suma konverguotų, atminties parametras  $|R| < 1$ . Jei  $R = 0$ , tai vėl grįžtame prie UGRV schemos, todėl UGRV yra atskiras atvejis IUGRV. IUGRV schema dažniausiai užrašoma ne (2.8) pavidalu, o taip:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{K} [(1 - R)\mathbf{s}(t - \tau) - \mathbf{x}(t)], \quad (2.9a)$$

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{x}(t) + R\mathbf{s}(t - \tau). \quad (2.9b)$$

Nors (2.9) lygtyse nėra begalinės sumos, tačiau jas analizuoti ne visada patogiu, mat (2.9b) yra skirtuminė, o ne diferencialinė lygtis.

Eksperimentiškai įgyvendinant UGRV metodą, reikia žinoti norimos orbitos periodą  $T$ . Autonominėms sistemoms šis periodas iš anksto nėra žinomas, todėl yra keletas euristicinių algoritmų, kaip jį nustatyti matuojant valdymo jėgą. Algoritmai paremti tuo, kad valdymo jėgos amplitudė rezonansiškai priklauso nuo delsos laiko [40] ir periodą galima gauti iš amplitudės minimumo naudojant įvairius būdus [60, 61, 62, 63, 64, 65]. Tačiau pirmąjį teorinį rezultatą, ieškant orbitos periodo, gavo Just'as [66]. Jei valdymo matrica yra tinkamai parinkta, tai periodinės osci-

liacijos išlieka net tada, kai  $\tau \neq T$ , jei tik išderinimas  $\tau - T$  yra mažas. Tačiau tuomet osciliacijos vyksta su periodu  $\Theta$ , kuris skiriasi tiek nuo NPO periodo  $T$  tiek nuo delsos laiko  $\tau$ . Be to osciliuoja tiek visa sistema, tiek valdymo jėga. Straipsnyje [66] yra išvesta analitinė išraiška dėl periodo  $\Theta$  esant mažiems išderinimams, tuo atveju, kai valdymo matrica turi tik vieną nenulinį elementą:

$$\Theta(K, \tau) = T + \frac{K}{K - \kappa}(\tau - T) + \mathcal{O}((\tau - T)^2), \quad (2.10)$$

čia  $\kappa$  yra sistemos parametras turintis savyje informaciją apie tai, kaip valdymo jėga „prijungta“ prie sistemos. Teorija pateikta [66] darbe ir lygtis (2.10) apsiriboja UGRV atveju, kai sistema turi vieną skaliarinį įvadą (valdymo jėga yra skaliaras).

Šiame skirsnyje mūsų pagrindinis tikslas yra išvesti analitinę išraišką periodui  $\Theta$  IUGRV atveju, kai valdoma sistema yra multi-įvadinė multi-išvadinė [A3] (valdymo jėga „prijungiama“ prie kelių vietų bei ji konstruojama iš kelių skaliarinių dydžių). Mūsų išvedimas remiasi fazinės redukcijos teorija, pateikta 1.6 skirsnyje, IURGV sistemų FAF formos invariantiškumu bei formule (1.74), skirta skaičiuoti perturbuotos sistemos periodui. Mes taip pat parodysime, kaip skaičiuoti parametą  $\kappa$  ir kitus parametrus, atsiradusius bendresnėje išraiškoje dėl  $\Theta$ .

Mūsų išvedimui reikės fazinės redukcijos SDL atveju, kai sistema turi ne vieną, o daug delsos laikų. Teorija iš 1.6 skirsnio lengvai apibendrinama daugelio delsu atvejui. Jei turime silpnai perturbuotą sistemą su stabiliu ribiniu ciklu  $\mathbf{x}_c(t + T) = \mathbf{x}_c(t)$  aprašomą SDL

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t - \tau_1), \dots, \mathbf{x}(t - \tau_M)) + \varepsilon \mathbf{g}(t), \quad (2.11)$$

tai sistema turės  $M + 1$  Jakobiano matricių:

$$\mathbf{A}(t) = D_1 \mathbf{f}(\mathbf{x}_c(t), \mathbf{x}_c(t - \tau_1), \dots, \mathbf{x}_c(t - \tau_M)), \quad (2.12a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_j(t) &= D_{j+1} \mathbf{f}(\mathbf{x}_c(t), \mathbf{x}_c(t - \tau_1), \dots, \mathbf{x}_c(t - \tau_M)), \\ &j = 1, \dots, M. \end{aligned} \quad (2.12b)$$

Čia  $D_j$  yra funkcijos vektorinė išvestinė pagal  $j$ -ąją argumentą. Lygtis dėl fazės bus ta pati, t.y.:

$$\dot{\vartheta}(t) = 1 + \varepsilon \mathbf{z}^T(\vartheta) \mathbf{g}(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (2.13)$$

Čia  $\mathbf{z}(t)$  yra FAF arba  $T$  periodinis jungtinės lygties

$$\dot{\mathbf{z}}^T(t) = -\mathbf{z}^T(t) \mathbf{A}(t) - \sum_{j=1}^M \mathbf{z}^T(t + \tau_j) \mathbf{B}_j(t + \tau_j) \quad (2.14)$$

sprendinys su pradine sąlyga

$$\mathbf{z}^T(0)\dot{\mathbf{x}}_c(0) + \sum_{j=1}^M \int_{-\tau_j}^0 \mathbf{z}^T(\tau_j + s)\mathbf{B}_j(\tau_j + s)\dot{\mathbf{x}}_c(s)ds = 1. \quad (2.15)$$

Taigi dabar sugrįžkime prie valdomos sistemos. Pradėkime nuo labai bendros išraiškos dėl išplėstinio uždelstuoju grįžtamuoju ryšiu valdomos sistemos:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad (2.16a)$$

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t)), \quad (2.16b)$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K} \left[ (\mathbf{I} - \mathbf{R}) \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{R}^{j-1} \mathbf{s}(t - j\tau) - \mathbf{s}(t) \right]. \quad (2.16c)$$

Čia  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  atitinka sistemos būsenos vektorių,  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^k$  yra valdymo vektorinis kintamasis ( $k$ -dimensinis įvadas) ir  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  yra netiesinė vektorinė funkcija, kuri apibrėžia sistemos dinamiką ir valdymo signalo „prijungimo“ savybes. Lygtis (2.16b) apibrėžia  $l$ -dimensinį išėjimo signalą  $\mathbf{s}(t)$ , kuris surištas su  $n$ -dimensiniu būsenos vektorium  $\mathbf{x}$  per vektorinę funkciją  $\mathbf{h} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ . Lygtis (2.16c) duoda išplėstinio uždelstojo ryšio priklausomybę tarp vektorinio išėjimo signalo  $\mathbf{s}$  ir vektorinio valdymo signalo  $\mathbf{u}$ . Diagonali  $l \times l$  matrica  $\mathbf{R} = \text{diag}(R_1, \dots, R_l)$  apibrėžia atminties parametrus  $R_m$ , kurie bendru atveju gali būti skirtingi skirtingoms išėjimo signalo komponentėms  $s_m$ . Tačiau mes tariame, kad delsos laikas  $\tau$  yra vienodas visoms komponentėms. Kad suma (2.16c) išraiškoje konverguotų, mes tariame, kad  $|R_m| < 1$  visiems  $m = 1, \dots, l$ .  $k \times l$  valdymo matrica  $\mathbf{K}$  transformuoja išėjimo kintamąjį  $\mathbf{s}(t)$  į valdymo (įėjimo) kintamąjį  $\mathbf{u}(t)$ , o  $\mathbf{I}$  pažymėta  $l \times l$  vienetinė matrica.

Mes tariame, kad sistema be valdymo ( $\mathbf{K} = 0$ ) turi nestabilią  $T$  periodinę orbitą  $\mathbf{x}_c(t) = \mathbf{x}_c(t + T)$ , kuri tenkina lygtį  $\dot{\mathbf{x}}_c(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_c(t), 0)$ . Kintamojo (2.16c) tikslas yra stabilizuoti šią orbitą. Jei mes paimsime delsos laiką lygų NPO periodui  $\tau = T$ , ir jei stabilizacija bus sėkminga, tuomet  $\mathbf{s}(t - j\tau) = \mathbf{s}(t)$ ,  $\sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{R}^{j-1} = (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1}$  ir valdymo jėga virs nuliu:  $\mathbf{u} = 0$ . Tai reiškia, kad valdymo algoritmas (2.16c) yra neinvazyvinis.

Taigi, jei delsa  $\tau = T$  ir valdymo parametrai  $\mathbf{K}$  ir  $\mathbf{R}$  tinkamai parinkti, tai stabilizuosis periodinė orbita, kurios fazės atsako funkcija tenkins jungtinę lygtį:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}^T(t) &= -\mathbf{z}^T(t)\mathbf{A}_0(t) + \mathbf{z}^T(t)\mathbf{W}(t)\mathbf{K}\mathbf{V}(t) \\ &\quad - \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{z}^T(t + jT)\mathbf{W}(t)\mathbf{K}(\mathbf{I} - \mathbf{R})\mathbf{R}^{j-1}\mathbf{V}(t), \end{aligned} \quad (2.17)$$

čia

$$\mathbf{A}_0(t) = D_1 \mathbf{f}(\mathbf{x}_c(t), 0), \quad (2.18a)$$

$$\mathbf{W}(t) = D_2 \mathbf{f}(\mathbf{x}_c(t), 0), \quad (2.18b)$$

$$\mathbf{V}(t) = D\mathbf{h}(\mathbf{x}_c(t)), \quad (2.18c)$$

yra  $T$  periodinės matricos. Čia, kaip ir anksčiau, simboliu  $D_j$  pažymėta vektorinė išvestinė pagal atitinkamą argumentą. Jungtinė lygtis (2.17) yra išvesta iš (2.14) imant  $\tau_j = jT$ .

Kadangi FAF yra  $T$  periodinė funkcija, tai

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{z}^T(t + jT) \mathbf{W}(t) \mathbf{K} (\mathbf{I} - \mathbf{R}) \mathbf{R}^{j-1} \mathbf{V}(t) = \mathbf{z}^T(t) \mathbf{W}(t) \mathbf{K} \mathbf{V}(t), \quad (2.19)$$

o tai reiškia, kad valdomos sistemos FAF taip pat tenkina ir laisvos sistemos jungtinę lygtį:

$$\dot{\mathbf{z}}^T(t) = -\mathbf{z}^T(t) \mathbf{A}_0(t). \quad (2.20)$$

Pastaroji lygtis nepriklauso nuo valdymo parametrų  $\mathbf{K}$  ir  $\mathbf{R}$ . Tai įrodo FAF formos invariantiškumą šių parametrų atžvilgiu. Nors formaliai FAF apibrėžimas tinka tik stabilėms ribiniams ciklams, čia patogiau yra įsivesti laisvos sistemos FAF, kurią žymėsime  $\boldsymbol{\rho}(t)$  ir vadinsime bazine FAF. Tuomet valdomos sistemos FAF  $\mathbf{z}(t)$  prie bet kurio rinkinio  $(\mathbf{K}, \mathbf{R})$  išsireikš per bazinę FAF:

$$\mathbf{z}(t) = \alpha(\mathbf{K}, \mathbf{R}) \boldsymbol{\rho}(t). \quad (2.21)$$

Proporcingumo koeficientą  $\alpha(\mathbf{K}, \mathbf{R})$  randame iš pradinių sąlygų (2.15), kurios mūsų atveju yra:

$$\mathbf{z}^T(0) \dot{\mathbf{x}}_c(0) + \sum_{j=1}^{\infty} j \int_{-T}^0 \mathbf{z}^T(s) \mathbf{B}_j(s) \dot{\mathbf{x}}_c(s) ds = 1, \quad (2.22)$$

čia

$$\mathbf{B}_j(s) = \mathbf{W}(s) \mathbf{K} (\mathbf{I} - \mathbf{R}) \mathbf{R}^{j-1} \mathbf{V}(s). \quad (2.23)$$

Bazinė FAF yra periodinė funkcija  $\boldsymbol{\rho}(t) = \boldsymbol{\rho}(t + T)$ , kuri tenkina šią lygtį ir pradines sąlygas:

$$\dot{\boldsymbol{\rho}}^T(t) = -\boldsymbol{\rho}^T(t) \mathbf{A}_0(t), \quad (2.24a)$$

$$\boldsymbol{\rho}^T(0) \dot{\mathbf{x}}_c(0) = 1. \quad (2.24b)$$

Begalinę sumą lygtyje (2.22) galima suskaičiuoti analitiškai  $\sum_{j=1}^{\infty} j \mathbf{R}^{j-1} = (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-2}$ ,

tuomet ši lygtis supaprastėjai iki:

$$\mathbf{z}^T(0)\dot{\mathbf{x}}_c(0) + \int_{-T}^0 \mathbf{z}^T(s)\mathbf{W}(s)\mathbf{K}(\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1}\mathbf{V}(s)\dot{\mathbf{x}}_c(s)ds = 1. \quad (2.25)$$

Dabar įrašome (2.21) į (2.25) ir, turėdami omeny (2.24b), gauname lygtį proporcingumo koeficientui:

$$\alpha(\mathbf{K}, \mathbf{R}) = \left[ 1 + \sum_{r=1}^k \sum_{p=1}^l \frac{K_{rp}C_{pr}}{1 - R_p} \right]^{-1}. \quad (2.26)$$

Čia mes įvedėme  $l \times k$  matricą  $\mathbf{C}$ , kurios elementai apibrėžiami tokių integralų dviguba suma:

$$C_{pr} = \sum_{i=1}^n \sum_{v=1}^n \int_{-T}^0 \rho_i(s)W_{ir}(s)V_{pv}(s)\dot{x}_{cv}(s)ds. \quad (2.27)$$

Matrica  $\mathbf{C}$  turi savyje visą informaciją apie FAF amplitudės pokytį pakitus matricom ( $\mathbf{K}, \mathbf{R}$ ).

Dabar panagrinėkime atvejį, kai delsos laikas  $\tau \neq T$ . Kitaip tariant, sistema išderinta, tačiau  $\tau - T = \varepsilon$  yra mažas parametras. Kaip anksčiau buvo minėta, sistema svyruos periodu  $\Theta$  ir mūsų tikslas gauti analitinę išraišką dėl  $\Theta$  tikslumu iki  $\varepsilon$ . Mes išskaidysime valdymo signalą į dvi komponentes: neišderintą, kuri stabilizuoja NPO, ir silpną išderinimą, kuris perturbuoja periodą. Šiuo tikslu lygtį (2.16) perrašykime taip:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_0(t)) + \varepsilon\mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_0(t)) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (2.28a)$$

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t)), \quad (2.28b)$$

$$\mathbf{u}_0(t) = \mathbf{K} \left[ (\mathbf{I} - \mathbf{R}) \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{R}^{j-1} \mathbf{s}(t - jT) - \mathbf{s}(t) \right], \quad (2.28c)$$

čia perturbacija:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(t) &= -D_2\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_0(t))\mathbf{K}(\mathbf{I} - \mathbf{R}) \\ &\quad \times \sum_{j=1}^{\infty} j\mathbf{R}^{j-1}D\mathbf{h}(\mathbf{x}(t - jT))\dot{\mathbf{x}}(t - jT). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Dabar galime pasinaudoti anksčiau išvesta (1.74) formule. Į perturbaciją  $\mathbf{g}$  galima įrašyti periodinį sprendinį, todėl  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_c(t)$ , o  $\mathbf{u}_0(t) = 0$ . Taigi perturbacija perrašoma taip:

$$\mathbf{g}(t) = -\mathbf{W}(t)\mathbf{K}(\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1}\mathbf{V}(t)\dot{\mathbf{x}}_c(t) \quad (2.30)$$

Tuomet mus dominantis periodas  $\Theta$  išreiškiamas per anksčiau įvestos matricos  $\mathbf{C}$

elementus taip:

$$\begin{aligned} \Theta(\mathbf{K}, \mathbf{R}, \tau) = & T + (\tau - T) \frac{\sum_{r=1}^k \sum_{p=1}^l K_{rp} C_{pr} / (1 - R_p)}{1 + \sum_{r=1}^k \sum_{p=1}^l K_{rp} C_{pr} / (1 - R_p)} \\ & + \mathcal{O}((\tau - T)^2). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Lygtis (2.10), išvesta [66], yra atskiras atvejis pastarosios lygties, kai  $\mathbf{R} = 0$  ir  $\mathbf{K}$  turi vieną nenulinį elementą, tarkim  $K_{11}$ . Tuomet lygtis (2.31) transformuojasi į (2.10) su  $\kappa = -1/C_{11}$ .

Taigi apibendrinant šį skirsnį, galima pasakyti, kad pagrindinis rezultatas yra formulė (2.31), leidžianti paskaičiuoti osciliacijų periodą  $\Theta$ , kai naudojant IUGRV schemą stabilizuojame orbitą, kuri yra artima, bet nelygi NPO, nes delsos laikas yra netinkamai parinktas  $\tau = T + \varepsilon$ . Reikia pažymėti, kad osciliacijas mes matysime matuodami valdymo jėgą arba bet kokią kitą sistemos dinaminį kintamąjį. Todėl periodas  $\Theta$  yra eksperimentiškai matuojamas dydis. Tačiau matricos  $\mathbf{K}$  ir  $\mathbf{R}$  turi būti tinkamai parinktos, t.y. tokios, kurios duoda NPO stabilizaciją su  $\tau = T$ . Toliau apžvelgsime formulės (2.31) taikymą konkrečiai sistemai.

### 2.3.1 Pavyzdys: Rössler'io sistema

Dabar mes patikrinsime mūsų gautus teorinius rezultatus naudodami skaitmeninius skaičiavimus. Skaitmeninei analizei mes pasirinkome Rössler'io sistemą [67] su standartinėmis parametru vertėmis:

$$\dot{x}_1(t) = -x_2(t) - x_3(t) + u_1(t), \quad (2.32a)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) + 0.2x_2(t) + u_2(t), \quad (2.32b)$$

$$\dot{x}_3(t) = 0.2 + x_3(t) (x_1(t) - 5.7), \quad (2.32c)$$

$$u_p(t) = K_{pp} \left[ (1 - R_p) \sum_{j=1}^{\infty} R_p^{j-1} x_p(t - j\tau) - x_p(t) \right],$$

kai  $p = 1, 2$ . (2.32d)

Čia mes Rössler'io sistemoje pridėjome valdymą prie pirmųjų dviejų lygčių, naudodami skirtingas atminties parametro reikšmes bei skirtingą valdymo stiprį. Šiuo atveju išėjimo kintamasis yra dviejų dimensijų vektorius  $\mathbf{s}(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$  ir abi matricos  $\mathbf{K}$  ir  $\mathbf{R}$  yra diagonalios:  $\mathbf{K} = \text{diag}(K_{11}, K_{22})$  ir  $\mathbf{R} = \text{diag}(R_1, R_2)$ . Mes perrašėme lygtį (2.31) tokia forma:

$$\Theta = T + (\tau - T)\Delta, \quad (2.33)$$

čia parametras  $\Delta$  šiuo konkrečiu atveju yra:

$$\Delta = \frac{K_{11}C_{11}/(1 - R_1) + K_{22}C_{22}/(1 - R_2)}{1 + K_{11}C_{11}/(1 - R_1) + K_{22}C_{22}/(1 - R_2)}. \quad (2.34)$$

Taigi mes norime patikrinti, ar (2.34) teisingai nustato dydžio  $\Delta$  priklausomybę nuo parametrų  $K_{11}$ ,  $K_{22}$ ,  $R_1$  ir  $R_2$ . Nagrinėjant  $\Delta$  priklausomybę nuo  $K_{11}$  ir  $K_{22}$ , patogiu įsivesti santykį  $\Delta/(1 - \Delta)$ , nes, pagal (2.34), jis tiesiškai priklauso nuo parametrų:

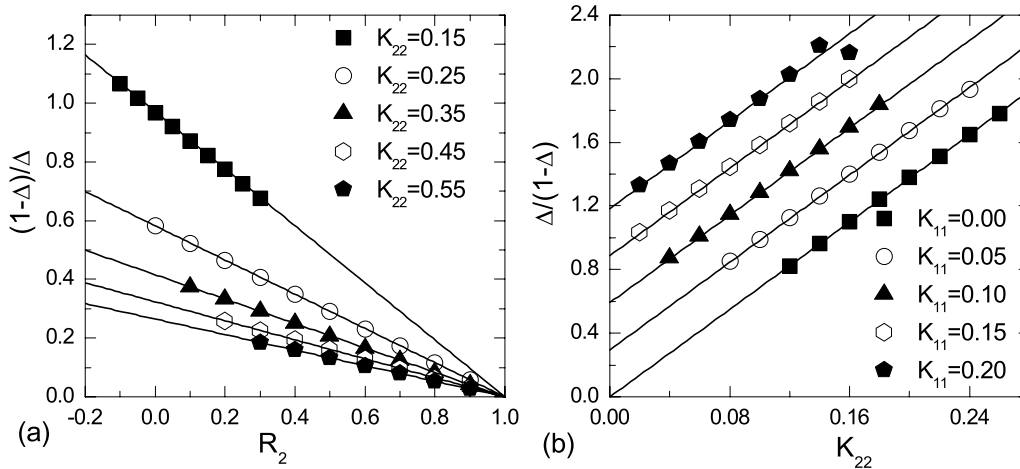
$$\frac{\Delta}{1 - \Delta} = \frac{K_{11}C_{11}}{1 - R_1} + \frac{K_{22}C_{22}}{1 - R_2}. \quad (2.35)$$

Pirmu pavyzdžiu mes pasirinkome periodo–2 orbitą Rössler’io sistemoje, kurios periodas  $T \approx 11.75863$ . Mes paskaičiavome bazinę FAF  $\rho(t)$  ir iš jos suradome parametrus  $C_{11} = 5.9119$  ir  $C_{22} = 6.8694$  naudojant lygtį (2.27). Tuomet suskaičiavome santykį (2.35) ir 2.2 pav. (a) pavaizdavome (ištininė linija) atvirkštinį dydį  $(1 - \Delta)/\Delta$  kaip funkciją nuo atminties parametro  $R_2$  esant fiksuotam  $K_{11} = 0$  ir skirtingoms parametro  $K_{22}$  reikšmėms. Dalyje (b) mes pavaizdavome  $\Delta/(1 - \Delta)$  kaip funkciją nuo valdymo stiprio  $K_{22}$  esant fiksuotiems  $R_1 = R_2 = 0$  ir skirtingoms  $K_{11}$  reikšmėms. Kad parodytume šių teorinių rezultatų galiojimą, parametraž  $\Delta$  mes paskaičiavome iš tiesioginio lygties (2.32) skaitmeninio integravimo. Šiam reikalui mes delsos laiką  $\tau$  pasirinkome artimą periodui  $T$ , taip, kad  $\tau - T = 0.02$  ir stabilizuotos orbitos periodą  $\Theta$  suradome skaitmeniškai. Tuomet parametraž  $\Delta$  suskaičiavome taip:  $\Delta = (\Theta - T)/(\tau - T)$ . Šie rezultatai paveiksluke pavaizduoti simboliais. Mes matome, kad analitinė išraiška (2.34) gerai numato  $\Delta$  priklausomybę nuo valdymo parametrų.

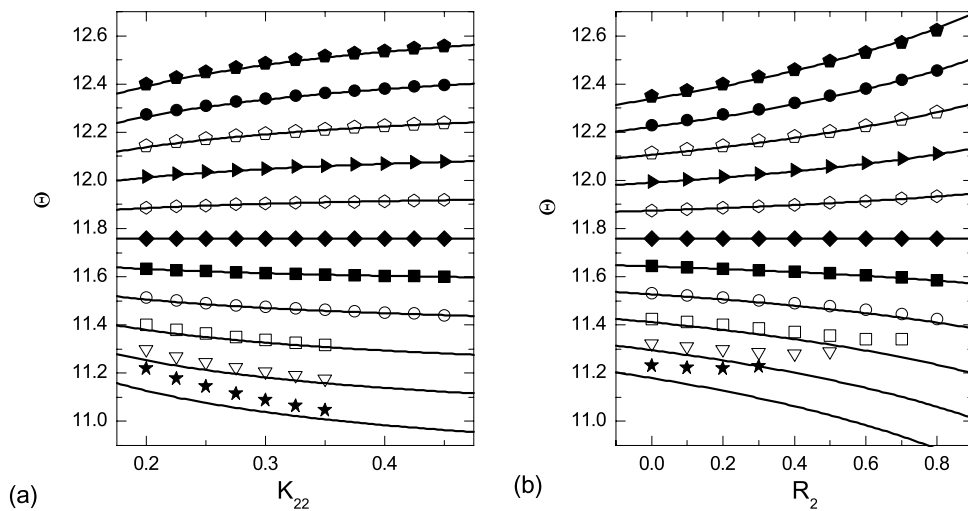
Kad pavaizduotume išderinimo dydį  $\tau - T$ , kuriam esant lygtys (2.33) ir (2.34) dar galioja, mes 2.3 pav. pavaizdavome  $\Theta$  priklausomybę nuo  $K_{22}$  (dalis (a)) ir  $R_2$  (dalis (b)) esant įvairioms parametro  $\tau - T$  reikšmėms. Vėl gi, ištininės linijos vaizduoja analitinį rezultatą, gautą iš (2.33) ir (2.34), tuo tarpu simboliai atitinka skaitmeninius (2.32) lygties skaičiavimus. Iš paveiksluko matome, kad analitiniai rezultatai galioja, kai santykinis išderinimas  $(\tau - T)/T$  neviršija 10%.

Paveiklėlyje 2.4, mes demonstruojame mūsų teorinių rezultatų galiojimą aukštos eilės NPO, kurioms standartinis UGRV algoritmas ( $\mathbf{R} = 0$ ) neveikia. Mes nagrinėjome periodo–8 NPO stabilizaciją, kurios periodas  $T \approx 47.0261648$ . Orbitos komponentė  $x_2$  ir bazinės FAF komponentė  $\rho_2$  yra pavaizduotos dalyse (a) ir (b). Santykio (2.34) priklausomybė nuo valdymo stiprio  $K_{22}$ , kai  $K_{11} = 0$ , o  $R_2$  įgauti įvairias reikšmes, yra pavaizduota dalyje (c). Parametras  $C_{22} = 27.4483$  buvo gautas iš (2.27) panaudojus suskaičiuotą bazinę FAF  $\rho_2(\vartheta)$ . Vėl matome gerus su-

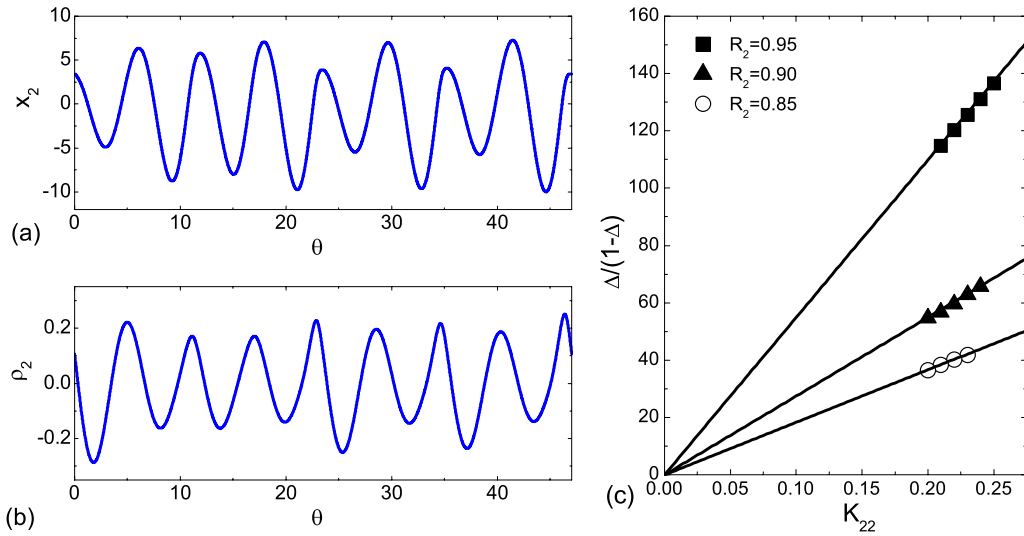




2.2 pav.: Skaitmeniniai rezultatai Rössler'io sistemos periodo-2 orbitai. (a) – parametro  $(1 - \Delta)/\Delta$  priklausomybė nuo atminties parametro  $R_2$  esant fiksuotam  $K_{11} = 0$  ir įvairioms parametro  $K_{22}$  reikšmėms. (b) – parametro  $\Delta/(1-\Delta)$  priklausomybė nuo valdymo stiprio  $K_{22}$  esant fiksuotiems  $R_1 = R_2 = 0$  ir įvairioms parametro  $K_{11}$  reikšmėms. Simboliais pavaizduoti rezultatai, gauti iš originalios lygties (2.32) skaitmeninio integravimo, tuo tarpu išsitiesinės linijos rodo analitinį rezultatą, gautą iš (2.34).



2.3 pav.: Valdymo signalo periodo  $\Theta$  priklausomybė nuo valdymo parametrų  $K_{22}$  (a) ir  $R_2$  (b) esant įvairiems delsos laikams: nuo apačios į viršų,  $\tau - T = -1.0, -0.8, -0.6, -0.4, -0.2, 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ . Kiti valdymo parametrai yra: (a) –  $K_{11} = 0, R_2 = 0.2$  ir (b) –  $K_{11} = 0, K_{22} = 0.2$ . Simboliai vaizduoja rezultatus iš lygties (2.32) skaitmeninio integravimo, tuo tarpu išsitiesinės kreivės vaizduoja analitinius rezultatus gautus iš lygčių (2.33) ir (2.34). Kai kurie simboliai nepavaizduoti, nes vietoje periodinės orbitos stabilizuojamas rimties taškas.



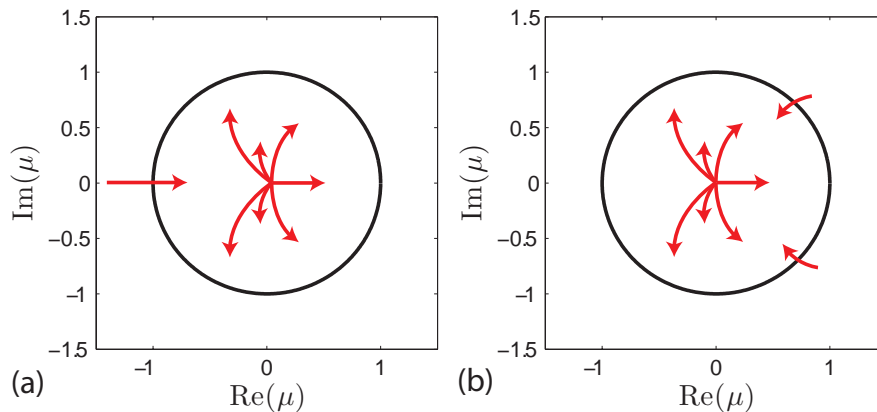
2.4 pav.: Skaitmeniniai rezultatai Rössler'io sistemos periodo–8 orbitai. (a) – NPO komponentė  $x_2(t)$ . (b) – antroji komponentė bazinės FAF  $\rho_2(\varphi)$ . (c) – santykio  $\Delta/(1 - \Delta)$  priklausomybė nuo valdymo stiprio  $K_{22}$ , kai  $K_{11} = 0$  esant įvairioms atminties parametro  $R_2$  reikšmėms. Simboliais pavaizduoti rezultatai gauti iš originalios lygties (2.32) skaitmeninio integravimo, tuo tarpu išsitiesinės linijos rodo analitinį rezultatą, gautą iš (2.34).

tapimus analitinių rezultatų, gautų iš (2.34), lyginant su tiesioginiu lygties (2.32) integravimu.

## 2.4 Nelyginio skaičiaus topologinis ribojimas

Ne visas orbitas pavyksta stabilizuoti naudojant URGV arba net IUGRV algoritimą. Pavyzdžiui ilgą laiką niekam nepavyko stabilizuoti orbitos Lorenz'o sistemoje (lygtys bus pateiktos vėliau), kol galiausiai straipsnyje [A4] mes parodėme, kaip tai galima padaryti. Todėl čia apžvelgsime, koks yra stabilizacijos mechanizmas, ir kodėl Rössler'io tipo sistemose stabilizacija pasiekama santykinai lengviau negu Lorenz'o tipo sistemose.

Nagrinėjant stabilizacijos mechanizmą, yra patogiu analizuoti sistemos Floke daugiklius. Pavyzdžiui, sistemoje (2.1) be valdymo (kai  $K = 0$ ) yra trys Floke daugikliai. Kadangi sistema autonominė, tai vienas daugiklis yra visada lygus vienetui (trivialus Floke daugiklis). Jei sistema yra Rössler'io tipo, tai iš likusių dviejų daugiklių vienas bus stabilus (jis bus viduje vienetinio apskritimo), o kitas (nestabilus) bus apskritimo išorėje ant realiosios neigiamos ašies. Kai tik įjungsiame valdymą ( $K \approx 0$ ), sistema taps begalodimensinė, todėl sistemoje atsiras be galo daug Floke daugiklių. Tačiau visi jie, tik įjungus valdymą (kai  $K \rightarrow 0$ ), yra lygūs nuliui. Kai didiname valdymo stiprį, visi daugikliai, išskyrus trivialųjį, juda (žr. 2.5 pav. (a)).

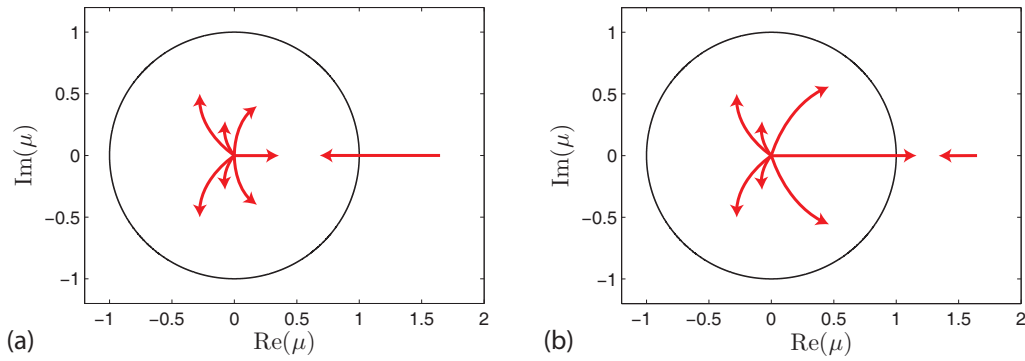


2.5 pav.: Floke daugiklių „tipinis“ judėjimas stabilizuojant NPO. (a) – Rössler’io tipo sistemos stabilizacija, kai nestabilus daugiklis yra neigiamas. Jis, didinant valdymo stiprį, įeina į apskritimą. (b) – sistemos stabilizacija su dviem kompleksiskai jungtiniais nestabiliais Floke daugikliais, kurie įeina į apskritimą didinant valdymo stiprį.

Iš apskritimo centro išėję daugikliai dažniausiai juda link apskritimo krašto. Jei nestabilus daugiklis spėja įeiti į apskritimą, kaip parodyta 2.5 pav. (a), kol kompleksiskai jungtinė daugiklių pora neišėjo už apskritimo ribų, tai turim stabilizuotą orbitą.

Visai kitokia situacija susidaro, jei turime nestabilių Floke daugiklį ant realiosios teigiamos ašies (Lorenz’o tipo sistema). Norint pasiekti stabilizaciją, jis, įeinant į apskritimą, turi praeiti „kiaurai“ trivialųjį daugiklį. Nakajima 1997 m. įrodė teoremą [68], vadinamą nelyginio skaičiaus ribojimu. Ji teigia, kad sistemoje (2.2) negali būti stabilizuota NPO, kad ir kokia būtų valdymo matrica  $\mathbf{K}$ , jei tik sistemoje be valdymo yra nelyginis skaičius nestabilių Floke daugiklių ant realiosios teigiamos ašies. Teorema buvo įrodyta neautonominėms sistemoms, tačiau straipsnio [68] išnašoje paminėta, kad tas pats yra teisinga ir autonominėms sistemoms. Toks UGRV schemas apribojimas paskatino kurti modifikuotas valdymo schemas, leidžiančias apeiti ribojimą. Viena iš tokių modifikacijų yra nestabilus valdiklis [69], kai prie sistemos pridamas papildomas nestabilus laipsnis (papildoma lygtis), kuris ant realiosios teigiamos ašies prideda papildomą nestabilių Floke daugiklį. Didinant valdymo stiprį, du nestabilūs daugikliai (vienas natūraliai esantis sistemoje, kitas pridėtas dirbtinai) susiduria, atsiranda kompleksiskai jungtinė daugiklių pora, kuri įeina į apskritimą, kaip pavaizduota 2.5 pav. (b).

Praėjus 10 metų po Nakajima’os teoremos, Fiedler’is, nagrinėdamas konkrečią autonominę sistemą, parodė, kad nelyginio skaičiaus ribojimas jai negalioja [70]. Tokiu būdu jis parodė, kad Nakajima’os teorema autonominėms sistemoms negalioja (pažymėtina, kad neautonominėms sistemoms Nakajima’os teorema yra teisinga).



2.6 pav.: Floke daugiklių „tipinis“ judėjimas, kai orbitai galioja nelyginio skaičiaus topologinis ribojimas. (a) – sėkminga stabilizacija pasiekama, kai nestabilus daugiklis praeina „kiaurai“ per trivialųjį ir patenka į apskritimo vidų. (b) – nesėkmingos stabilizacijos pavyzdys, kai iš apskritimo vidaus išseina daugiklis, praeidamas „kiaurai“ per trivialųjį.

Jis nagrinėjo Hopfo bifurkacijos normalinę formą. Nestabili orbita, atsiradusi iš Hopfo bifurkacijos, turi du Floke daugiklius: trivialųjį ir nestabilųjį, kuris yra didesnis už vienetą. Parinkus specialią valdymo matricos formą ir didinant valdymo stiprį, nestabilus daugiklis praeina „kiaurai“ trivialųjį ir patenka į apskritimo vidų. Jei žiūrėti globalų vaizdą fazinėje erdvėje, tai valdymo narys indukuoja papildomą stabilią periodinę orbitą, kuri, didinant valdymo stiprį, susiduria su mūsų nagrinėjama NPO (tai atitinka vietą, kai trivialus daugiklis būna išsigimęs), ir, įvykus transkriazinei bifurkacijai, delsos indukuota orbita tampa nestabili, o nagrinėjama orbita – stabili. Tipinis Floke daugiklių judėjimas nagrinėjamai orbitai yra pavaizduotas 2.6 pav. (a).

Fiedler’io stabilizacijos mechanizmas gana universalus: sėkminga stabilizacija buvo pasiekta Lorenz’o sistemoje, kai NPO yra arti Hopfo bifurkacijos [71], taip pat lazerio eksperimentuose [72] bei besisukančiose bangose netoli balno-mazgo bifurkacijos [73]. Visi šie pavyzdžiai demonstruoja sėkmingą stabilizaciją, kai NPO yra netoli bifurkacijos. Nors nelyginio skaičiaus ribojimas autonominiams sistemoms formaliai buvo paneigtas, tačiau nėra praktinio algoritmo valdymo matricos konstravimui, kai sistema yra toli nuo bifurkacijos taško. Čia mes aprašysime kaip užpildyti šią spragą [A4]. Neseniai Hooton ir Amann įrodė patikslintą Nakajima’os teoremos versiją, galiojančią autonominiams sistemoms [74]. Kad ją suformuluotume, grįžkime prie praeito skirsnio rezultatų. Jei sistemoje (2.2) pasirinktume delsos laiką artimą bet nelygų NPO periodui, tai sistemoje atsirastų delsos indukuota periodinė orbita, artima NPO, su periodu  $\Theta$ , net tada jei valdymo matrica  $\mathbf{K}$  parinkta netinkamai. Tai yra delsos indukuota orbita bus nestabili, bet ji bus, ir turės savo periodą  $\Theta(\mathbf{K}, \tau)$ . Taigi teorema sako, kad periodinė orbita  $\mathbf{x}_c(t + T) = \mathbf{x}_c(t)$  yra nestabilus sistemos

(2.2) sprendinys, jei galioja tokia nelygybė:

$$(-1)^m \lim_{\tau \rightarrow T} \frac{\tau - T}{\tau - \Theta(\mathbf{K}, \tau)} < 0. \quad (2.36)$$

Čia  $m$  yra laisvos sistemos NPO Floke daugiklių skaičius didesnių už vienetą. Kriterijus (2.36) skiriasi nuo Nakajima'os versijos papildomu daugikliu  $\beta = \lim_{\tau \rightarrow T} (\tau - T) / (\tau - \Theta)$ . Tai reiškia, kad būtina (bet ne pakankama) sąlyga UGRV stabilizuoti NPO su nelyginiu  $m$  yra  $\beta < 0$ . Ši sąlyga tiksliai numato transkryzinės bifurkacijos vietą, kai yra pasiekama sėkminga NPO stabilizacija Fiedler'io pavyzdyje [70, 74].

Daugiklį  $\beta$  galime perrašyti pasinaudoję anksčiau išvesta išraiška dėl  $\Theta$ . Kadangi mes nagrinėjame sistemą (2.2), tai formulėje (2.31) reikia imti  $\mathbf{R} = 0$ . Taigi gauname:

$$\beta = \alpha^{-1}(\mathbf{K}) = 1 + \sum_{ij}^n K_{ij} C_{ij}, \quad (2.37)$$

čia koeficientai

$$C_{ij} = \int_0^T \rho_i(t) \dot{x}_{cj}(t) dt. \quad (2.38)$$

Koeficientas  $\alpha$  iš (2.37) yra tas pats, kuris suriša bazinę FAF su valdomos sistemos FAF. Iš (2.37) matyti, kad valdymo stipris turi būti pakankamai didelis, nes kai  $\mathbf{K} \approx 0$ , tai  $\beta \approx 1$ . Tuo momentu, kai  $\beta$  mažėja ir pereina nulį,  $\alpha$  tampa begalinis. Reiškia sistemos fazė tampa be galo jautri trikdžiu. Ir tai yra visiškai logiška, nes tuo momentu NPO susiduria su delsos indukuota stabilia orbita ir trivialus Floke daugiklis išsigimsta. Tačiau kai  $\beta$  tampa neigiamas, tai nebūtinai reiškia Floke daugiklių judėjimą kaip 2.6 pav. (a). Gali vykti ir 2.6 pav. (b) scenarijus, kai iš apskritimo išeina Floke daugiklis, praeidamas „kiaurai“ trivialųjį. Praėjimo metu taip pat bus  $\beta = 0$ , tik dabar delsos indukuota nestabili orbita susidurs su NPO, ir po susidūrimo abi orbitos liks nestabilios. Taigi kitame skirsnyje mes įvesime papildomus kriterijus. Be to, jei koeficientus  $C_{ij}$  skaičiuotume iš apibrėžimo (2.38), tai reikėtų žinoti orbitos bazinę FAF, kurią gauname stabilizavę orbitą. O jei pasiekime stabilizaciją, nebėra prasmės skaičiuoti  $\beta$ . Todėl mes parodysime, kaip galima kitaip surasti koeficientus  $C_{ij}$ .

## 2.5 Apeinant nelyginio skaičiaus topologinį ribojimą: valdymo matricos konstravimo algoritmas

Čia mes pateiksime praktinį algoritmą valdymo matricai konstruoti, kai nagrinėjamoji NPO turi vieną  $m = 1$  realųjį Floke daugiklį didesnę už vienetą. Bet kokia valdymo matrica gali būti perrašyta taip:  $\mathbf{K} = \kappa \tilde{\mathbf{K}}$ , kur  $\kappa$  yra skaliarinis valdymo stipris ir  $\tilde{\mathbf{K}}$  yra matrica, kurią vadinsime valdymo forma, ji turi bent vieną elementą lygų  $-1$  arba  $1$  ir kitus elementus iš intervalo  $[-1, 1]$ . Mes galime patenkinti Hooton'o ir Amann'o būtiną sąlygą  $\beta < 0$  bet kuriai užduotai matricai  $\tilde{\mathbf{K}}$ , jei pasirinksime valdymo stiprį

$$\kappa > \kappa^* \equiv - \left( \sum_{ij} \tilde{K}_{ij} C_{ij} \right)^{-1}. \quad (2.39)$$

Tačiau ši sąlyga nėra pakankama sėkmingai stabilizacijai. Neprarandant bendrumo, mes tariame, kad slenkstinė vertė  $\kappa^*$  yra teigiama, nes tą galima pasiekti teisingai parinkus matricos  $\tilde{\mathbf{K}}$  ženklą. Mes gausime papildomas sąlygas dėl  $\tilde{\mathbf{K}}$ , panaudodami sąryšį tarp Floke eksponenčių sistemos valdomos UGR ir sistemos, valdomos proporcinu grįžtamuoju ryšiu (PGR) [75]. Panagrinėkime PGR valdymą, kurį gauname iš lygties (2.2), kai narį su delsa  $\mathbf{x}(t - \tau)$  pakeičiame nariu  $\mathbf{x}_c(t)$  ir perrašome valdymo matricą  $\mathbf{K} = g\tilde{\mathbf{K}}$ :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + g\tilde{\mathbf{K}}[\mathbf{x}_c(t) - \mathbf{x}(t)]. \quad (2.40)$$

Skaliarinis dydis  $g$  yra realusis skaičius, kuris parodo PGR valdomos sistemos grįžtamąjo ryšio stiprį. Periodinės orbitos stabilumo problema, kai valdymui naudojamas PGR, yra santykinai lengvesnė. Mažas nukrypimas  $\delta\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_c(t)$  nuo periodinės orbitos gali būti išskleistas Floke modomis  $\delta\mathbf{x}(t) = \exp(\Lambda t)\mathbf{u}(t)$ , kur  $\Lambda$  yra Floke eksponentė, o  $T$ -periodinė Floke moda tenkina lygtį:

$$\dot{\mathbf{u}}(t) + \Lambda\mathbf{u}(t) = [D\mathbf{f}(\mathbf{x}_c(t)) - g\tilde{\mathbf{K}}]\mathbf{u}(t). \quad (2.41)$$

Ši lygtis apibrėžia  $n$  Floke eksponenčių  $\Lambda_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  (arba Floke daugilkių  $\exp(\Lambda_j T)$ ). Floke uždavinys UGRV sistemai (2.2) yra esmingai sudėtingesnis, kadangi lygtis turi be galo daug Floke eksponenčių. Pažymėkime periodinės orbitos, valdomos UGR Floke eksponentes  $\lambda$  ir atitinkamus Floke daugiklius  $\mu = \exp(\lambda T)$ . Floke modų uždavinys UGRV sistemai sutaptų su PGR valdomos sistemos uždaviniu, jei lygtyje (2.41) pakeistume parametrus:  $\Lambda \rightarrow \lambda$  ir  $g \rightarrow \kappa[1 - \exp(-\lambda T)]$ .

Tariant, kad Floke Daugiklis  $\exp(\lambda T)$  yra realusis, gauname tokią parametrinę priklausomybę:

$$\lambda = \Lambda(g), \quad \kappa = g [1 - \exp(-\Lambda(g)T)]^{-1}, \quad (2.42)$$

kuri leidžia rekonstruoti priklausomybę  $\lambda = \lambda(\kappa)$  kai kurioms Floke eksponenčių šakoms UGRV sistemoje, naudojant priklausomybę  $\Lambda = \Lambda(g)$ , gautą iš PGR valdomos sistemos. Priklausomybė  $\Lambda = \Lambda(g)$  yra gaunama sprendžiant Floke uždavinį (2.41). Nors lygtys (2.42) galioja tik realiesiems Floke daugikliams, iš vėliau pateiktų pavyzdžių matyti, kad būtent šios šakos nulemia UGRV sistemos stabilumą.

Kad pademonstruotume lygčių (2.42) naudingumą, mes iškart pasitelksime konkrečią sistemą, šiuo atveju Lorenz'o sistemą, aprašomą lygtimis [76]:

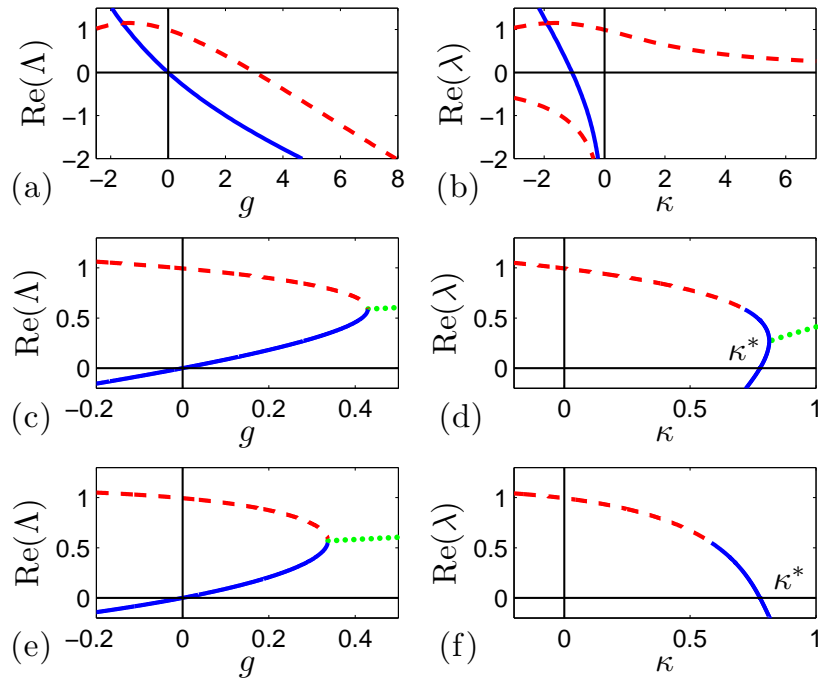
$$\dot{x}_1(t) = 10[x_2(t) - x_1(t)], \quad (2.43a)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t)[28 - x_3(t)] - x_2(t), \quad (2.43b)$$

$$\dot{x}_3(t) = x_1(t)x_2(t) - 8/3x_3(t). \quad (2.43c)$$

Mes fiksuojame standartines parametrų reikšmes, kurios duoda klasikini chaotišni Lorenz'o atraktorių, ir nagrinėjame simetrinės periodo–1 NPO stabilizaciją. Šios NPO periodas yra  $T \approx 1.559$  ir vienas nestabilus Floke daugiklis lygus  $\mu \approx 4.713$ . 2.7 pav. mes pavaizdavome tris tipines Floke eksponenčių  $\Lambda = \Lambda(g)$  priklausomybes nuo valdymo stiprio PGR valdomoje sistemoje (kairysis stulpelis) ir tą patį  $\lambda = \lambda(\kappa)$  UGRV sistemoje (dešinysis stulpelis) prie skirtingų valdymo matricos formų  $\tilde{\mathbf{K}}$ . Priklausomybė  $\Lambda = \Lambda(g)$  PRG valdomoje sistemoje išvesta iš (2.41) lygties. Mes pavaizdavome tik dvi Floke eksponenčių šakas: viena išeina iš nestabilios Floke eksponentės (raudona brūkšninė linija), kita iš trivialios Floke eksponentės (mėlyna ištisinė linija, kertanti koordinacių pradžia). Šaka, atitinkanti trečią neigiamą Floke eksponentę, neįtakoja stabilumo UGRV sistemoje. Priklausomybė  $\lambda = \lambda(\kappa)$  UGRV sistemai yra rasta iš transformacijos (2.42). Mes matome, kad (a)–(b) atveju gauname sėkmingą stabilizaciją PGR valdomoje sistemoje, bet nesėkmingą UGRV sistemoje. Atvejai (c)–(d) vėlgi yra nesėkmingi UGRV sistemoje: čia dvi realiosios eksponentės susiduria ir atsiranda kompleksiskai jungtinė esponentių pora su teigiama realiaja dalimi, kuri auga didinant  $\kappa$ . Galiausiai (e)–(f) atvejis potencialiai sėkmingas UGRV sistemai: čia šaka iš nestabilios eksponentės (kuri atsiranda iš dviejų šakų PGR valdomoje sistemoje) monotoniškai mažėja didinant  $\kappa$  ir tampa neigiama kai  $\kappa > \kappa^*$ .

Dabar mes parodysime, kad slenkstinė vertė  $\kappa^*$  rasta iš Floke eksponentės PRG



2.7 pav.: Trys tipiniai scenarijai Lorenz'o sistemos Floke eksponenčių priklausomybės nuo valdymo stiprio PGR valdomoje sistemoje (kairysis stulpelis) ir UGRV sistemoje (dešinysis stulpelis) prie skirtingų matricių  $\tilde{\mathbf{K}}$ : (a) ir (b)  $[0, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 0]$ ; (c) ir (d)  $[0, 0, 0; -1, 0, 0.3; 0, 0, 0]$ ; (e) ir (f)  $[0, 0, 0; -1, 0, 0.5; 0, 0, 0]$ . (a), (c) ir (e) grafikuose mėlyna ištisinė ir raudona brūkšninė kreivės yra triviali ir nestabili eksponetės (abi yra realiosios) PRG valdomoje sistemoje. (b), (d) ir (f) grafikuose atitinkamos kreivės vaizduoja eksponenčių vertes UGRV sistemoje.  $\kappa^*$  yra slenkstinis valdymo stipris, rekonstruotas iš trivialios šakos segmento PRG valdomoje sistemoje prie  $g$  artimo nuliui. Žalia taškinė kreivė (c) ir (e) grafikuose vaizduoja Floke eksponenčių kompleksiskai jungtinės poros realiąsias dalis, kurios negali būti transformuotos į UGRV sistemą naudojant (2.42) lygtis. Žalia taškinė kreivė (d) grafike vaizduoja realiąją dalį kompleksiskai jungtinės Floke eksponenčių poros atsiradusios iš dviejų realiųjų eksponenčių susidūrimo UGRV sistemoje; kreivė suskaičiuota naudojant DDE-BIFTOOL [77].

valdomoje sistemoje, naudojant transformaciją (2.42), atitinka apibrėžimą (2.39) išvestą iš Hooton'o ir Amann'o kriterijaus. Reikšmės  $\lambda(\kappa)$  su  $\kappa$  artimu slenkstinei vertei  $\kappa^*$  skaičiuojamos iš trivialios Floke eksponenčių šakos  $\Lambda_0(g)$  PGR valdomoje sistemoje su  $g$  artimu nuliui. Kad gautume išraišką dėl  $\kappa^*$ , mes išskleisime trivialios šakos priklausomybę  $\Lambda_0(g)$  Teiloro eilute nulinio taško aplinkoje

$$\Lambda_0(g)T = ag + bg^2 + \mathcal{O}(g^3). \quad (2.44)$$

Pastarąją išraišką įrašę į (2.42) ir paėmę ribą  $g \rightarrow 0$ , mes gauname  $\kappa^* = a^{-1}$ . Išraišką dėl koeficiento  $a$  galima išvesti iš lygties (2.41), naudojant perturbacijos teoriją. Trivialią modą perrašom taip:  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0(t) + g\mathbf{u}_1(t) + \mathcal{O}(g^2)$ . Įrašę šią ir



(2.44) išraiškas į (2.41), mes gauname lygtį dėl nulinio nario  $\dot{\mathbf{u}}_0(t) = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_c(t)) \mathbf{u}_0(t)$ . Šios lygties sprendinys yra  $\mathbf{u}_0(t) = \dot{\mathbf{x}}_c(t)$ . Toliau dėl pirmojo nario mes gauname:

$$\dot{\mathbf{u}}_1(t) = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_c(t)) \mathbf{u}_1(t) - (\tilde{\mathbf{K}} + \mathbf{I}a/T) \dot{\mathbf{x}}_c(t), \quad (2.45)$$

čia  $\mathbf{I}$  yra vienetinė matrica. Dauginant lygtį (2.45) iš kairės pusės iš  $\boldsymbol{\rho}^T(t)$  ir sumuojant ją su jungtine lygtimi (2.24a), kuri turi būti padauginta iš dešinės pusės iš  $\mathbf{u}_1(t)$ , mes gauname:

$$\frac{d}{dt} (\boldsymbol{\rho}^T(t) \mathbf{u}_1(t)) = -\boldsymbol{\rho}^T(t) (\tilde{\mathbf{K}} + \mathbf{I}a/T) \dot{\mathbf{x}}_c(t). \quad (2.46)$$

Galiausiai mes integruojame šią lygtį per periodą  $T$  ir gauname tokią išraišką:  $a = -\int_0^T \boldsymbol{\rho}^T(t) \tilde{\mathbf{K}} \dot{\mathbf{x}}_c(t) dt$ . Iš čia išplaukia, kad  $a^{-1}$  reikšmė sutampa su slenkstine verte  $\kappa^*$ , apibrėžta (2.39) lygybe.

Sąryšis tarp koeficiento  $a$  ir matricos  $\tilde{\mathbf{K}}$

$$a = -\sum_{ij}^n \tilde{K}_{ij} C_{ij}, \quad (2.47)$$

duoda alternatyvų būdą paskaičiuoti koeficientams  $C_{ij}$ . Konkretus  $C_{ij}$  koeficientas gali būti rastas paėmus matricą  $\tilde{\mathbf{K}}$  su visais nuliais, išskyrus  $\tilde{K}_{ij} = 1$ . Tada skaitmeniškai skaičiuojamas  $\Lambda_0(g)$  prie mažų  $g$  ir randamas  $a$ . Iš rastos reikšmės skaičiuojamas mus dominantis koeficientas  $C_{ij} = -a$ .

Be Hooton'o ir Amann'o kriterijaus (2.39) patenkinimo, sėkmingai stabilizacijai reikia, kad išvestinė  $d\lambda/d\kappa$  taške  $\kappa = \kappa^*$  būtų neigiama (žr. 2.7 pav. (f)). Įrašę (2.44) į (2.42) mes gauname:

$$\left. \frac{d\lambda}{d\kappa} \right|_{\kappa=\kappa^*} = \lim_{g \rightarrow 0} \frac{d\Lambda_0/dg}{d\kappa/dg} = \frac{2a}{T(1 - 2b/a^2)} < 0. \quad (2.48)$$

Parametras  $a$  yra teigiamas, nes  $\kappa^*$  yra teigiamas. Tada pastaroji nelygybė supaprastėja iki tokios:

$$1 - 2b/a^2 < 0. \quad (2.49)$$

Pritaikę (2.41) lygčiai perturbacijos teoriją iki antrojo nario, gauname tokią išraišką dėl  $b$ :

$$b = -\frac{a}{T} \int_0^T \boldsymbol{\rho}^T(t) \mathbf{u}_1(t) dt - \int_0^T \boldsymbol{\rho}^T(t) \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{u}_1(t) dt. \quad (2.50)$$

Tai leidžia mums gauti sąryšį tarp koeficiento  $b$  ir matricos  $\tilde{\mathbf{K}}$  kvadratinėje formoje

$$b = \sum_{ijkl}^n \tilde{K}_{ij} \tilde{K}_{kl} D_{ijkl}, \quad (2.51)$$

per koeficientus  $D_{ijkl}$ , kuriems galioja simetrija  $D_{ijkl} = D_{klij}$ . Koeficientai  $D_{ijkl}$  gali būti rasti panašiai kaip ir koeficientai  $C_{ij}$ . Reikia imti specifines matricas  $\tilde{\mathbf{K}}$  ir, prie mažų  $g$ , skaitmeniškai rasti  $b$  iš trivialios Floke eksponenčių šakos  $\Lambda_0(g)$ .

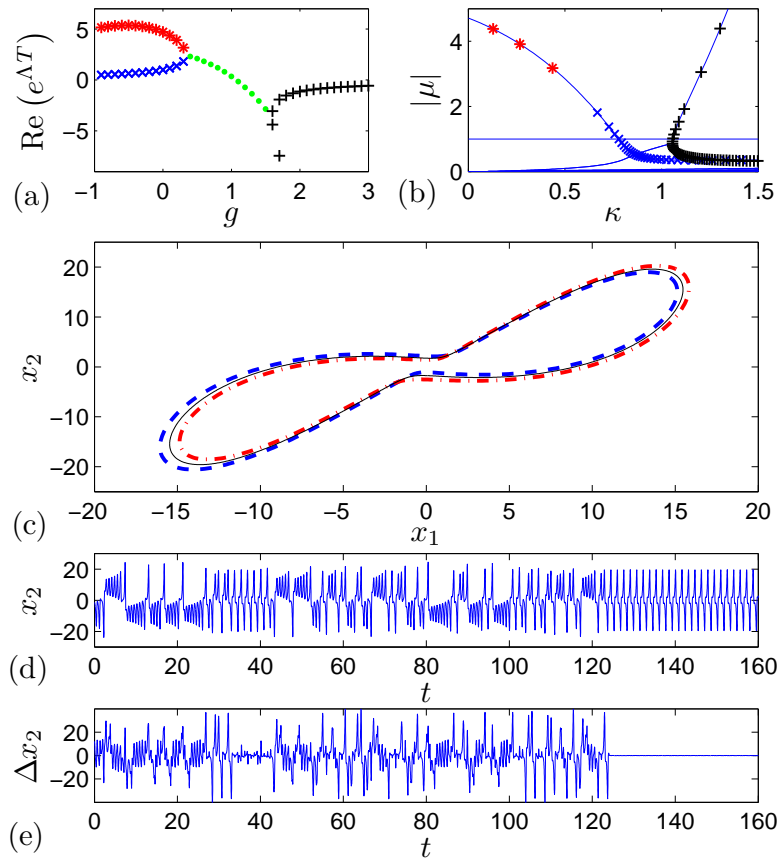
Žinant koeficientus  $C_{ij}$  ir  $D_{ijkl}$ , galima paskaičiuoti skleidimo parametrus  $a$  ir  $b$  bet kokiai užduotai matricai  $\tilde{\mathbf{K}}$ . To pasekoje mes lengvai patikriname sąlygą (2.49) ir randame slenkstinį valdymo stiprį  $\kappa^*$ .

Apibendrinkime mūsų algoritmą tokiais žingsniais: (i) pasirinkti kuo paprasčiau matricos  $\tilde{\mathbf{K}}$  struktūrą, kuri duoda nestabilios Floke eksponentės ir trivialios eksponentės susidūrimą PGR valdomoje sistemoje (kaip 2.7 pav. (c) arba (e)); (ii) užduotai matricos  $\tilde{\mathbf{K}}$  struktūrai surasti aktualius koeficientus  $C_{ij}$  ir  $D_{ijkl}$ ; (iii) turint matricos struktūrą pasirinkti konkrečią matricą  $\tilde{\mathbf{K}}$ , kuri patenkina sąlygą (2.49); (iv) suskaičiuoti  $\kappa^*$  ir patenkinti sąlygą (2.39).

Pažymėtina, kad mūsų algoritmas nagrinėja tik pačias svarbiausias Floke eksponenčių šakas ir pilnai negarantuoja orbitos stabilizacijos. Pats stabilizacijos faktas turi būti papildomai tikrinamas skaitmeniškai. Vis dėlto algoritmas duoda paprastą praktinį būdą pasirinkti tinkamą valdymo matricą ir gerai veikia tipinėms chaotišioms sistemoms.

### 2.5.1 Pavyzdžiai: Lorenz,o ir Chua sistemos

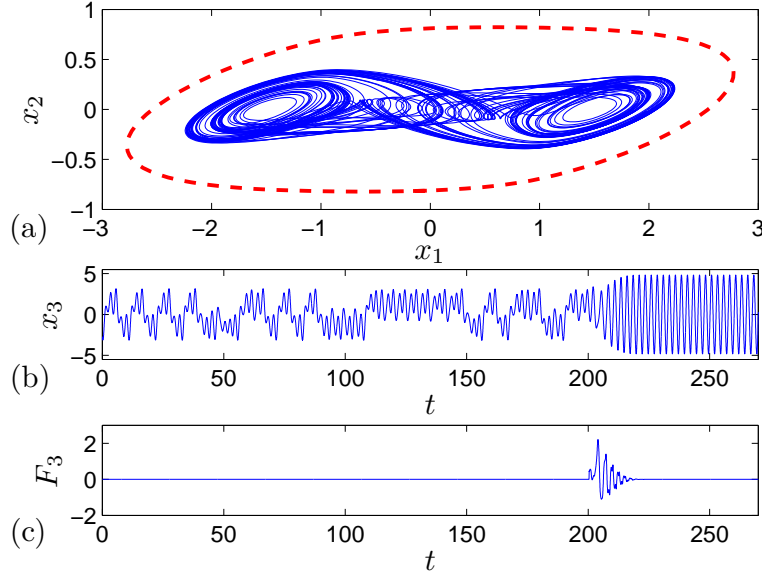
Pradžioje mes aptarsime mūsų algoritmo taikymą Lorenz'o sistemai (2.43). Vadovaudamiesi „sveiku protu“ pradžioje mes pasirinkome diagonalią matricos  $\tilde{\mathbf{K}}$  struktūrą. Tačiau tokia matrica nepatenkina pirmosios algoritmo dalies (Floke eksponentės nesusiduria PGR valdomoje sistemoje). Diagonalios matricos netinkamumas UGRV sistemai turbūt paaiškina, kodėl Lorenz'o sistemoje sėkminga stabilizacija nebuvo pasiekta iki šiol. Mes pastebėjome, kad mūsų algoritmo pirmąją dalį galima patenkinti su įvairiomis nediagonaliomis matricomis  $\tilde{\mathbf{K}}$ . Čia mes parodysim rezultatus su matrica  $\tilde{\mathbf{K}}$ , kuri turi tik du nenulinius elementus  $\tilde{K}_{21} = -1$  ir  $-1 \leq \tilde{K}_{23} \leq 1$ . Atitinkami koeficientai tokiai matricai yra:  $C_{21} \approx 1.286$ ,  $C_{23} \approx 1.5 \times 10^{-3}$ ,  $D_{2121} \approx 0.163$ ,  $D_{2323} \approx 3.792$  ir  $D_{2123} = D_{2321} \approx 9.7 \times 10^{-8}$ . Nelygybė (2.49) duoda tokį reikalavimą  $|\tilde{K}_{23}| > 0.418$ . Mes pasirinkome  $\tilde{K}_{23} = 0.5$  ir suskaičiavome slenkstinę vertę  $\kappa^* \approx 0.78$ . Kaip matyti iš 2.8 pav., šie parametrai duoda sėkmingą valdymą. Grafike (a) ir (b) mes palyginome Floke daugiklius UGRV sistemoje gautus iš PRG valdomos sistemos bei gautus tiesiogiai iš UGRV sistemos naudojant skaitmeninį paketą DDE-BIFTOOL [77]. Mūsų nuostabai lygtis (2.42) leidžia rasti ne tik stabilaus intervalo pradžią  $\kappa^*$ , bet ir intervalo pabaigą, nes Floke daugiklių šaka (pažymėta „pliuso“ ženkla) nulemianti stabilumo praradimą



2.8 pav.: Periodo–1 orbitos stabilizacija Lorenz’o sistemoje su matrica  $\tilde{\mathbf{K}} = [0, 0, 0; -1, 0, 0.5; 0, 0, 0]$ . (a) – Floke daugiklių priklausomybė nuo valdymo stiprio  $g$  PGR valdomoje sistemoje. Mėlyni kryžiai ir raudonos žvaigždės yra triviali ir nestabili šakos (jos yra realiosios vertės). Žali taškai vaizduoja realiąją dalį kompleksiskai jungtinės Floke daugiklių poros. Juodi „pliuso“ ženklai vaizduoja naują realiąją Floke daugiklių šaką, atsiradusią iš kompleksiskai jungtinės poros. (b) – Floke daugiklių absoliučios vertės priklausomybė nuo valdymo stiprio  $\kappa$  UGRV sistemoje. Ištininės kreivės gautos naudojant paketą DDE-BIFTOOL, tuo tarpu simboliai rekonstruoti iš grafiko (a) naudojant (2.42) lygtis. Abi šakos (viena pavaizduota žvaigždėmis ir kryžiais, o kita „pliuso“ ženklais), kurios apsprendžia URGV sistemos stabilumo intervalą  $\kappa \in [0.78, 1.06]$ , rekonstruotos iš PGR valdomos sistemos. (c) – periodinių orbitų projekciją į  $(x_1, x_2)$  plokštumą. Mėlyna brūkšninė ir raudona taškinė-brūkšninė linijos vaizduoja stabilią delsos indukuotą orbitą prie  $\kappa = 0.63$  prieš transkriazinę bifurkaciją ( $\kappa^* \approx 0.78$ ) ir nestabilią delsos indukuotą orbitą prie  $\kappa = 1.05$  po bifurkacijos. Nagrinėjama NPO pavaizduota juoda ištinine linija. (d) ir (e) kintamojo  $x_2(t)$  ir skirtumo  $\Delta x_2(t) = x_2(t) - x_2(t - \tau)$  dinamika prie  $\kappa = 0.865$  esant filtro parametrui  $\tau_w = 0.5$  ir  $\varepsilon = 2$ .

taip pat rekonstruota iš PGR valdomos sistemos. NPO stabilizacija prie  $\kappa^*$  ateina per transkriazinę bifurkaciją, kaip ir Fiedler’io pavyzdyje [70]. Delsos indukuota periodinė orbita bifurkacijos taško aplinkoje yra pavaizduota (c) grafike. Galiausiai grafikai (d) ir (e) vaizduoja valdomos sistemos dinamiką integruojant lygtis (2.2), (2.43) ir papildomą filtro lygtį  $\dot{w} = \{|x_1(t) - x_1(t - \tau)| - w(t)\} / \tau_w$ . Filtro lygtis

reikalinga, kad sumažintume artėjimo prie orbitos laiką [78]. Filtro kintamasis  $w$  yra stebimas, ir valdymas sistemoje įjungiamas tik tuomet kai  $w$  tampa pakankamai mažas  $w(t) < \varepsilon$ , tai reiškia, kad sistema yra priartėjusi prie ribinio ciklo.



2.9 pav.: NPO stabilizacija Chua sistemoje su  $\tilde{\mathbf{K}} = [0, 0, 0; 0, 0, 0; 1, 0, 0.3]$ . (a) – chaotinio atraktoriaus (mėlyna ištisinė kreivė) ir NPO (raudona brūkšninė kreivė) projekcijos į  $(x_1, x_2)$  plokštumą. (b) ir (c) – dinamika kintamojo  $x_3(t)$  ir UGRV jėgos trečios komponentės  $F_3(t) = \kappa \{ \tilde{K}_{31}[x_1(t - \tau) - x_1(t)] + \tilde{K}_{33}[x_3(t - \tau) - x_3(t)] \}$ . Valdymas yra įjungiamas prie  $t = 200$  su  $\kappa = 1.2$ .

Kad pademonstruotume mūsų algoritmo universalumą, mes pateiksime kitą pavyzdį, Chua sistema [79] apibrėžiama lygtimis:

$$\dot{x}_1(t) = 9(x_2(t) - \phi(x_1(t))), \quad (2.52a)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) - x_2(t) + x_3(t), \quad (2.52b)$$

$$\dot{x}_3(t) = -100/7x_2(t), \quad (2.52c)$$

čia  $\phi(x_1) = \frac{2}{7}x_1 - \frac{3}{14}(|x_1 + 1| - |x_1 - 1|)$ . Chaotinės trajektorijos projekcija į  $(x_1, x_2)$  plokštumą ir nagrinėjamoji NPO yra parodytos 2.9 pav. (a). Čia NPO yra už keistojo atraktoriaus ribų; jos periodas  $T \approx 2.483$  ir vienas nestabilusis Floke daugiklis lygus  $\mu \approx 2.325$ . Mes pasirinkome nedagonalią matricos  $\tilde{\mathbf{K}}$  konfigūraciją su dviem nenuliniais elementais  $\tilde{K}_{31} = 1$  ir  $-1 \leq \tilde{K}_{33} \leq 1$ . Atitinkami koeficientai yra  $C_{31} \approx -2.02$ ,  $C_{33} \approx 3.01$ ,  $D_{3131} \approx 2.46$ ,  $D_{3333} \approx 1.85$ , ir  $D_{3133} = D_{3331} \approx -2.21$ . Prie  $\tilde{K}_{33} = 0.3$  nelygybė (2.49) yra patenkinta. Tuomet slenkstinis valdymo stipris yra  $\kappa^* \approx 0.89$ . Sėkminga NPO stabilizacija yra pavaizduota grafikuose (b) ir (c) esant  $\kappa = 1.2$ .

## 3 skyrius: NEURONŲ OSCILIACIJŲ VAL- DYMAS AUKŠTADAŽNE STIMULIACIJA

Šiame skyriuje mes nagrinėsime, kaip žemo dažnio sistema, veikiamą aukšto dažnio išorine jėga, keičia savo elgesį. Čia žodžiai „žemas“ ir „aukštas“ vartojami ta prasme, kad sistemos vidinės dinamikos charakteringi laikai yra žymiai ilgesni už išorinės jėgos periodą. Mokslas, nagrinėjantis tokius uždavinius, vadinamas vibracine mechanika, nes būtent mechaninėse sistemose atsirado poreikis spręsti tokio pobūdžio uždavinius. Nors čia sistema taip pat yra perturbuojama, fazinės redukcijos metodas, aptartas ankstesniuose skyriuose, nėra tinkamas matematinis instrumentas šiam uždaviniui spręsti. Nes čia perturbacija nėra maža, mažas yra perturbacijos periodas lyginant su charakteringais sistemos laikais. Todėl čia mes naudosime taip vadinamą vidurkinimo metodą, kurį apžvelgsime 3.1 skirsnyje.

Toliau visas skyrius bus orientuotas į neurolo gosciliacijų nuslopini mo paaiškinimą, veikiant neuroną aukšto dažnio signalu. Tokio uždavinio poreikis kyla iš konkretaus eksperimentinio fakto, kad Parkinsono liga sergantiems žmonėms, stimuliuojant tam tikrą smegenų sritį (manoma, kad ta sritis ir yra atsakinga už nevalingą kūno drebėjimą) aukšto dažnio (AD) elektriniu signalu, dingsta nevalingas kūno drebėjimas. Pirmasis šį reiškinį pastebėjo Benabid'as [80], kuris nustatė, koks dažnio intervalas ir kokia amplitudė turi būti, norint panaikinti nevalingus judesius. Pati procedūra yra vadinama gilumine smegenų stimuliacija (GSS) ir atliekama chirurginiu būdu implantuojant elektrodą į smegenis ir leidžiant juo aukšto dažnio elektros srovę. Nors nuo atradimo praėjo apie 20 metų, iki šiol neurolo gosclopini mo mechanizmas nėra visiškai aiškus ir esminių patobulinių nepadaryta. GSS AD signalu turi ir šalutinių poveikių, pavyzdžiui, ilgai nui stimuliuojant neuronus, jie „pripranta“ prie stimuliavimo, ir tenka didinti srovės stiprį, kad pacientams vėl išnyktų nevalingi judesiai. O tai savo ruožtu didina riziką, kad neuronai bus suardyti negrįžtamai.

Matematiškai neuroną aprašo autonominės paprastosios diferencialinės lygtys su stabilium ribiniu ciklu. Išorinė stimuliacija ateina kaip papildomas narys prie vienos iš

lygčių, tuo pačiu lygčių sistema tampa neautonominė. Tačiau pritaikius vidurkinimo procedūrą, lygčių sistema vėl tampa autonominė, ir ji aprašo ne momentinę dydžių dinamiką, o dydžių dinamiką, suvidurkintą per aukšto dažnio periodą. Suvidurkintų lygčių autonomiškumas leidžia jas tirti klasikiniiais netiesinės dinamikos metodais.

### 3.1 Vidurkinimo metodas

Vidurkinimo metodas yra asimptotinis diferencialinės lygties sprendimo metodas. Pats metodas buvo suformuluotas Bogoliubovo, Krylovo ir Metropolskio darbuose ir apibendrintas jų monografijuose [81, 82]. Tačiau aš naudosiu labiau fizikams tinkamą formuluotę, kuri pateikta <http://www.scholarpedia.org/article/Averaging> straipsnyje. Tarkime turime PDL sistemą:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \varepsilon \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t, \varepsilon). \quad (3.1)$$

čia funkcija  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t, \varepsilon)$  periodiškai priklauso nuo  $t$ , t.y.  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t+T, \varepsilon) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t, \varepsilon)$ . Parametras  $\varepsilon$  yra mažas dydis. Tarkime, mus domina (3.1) lygties sprendinys su pradine sąlyga  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ . Jei ieškotume nulinės eilės tikslumo sprendinio, naudodami reguliariąją trikdžių teoriją, tai lygtyje (3.1) imtume  $\varepsilon = 0$ . Toks rezultatas būtų geras  $t \in [0, L]$  laiko mastelyje (čia  $L$  yra vieneto eilės dydis). Tačiau jei mus domina sprendinys  $t \sim 1/\varepsilon$  laiko mastelyje, galime suvidurkinti per funkcijos  $\mathbf{f}$  periodą. Įveskime suvidurkinto vektorinio lauko pažymėjimą:

$$\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, s, 0) ds. \quad (3.2)$$

Tuomet suvidurkintos diferencialinės lygties

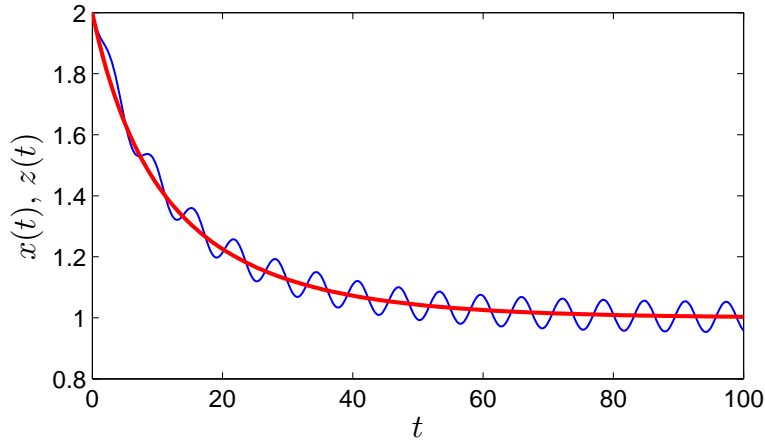
$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \varepsilon \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{z}(t)) \quad (3.3)$$

sprendinys  $\mathbf{z}(t)$  su ta pačia pradine sąlyga  $\mathbf{z}(0) = \mathbf{x}_0$  skirsis nuo originalios lygties (3.1) sprendinio  $\mathbf{x}(t)$  per  $\varepsilon$  eilės dydį net tada, kai nagrinėjami  $t \sim 1/\varepsilon$  laikai. Kitaip tariant, jei  $\varepsilon$  pakankamai mažas, tai visada atsiras konstanta  $C$  nepriklausanti nuo  $\varepsilon$ , kad galiotų nelygybė:

$$\|\mathbf{z}(t) - \mathbf{x}(t)\| \leq \varepsilon C, \quad (3.4)$$

kai laikas  $t \in [0, 1/\varepsilon]$ . Galima užrašyti  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{z}(t) + \mathcal{O}(\varepsilon)$ , kai  $t$  yra  $1/\varepsilon$  eilės. 3.1 pav. yra skaitmeniškai pademonstruotas vidurkinimo metodo galiojimas.

Vidurkinimo metodas naudingas analitiniams skaičiavimams, nes iš neautono-



3.1 pav.: Vidurkinimo metodo skaitmeninė iliustracija. Mėlyna kreivė yra diferencialinės lygties  $\dot{x} = \varepsilon [x(1-x) + \sin(t)]$  sprendinys su pradine sąlyga  $x(0) = 2$ , o raudona kreivė yra  $\dot{z} = \varepsilon [z(1-z)]$  lygties sprendinys su ta pačia pradine sąlyga. Parametras  $\varepsilon = 0.05$ .

minės lygties (3.1) gauname autonominę lygtį (3.3), kuri aprašo ne paties dydžio dinamiką, bet dydžio dinamiką suvidurkintą per periodą  $T$ . Pavyzdžiui, mes naudojome suvidurkinimą, kai perėjome nuo (1.77) lygties prie (1.78).

Dabar mes pademonstruosime vidurkinimo metodo taikymą klasikiniam kvantinės mechanikos uždaviniui. Tarkime, turime atomą su dviem lygmenimis (pagrindinė ir sužadinta būsenos, aukštesnes būsenos nenagrinėjamos), kuris yra apšviečiamas plokščia monochromatine elektromagnetine banga. Fotonų energija  $\hbar\omega_L$  yra artima energijų skirtumui tarp dviejų lygmenų  $\hbar\omega_0$ . Atomo būseną laikui bėgant svyruos tarp dviejų tikrinių atomo būsenų  $\psi_1$  ir  $\psi_2$ , ir pilna būseną užrašoma kaip tikrinių būsenų superpozicija  $\Psi(t) = c_1(t)\psi_1 + c_2(t)\psi_2$ , kur koeficientus  $c_1$  ir  $c_2$  aprašo tokia lygčių sistema:

$$\dot{c}_1(t) = -\Omega^* \frac{\omega_0}{\omega_L} [\exp(i\omega_L t) + \exp(-i\omega_L t)] \exp(-i\omega_0 t) c_2(t), \quad (3.5a)$$

$$\dot{c}_2(t) = \Omega \frac{\omega_0}{\omega_L} [\exp(i\omega_L t) + \exp(-i\omega_L t)] \exp(i\omega_0 t) c_1(t). \quad (3.5b)$$

Čia  $\Omega$  yra taip vadinamas Rabi dažnis. Jis proporcingas šviesos intensyvumui ir išsireiškia kaip skaliarinė sandauga elektromagnetinės bangos elektrinio lauko amplitudės ir dipolinio momento operatoriaus matricinio elemento padalinta iš dviejų mažųjų Planko konstantų, t.y.  $\Omega = \mathbf{E}_0 \mathbf{d}_{12} / (2\hbar)$ . Kodėl  $\Omega$  turi dažnio prasmę, pamatysime išsprendę (3.5) lygtį. Lygties (3.5) analiziškai išspręsti nepavyksta, todėl čia mes pasinaudosime vidurkinimo metodu. Pradžioje įvesime dažnių išderinimą  $\Delta = (\omega_L - \omega_0)/2$ . Įveskime dabar naujus kintamuosius, tam kad lygtis nuo laiko priklausytų periodiškai ir įgautų (3.1) pavidalą (nes (3.5) lygtyje yra du skirtingi

periodai surišti su  $\omega_L$  ir  $\omega_0$ ):

$$b_1(t) = c_1^*(t) \exp(i\Delta t), \quad (3.6a)$$

$$b_2(t) = c_2(t) \exp(i\Delta t). \quad (3.6b)$$

Atkreipkime dėmesį, kad mus dominantis dydis  $|c_1|^2$ , parodantis tikimybę rasti atomą pirmojoje būsenoje, sutampa su  $|b_1|^2$ . Taigi naujuose kintamuosiuose gauname lygčių sistemą:

$$\dot{b}_1(t) = i\Delta b_1(t) - \Omega \frac{\omega_0}{\omega_0 + 2\Delta} [1 + \exp(2i(\omega_0 + 2\Delta)t)] b_2^*(t), \quad (3.7a)$$

$$\dot{b}_2(t) = i\Delta b_2(t) + \Omega \frac{\omega_0}{\omega_0 + 2\Delta} [1 + \exp(2i(\omega_0 + 2\Delta)t)] b_1^*(t). \quad (3.7b)$$

Mes tariame, kad  $\Delta$  ir  $\Omega$  yra maži dydžiai, todėl galime taikyti vidurkinimo metodą. Pagal (3.2) ir (3.3) suvidurkintus  $b$  koeficientus (mes juos žymėsime taip pat kaip ir nevidurkintus) aprašys lygčių sistema:

$$\dot{b}_1(t) = i\Delta b_1(t) - \Omega b_2^*(t), \quad (3.8a)$$

$$\dot{b}_2(t) = i\Delta b_2(t) + \Omega b_1^*(t). \quad (3.8b)$$

Pastarąją lygčių sistemą spęsimė su pradinėmis sąlygomis  $b_1(0) = 1$  ir  $b_2(0) = 0$ . Jei paskaičiuosime antrąją išvestinę, tai gausime lygtį:

$$\ddot{b}_1(t) = -(\Delta^2 + |\Omega|^2) b_1(t). \quad (3.9)$$

(3.9) patogi tuo, kad koeficiento  $b_1$  realiajai ir menamajai daliai lygtys atskiriamos ir lengvai išsprendžiamos. Pradinės sąlygos  $\Re[b_1(0)] = 1$  ir  $\Im[b_1(0)] = 0$ , o iš (3.8a) gauname pradines sąlygas dėl pirmų išvestinių  $\Re[\dot{b}_1(0)] = 0$  ir  $\Im[\dot{b}_1(0)] = \Delta$ . Taigi galutinai randame tikimybės priklausomybę nuo laiko:

$$|b_1(t)|^2 = \frac{\Delta^2 + |\Omega|^2 \cos^2(\sqrt{\Delta^2 + |\Omega|^2}t)}{\Delta^2 + |\Omega|^2}, \quad (3.10a)$$

$$|b_2(t)|^2 = \frac{|\Omega|^2 \sin^2(\sqrt{\Delta^2 + |\Omega|^2}t)}{\Delta^2 + |\Omega|^2}. \quad (3.10b)$$

Gauti rezultatai sutampa su [83] pateiktais rezultatais, tik ten yra naudojamas besisukančios bangos aproksimacijos metodas. Dydis  $\sqrt{\Delta^2 + |\Omega|^2}$  vadinamas apibendrintuoju Rabi dažniu. Jei išderinimo nėra ( $\Delta = 0$ ), tai atomas periodiškai pereina iš pirmosios būsenos į antrąją, ir perėjimo dažnis yra  $|\Omega|$ .



## 3.2 Neuronu stimuliacija – bendrasis aprašymas

Čia mes pateiksime bendras lygtis, aprašančias neuroną, stimuliuojamą aukšto dažnio periodiniu signalu. Mes naudosime vidurkinimo metodą, kad gautume autonomines lygtis, kurios aprašys neuronu dinamiką, suvidurkintą per aukšto dažnio periodą [A5].

Taigi panagrinėkime bendras lygtis, aprašančias neuroną, stimuliuojamą AD signalu:

$$C_m \dot{v} = F(v, \mathbf{w}) + a\varphi(\omega t), \quad (3.11a)$$

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{G}(v, \mathbf{w}). \quad (3.11b)$$

Čia  $C_m$  yra neuronu membranos talpa, o  $v$  yra membranos potencialas. Funkcija  $F$  aprašo sumą srovių, tekančių per joninius kanalus.  $a\varphi(\omega t)$  yra AD srovė, kur  $a$  yra amplitudė, o  $\omega$  yra ciklinis dažnis. Mes nagrinėsime bendrąjį atvejį, kai  $\varphi(\omega t)$  yra bet kokia  $2\pi$  periodinė funkcija  $\varphi(\omega t + 2\pi) = \varphi(\omega t)$  (nebūtinai harmoninis signalas) su amplitudė lygia vienetui. Kad stimuliacijai galiotų krūvio balansas, mes reikalaujame  $\int_0^T \varphi(\omega t) dt = 0$ , kur  $T = 2\pi/\omega$  yra AD stimuliacijos periodas. Funkcija  $\mathbf{G}$  aprašo joninių kanalų dinamiką. Vektorinio kintamojo  $\mathbf{w}$  dimensija  $n$ , o funkcijos  $F$  ir  $\mathbf{G}$  priklauso nuo konkretaus neuronu modelio.

Mūsų tikslas yra supaprastinti neautonominę sistemą (3.11) prie didelių dažnių  $\omega$ , kai AD periodas  $T = 2\pi/\omega$  yra žymiai mažesnis negu charakteringas neuronu dinamikos laiko mastelis  $T_0$ , kai nėra stimuliacijos. Pasinaudojus mažu parametru  $\omega^{-1}2\pi/T_0 \ll 1$ , mes siekiame išeliminuoti AD narį  $a\varphi(\omega t)$  ir gauti autonominę sistemą, kurios sprendinys aproksimuoja originalią sistemą. Pradžioje mes atliksime kintamųjų pakeitimą:

$$V(t) = v(t) - A\psi(\omega t), \quad (3.12a)$$

$$\mathbf{W}(t) = \mathbf{w}(t) \quad (3.12b)$$

čia

$$A = a/(C_m\omega) \quad (3.13)$$

ir  $\psi(s) = \int \varphi(s) ds$ . Patogumo dėlei mes pasirinksimė integravimo konstantą tokią, kad  $\int_0^T \psi(s) ds = 0$ . Įrašę (3.12) į (3.11), naujiems kintamiesiems  $V(t)$  ir  $\mathbf{W}(t)$  mes

gauname šias lygtis:

$$C_m \dot{V} = F(V + A\psi(\omega t), \mathbf{W}), \quad (3.14a)$$

$$\dot{\mathbf{W}} = \mathbf{G}(V + A\psi(\omega t), \mathbf{W}). \quad (3.14b)$$

Pakeitus laiko mastelį ir įvedus „greitąjį“ laiką  $\tau = t/\omega$  (čia  $\tau$  yra „greitasis“ laikas) sistema (3.14) transformuojasi į standartinę formą (2.1), kuriai galima taikyti vidurkinimą:

$$C_m \frac{dV}{d\tau} = \omega^{-1} F(V + A\psi(\tau), \mathbf{W}), \quad (3.15a)$$

$$\frac{d\mathbf{W}}{d\tau} = \omega^{-1} \mathbf{G}(V + A\psi(\tau), \mathbf{W}). \quad (3.15b)$$

Dabar  $\omega^{-1}$  atitinka mažą parametą, todėl galime taikyti vidurkinimą. Pažymėkime suvidurkintus kintamuosius  $(\bar{v}, \bar{\mathbf{w}})$ . Jie tenkina lygtis:

$$C_m \frac{d\bar{v}}{d\tau} = \omega^{-1} \langle F(\bar{v} + A\psi(\tau), \bar{\mathbf{w}}) \rangle_\tau, \quad (3.16a)$$

$$\frac{d\bar{\mathbf{w}}}{d\tau} = \omega^{-1} \langle \mathbf{G}(\bar{v} + A\psi(\tau), \bar{\mathbf{w}}) \rangle_\tau. \quad (3.16b)$$

Čia kampiniai skliaustai žymi vidurkinimą per „greitąjį“ laiką, t.y.  $\langle (\dots) \rangle_\tau = (1/2\pi) \int_0^{2\pi} (\dots) d\tau$ . Suvidurkinta sistema (3.16) aproksimuoja sistemos (3.15) sprendinį tikslumu iki  $\mathcal{O}(\omega^{-1})$ , t.y.  $V = \bar{v} + \mathcal{O}(\omega^{-1})$  ir  $\mathbf{W} = \bar{\mathbf{w}} + \mathcal{O}(\omega^{-1})$ . Sugrįžus prie originalaus laiko, suvidurkinta sistema (3.16) įgauna tokią formą (taškas reiškia diferencijavimą pagal originalų laiką  $t$ ):

$$C_m \dot{\bar{v}}(t) = \langle F(\bar{v}(t) + A\psi(\tau), \bar{\mathbf{w}}(t)) \rangle_\tau, \quad (3.17a)$$

$$\dot{\bar{\mathbf{w}}}(t) = \langle \mathbf{G}(\bar{v}(t) + A\psi(\tau), \bar{\mathbf{w}}(t)) \rangle_\tau. \quad (3.17b)$$

Galiausiai originalios neautonominės sistemos (3.11) sprendinys gali būti išreikštas per suvidurkintos (autonominės) sistemos (3.17) sprendinį šiuo būdu:

$$v(t) = \bar{v}(t) + A\psi(\omega t) + \mathcal{O}(\omega^{-1}), \quad (3.18a)$$

$$\mathbf{w}(t) = \bar{\mathbf{w}}(t) + \mathcal{O}(\omega^{-1}). \quad (3.18b)$$

Kintamųjų pakeitimas (3.12) ir po to atliktas vidurkinimas leidžia mums atskirti lėtąjį ir greitąjį judėjimus ir gauti sprendinį kaip tų judėjimų superpoziciją. Nariai  $\bar{v}(t)$  ir  $\bar{\mathbf{w}}(t)$  lygtyje (3.18) aprašo lėtąjį judėjimą ir tenkina suvidurkintas lygtis (3.17), tuo tarpu narys  $A\psi(\omega t)$  aprašo membranos potencialo AD osciliacijas.

Pažymėtina, kad suvidurkintos lygtys priklauso tik nuo parametro  $A$ , kuris proporcingas stimuliavimo signalo amplitudei  $a$  ir dažnio  $\omega$  santykiui. Tai reiškia, kad AD stimuliacijos efektas neuronui (tiksliau jo lėtam judėjimui) yra pilnai apibrėžtas šiuo santykiu. Pavyzdžiui, AD stimuliacijos efektas bus tas pats, jei mes užfiksuosime amplitudę  $a$  ir padvigubinsime dažnį  $\omega$ , arba, jei užfiksuosime dažnį  $\omega$  ir dvigubai sumažinsime amplitudę  $a$ . Pažymėtina, kad AD stimuliacijos efekto priklausomybė nuo santykio  $a/\omega$  yra parodyta daugelyje laidumo blokavimo skaitmeninių eksperimentų, pavyzdžiui, [84] yra parodyta, kad prie didelių  $\omega$  amplitudės slenkstinė blokavimo vertė tiesiškai priklauso nuo dažnio.

Kad supaprastintume skaitmeninius skaičiavimus, mes atlikome pagrindinę analizę su harmoniniu AD signalu, kai  $\varphi(\omega t) = \cos(\omega t)$  ir  $\psi(\tau) = \psi(\omega t) = \sin(\omega t)$ . Tolesniuose skirsniuose bus aptartas ir neharmoninis signalas.

### 3.3 Hodgkin-Huxley neurono modelis

Dabar mes pademonstruosime, kaip išdėstyta bendra teorija veikia konkrečiam neurono modeliui. Pirmiausia mes imsime klasikinį Hodgkin-Huxley (HH) neurono modelį [29]. Pažymėtina, kad izoliuotas HH neuronas neduoda periodinių smailių (periodinių virpesių), todėl mes pridėsime nuolatinę srovę, norėdami imituoti situaciją, atsirandančią realiuose eksperimentuose. Nors HH neurono charakteringi laikai neatitinka sub-thalamic nucleus (STN) neurono, atsakingo už nevalingo tremoro atsiradimą, čia HH neuronas naudojamas tam, kad pavaizduotume mechanizmo veikimą ganėtinai paprastam modeliui. STN neurono modelis bus išanalizuotas kitame skirsnyje. Taigi HH neurono modelio lygtys užrašoma taip:

$$C_m \dot{v} = -I_L - I_K - I_{Na} + I_0 + I_1 \cos(2\pi f t), \quad (3.19a)$$

$$\dot{m} = \alpha_m(v)(1 - m) - \beta_m(v)m, \quad (3.19b)$$

$$\dot{h} = \alpha_h(v)(1 - h) - \beta_h(v)h, \quad (3.19c)$$

$$\dot{n} = \alpha_n(v)(1 - n) - \beta_n(v)n. \quad (3.19d)$$

Čia  $C_m = 1 \mu\text{F}/\text{cm}^2$  yra membranos talpa, o  $v$  yra membranos potencialas matuojamas mV. Nutekėjimo,  $Na^+$  ir  $K^+$  srovės yra apibrėžiamos šiomis lygtimis:

$$I_L = g_L(v - v_L), \quad (3.20a)$$

$$I_K = g_K n^4 (v - v_K), \quad (3.20b)$$

$$I_{Na} = g_{Na} m^3 h (v - v_{Na}). \quad (3.20c)$$

Parametrų vertės yra:  $(v_L, v_K, v_{Na}) = (10.6, -12, 115)$  mV,  $(g_L, g_K, g_{Na}) = (0.3, 36, 120)$  mS/cm<sup>2</sup>. Parametrai, apibrėžiantys kanalų dinamiką,  $m$ ,  $h$  ir  $n$  matuojami ms<sup>-1</sup> ir yra tokios membranos potencialo funkcijos:

$$\alpha_m(v) = (2.5 - 0.1v)/[\exp(2.5 - 0.1v) - 1], \quad (3.21a)$$

$$\beta_m(v) = 4 \exp(-v/18), \quad (3.21b)$$

$$\alpha_h(v) = 0.07 \exp(-v/20), \quad (3.21c)$$

$$\beta_h(v) = 1/[\exp(3 - 0.1v) + 1], \quad (3.21d)$$

$$\alpha_n(v) = (0.1 - 0.01v)/[\exp(1 - 0.1v) - 1], \quad (3.21e)$$

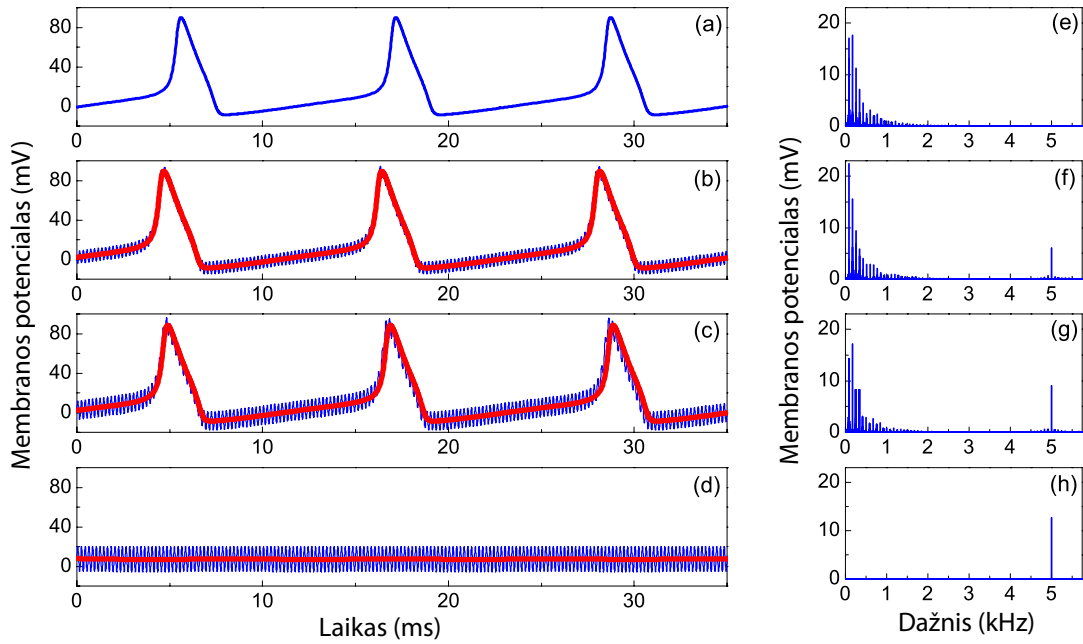
$$\beta_n(v) = 0.125 \exp(-v/80). \quad (3.21f)$$

Modelio parametrai buvo rasti priderinant jo matematinį modelį prie eksperimentinių duomenų. Pats modelis aprašo gigantišką kalmaro aksoną. Čia taip pat membranos potencialo skalė yra pastumta taip, kad rimties taško potencialas (t. y. rimties būseną be išorinių srovių  $I_0 = I_1 = 0$ ) yra lygus nuliui.

Mes prijungiamo nuolatinę srovę  $I_0 = 20 \mu\text{A}/\text{cm}^2$ , kad destabilizuotume rimties būseną ir sukeltume pastovias periodines osciliacijas. Potencialo dinamika be stimuliacijos srovės ( $I_1 = 0$ ) yra parodyta 3.2 pav. (a). Neuronas osciliuoja su periodu  $T \approx 11.57$  ms arba charakteringu dažniu  $\nu = 1/T \approx 86.4$  Hz. Kiti grafikai 3.2 pav. (b)–(d) rodo AD stimuliacijos įtaką dinamikai, kai stimuliacija yra harmoninis signalas  $I_1 \cos(2\pi ft)$ . Kai  $f \gg \nu$ , mes galime tikėtis, kad rezultatai gauti iš originalaus HH modelio sutaps su rezultatais gautais iš suvidurkintos sistemos. Čia mes paėmėme AD stimuliacijos dažnį lygų  $f = 5$  kHz. Kitame skirsnyje mes nagrinėsime STN modelį, kurio charakteringas dažnis be AD stimuliacijos yra  $\nu \approx 3$  Hz, o suvidurkintos sistemos dinamika sutampa su originalia esant žymiai mažesniems dažniams  $f$  negu HH neuronui. STN neurono modelis bus analizuojamas dažnių intervale, kuris atitinka realius GSS eksperimentus.

Kaip matyti iš 3.2 pav. (a)–(d), stimuliacijos intensyvumo didinimas  $I_1$  nuo nulio iki  $400 \mu\text{A}/\text{cm}^2$  sukelia drastiškus pokyčius HH neurono dinamikoje. Mažoms stimuliavimo amplitudėms, žemo dažnio periodinės osciliacijos yra šiek tiek moduluojamas AD osciliacijomis. Stimuliavimo amplitudės didinimas nulemia moduliacijos amplitudės didėjimą. Kai stimuliavimo amplitudė pasiekia tam tikrą slenkstį  $I_1 \approx 379 \mu\text{A}/\text{cm}^2$ , savosios osciliacijos dingsta. 3.2 pav. (d) mes matome, kad, kai  $I_1 = 400 \mu\text{A}/\text{cm}^2$ , membranos potencialo dinamikoje lieka tik aukšto dažnio osciliacijos apie pastovią vertę atitinkančią rimties būseną.

Savųjų osciliacijų nuslopinimo efektas ypač gerai matyti iš membranos potencialo



3.2 pav.: AD stimuliacijos įtaka HH neurono dinamikai (a)–(d) ir spektrui (e)–(h). Mėlyna ir raudona kreivės vaizduoja originalios HH sistemos (3.19) ir suvidurkintų lygčių (3.24), (3.26) sprendinius. Čia mes vaizduojame dinamiką iš pradinių sąlygų  $(v, m, h, n) = (0, 0, 0, 0)$ . (a) ir (e)  $I_1 = 0$ ; (b) ir (f)  $I_1 = 200 \mu\text{A}/\text{cm}^2$ ; (c) ir (g)  $I_1 = 300 \mu\text{A}/\text{cm}^2$ ; (d) ir (h)  $I_1 = 400 \mu\text{A}/\text{cm}^2$ .

spekto, pavaizduoto 3.2 pav. (e)–(h). Kai stimuliacijos amplitudė viršija slenkstinę vertę, žemo dažnio spektro dalis, atitinkanti neurono savuosius impulsus, dingsta, ir tiksliai siaura 5 kHz linija lieka spektre.

Kad išsiaiškintume savųjų osciliacijų nuslopinimo efektą, mes panaudojome lygtis, išvestas praeitame skirsnyje. Jei stimuliacijos periodas yra žymiai mažesnis nei charakteringi Hodgkin-Huxley neurono laikai, apytikslis (3.19) sistemos sprendinys užrašomas:

$$v(t) \approx \bar{v}(t) + A \sin(2\pi ft), \quad (3.22a)$$

$$m(t) \approx \bar{m}(t), \quad (3.22b)$$

$$h(t) \approx \bar{h}(t), \quad (3.22c)$$

$$n(t) \approx \bar{n}(t), \quad (3.22d)$$

čia

$$A = \frac{I_1}{2\pi f C_m} \quad (3.23)$$

yra pagrindinis parametras apibrėžiantis AD stimuliacijos poveikį. Šis parametras yra proporcingas amplitudės  $I_1$  ir dažnio  $f$  santykiui. Todėl AD stimuliacijos efek-

tas neurono dinamikai yra pilnai nusakytas šiuo santykiu. Iš lygčių (3.22) matyti, kad AD „vibracinė“ komponentė yra pridėjama tik prie vieno kintamojo – membranos potencialo. Lėtai kintantys kintamieji, pažymėti brūkšniu, aprašo sistemos dinamiką, suvidurkintą per stimuliacijos periodą ir tenkina lygtis:

$$C_m \dot{\bar{v}} = -g_l(\bar{v} - v_l) - g_K \bar{n}^4(\bar{v} - v_K) - g_{Na} \bar{m}^3 \bar{h}(\bar{v} - v_{Na}) + I_0, \quad (3.24a)$$

$$\dot{\bar{m}} = \bar{\alpha}_m(\bar{v}, A)(1 - \bar{m}) - \bar{\beta}_m(\bar{v}, A)\bar{m}, \quad (3.24b)$$

$$\dot{\bar{h}} = \bar{\alpha}_h(\bar{v}, A)(1 - \bar{h}) - \bar{\beta}_h(\bar{v}, A)\bar{h}, \quad (3.24c)$$

$$\dot{\bar{n}} = \bar{\alpha}_n(\bar{v}, A)(1 - \bar{n}) - \bar{\beta}_n(\bar{v}, A)\bar{n}. \quad (3.24d)$$

Formaliai šios lygtys yra panašios į originalias lygtis (3.19), bet dabar AD narys yra išeliminuotas iš (3.19a). Tačiau čia koeficientai  $\bar{\alpha}_X$ ,  $\bar{\beta}_X$  ( $X = m, h, n$ ) priklauso ne vien nuo membranos potencialo  $\bar{v}$ , bet ir nuo stimuliacijos parametro  $A$ . Šie koeficientai gaunami suvidurkinant originalius koeficientus:

$$\bar{\alpha}_X(\bar{v}, A) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha_X(\bar{v} + A \sin \tau) d\tau, \quad (3.25a)$$

$$\bar{\beta}_X(\bar{v}, A) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \beta_X(\bar{v} + A \sin \tau) d\tau. \quad (3.25b)$$

Jei parametras  $A$  nėra labai didelis, tai suvidurkinti koeficientai gali būti išskleisti Teiloro eilute:

$$\bar{\alpha}_X(\bar{v}, A) \approx \alpha_X(\bar{v}) + (1/4)A^2 \alpha_X''(\bar{v}), \quad (3.26a)$$

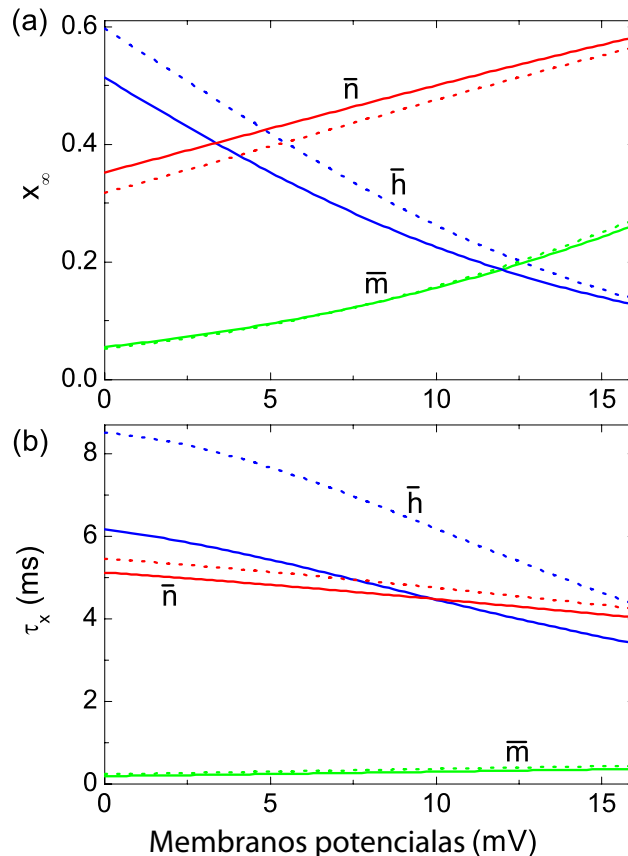
$$\bar{\beta}_X(\bar{v}, A) \approx \beta_X(\bar{v}) + (1/4)A^2 \beta_X''(\bar{v}). \quad (3.26b)$$

Jei naudotume vibracinės mechanikos terminus, tai nariai, kuriuose atsirado parametras  $A$  (paskutiniai nariai lygtyse (3.26)) vadintųsi „vibracinė jėga“. Dvigubas brūkšnys žymi antrosios eilės funkcijos išvestinę. Vibracinė jėga yra atsakinga už lėto judėjimo neurono dinamikoje pakitimą, indukuotą dėl AD stimuliacijos. Suvidurkintų lygčių sprendiniai, pavaizduoti 3.2 pav. raudona kreive, gerai sutampa su originalios sistemos (3.19) sprendiniais (mėlyna kreivė).

Nors 3.2 pav. (a)–(d) ir (e)–(h) rodo AD stimuliacijos efektą prie fiksuoto dažnio  $f$  ir, didinant amplitudę  $I_1$ , suvidurkintos lygtys parodo kaip šis efektas priklauso nuo dažnio  $f$ . Prisiminkime, kad suvidurkinta dinamika pilnai apibrėžta parametru  $A$ , kuris proporcingas santykiui  $I_1/f$ . Todėl prie fiksuoto intensyvumo  $I_1$ , dažnio  $f$  mažinimas duos tą patį savųjų osciliacijų nuslopinimo efektą, kaip ir pavaizduotas 3.2 pav. Aišku, ši sąlyga galioja tik pakankamai dideliems dažniams  $f$ , kai  $1/f$

yra didesnis nei charakteringi neurono laikai. Jei dažnis  $f$  nėra pakankamai didelis, vidurkinimo metodas nebegalioja ir AD stimuliacija duos kitokius efektus nei tie, kurie yra pavaizduoti 3.2 pav. Kitame skirsnyje mes aptarsime šią problemą detaliau STN neurono modeliui.

Dabar aptarsime, kaip pasikeistų rezultatai, jei AD stimuliacija būtų ne harmoninės formos. Harmoninės stimuliacijos atveju daugiklis  $1/4$  antrajame Teiloro skleidinio naryje lygtyse (3.26) atsiranda vidurkinant sinuso kvadratą  $\langle \sin^2(\tau) \rangle_\tau / 2 = 1/4$ . Kitai signalo formai  $\varphi(\tau)$  daugiklis  $1/4$  būtų pakeistas daugikliu  $\langle \psi^2(\tau) \rangle_\tau / 2$ , kur  $\psi(\tau) = \int \varphi(\tau) d\tau$ . Toks daugiklio pakeitimas gali būti kompensuotas pakeičiant parametro  $A$  mastelį. Todėl jei skleidinys (3.26) galioja, stimuliacimo signalo formos variacijos esminiai nepakeičia galutinių rezultatų, išskyrus parametro  $A$  mastelį. Mes patikrinome skaitmeniškai kitokias signalo formas (įskaitant ir tas, kurios naudojamos GSS eksperimentuose), ir įsitikinome, kad formos variavimas neduoda naujų rezultatų.



3.3 pav.: Suvidurkintų HH neurono lygčių dinaminės savybės. (a) ir (b) vaizduoja priklausomybes  $x_\infty(\bar{v}, A)$  ir  $\tau_x(\bar{v}, A)$  nuo suvidurkinto membranos potencialo  $\bar{v}$ . Čia  $x$  reiškia  $\bar{m}$  (žalia),  $\bar{h}$  (mėlyna) arba  $\bar{n}$  (raudona) pralaidumo kintamąjį. Taškinėmis linijomis parodytos priklausomybės be stimuliacijos ( $A = 0$ ), o ištisinės linijos atitinka  $A = 17$  mV.

Pažymėtina, kad vibracinė jėga atsiranda tik (3.24b)–(3.24d) lygtyse, kurios aprašo kanalų pralaidumo dinamiką. Todėl AD stimuliacija veikia tik jonų kanalus. Kad geriau suprastume, kaip vibracinė jėga modifikuoja neurono dinamiką, mes perrašėme kiekvieną lygtį (3.24b)–(3.24d) tokia forma:

$$\dot{x} = -\frac{1}{\tau_x(\bar{v}, A)}[x - x_\infty(\bar{v}, A)], \quad (3.27)$$

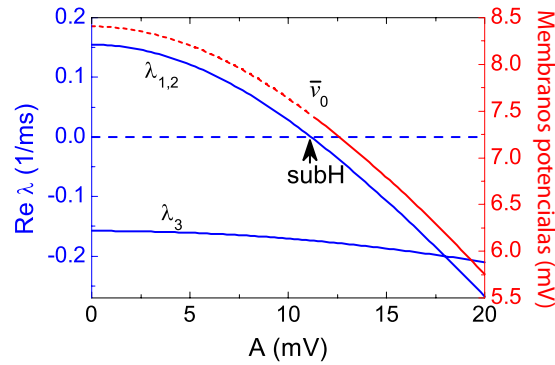
kur  $x$  atitinka  $\bar{m}$ ,  $\bar{h}$  arba  $\bar{n}$ . Prie fiksuotų  $\bar{v}$  ir  $A$ , kintamasis  $x$  eksponentiškai artėja prie reikšmės  $x_\infty(\bar{v}, A)$  su charakteringu laiku  $\tau_x(\bar{v}, A)$ . Asimptotinė reikšmė  $x_\infty(\bar{v}, A)$  ir laiko konstanta  $\tau_x(\bar{v}, A)$  yra gaunamos iš transformacijų  $x_\infty(\bar{v}, A) = \bar{\alpha}_x(\bar{v}, A)/[\bar{\alpha}_x(\bar{v}, A) + \bar{\beta}_x(\bar{v}, A)]$  ir  $\tau_x(\bar{v}, A) = 1/[\bar{\alpha}_x(\bar{v}, A) + \bar{\beta}_x(\bar{v}, A)]$ . 3.3 pav. (a) ir (b) yra nubrėžti kintamieji  $x_\infty$  ir  $\tau_x$  kaip funkcijos nuo  $\bar{v}$  esant dviem skirtingoms reikšmėms  $A$ . AD stimuliacija beveik neveikia natrio aktyvavimosi kintamojo: funkcijos  $\bar{m}_\infty(\bar{v}, A)$  ir  $\tau_m(\bar{v}, A)$  kinta labai mažai, kai  $A$  didinamas nuo 0 iki 17 mV. Tačiau stimuliacija paveikia natrio inaktyvacijos ir kalio aktyvacijos procesus. Stimuliacija sumažina  $\bar{h}_\infty(\bar{v}, A)$  ir padidina  $\bar{n}_\infty(\bar{v}, A)$ . Abu šie efektai yra slopinantys.

3.4 pav. mes pavaizdavome suvidurkintų lygčių (3.24) rimties tašką  $\bar{v}_0$  ir jo tikrines vertes kaip parametro  $A$  funkciją. Rimties potencialas  $\bar{v}_0$  mažėja didinant  $A$ . Pasiekus tam tikrą vertę  $A = A_{subH} \approx 11.16$  mV, sistemoje įvyksta Hopfo bifurkacija, ir rimties taškas tampa stabilus. Rimties taško stabilizacija paaiškina savųjų neurono osciliacijų nuslopimą, pavaizduotą 3.2 pav. Reikia atkreipti dėmesį, kad rimties taško stabilizavimas nereiškia, kad membranos potencialas  $v(t)$  yra nepriklausomas nuo laiko. Ši stabilizacija reiškia, kad tik membranos potencialo lėtoji komponentė yra pastovi, t. y.  $\bar{v}(t) = \bar{v}_0$ . Pagal (3.22) pilna membranos potencialo vertė susideda iš sumos lėtos ir greitos komponentių  $v(t) = \bar{v}_0 + A \sin(2\pi ft)$  ir todėl AD osciliacijos su amplitude  $A$  ir dažniu  $f$  aplink rimties tašką  $\bar{v}_0$  išlieka.

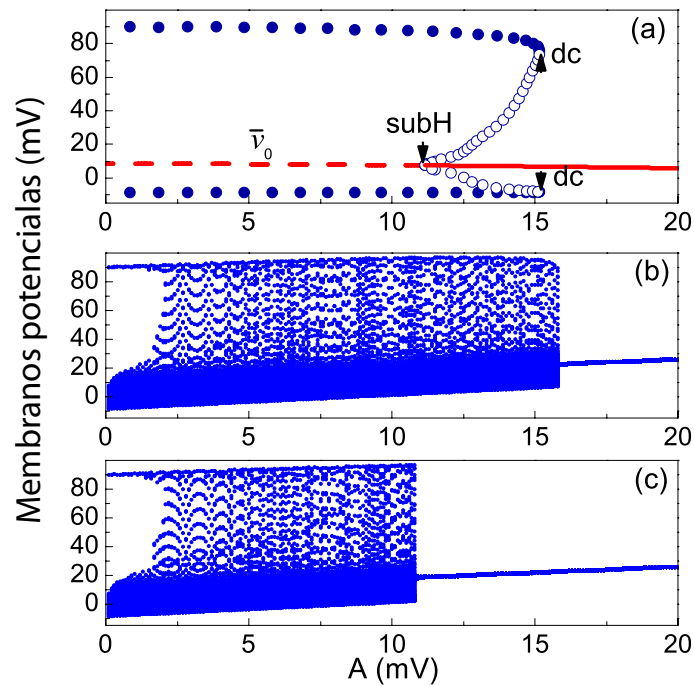
Suvidurkintų lygčių globalios fazinės erdvės analizės rezultatas yra apibendrintas bifurkacinėje diagramoje 3.5 pav. (a). Šioje diagramoje yra matoma histerizė. Prie  $A = 0$  sistemoje yra nestabilus rimties taškas ir stabilus ribinis ciklas, kuris atitinka savąsias osciliacijas. Kai  $A$  padidėja iki reikšmės  $A_{dc} \approx 15.17$  mV, įvyksta dvigubo ciklo bifurkacija (vieta, kur stabilus ribinis ciklas susiduria su nestabiliu ciku) ir sistema konverguoja prie stabilaus rimties taško. Tai paaiškina savųjų osciliacijų nuslopinimą. Jei mes dabar mažinsime  $A$ , sistema liks stabiliame rimties taške iki reikšmės  $A = A_{subH}$  ir tada vėl peršoks į stabilųjį ribinį ciklą. Intervale  $A_{subH} < A < A_{dc}$  sistema yra bistabili: priklausomai nuo pradinių sąlygų, ji gali konverguoti į stabilų rimties tašką arba stabilų ribinį ciklą.

3.5 pav. (b)–(c) mes pavaizdavome bifurkacines diagramas (membranos potencia-





3.4 pav.: Suvidurkintų HH lygčių (3.24) rimties taško tikrinių verčių realiųjų dalių priklausomybė nuo parametro  $A$ . Čia  $\lambda_{1,2}$  žymi pagrindinių tikrinių verčių kompleksiskai jungtinę porą,  $\lambda_3$  tikrinė vertė yra realioji ir neigiama. Mažiausia neigiama vertė  $\lambda_4$  neparodyta brėžinyje. Simbolis „subH“ reiškia subkrizinės Hopfo bifurkacijos tašką. Raudona linija pavaizduota rimties potencialo  $\bar{v}_0$  priklausomybė nuo  $A$ . Nestabili dalis pavaizduota brūkšnine linija.



3.5 pav.: HH neurono bifurkacinė diagrama. (a) vaizduoja bifurkacinę diagramą, gautą iš suvidurkintų lygčių (3.24) ir (3.26). Raudona linija vaizduoja rimties potencialą  $\bar{v}_0$ , t. y. tą pačią kreivę, kaip ir 3.4 pav. Nestabili dalis yra pavaizduota brūkšnine linija. Užpildytais skrituliais ir tuščiais apskritimais pavaizduoti stabilūs ir nestabilūs ribiniai ciklai. Simbolis „subH“ žymi subkrizinės Hopfo bifurkacijos tašką, o simbolis „dc“ žymi dvigubo ciklo bifurkaciją. (b) ir (c) vaizduoja originalių lygčių (3.19) membranos potencialo maksimumus didinant ir mažinant stimuliacijos parametą  $A = I_1/(2\pi f C_m)$ . Horizontali ašis vaizduoja parametro  $A$  reikšmes prie fiksuoto dažnio  $f = 5$  kHz ir įvairių reikšmių  $I_1$ .

lo  $v$  maksimumus) gautas iš originalių HH lygčių didinant ir mažinant stimuliacijos parametą  $A$ . Lygindami šiuos rezultatus su tais, kurie pavaizduoti 3.5 pav. (a), galime teigti, kad suvidurkintos lygtys gerai numato ir paaiškina bifurkacijas ir histerizę, rastą originaliame HH modelyje. Mes matome, kad membranos potencialo amplitudės šuoliai atitinka subkazinę Hopfo ir dvigubo ciklo bifurkacijas, rastas suvidurkintose lygtyse.

### 3.4 STN neurono modelis

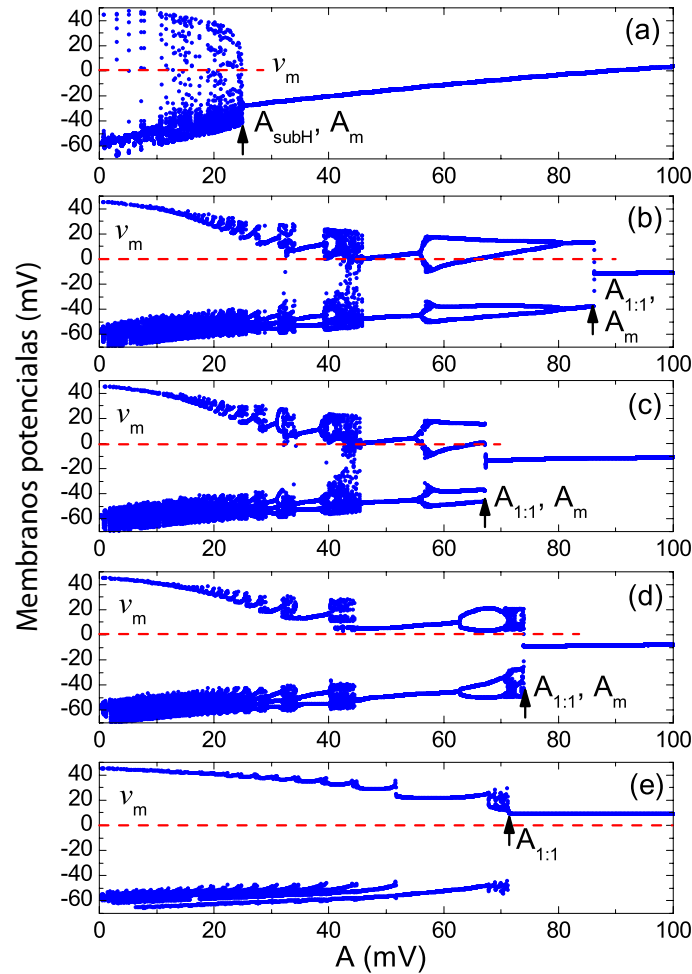
Kad pritaikytume išsakytas idėjas GSS eksperimentui, mes panagrinėsime STN neurono modelį [85], kuris yra modifikuota HH neurono versija adaptuota STN fiziologijai. STN neuronai yra pagrindinis taikinyš AD GSS procedūroje, atliekamoje pacientams su Parkinsono liga [86, 87, 88]. Lygtis membranos potencialui su AD stimuliacija užrašoma taip:

$$C_m \dot{v} = -I_L - I_K - I_{Na} - I_T - I_{Ca} - I_{AHP} + I_1 \cos(2\pi ft). \quad (3.28)$$

Srovės  $I_L = g_L(v - v_L)$ ,  $I_K = g_K n^4(v - v_K)$  turi tą pačią išraišką kaip ir HH neuronui, tačiau  $I_{Na} = g_{Na} m_\infty^3(v) h(v - v_{Na})$ . Papildomos srovės  $I_T = g_T a_\infty^3(v) b_\infty^3(r)(v - v_{Ca})$ ,  $I_{Ca} = g_{Ca} s_\infty^2(v)(v - v_{Ca})$  ir  $I_{AHP} = g_{AHP}(v - v_K) \times ([Ca]/([Ca] + k_1))$ , susijusios su  $Ca^{2+}$  jonų dinamika. Kintamieji  $n$ ,  $h$  ir  $r$  aprašomi tokios formos diferencialinėmis lygtimis:  $\dot{X} = \phi_X(X_\infty(v) - X)/\tau_X(v)$  (kur  $X$  gali būti  $n$ ,  $h$  arba  $r$ ), su  $\tau_X(v) = \tau_X^0 + \tau_X^1[1 + \exp(-(v - \theta_X)/\sigma_X)]$ . Kintamųjų  $m$ ,  $a$  ir  $s$  aktyvacija traktuojama kaip momentinė. Visiems kintamiesiems  $X = n, m, h, a, r$  arba  $s$  rimties būseną aprašoma  $X_\infty(v) = 1/[1 + \exp(-(v - \theta_X)/\sigma_X)]$ . Kintamojo  $b$  aktyvacija užduodama taip:  $b_\infty(r) = 1/[1 + \exp[(r - \theta_b)/\sigma_b]] - 1/[1 + \exp(-\theta_b/\sigma_b)]$ . Galiausiai jonų  $Ca^{2+}$  koncentracija aprašoma kintamuoju  $[Ca]$ , kuriam galioja lygtis  $\dot{[Ca]} = \epsilon(-I_{Ca} - I_T - k_{Ca}[Ca])$ . Parametrų skaitinės reikšmės yra [85] straipsnyje.

Nestimuliuojamas ( $I_1 = 0$ ) STN neuronas vaizduoja osciliacijas apie nestabilių rimties tašką  $v_0 \approx -37.78$  mV su amplitude 45.2 mV ir dažniu  $\approx 2.7$  Hz. Priešingai nei HH modelis, čia osciliacijų aktyvumas yra savaiminis be papildomos tiesioginės srovės. Bifurkacijos diagrama 3.6 pav. vaizduoja AD stimuliacijos įtaką neurono dinamikai prie skirtingų dažnių  $f$ . Prie pakankamai didelių  $f$  ( $> 600$  Hz), osciliacijų dingimą vėl galima paaiškinti rimties taško stabilizavimu. Suvidurkintų STN neurono lygčių rimties taškas tampa stabilus per subkazinę Hopfo bifurkaciją prie  $A_{subH} \approx 24.12$  mV. Ši reikšmė teisingai numato osciliacijų amplitudės šuolį, pavaizduota 3.6 pav. (a). Pažymėtina, kad suvidurkintos STN neurono lygtys turi mažiau

išreikštą histerizę negu ta, kuri yra HH neurono lygtyse. Todėl 3.6 pav. (a) mes apsiribojome evoliucija tik didinant parametą  $A$ .



3.6 pav.: STN neurono bifurkacinė diagrama su AD stimuliacija. Membranos potencialo lokalūs maksimumai kaip stimuliacijos parametro  $A = I_1/2\pi f C_m$  funkcija yra pavaizduoti prie skirtingų  $I_1$  ir fiksuoto  $f$ : (a) –  $f = 3$  kHz; (b) ir (c) –  $f = 200$  Hz; (d) –  $f = 150$  Hz; (e) –  $f = 60$  Hz. Bifurkacinės diagramos (a),(b),(d) ir (e) yra suskaičiuotos didinant  $I_1$ , o (c) yra gauta mažinant  $I_1$ . Raudonos brūkšninės linijos vaizduoja slenkstinę įtampą  $v_m$ .

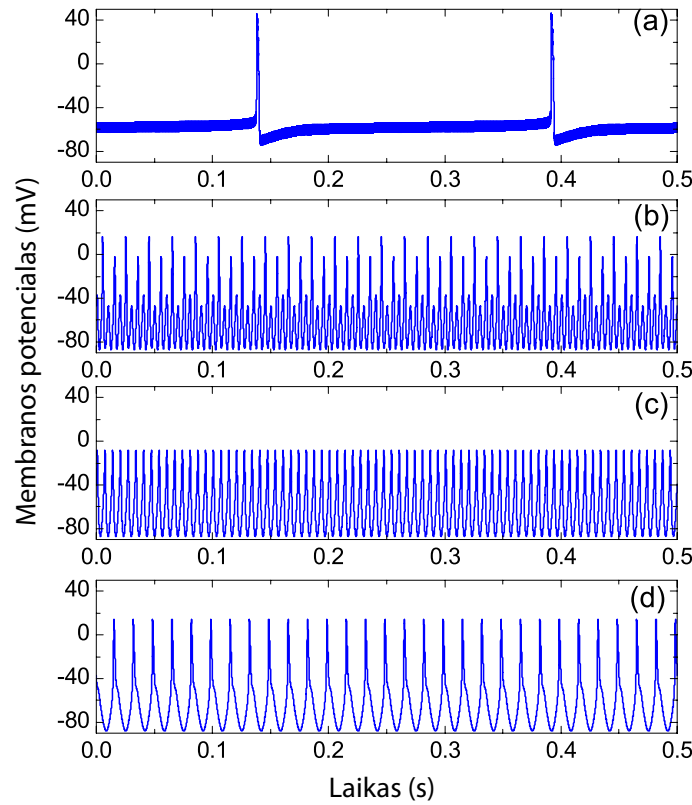
Jei dažnis  $f$  nėra didelis (t. y.  $1/f$  yra palyginamas su charakteringais neurono laikais), tai suvidurkintos lygtys negalioja. Iš 3.6 pav. (b)–(e) matyti, kad sistema patiria sudėtingą bifurkacijų scenarijų. Histerizė labiausiai pastebima tarpiniame dažnio intervale  $160 < f < 350$  Hz. Tokios histerizės pavyzdys prie fiksuoto dažnio  $f = 200$  Hz yra pavaizduotas 3.6 pav. (b) ir (c). Skirtingi bifurkacijos scenarijai matomi didinant (b) ir mažinant (c) stimuliacijos intensyvumą  $I_1$ . Prie mažų dažnių,  $f < 160$  Hz, histerizė dingsta. Bifurkacijos diagramos 3.6 pav. (d) ir (e) atitinka fiksuotus dažnius  $f = 150$  Hz ir  $f = 60$  Hz, ir yra pavaizduotos tik didinant  $I_1$ .

Nors vidurkintos lygtys žemiems dažniams negalioja, ir mes negalime interpretuoti rezultatų pavaizduotų 3.6 pav. (b)–(e) kaip suvidurkintos neurono dinamikos rimties taško stabilizavimo, gerai pastebimas osciliacijų šuolis vis dar stebimas bifurkacinėse diagramose. Šis šuolis atsiranda pereinant prie 1 : 1 sinchronizacijos. Mes pažymėsime kritinę reikšmę  $A$ , atitinkančią šį perėjimą kaip  $A_{1:1}$ . Pažymėtina, kad AD atveju (kai suvidurkintos lygtys galioja), osciliacijų amplitudės šuolis, atitinkantis rimties taško stabilizavimą, taip pat gali būti traktuojamas kaip 1 : 1 sinchronizacija. Iš tikro, vidurkinimo kontekste visa neurono dinamika susideda iš lėtos ir greitos komponentių sumos,  $v(t) = \bar{v}(t) + A \sin(2\pi ft)$ . Greitos komponentės dažnis sutampa su stimuliavimo signalo dažniu. Kai rimties taškas yra stabilizuotas, lėta komponentė tampa pastovi,  $\bar{v}(t) = \text{const}$ . Tačiau greita komponentė lieka, ir ją galima traktuoti kaip 1 : 1 sinchronizaciją. Mes pabrėžiame, kad šios AD osciliacijos yra harmoninės formos, t. y. jos yra tos pačios formos, kaip ir stimuliacijos signalas, ir esminiai skiriasi nuo laisvo neurono potencialo osciliacijų. Be to šių osciliacijų amplitudė yra maža, todėl osciliacijos negali būti traktuojamos kaip membranos potencialo smailės indukuotos AD stimuliacija. Vis dėlto galima pasakyti, kad 1 : 1 sinchronizavimo koncepcija yra bendresnė nei rimties taško stabilizavimas, nes formaliai ji gali būti naudojama bet kokiems stimuliacijos signalo dažniams. Jei dažnis yra palyginamas su savuoju neurono dažniu, osciliacijų šuolis gali būti paaiškintas kaip 1 : 1 sinchronizacija, bet negali būti traktuojamas kaip rimties taško stabilizavimas.

Kitas būdas charakterizuoti neurono osciliacijų slopinimą yra įvesti slenkstinę membranos potencialo amplitudę  $v_m$ , iki kurios neurono osciliacijos gali būti ignoruojamos.  $v_m$  mes galime traktuoti kaip minimalią amplitudę, kuri reikalinga STN neuronui, kad sužadintų postsinapsinį globus pallidus external (GPe) neuroną. Tuomet  $A_m$  mes traktuosime kaip charakteringą  $A$  reikšmę prie kurios STN neurono amplitudė nukrenta žemiau  $v_m$ . Kad gautume slenkstinę amplitudę  $v_m$ , mes paskaičiavome sinapsinę srovę tekančią iš STN į GPe neuroną. Pagal straipsnį [85], šios srovės stipris apibrėžtas sinapsiniu kintamuoju  $S$ , kuris tenkina lygtį:

$$\dot{S} = [S_\infty(v) - S]/\tau_S(v). \quad (3.29)$$

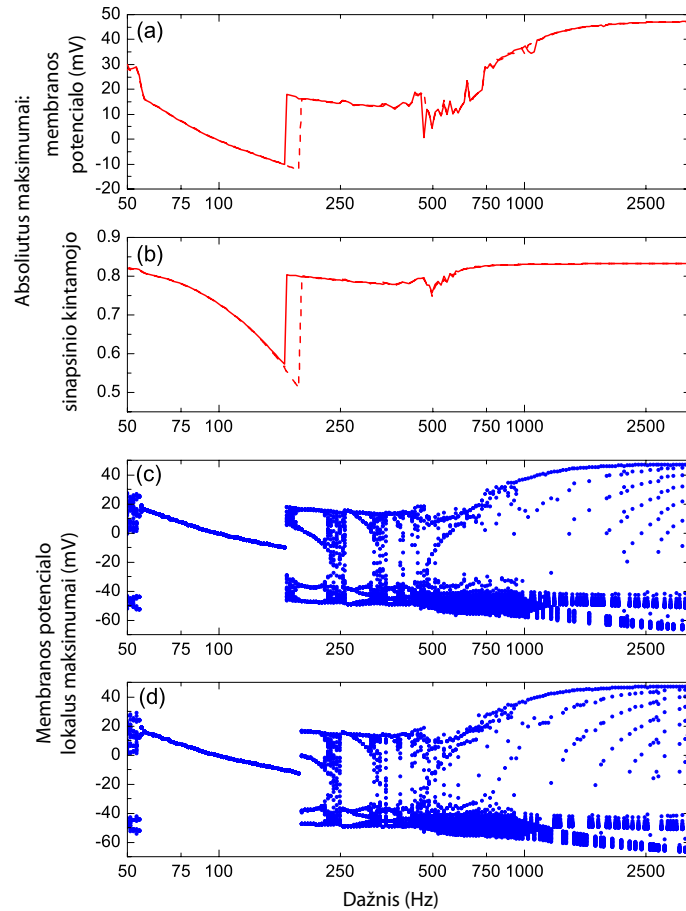
Funkcija  $S_\infty(v)$  yra sigmoidinės formos su charakteristine slenkstine verte lygia 0 mV (ši reikšmė paimta remiantis parametru reikšmėmis iš [85] darbo). Mes interpretuojame šią vertę kaip STN neurono minimalią amplitudę reikalingą GPe neuronui sužadinti, t. y. mes paimame  $v_m = 0$  mV. Slenkstinė vertė  $v_m$  negali būti griežtai apibrėžta ir yra labiau sutartinė. Mes pasirinkome  $v_m = 0$  mV, nes tai duoda gerą



3.7 pav.: STN neurono dinamika prie fiksuotos stimuliacijos amplitudės  $I_1 = 8$  mA/cm<sup>2</sup> ir skirtingų stimuliacijos dažnių: (a) –  $f = 3$  kHz; (b) –  $f = 200$  Hz; (c) –  $f = 150$  Hz; (d) –  $f = 60$  Hz.

atitinkamą su eksperimentiniais duomenimis. Bifurkacinių diagramų analizė parodo, kad egzistuoja kritinis dažnis  $f_c \approx 95$  Hz toks, kad prie  $f < f_c$  neurono osciliacijų amplitudė viršija slenkstinę vertę  $v_m$  prie bet kokio  $A$  (žr. 3.6 (e)). Žemiau mes parodysime, kaip slenkstinė vertė paremti rezultatai koreliuoja su rezultatais gautais iš tiesioginės lygties (3.29) sprendimo.

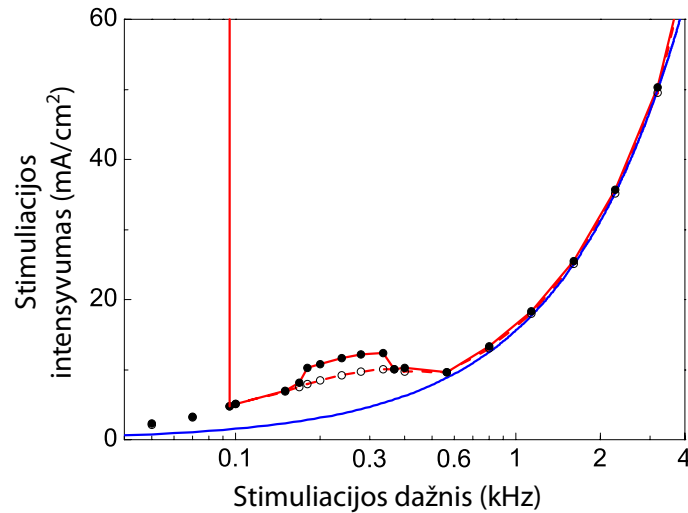
STN neurono dinamika prie fiksuotos stimuliacijos amplitudės  $I_1 = 8$  mA/cm<sup>2</sup> ir skirtingų dažnių yra pavaizduota 3.7 pav. Prie aukšto dažnio  $f = 3$  kHz, stimuliacijos intensyvumo  $I_1 = 8$  mA/cm<sup>2</sup> nepakanka, kad stabilizuotume neurono rimties tašką. Todėl mes stebime savąsias neurono oscilacijas su pakankamai didele amplitude, kurios yra silpnai moduluotos AD signalu (žr. 3.7 pav. (a)). Prie dažnio  $f = 200$  Hz mes stebime 1 : 4 sinchronizacijos režimą, kurio absoliučių maksimumų vertės viršija slenkstinę amplitudę  $v_m = 0$  mV (žr. 3.7 pav. (b)). 3.7 pav. (c) yra pavaizduota neurono dinamika tipiniam klinikiniam dažniui  $f = 150$  Hz. Čia mes stebime 1 : 1 sinchronizacijos režimą su amplitude, kuri yra žemesnė už slenkstinę vertę. Šių osciliacijų forma panaši į harmoninį signalą. Tolesnis dažnio mažinimas indukuoja 1 : 1 osciliacijų režimą su amplitude viršijančia  $v_m = 0$  mV. Prie dažnio



3.8 pav.: Membranos potencialo (a) ir sinapsinio kintamojo  $S$  (b) absoliutūs maksimumai kaip funkcijos nuo stimuliacijos dažnio prie fiksuotos stimuliacijos amplitudės  $I_1 = 8 \text{ mA/cm}^2$ . Parametrai, apibrėžiantys (3.29) lygties dinamiką, paimti iš [85] darbo. Ištininė ir brūkšninė linijos atitinka stimuliacijos intensyvumo didinimą ir mažinimą. (c) ir (d) – membranos potencialo lokalūs maksimumai didinant ir mažinant stimuliacijos intensyvumą.

$f = 60 \text{ Hz}$  tą vaizduoja 3.7 pav. (d). Dabar neurono dinamika esminiai skiriasi nuo harmoninio signalo ir ji labiau panaši į laisvo neurono osciliacijas. Būtent perėjimas prie savųjų osciliacijų, indukuotų dėl AD stimuliacijos, paaiškina, kodėl amplitudė padidėja mažinant stimuliacijos dažnį.

Detalesnė STN neurono dažninė-amplitudinė charakteristika prie fiksuoto stimuliacijos intensyvumo  $I_1 = 8 \text{ mA/cm}^2$  yra pavaizduota 3.8 pav. Diagramoje (a) mes vaizduojame membranos potencialo absoliučių maksimumų (priešingai negu lokalūs maksimumai pavaizduoti bifurkacijos diagramose 3.6) priklausomybę nuo stimuliacijos dažnio. Ištininė ir brūkšninė kreivė atitinka stimuliacijos intensyvumo didinimą ir mažinimą. Diagrama (b) vaizduoja sinapsinio kintamojo  $S$  absoliučius maksimumus gautus iš lygties (3.29). Duotam stimuliacijos intensyvumui  $I_1 = 8 \text{ mA/cm}^2$  mūsų modelis rodo, kad dažnių intervalui  $97 \text{ Hz} < f < 170 \text{ Hz}$  sinapsinio kintamojo

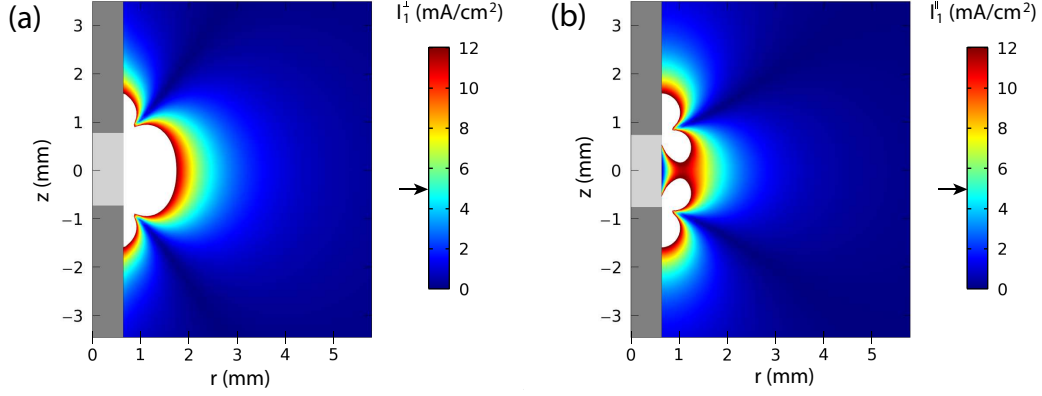


3.9 pav.: AD stimuliuojamo STN neurono dviejų parametų bifurkacinė diagrama: teorinių (mėlyna linija) ir tiesioginių skaitmeninių skaičiavimų (raudona linija) palyginimas. Raudona kreivė rodo kritinę srovę  $I_1$ , kai osciliacijų amplitudė pasiekia slenkstinę vertę  $v_m = 0$  mV. Ištininė ir brūkšninė linijos atitinka stimuliacijos intensyvumo didinimą ir mažinimą. Jos tik šiek tiek skiriasi nedideliame vidutinių dažnių intervale. Užpildyti skrituliai ir neužpildyti apskritimai rodo 1 : 1 sinchronizacijos atsiradimą didinant ir mažinant stimuliacijos intensyvumą. Kairėje pusėje raudona vertikali linija vaizduoja slenkstinį dažnį, kai osciliacijų amplitudė viršija vertę  $v_m$  prie bet kokio  $I_1$ . Mėlyna kreivė  $I_1 = 2\pi f C_m A_{subH}$  rodo subkryzinės Hopfo bifurkacijos atsiradimo vietą suvidurkintuose lygtyse. Dažniams, žemesniems nei 600 Hz, raudonos ir mėlynos kreivės nesutapimas atsiranda dėl suvidurkintų lygčių didelės paklaidos.

$S$  maksimumai esminiai sumažėja, ir membranos potencialo maksimumas nukrenta žemiau slenkstinės vertės  $v_m = 0$  mV. Kad parodytume, kokius sinchronizacijos režimus (1 : 1 ar aukštesnius) atitinka šie rezultatai, mes grafikuose (c) ir (d) pavaizdavome lokalius membranos potencialo maksimumus priklausomai nuo stimuliacijos dažnio.

STN neurono modelio analizė yra apibendrinta dviejų parametų bifurkacinėje diagramoje 3.9 pav., kur vienas parametras yra dažnis  $f$ , o kitas – intensyvumas  $I_1$ . Raudona kreivė vaizduoja kritinę srovę  $I_1$ , prie kurios neurono amplitudė nukrenta žemiau slenkščio  $v_m$ . Intriguojantis dalykas yra tas, kad raudona kreivė 3.9 neblogai atkartoja eksperimentinius rezultatus iš [80] darbo. Pažymėtina, kad STN modelio histerizė, t. y. skirtingas elgesys priklausomai nuo to, ar stimuliacijos intensyvumas didinamas (ištininė raudona linija), ar mažinamas (brūkšninė raudona linija), yra tik nedideliame vidutinių dažnių intervale.

Mėlyna kreivė 3.9 pav. vaizduoja subkryzinės bifurkacijos vietą suvidurkintose STN neurono lygtyse. Prie aukštų dažnių ji sutampa su raudona kreive. Todėl



3.10 pav.: Injektuotos srovės tankio amplitudės pasiskirstymas STN aksonui orientuotam statmeni (a) ir lygiagrečiai (b) GSS elektrodui cilindrinėje koordinatų sistemoje  $(z, r)$  kintamųjų plokštumoje. GSS kontaktas (šviesiai pilka spalva) yra cilindro formos 1.27 mm skersmens ir 1.5 mm aukščio. Izoliatorius pavaizduotas tamsiai pilka spalva. Skaičiavimai atlikti prie AD amplitudės lygios 3 V. Injektuotos srovės tankio amplitudės erdvinis pasiskirstymas parodytas spalvomis pagal iš dešinės esantį spalvų stulpelį. Srovės tankiai viršijantys maksimalią stulpelio vertę ( $12 \text{ mA/cm}^2$ ) pavaizduoti balta spalva. Rodyklės prie spalvų stulpelių rodo spalvą, atitinkančią slenkstinę tankio vertę  $5 \text{ mA/cm}^2$ . Srovės tankiai gauti iš (3.30) lygties naudojant antras potencialo išvestines  $(\partial^2 V / \partial r^2)$  ir  $(\partial^2 V / \partial z^2)$  aksonams orientuotiems statmeni ir lygiagrečiai GSS elektrodui. STN aksono parametrai yra [90, 91]:  $d = 2 \text{ }\mu\text{m}$ ,  $L = 1 \text{ }\mu\text{m}$ ,  $\Delta x = 200 \text{ }\mu\text{m}$  ir  $\rho_i = 70 \text{ }\Omega\text{cm}$ .

osciliacijų nuslopinimas gali būti interpretuojamas kaip rimties taško stabilizavimas. Lyginant teoriją (3.9 pav. mėlyna kreivė, gauta iš suvidurkintų lygčių) ir tiesioginį skaitmeninį modeliavimą (3.9 pav. raudona kreivė) matyti, kad suvidurkintos lygtys nebegalioja žemiau 600 Hz.

Galiausiai mes panagrinėsime, kokį srovės tankį injektuoja GSS elektrodas į STN neuroną. Apskritai tai yra sudėtinga problema, priklausanti nuo daugelio veiksnių, įskaitant elektrodo geometriją ir neurono aksono orientaciją elektrodo atžvilgiu. Tarpląstelinio potencialo pasiskirstymo antroji išvestinė išilgai neuroninio proceso  $(\partial^2 V / \partial x^2)$  leidžia kiekybiškai įvertinti injektuotą srovės tankį  $I$ , kaip atsaką į pridėtą elektrinį lauką [89]:

$$I(x, t) = \frac{d\Delta x}{4\rho_i L} \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2}. \quad (3.30)$$

Čia  $d$  yra aksono skersmuo,  $\rho_i$  yra aksoplazmos savitoji varža,  $L$  yra aktyvus membranos ilgis (mazgo ilgis) ir  $\Delta x$  yra aksono mielininio dangalo segmentavimo ilgis (tarpmazginis prasiskyrimas). Kad rastume tarpląstelinio potencialo  $V$  erdvinį pasiskirstymą, mes sprendėme trimačią Laplaso lygtį  $\Delta V = 0$  su atitinkamomis kraštinėmis sąlygomis. Skaičiavimus atlikome su COMSOL Multiphysics 4.0a pa-



ketu klinikiniam GSS elektrodui su cilindrinio kontaktu, kurio skersmuo 1.27 mm ir aukštis 1.5 mm. Mes nagrinėjome monopoliarinę stimuliaciją ir naudojome tipinę klinikinę AD stimuliacijos įtampos vertę lygią 3 V. Injektuotos srovės tankio pasiskirstymas STN aksonui, orientuotam statmenai ir lygiagrečiai GSS elektrodui, yra pavaizduotas 3.10 pav. (a) ir (b). Pagal rezultatus, pateiktus 3.9 pav., mūsų modelis numato savųjų osciliacijų nuslopinimą, kai injektuotos srovės tankis viršija slenkstinę 5 mA/cm<sup>2</sup> vertę. Kaip matyti iš 3.10 pav. nuslopinta sritis (kur injektuotos srovės tankio amplitudė viršija slenkstinę 5 mA/cm<sup>2</sup> vertę) yra ganėtinai didelė – efektas atsiranda 1 – 2 mm elektrodo aplinkoje. Todėl aptartas STN neurono slopinimo mechanizmas yra realistiškas tipiniu klinikiu atveju.



# REZULTATŲ SANTRAUKA IR IŠVADOS

Išnagrinėta fazinė redukcija sistemoms, aprašomoms paprastosiomis diferencialinėmis lygtimis. Pasiūlytas naujas fazės atsako funkcijos skaičiavimo algoritmas, kurio pagrindinis privalumas tas, kad tiesinė lygtis dėl nuokrypio integruojama į priekį. Tai suteikia du pranašumus prieš standartinį jungtinės lygties algoritmą. Pirma, fazės atsako funkcija gaunama tokiu tikslumu, koku yra sprendžiamos diferencialinės lygtys, tuo tarpu jungtinės lygties metode prie bendros paklaidos prisideda interpolavimo paklaida. Antra, algoritmo greitis nepriklauso nuo ribinio ciklo stabilumo stiprio, tuo tarpu standartinio algoritmo skaičiavimo trukmė esmingai padidėja, kai ribinis ciklas yra silpnai stabilus.

Fazinės redukcijos metodas išplėstas sistemoms, aprašomoms lygtimis su delsa. Gaunama lygtis dėl vieno skalariinio kintamojo. Tai reiškia, kad be galo dimensinė lygtis su delsa redukuojama į viendimensinę lygtį dėl fazės. Lygtis dėl fazės visiškai sutampa su analogiška lygtimi klasikiniame fazinės redukcijos metode. Tik fazės atsako funkcija skaičiuojama kitaip. Tai reiškia, kad visi rezultatai gauti iš klasikinės fazinės redukcijos (optimalios formos radimas, silpnai sujungtų osciliatorių sinchronizacijos analizė) lengvai perkeliama į sistemas, aprašomas lygtimis su delsa.

Fazinės redukcijos metodas pritaikytas uždelstojo grįžtamojo ryšio valdomoms sistemoms tirti. Tokioms sistemoms pastebėta ir aprašyta įdomi fazės atsako funkcijos savybė: jei sistema yra valdoma uždelstuoju (arba išplėstiniu uždelstuoju) grįžtamoju ryšiu, tai orbitos fazės atsako funkcijos forma nepriklauso nuo valdymo parametru. Ši savybė panaudota silpnai išderintos išplėstiniu uždelstuoju grįžtamoju ryšiu valdomos sistemos periodo skaičiavimui. Periodas yra svarbus eksperimentinėse realizacijose, nes jis lengvai stebimas ir iš jo galima paskaičiuoti tikslesnį delsos laiką, norint minimizuoti arba panaikinti išderinimą.

Aprašytas ir pritaikytas algoritmas, leidžiantis tinkamai parinkti valdymo matričią, norint stabilizuoti orbitą su nelyginio skaičiaus topologiniu ribojimu, naudojant uždelstojo grįžtamojo ryšio valdymo schemą. Algoritmas remiasi anksčiau išdėstyta fazės atsako funkcijos savybe bei kitomis sistemos savybėmis, kurias galima pamatyti valdant orbitą proporciniu grįžtamoju ryšiu. Nors algoritmas negarantuoja

sėkmingos stabilizacijos visais atvejais, jo efektyvumas buvo pademonstruotas standartinėms sistemoms, kurių, kaip buvo manoma, neįmanoma stabilizuoti uždelstojo grįžtamojo ryšio metodu. Tai turi praktinę svarbą, nes daugelis eksperimentinių sistemų turi aprašytą topologinį ribojimą.

Darbe detaliai išnagrinėtas neurono veikimas išoriniu aukštu dažniu. Neurono savųjų osciliacijų slopinimo mechanizmas ir iš jo plaukiantys rezultatai neblogai sutampa su realiuose klinikiuose eksperimentuose gautais duomenimis. Šio mechanizmo supratimas leidžia kurti sudėtingesnius bet efektyvesnius neuronų stimuliavimo algoritmus, kurių tikslas yra panaikinti sinchronizaciją tarp neuronų kuo mažesne signalo galia. Ateityje, apjungiant šią neurono analizę su fazinės redukcijos metodu, gal būt pavyks pasiekti geresnių rezultatų, kurie turės praktinės naudos.

# LITERATŪRA

- [1] C. Chicone, Ordinary Differential Equation with Applications. Springer-Verlag, New York (2006)
- [2] Y. Kuramoto, Chemical oscillations, waves, and turbulence. Dover publications, New York (2003)
- [3] A. Pikovsky, M. Roseblum ir J. Kurths, Synchronization: a universal concept in nonlinear science. Cambridge University Press, Cambridge (2001)
- [4] A. Winfree, The geometry of biological time. Springer-Verlag, New York (2001)
- [5] J. W. Hastings ir B. M. Sweeney, A persistent diurnal rhythms of luminescence in *Gonyaulax polyedra*. *Biol. Bull.* **115**, 440-458 (1958)
- [6] C. H. Johnson, Forty years of PRC – what have we learned? *Chronobiol. Int.* **16**, 711-743 (1999)
- [7] A. T. Winfree, When time breaks down. Princeton University Press, Princeton (1987)
- [8] N. Ikeda, Model of bidirectional interaction between myocardial pacemakers based on the phase response curve. *Biol. Cybern.* **43**, 157-167 (1982)
- [9] D. G. Tsalikakisa, H. G. Zhangb, D. I. Fotiadisa, G. P Kremmydasa ir L. K. Michalis, Phase response characteristics of sinoatrial node cells. *Comput. Biol. and Med.* **37**, 8-20 (2007)
- [10] G. B. Ermentrout ir N. Kopell, Multiple pulse interactions and averaging in systems of coupled neural oscillators. *J. Math. Biol.* **29**, 195–217 (1991)
- [11] G. B. Ermentrout, Stable periodic solutions to discrete and continuum arrays of weakly coupled nonlinear oscillators. *SIAM-J. Appl. Math.* **52**, 1665-1687 (1992)
- [12] G. B. Ermentrout, Type I membranes, phase resetting curves, and synchrony. *Neural Comput.* **8**, 979-1001 (1996)

- 
- [13] E. M. Izhikevich, Dynamical systems in neuroscience: The geometry of excitability and bursting. The MIT Press Cambridge, Massachusetts London (2007)
- [14] P. Tass, Phase resetting in medicine and biology. Springer, Berlin (1999).
- [15] T. Stiger, P. Danzl, J. Moehlis ir T. I. Netoff, Linear control of neuronal spike timing using phase response curves. *J. Med. Devices* **4**, 027533 (2010)
- [16] A. D. Reyes ir E. E. Fetz, Two modes of interspike interval shortening by brief transient depolarizations in cat neocortical neurons. *J. Neurophysiol.* **69**, 1661-1672 (1993)
- [17] R. F. Galan, G. B. Ermentrout ir N. N. Urban, Efficient estimation of phase-resetting curves in real neurons and its significance for neural-network modeling. *Phys. Rev. Lett.* **94**, 158101 (2005)
- [18] T. Tatenko ir H. P. C. Robinson, Phase resetting curves and oscillatory stability in interneurons of rat somatosensory cortex. *Biophys. J.* **92**, 683-695 (2007)
- [19] E. Brown, J. Moehlis ir P. Holmes, On the phase reduction and response dynamics of neural oscillator populations. *Neural Comput.* **16**, 673-715 (2004)
- [20] A. P. Kuznetsov, N. V. Stankevich ir L. V. Turukina, Coupled van der Pol-Duffing oscillators: Phase dynamics and structure of synchronization tongues. *Physica D* **238**, 1203-1215 (2009)
- [21] E. W. Sherwood ir J. Guckenheimer, Dissecting the phase response of a model bursting neuron. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* **9**, 659-703 (2010)
- [22] A. Guillamon ir G. Huguet, A Computational and Geometric Approach to Phase Resetting Curves and Surfaces. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* **8**, 1005-1042 (2009)
- [23] M. R. Guevara, L. Glass, M. C. Mackey ir A. Shier, Chaos in neurobiology. *IEEE Trans. Syst. Man. Cybern.* **13**(5), 790-798 (1983)
- [24] G. Ermentrout, Simulating, analysing, and animating dynamical systems: A guide to XPPAUT for researchers and students. SIAM. Philadelphia (2002)
- [25] W. Govaerts ir B. Sautois, Computation of the Phase Response Curve: A Direct Numerical Approach. *Neural Comput.* **18**, 817-847 (2006)

- 
- [26] I. G. Malkin, Methods of Poincare and Liapunov in theory of non-linear oscillations. [in Russian: Metodi Puankare i Liapunova v teorii nelineinix kolebanii. Moscow: Gostexizdat] (1949).
- [27] I. G. Malkin, Some Problems in Nonlinear Oscillation Theory. [in Russian: Nekotorye zadachi teorii nelineinix kolebanii. Moscow: Gostexizdat] (1956).
- [28] C. Morris ir H. Lecar, Voltage oscillations in the barnacle giant muscle fiber. *Biophys. J.* **35**, 193–213 (1981)
- [29] A. L. Hodgkin ir A. F. Huxley, A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *J. Physiol.* **117**, 500–544 (1952)
- [30] J. L. Hindmarsh ir R. M. Rose, A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations. *Proc. R. Soc. London, Ser. B.* **221**, 87–102 (1984)
- [31] J. Moehlis, E. Shea-Brown ir H. Rabitz, Optimal input for phase models of spiking neurons. *J. Comput. Nonlinear. Dyn.* **1**, 358–367 (2006)
- [32] N. MacDonald, Biological Delay Systems, Cambridge University Press, New York, (1989)
- [33] L. Glass ir M. C. Mackey, Oscillation and chaos in physiological control systems, *Science* **197** 287-289 (1977)
- [34] Y. Kuang, Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics, Academic Press Limited, London, (1993)
- [35] A. Beuter, J. Bélair, C. Labrie ir J. Bélair, Feedback and Delays in Neurological Diseases: A Modeling Study Using Dynamical Systems, *Bulletin of Mathematical Biology* **55** 525-541 (1993)
- [36] H. Y. Hu, Dynamics of Controlled Mechanical Systems with Delayed Feedback, Springer, New York (2002)
- [37] G Stépán, Modelling Nonlinear Regenerative Effects in Metal Cutting. *Philosophical Transactions: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* **359** 739-757 (2001)
- [38] N. A. Loiko ir A. M. Samson, Nonlinear dynamics of laser systems with a delay, *Quantum Electronics* **24** 657-672 (1994)

- [39] V. B. Kolmanovskii ir A. D. Myshkis, Introduction to the theory and applications of functional differential equations, Kluwer, Dordrecht-Boston-London (1999)
- [40] K. Pyragas, Continuous control of chaos by self-controlling feedback, *Phys. Lett. A* **170** 421-428 (1992)
- [41] K. Pyragas, Delayed feedback control of chaos, *Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A* **364** 2309-2334 (2006)
- [42] P. Hövel, Control of Complex Nonlinear Systems with Delay, Springer, Heidelberg (2010)
- [43] B. Balachandran, T. Kalmár-Nagy ir D. E. Gilsinn, Delay Differential Equations: Recent Advances and New Directions, Springer-Verlag (2009)
- [44] W. Wischert, A. Wunderlin, A. Pelster, M. Olivier ir J. Gros Lambert, Delay-induced instabilities in nonlinear feedback systems, *Phys. Rev. E* **49** 203-219 (1994)
- [45] A. Halanay, Differential equations. Stability, oscillations, time lags, Academic Press, New York and London, 1966.
- [46] Jack K. Hale and Sjoerd M. Verduyn Lunel, Introduction to functional differential equations, Springer-Verlag, 1993.
- [47] A. Namajūnas, K. Pyragas, ir A. Tamaševičius, An electronic analog of the Mackey-Glass system, *Phys. Lett. A* **201** 42-46 (1995)
- [48] M. Schanz ir A. Pelster, Analytical and numerical investigations of the phase-locked loop with time delay, *Phys. Rev. E* **67** 056205 (2003)
- [49] E. Ott, C. Grebogi ir J. A. Yorke, Controlling Chaos, *Phys. Rev. Lett.* **64** 1196-1199 (1990)
- [50] K. Pyragas ir A. Tamaševičius, Experimental control of chaos by delayed self-controlling feedback, *Phys. Lett. A* **180** 99-102 (1993)
- [51] Th. Pierre, G. Bonhomme ir A. Atipo, Controlling the Chaotic Regime of Nonlinear Ionization Waves using the Time-Delay Autosynchronization Method, *Phys. Rev. Lett.* **76** 2290-2293 (1996)
- [52] K. Hall ir kiti, Dynamic Control of Cardiac Alternans, *Phys. Rev. Lett.* **78** 4518-4521 (1997)



- 
- [53] P. Parmananda ir kiti, Stabilization of unstable steady states and periodic orbits in an electrochemical system using delayed-feedback control, *Phys. Rev. E* **59** 5266–5271 (1999)
- [54] T. Fukuyama, H. Shirahama ir Y. Kawai, Dynamical control of the chaotic state of the current-driven ion acoustic instability in a laboratory plasma using delayed feedback, *Phys. Plasmas* **9** 4525–4529 (2002)
- [55] M. G. Rosenblum ir A. S. Pikovsky, Controlling synchronization in an ensemble of globally coupled oscillators, *Phys. Rev. Lett.* **92** 114102 (2004)
- [56] J. Sieber ir kiti, Experimental Continuation of Periodic Orbits through a Fold, *Phys. Rev. Lett.* **100** 244101 (2008)
- [57] K. Pyragas, Delayed feedback control of chaos, *Phil. Trans. R. Soc. A* **364** 2309–2334 (2006)
- [58] K. Yamasue ir kiti, Controlling chaos in dynamic-mode atomic force microscope, *Phys. Lett. A* **373** 3140–3144 (2009)
- [59] J. E. S. Socolar, D. W. Sukow ir D. J. Gauthier, Stabilizing unstable periodic orbits in fast dynamical systems, *Phys. Rev. E* **50** 3245 (1994)
- [60] A. Kittel, J. Parisi ir K. Pyragas, Delayed feedback control of chaos by self-adapted delay time, *Phys. Lett. A* **198** 433–436 (1995)
- [61] H. Nakajima, H. Ito ir Y. Ueda, Automatic Adjustment of Delay Time and Feedback Gain in Delayed Feedback Control of Chaos, *Trans. Fundam. Electron. Commun. Comput. Sci.* **E80** 1554–1559 (1997)
- [62] G. Chen ir X. Yu, On time-delayed feedback control of chaotic systems, *IEEE Trans. Circ. Syst. I* **46** 767–772 (1999)
- [63] X. Yu, Tracking inherent periodic orbits in chaotic dynamic systems via adaptive variable structure time-delayed self control, *IEEE Trans. Circ. Syst. I* **46** 1408–1411 (1999)
- [64] I. Z. Kiss, Z. Kázas ir V. Gáspár, Tracking unstable steady states and periodic orbits of oscillatory and chaotic electrochemical systems using delayed feedback control, *Chaos* **16** 033109 (2006)
- [65] V. Pyragas ir K. Pyragas, Adaptive modification of the delayed feedback control algorithm with a continuously varying time delay, *Phys. Lett. A* **375** 3866–3871 (2011)

- 
- [66] W. Just ir kiti, Delayed Feedback Control of Periodic Orbits in Autonomous Systems, *Phys. Rev. Lett.* **81** 562–5651 (1998)
- [67] O. E. Rössler, An equation for continuous chaos, *Phys. Lett. A* **57** 397–3981 (1976)
- [68] H. Nakajima, On analytical properties of delayed feedback control of chaos, *Phys. Lett. A* **232** 207–210 (1997)
- [69] K. Pyragas, Control of Chaos via an Unstable Delayed Feedback Controller, *Phys. Rev. Lett.* **86** 2265–2268 (2001)
- [70] B. Fiedler ir kiti, Refuting the Odd-Number Limitation of Time-Delayed Feedback Control, *Phys. Rev. Lett.* **98** 114101 (2007)
- [71] C. M. Postlethwaite ir M. Silber, Stabilizing unstable periodic orbits in the Lorenz equations using time-delayed feedback control, *Phys. Rev. E* **76** 056214 (2007)
- [72] S. Schikora, H.–J. Wünsche ir F. Henneberger, Odd–number theorem: Optical feedback control at a subcritical Hopf bifurcation in a semiconductor laser, *Phys. Rev. E* **83** 026203 (2011)
- [73] B. Fiedler ir kiti, Delay stabilization of rotating waves near fold bifurcation and application to all-optical control of a semiconductor laser, *Phys. Rev. E* **77** 066207 (2008)
- [74] E. Hooton ir A. Amann, Analytical Limitation for Time-Delayed Feedback Control in Autonomous Systems, *Phys. Rev. Lett.* **109** 154101 (2012)
- [75] K. Pyragas, Analytical properties and optimization of time–delayed feedback control, *Phys. Rev. E* **66** 026207 (2002)
- [76] E. N. Lorenz, Deterministic nonperiodic flow, *J. Atmos. Sci.* **20** 130–141 (1963)
- [77] K. Engelborghs, T. Luzyanina ir G. Samaey, DDE-BIFTOOL v. 2.00: a Matlab package for bifurcation analysis of delay differential equations, Departament of Computer Science, K. U. Leuven (2001)
- [78] K. Pyragas ir V. Pyragas, Using ergodicity of chaotic systems for improving the global properties of the delayed feedback control method, *Phys. Rev. E* **80** 067201 (2009)

- 
- [79] L. O. Chua, M. Komuro ir T. Matsumoto, The double scroll family, *IEEE Trans. Circuits Syst.* **33** 1072–1118 (1986)
- [80] A. L. Benabid ir kiti, Long-term suppression of tremor by chronic stimulation of the ventral intermediate thalamic nucleus. *Lancet* **337**, 403 (1991)
- [81] N. N. Krylov ir N. N. Bogoliubov, Introduction to Nonlinear Mechanics (in Russian), Kiev, Izd. AN UkSSR, Vvedenie v Nelineinuyu Mekhaniku (1937)
- [82] N. N. Bogoliubov ir Yu. A. Mitropolskii, Asimtoticheskie metody v teorii nelineinyh kolebanii, Gostechizdat, Moscow, (1955)
- [83] A. Dargis ir A. Acus, Dviejų ir trijų lygmenų atomai ir sistemos kvantinėje mechanikoje, 2011.
- [84] K. L. Kilgore ir N. Bhadra, High frequency mammalian nerve conduction block: simulations and experiments. *Conf Proc IEEE Eng Med Biol Soc.* **1**, 4971 (2006)
- [85] D. Terman, J. E. Rubin, A. C. Yew ir C. J. Wilson, Activity patterns in a model for the subthalamopallidal network of the basal ganglia. *J. Neurosci.* **22**, 2963 (2002)
- [86] P. Limousin ir kiti, Effect on parkinsonian signs and symptoms of bilateral subthalamic nucleus stimulation. *Lancet* **345**, 91 (1995)
- [87] P. Limousin ir kiti, Electrical stimulation of the subthalamic nucleus in advanced parkinson's disease. *N. Engl. J. Med.* **339**, 1105 (1998)
- [88] M. C. Rodriguez-Oroz ir kiti, Bilateral deep brain stimulation of the subthalamic nucleus in parkinson's disease. *Neurology* **55**, S45 (2000)
- [89] F. Rattay, Analysis of models for extracellular fiber stimulation. *IEEE Trans Biomed Eng* **36**, 676 (1989)
- [90] S. N. Sotiropoulos ir P. N. Steinmetz, Assessing the direct effects of deep brain stimulation using embedded axon models. *J. Neural Eng.* **4**, 107 (2007)
- [91] W. M. Grill, M. B. Cantrell ir M. S. Robertson, Antidromic propagation of action potentials in branched axons: implications for the mechanisms of action of deep brain stimulation. *J. Comput. Neurosci.* **24**, 81 (2008)



# SUMMARY

The dissertation is devoted to the analysis of dynamical properties of nonlinear oscillators in the presence of strong and weak perturbations as well as developing analytical and numerical tools for such an analysis. Weakly perturbed oscillators are analyzed by a phase reduction method. The most part of the dissertation deals with this approach. Strong perturbations considered in the dissertation represent high-frequency signals, when the frequency is considerably greater than the reciprocal of characteristic time scale of the oscillator. In this case the method of averaging is employed. Two main problems analyzed by these tools are (i) time-delayed feedback control algorithm and (ii) dynamics of neuron under high-frequency stimulation.

The phase reduction method is a mathematical tool to analyze weakly perturbed nonlinear oscillators. The system's equations can be reduced to a single scalar equation that describes the dynamics of the phase variable. An important characteristic of the limit cycle oscillator resulting from the phase reduction procedure is its phase response curve. It describes the phase shift of the oscillator in response to a perturbing pulse at each phase of the oscillator. In this work we present a new numerical algorithm for computation of the phase response curve. In contrast to the standard algorithm, our algorithm does not require any backward integration and it is easier to program since a necessity of numerical interpolation for the Jacobian matrix is avoided.

The classical phase reduction theory is usually formulated for a weakly perturbed limit cycle oscillator described by the ordinary differential equations. In this work we have developed a phase reduction procedure for a general class of weakly perturbed time-delay systems exhibiting periodic oscillations. Here the main result is that the equation for the phase has the same form as in the classical case. Only the phase response curve must be computed differently.

The time delayed feedback control is a standard method for the stabilization of unstable periodic orbits in chaotic systems. The control signal is formed from a difference between the current state of the system, and the state of the system delayed by one period of a target orbit. Thus the controlled system is described by

equations with time delay. We analyze these equations and show that the profile of the phase response curve of the controlled orbit does not depend on the control matrix. Using this property, we derive an analytical expression for a period of the stabilized orbit in the case of a slightly mismatched time delay.

Time delayed feedback control has some restrictions. One of them is so-called odd-number limitation. Usually it is difficult to stabilize periodic orbit in the autonomous system, when it possesses an odd number of positive Floquet multipliers larger than unity. Using phase reduction method and additional analysis we present an algorithm for constructing the control matrix in the delayed feedback control scheme. We show that the algorithm works well for the Lorenz and Chua systems.

The last problem analyzed in the dissertation concerns the dynamics of neurons under high frequency stimulation. We study neuron's equations with the high-frequency external force by the averaging method. The derived averaged equations show that for some values of the stimulation parameters the stable limit cycle disappears and the unstable resting state becomes stable. Based on the analysis of the averaged equations we derive the criteria for the suppression of sustained neuronal spiking and explain the efficiency of the deep brains stimulation procedure for the patients with the Parkinson disease.