VILNIAUS UNIVERSITETAS

MINDAUGAS SKUJUS

LAIKO ATŽVILGIU PERIODINIO STOKSO UŽDAVINIO SRITYSE SU CILINDRINIAIS IŠĖJIMAIS ASIMPTOTINĖS SĄLYGOS BEGALYBĖJE

Daktaro disertacijos santrauka
Fiziniai mokslai, matematika (01P)

Vilnius, 2014

Disertacija rengta 2009–2013 metais Vilniaus Universitete.

Mokslinis vadovas Prof. habil. dr. Konstantinas Pileckas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)

Disertacija ginama Vilniaus universiteto matematikos mokslo krypties taryboje.

Taryba

Pirmininkas

- Prof. habil. dr. Mifodijus Sapagovas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)

Nariai:

- Prof. habil. dr. Raimondas Čiegis (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)
- Prof. habil. dr. Feliksas Ivanauskas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)
- Prof. habil. dr. Minvydas Kazys Ragulskis (Kauno technologijos universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)
- Prof. dr. Stasys Rutkauskas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)

Oponentai:

- Prof. dr. Vytautas Kleiza (Kauno technologijos universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)
- Prof. dr. Artūras Štikonas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)

Disertacija bus ginama viešame Matematikos mokslo krypties tarybos posėdyje 2014 m. birželio 17 d. 15 val. VU Matematikos ir informatikos fakulteto prof. Jono Kubliaus auditorijoje (102 aud.).
Adresas: Naugarduko g. 24, Vilnius, Lietuva.
Disertacijos santrauka išsiuntinėta 2014 m. gegužės 16 d.
Su disertacija galima susipažinti Vilniaus universiteto bibliotekoje.

VILNIUS UNIVERSITY

MINDAUGAS SKUJUS

ASYMPTOTIC CONDITIONS AT INFINITY FOR THE TIME-PERIODIC STOKES PROBLEM SET IN DOMAINS WITH CYLINDRICAL OUTLETS TO INFINITY

Summary of doctoral dissertation
Physical sciences, mathematics (01P)

Vilnius, 2014

The scientific work was carried out in 2009–2013 at Vilnius University.

Scientific supervisor
Prof. Habil. Dr. Konstantinas Pileckas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics - 01P)

The thesis is defended in the council of Mathematics of Vilnius University.

The council
Chairman

- Prof. Habil. Dr. Mifodijus Sapagovas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics - 01P)

Members:

- Prof. Habil. Dr. Raimondas Čiegis (Vilnius Gediminas Technical University, Physical sciences, Mathematics - 01P)
- Prof. Habil. Dr. Feliksas Ivanauskas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics - 01P)
- Prof. Habil. Dr. Minvydas Kazys Ragulskis (Kaunas University of Technology, Physical sciences, Mathematics - 01P)
- Prof. Dr. Stasys Rutkauskas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics - 01P)

Opponents:

- Prof. Dr. Vytautas Kleiza (Kaunas University of Technology, Physical sciences, Mathematics - 01P)
- Prof. Dr. Artūras Štikonas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics - 01P)

The dissertation will be defended at the public meeting of the council on June 17, 2014 at 3 pm at Vilnius University, Faculty of Mathematics and Informatics, Prof. Jonas Kubilius lecture room (102).
Address: Naugarduko st. 24, Vilnius, Lithuania.
The summary of the dissertation was distributed on 16 May, 2014.
The dissertation is available at the library of Vilnius University.

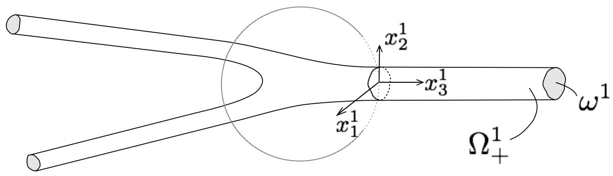
Disertacinio darbo aprašymas

Tyrimo objektas

Disertacijoje nagrinėjamas kraštinis uždavinys laiko atžvilgiu periodinei Stokso sistemai

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{v} - \nu\Delta\mathbf{v} + \nabla p &= \mathbf{f}, & (x,t) \in \Omega \times (0, 2\pi), \\ -\nabla \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{0}, & (x,t) \in \Omega \times (0, 2\pi), \\ \mathbf{v} &= \mathbf{0}, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0, 2\pi), \\ \mathbf{v}(x,0) &= \mathbf{v}(x, 2\pi), & x \in \Omega \end{cases} \tag{1}$$

srityje $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, turinčioje J cilindrinio tipo išėjimų į begalybę[i].



1 pav. Skysčio tekėjimo sritis Ω atveju $J = 3$.

(1) sistemoje $\mathbf{v} = (v_1(x,t), \dots, v_n(x,t))$ žymi skysčio greičio vektorių, $p = p(x,t)$ – skysčio slėgio funkciją, konstanta ν – skysčio klampumo koeficientą (nemažindami bendrumo tariame, kad pastovus skysčio tankis yra lygus 1). Daroma prielaida, kad skystį veikia žinomų išorinių jėgų laukas $\mathbf{f} = (f_1(x,t), \dots, f_n(x,t))$, kuris yra periodinis laiko atžvilgiu.

Mokslinės problemos istorija ir aktualumas

Navjė-Stokso lygčių sistema bei disertacijoje nagrinėjama jos tiesinė versija – Stokso uždavinys – aprašo klampaus nespūdaus skysčio tekėjimą. Įvairios šio matematinio modelio modikacijos plačiai naudojamos kuriant laivų, lėktuvų ir automobilių korpusų modelius, atliekant orų prognozes, kompiuterines vandenynų srovių simuliacijas ir t.t. Lygčių sprendinių savybės buvo ir yra nagrinėjamos daugybėje matematikų ir fizikų darbų. Navjė-Stokso lygčių teorinę svarbą liudija ir tai, jog klausimas apie trimačio nestacionaraus pradinio-kraštinio

[i] Kiekviename cilindre Ω_+^j naudojama lokalioji koordinačių sistema (x_1^j, x_2^j, x_3^j), kurioje cilindrinius išėjimus į begalybę galima išreikšti formule $\Omega_+^j = \omega^j \times (0, \infty)$, $\omega^j \subset \mathbb{R}^{n-1}$.

Navjė-Stokso lygčių uždavinio sprendinio egzistavimą ir glodumą 2000 metais buvo įtrauktas į septynių neišspręstų "Tūkstantmečio problemų" sąrašą[ii].

Evoliucinės, t.y., priklausančios nuo laiko kintamojo, Stokso ir Navjė-Stokso lygčių sistemos srityse su cilindriniais išėjimais į begalybę, naudojamos modeliuojant tekėjimus kraujotakos sistemose, naftotiekiuose ir panašiuose objektuose. Turint omenyje biomedicininius taikymus, didžiulę reikšmę turi pulsuojantys tekėjimai, pavyzdžiui, periodiniai laiko atžvilgiu. Išsami literatūros, susijusios su Stokso ir Navjė-Stokso lygčių sistemomis neaprėžtose srityse, apžvalga yra pateikta disertacijoje įvade. Čia trumpai aptarsime su laiko atžvilgiu periodiniais tekėjimais cilindruose ir jų sistemose susijusius teorinius rezultatus.

Skysčio tekėjimo cilindrinėse srityse analizei didelę reikšmę turi taip vadinami Puazeilio tipo sprendiniai – tikslūs homogeninės Stokso lygčių sistemos, apibrėžtos begaliniame cilindre $\Pi = \omega \times \mathbb{R}$ ($\omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$), sprendiniai. Trimačiu atveju Puazeilio sprendinys $\mathbf{u}_p = (\mathbf{v}_p, p_p)$ turi greičio vektorių $\mathbf{v}_p = (0, 0, v_p(x_1, x_2, t))$, nukreiptą išilgai cilindro Π ašies, ir slėgį $p_p = p_p(x_3, t)$, kuris yra tiesinis erdvės kintamojo x_3 atžvilgiu. Vektorinis laukas $\mathbf{u}_p$ gali būti apbrėžiamas užfiksuojant skysčio srautą $\int_\omega v_p(x_1, x_2, t)dx_1dx_2$ arba slėgio funkcijos gradientą ∇p_p. Remiantis Puazeilio dėsniu, stacionariu atveju šie du dydžiai yra proporcingi.

Nestacionarių Puazeilio tipo sprendinių egzistavimas buvo nagrinėtas [1], [2], [5], [9] darbuose. 2007 metais [4] straipsnyje įrodyta, kad (1) uždavinio sprendinys kiekviename iš cilindrų konverguoja į atitinkamą periodinį Puazeilio tipo sprendinį. Analogiški rezultatai buvo gauti nestacionarių netiesinių Navjė-Stokso uždavinių atveju (žr. [10], [11], [12]). Nepaisant pastarąjį dešimtmetį išaugusio dėmesio evoliuciniams skysčio tekėjimo cilindrinėse sistemose uždaviniams, nuoseklios matematinės teorijos, ypač liečiančios evoliucinių lygčių sprendinių elgesį erdvės kintamųjų atžvilgiu, kol kas nėra sukurta.

Kalbant apie Navjė-Stokso lygčių uždavinius neaprėžtose srityse, būtina paminėti 1976 metais publikuotą [3] J. Heywood straipsnį. Šiame darbe buvo parodyta, kad klampaus nespūdaus skysčio tekėjimas ne visuomet yra vienareikšmiškai nusakomas sistemą veikiančių išorinių jėgų ir standartinių pradinių bei kraštinių sąlygų, t.y., kai kuriais atvejais egzistuoja be galo daug Navjė-Stokso uždavinio sprendinių. Vienintelio sprendinio išskyrimui [3] ir [13] darbuose buvo pasiūlyta užfiksuoti, arba per išėjimų į begalybę skerspjūvius pratekančio skysčio srautus arba slėgio ribinių reikšmių išėjimuose skirtumus (angl. *pressure drop*). Visi aukščiau minėtų publikacijų rezultatai yra vienaip ar kitaip susiję su šių dviejų tipų asimptotinėmis sąlygomis begalybėje. Vis dėlto, formuluojant tokio tipo sąlygas kiekviename išėjime į begalybę, lieka neatsakyta, koks yra slėgis, o ne jo pokytis, kiekvieno cilindro pabaigoje. Be to aišku, jog naudojant tik srautų sąlygas, galima aprašyti gana nedidelę dalį realybėje galinčių pasitaikyti situacijų. Pavyzdžiui, jos netinkamos tada, kai įtekančio skysčio srautas žinomas tik dalyje cilindrų, o likuosiuose galima kontroliuoti ištekančio skysčio slėgį (vožtuvo pagalba). Tokiu atveju kyla klausimas, kokie srautai tekės per šių

[ii]Daugiau informacijos galima rasti adresu http://www.claymath.org/millennium-problems.

cilindrų skerspjūvius, kaip šių srautų dydžiai priklausys nuo srities geometrijos arba nuo vamzdžių galuose įrengtų įvairių prietaisų. Maža to, aišku jog tokių objektų, kaip vožtuvų, atsidarančių/užsidarančių skysčio slėgiui pasiekus tam tikrą ribinę reikšmę, modeliavimams tektų formuluoti variacinių nelygybių tipo asimptotines sąlygas.

Turint omenyje šiuos klausimus buvo iškelti žemiau išvardinti disertacinio darbo tikslai.

Disertacijos tikslai

Doktorantūros studijų metu buvo nagrinėjama begalinių cilindrų sistemoje apibrėžta laiko atžvilgiu periodinė Stokso lygčių sistema. Mūsų tyrimų tikslas buvo:

- pateikti metodus, leidžiančius formuluoti bendro tipo asimptotines sąlygas begalybėje laiko atžvilgiu periodiniam Stokso uždaviniui begalinių cilindrų sistemoje;
- sukonstruoti tam tikras asimptotinių sąlygų begalybėje klases, kurios leistų aprašyti fizikinę prasmę turinčius reiškinius ir, tuo pačiu, skirtųsi nuo iki šiol žinomų srauto ar slėgio pokyčio sąlygų.

Tyrimo metodika

(1) uždavinio tyrimui yra naudojami elipsinių uždavinių nekompaktišokse srityse asimptotinių sąlygų tyrimo metodai, išsamiai aprašyti [7] knygoje ir pritaikyti stacionarioms Stokso bei Navjė-Stokso lygtims [8] straipsnyje. Taip pat naudojamasi įvairiais operatorių teorijos ir bendrųjų elipsinių bei parabolinių lygčių teorijos rezultatais, nestacionarių Stokso ir Navjė-Stokso lygčių sistemų cilindrinėse srityse tyrimo metodais – Furjė transformacijomis, operatorių teorijos, energinių įverčių ir svorinių Sobolevo erdvių metodais.

Disertacijos struktūra ir apimtis

Disertacijoje yra tokios pagrindinės dalys – įvadas, du skyriai, kuriuose pateikiami gauti moksliniai rezultatai, išvados, du priedai bei literatūros sąrašas. Įvade aptariama nagrinėjamos problemos istorija ir žinomi rezultatai, grindžiamas uždavinio aktualumas, glaustai aptariami pagrindiniai rezultatai ir disertacijos struktūra. Moksliniai rezultatai yra pateikiami dviejuose skyriuose. Pirmajame skyriuje laiko atžvilgiu periodinis Stokso uždavinys yra suvedamas į tam tikrą Stokso tipo elipsinių uždavinių seką, tiriamos įvairios šių uždavinių sprendinių savybės. Gauti rezultatai antrajame disertacijos skyriuje yra pritaikomi periodinio Stokso uždavinio tyrimams. Darbo pabaigoje yra pateiktos išvados, du priedai, skirti tam tikroms techninėms nagrinėjamų uždavinių detalėms, bei literatūros sąrašas. Bendra disertacijos apimtis yra 110 puslapių.

Svarbiausių disertacijos rezultatų apžvalga

Elipsiniai Stokso tipo uždaviniai

(1) uždavinio sprendinio ieškoma Furjė eilučių pavidalu

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}(x,t) &= \mathbf{v}_{c0} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \mathbf{v}_{ck}(x)\cos kt + \mathbf{v}_{sk}(x)\sin kt \right\}, \\
p(x,t) &= p_{c0} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ p_{ck}(x)\cos kt + p_{sk}(x)\sin kt \right\}.
\end{aligned} \tag{2}
$$

(2) eilutes įstačius į (1) sistemą gaunama tokia Stokso tipo elipsinių uždavinių seka Furjė koeficientams $\{\mathbf{v}_{ck},\, \mathbf{v}_{sk},\, p_{ck},\, p_{sk}\}_{k=0}^{\infty}$:

$$
\left\{
\begin{array}{rcll}
-\nu\Delta\mathbf{v}_{ck} + \nabla p_{ck} + k\mathbf{v}_{sk} &=& \mathbf{f}_{ck}, & x\in\Omega, \\
-\nabla\cdot\mathbf{v}_{ck} &=& 0, & x\in\Omega, \\
-\nu\Delta\mathbf{v}_{sk} + \nabla p_{sk} - k\mathbf{v}_{ck} &=& \mathbf{f}_{sk}, & x\in\Omega, \quad k=0,1,\ldots \\
-\nabla\cdot\mathbf{v}_{sk} &=& 0, & x\in\Omega, \\
\mathbf{v}_{ck} = \mathbf{0},\ \mathbf{v}_{sk} &=& \mathbf{0}, & x\in\partial\Omega.
\end{array}
\right. \tag{3}
$$

čia $\mathbf{f}_{c0}, \mathbf{f}_{ck}, \mathbf{f}_{sk}, k = 1,2,\ldots,$ žymi funcijos $\mathbf{f} = \mathbf{f}(x,t)$ Furjė koeficientus. Apibrėžus vektorinius laukus

$$
\mathbf{u}_k = (\mathbf{v}_{ck}, p_{ck}, \mathbf{v}_{sk}, p_{sk}), \quad \mathbf{v}_k = (\mathbf{v}_{ck}, \mathbf{v}_{sk}), \quad \mathbf{f}_k = (\mathbf{f}_{ck}, 0, \mathbf{f}_{sk}, 0),
$$

(3) uždavinį galima sutrumpintai žymėti taip:

$$
\mathbf{S}_k\mathbf{u}_k = \mathbf{f}_k, \quad x\in\Omega, \qquad \mathbf{v}_k = \mathbf{0}, \quad x\in\partial\Omega. \tag{4}
$$

Disertacijoje naudojamos svorinės Sobolevo erdvės $H^m_\beta(\Omega)$, gaunamos imant aibės $C_0^\infty(\overline{\Omega})$[iii] uždarinį normos

$$
\|u\|^2_{H^m_\beta(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\le m} \int_\Omega \rho_\beta(x)\,\left|D^\alpha_x u(x)\right|^2 \mathrm{d}x
$$

atžvilgiu. Šios normos apibrėžime naudojama tokia svorinė funkcija ρ_β:

$$
\rho_\beta(x) = \left\{
\begin{array}{cl}
1, & x\in\Omega\setminus\cup_{j=1}^J \Omega^j_+, \\
e^{2\beta x_3^j}, & x\in\Omega^j_+,\ j=1,\ldots,J.
\end{array}
\right.
$$

Tuo atveju, jei $\beta > 0$, elementai iš $H^m_\beta(\Omega)$ privalo eksponentiškai nykti, kai $x_3^j \to \infty$. Neigiamoms laipsnio β reikšmėms, erdvės $H^m_\beta(\Omega)$ funkcijos ir jų išvestinės begalybėje gali augti.

[iii] $C_0^\infty(\overline{\Omega})$ yra sudaryta iš be galo diferencijuojamų funkcijų su kompaktiška atrama aibėje $\overline{\Omega}$. Tokios funkcijos gali įgyti nenulines reikšmes ant srities Ω krašto, bet privalo nykti begalybėje.

(3) uždavinio tyrimui apibrėžiamos tokios svorinės funkcijų erdvės

$$\mathcal{D}^l_\beta H(\Omega) = \Big(H^l_\beta(\Omega)\Big)^3 \times H^{l-1}_\beta(\Omega) \times \Big(H^l_\beta(\Omega)\Big)^3 \times H^{l-1}_\beta(\Omega),$$
$$\mathcal{R}^l_\beta H(\Omega) = \Big(H^{l-2}_\beta(\Omega)\Big)^3 \times H^{l-1}_\beta(\Omega) \times \Big(H^{l-2}_\beta(\Omega)\Big)^3 \times H^{l-1}_\beta(\Omega).$$

1.1, 1.2 disertacijos poskyriuose parodyta, kad egzistuoja toks nuo k nepriklausantis skaičius $\beta > 0$, jog (3) uždavinį atitinkantis operatorius

$$\mathbf{A}^l_{-\beta\to\beta,k} : \mathcal{D}^l_{-\beta} H(\Omega) \to \mathcal{R}^l_\beta H(\Omega),$$

yra Fredholmo tipo. Be to jis pasižymi tokiomis savybėmis:

$$\dim \ker \mathbf{A}^l_{-\beta\to\beta,k} = 2J, \quad \dim \operatorname{coker} \mathbf{A}^l_{-\beta\to\beta,k} = 0. \tag{5}$$

Pastarosios lygybės reiškia, kad bet kuriai eksponentiškai nykstančiai dešinei pusei $\mathbf{f}_k \in \mathcal{R}^l_\beta H(\Omega)$ (3) uždavinys turi sprendinį augančių funkcijų klasėje $\mathcal{D}^l_{-\beta} H(\Omega)$. Tačiau šis sprendinys nėra vienintelis, (3) homogeninis uždavinys turi $2J$ tiesiškai nepriklausomų sprendinių. (3) uždavinio, su nykstančia dešine puse, sprendiniui iš klasės $\mathcal{D}^l_{-\beta} H(\Omega)$ buvo sukonstruota asimptotinė išraiška.

Teorema 1.1. *Tarkime, kad $\mathbf{f}_k \in \mathcal{R}^l_\beta H(\Omega)$. Jei funkcija $\mathbf{u}_k \in \mathcal{D}^l_{-\beta} H(\Omega)$ su $\mathbf{v}_k|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}$ yra (3) uždavinio sprendinys, tuomet yra teisinga tokia formulė*

$$\mathbf{u}_k = \sum_{j=1}^{J} \chi^j \Big\{ a^j_{ck} \mathbf{u}^{j0}_{ck} + a^j_{sk} \mathbf{u}^{j0}_{sk} + b^j_{ck} \mathbf{u}^{j1}_{ck} + b^j_{sk} \mathbf{u}^{j1}_{sk} \Big\} + \tilde{\mathbf{u}}_k. \tag{6}$$

Čia $\tilde{\mathbf{u}}_k \in \mathcal{D}^l_\beta H(\Omega)$ yra ekspoentiškai nykstantis vektorinis laukas, $a^j_{ck}, a^j_{sk}, b^j_{ck}, b^j_{sk} \in \mathbb{R}$ yra tam tikros konstantos, $\chi^j = \chi^j(x^j_3)$, $j = 1, \ldots, J$, žymi nupjautinę funkciją, turinčią atramą cilindre Ω^j_+ ir tenkinančią sąlygą $\chi^j(x^j_3) = 1$, kai $x^j_3 \geq 1$.

Pagrindinė (6) asimptotikos dalis yra suformuota iš vektorinių laukų

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{j0}_{ck} &= (0,0,0,\ 1,\ 0,0,0,\ 0), \quad \mathbf{u}^{j1}_{ck} = (0,0,\varphi^j_k,\ -x^j_3,\ 0,0,-\psi^j_k,\ 0), \\ \mathbf{u}^{j0}_{sk} &= (0,0,0,\ 0,\ 0,0,0,\ 1), \quad \mathbf{u}^{j1}_{sk} = (0,0,\psi^j_k,\ 0,\ 0,0,\varphi^j_k,\ -x^j_3). \end{aligned} \tag{7}$$

Šios funkcijos yra (3) homogeninio uždavinio begaliname cilindre $\Omega^j = \omega^j \times (-\infty, \infty)$ sprendiniai. Jų apibrėžime naudojamos funkcijos (φ^j_k, ψ^j_k) priklauso tik nuo kintamųjų $y^j = (x^j_1, x^j_2)$ ir tenkina tokį uždavinį:

$$\begin{cases} k\psi^j_k + \nu\Delta\varphi^j_k = -1, & y^j \in \omega^j, \\ k\varphi^j_k - \nu\Delta\psi^j_k = 0, & y^j \in \omega^j, \\ \varphi^j_k = 0, \ \ \psi^j_k = 0, & y^j \in \partial\omega^j. \end{cases} \tag{8}$$

Turėdami omenyje 1.1 teoremoje pateiktą vektorinio lauko $\mathbf{u}_k = (\mathbf{v}_{ck}, p_{ck}, \mathbf{v}_{sk}, p_{sk})$ asimptotinę išrašką, (2) eilučių Furjė koeficientus galime užrašyti tokiu pavidalu:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{ck} &= \left(0, 0, \sum_{j=1}^{J} \chi^j \left\{ b_{ck}^j \phi_k^j + b_{sk}^j \psi_k^j \right\} \right) + \tilde{\mathbf{v}}_{ck}, \\ \mathbf{v}_{sk} &= \left(0, 0, \sum_{j=1}^{J} \chi^j \left\{ b_{sk}^j \phi_k^j - b_{ck}^j \psi_k^j \right\} \right) + \tilde{\mathbf{v}}_{sk}, \end{aligned} \tag{9}$$

$$p_{ck} = \sum_{j=1}^{J} \chi^j \left\{ a_{ck}^j - b_{ck}^j x_3^j \right\} + \tilde{p}_{ck}, \quad p_{sk} = \sum_{j=1}^{J} \chi^j \left\{ a_{sk}^j - b_{sk}^j x_3^j \right\} + \tilde{p}_{sk}. \tag{10}$$

Nesunku pastebėti, kad greičio koeficientai $\mathbf{v}_{ck}$ ir $\mathbf{v}_{sk}$ yra sudaryti iš eksponentiškai nykstančių dalių $\tilde{\mathbf{v}}_{ck}$ ir $\tilde{\mathbf{v}}_{sk}$, bei Puazeilio tipo vektorinių laukų, generuojamų (6) asimptotikos narių $\mathbf{u}_{ck}^{j1}$ ir $\mathbf{u}_{sk}^{j1}$. Slėgio koeficientai p_{ck} ir p_{sk} turi tiek absoliutiniu didumu augančius, tiek pastovius, tiek eksponentiškai nykstančius dėmenis.

Simboliu $\mathbb{D}_{\pm\beta}^{l} H(\Omega)$ pažymėkime aibės $\mathcal{R}_{\beta}^{l} H(\Omega)$ pirmavaizdį, t.y., funkcijų, turinčių (6) pavidalą, aibę. Tam, kad būtų galima parinkti vienintelį (3) uždavinio sprendinį klasėje $\mathbb{D}_{\pm\beta}^{l} H(\Omega)$, būtina užfiksuoti konstantas $\{a_{ck}^j, a_{sk}^j, b_{ck}^j, b_{sk}^j\}_{j=1}^{J}$ (6) išraiškoje. Pirmoji lygybė (5) formulėje rodo, kad tik pusė iš šių konstantų gali būti parenkama laisvai. Dėl koeficientų fizikinės prasmės[iv], aibėje $\{a_{ck}^j, a_{sk}^j, b_{ck}^j, b_{sk}^j\}_{j=1}^{J}$ laisvai parinkti reikšmes galima ne bet kuriam rinkiniui, sudarytam iš $2J$ konstantų. Tinkamam šių konstantų parinkimui mes naudojame apibendrintąją Gryno formulę.

Apibendrintoji Gryno formulė

(3) uždavinio analizei buvo išvesta *klasikinė Gryno formulė*[v] (žr., [6]):

$$\begin{aligned} &(-\nu\Delta \mathbf{v}_{ck} + \nabla p_{ck} + k\mathbf{v}_{sk}, \mathbf{V}_{ck})_{\Omega} + (-\nabla \cdot \mathbf{v}_{ck}, P_{ck})_{\Omega} \\ &+(-\nu\Delta \mathbf{v}_{sk} + \nabla p_{sk} - k\mathbf{v}_{ck}, \mathbf{V}_{sk})_{\Omega} + (-\nabla \cdot \mathbf{v}_{sk}, P_{sk})_{\Omega} \\ &+(\mathbf{v}_{ck}, \mathbf{n}P_{ck} - \nu\partial_{\mathbf{n}} \mathbf{V}_{ck})_{\partial\Omega} + (\mathbf{v}_{sk}, \mathbf{n}P_{sk} - \nu\partial_{\mathbf{n}} \mathbf{V}_{sk})_{\partial\Omega} \\ &-(\mathbf{v}_{ck}, -\nu\Delta \mathbf{V}_{ck} + \nabla P_{ck} - k\mathbf{V}_{sk})_{\Omega} - (p_{ck}, -\nabla \cdot \mathbf{V}_{ck})_{\Omega} \\ &-(\mathbf{v}_{sk}, -\nu\Delta \mathbf{V}_{sk} + \nabla P_{sk} + k\mathbf{V}_{ck})_{\Omega} - (p_{sk}, -\nabla \cdot \mathbf{V}_{sk})_{\Omega} \\ &-(\mathbf{n}p_{ck} - \nu\partial_{\mathbf{n}} \mathbf{v}_{ck}, \mathbf{V}_{ck})_{\partial\Omega} - (\mathbf{n}p_{sk} - \nu\partial_{\mathbf{n}} \mathbf{v}_{sk}, \mathbf{V}_{sk})_{\partial\Omega} = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Ši Gryno formulė (3) uždaviniui apibrėžia tokį *formaliai jungtinį uždavinį*:

[iv] Pavyzdžiui, koeficientai b_{ck}^j, b_{sk}^j yra atsakingi už srauto dydį cilindre Ω_+^j. Kadangi nagrinėjamas skystis yra nespūdus, srautų per visų cilindrų skerspjūvius suma turi būti lygi nuliui. Iš to seka, kad koeficientai $\{b_{ck}^j, b_{sk}^j\}_{j=1}^{J}$ privalo tenkinti tam tikras suderinamumo sąlygas.

[v] (11) formulė galioja, kai funkcijos $\mathbf{u}_k = (\mathbf{v}_{ck}, p_{ck}, \mathbf{v}_{sk}, p_{sk})$ ir $\mathbf{U}_k = (\mathbf{V}_{ck}, P_{ck}, \mathbf{V}_{sk}, P_{sk})$ yra pakankamai glodžios, pavyzdžiui, iš klasės $C_0^\infty(\overline{\Omega})$, arba kai begalybėje nyksta pakankamai greitai.

$$\begin{cases} -\nu\Delta\mathbf{V}_{ck} + \nabla P_{ck} - k\mathbf{V}_{sk} &= \mathbf{F}_{ck}, \qquad x \in \Omega, \\ -\nabla\cdot\mathbf{V}_{ck} &= 0, \qquad x \in \Omega, \\ -\nu\Delta\mathbf{V}_{sk} + \nabla P_{sk} + k\mathbf{V}_{ck} &= \mathbf{F}_{sk}, \qquad x \in \Omega, \\ -\nabla\cdot\mathbf{V}_{sk} &= 0, \qquad x \in \Omega, \\ \mathbf{V}_{ck} = \mathbf{0},\ \mathbf{V}_{sk} &= \mathbf{0}, \qquad x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{12}$$

Šis uždavinys turi panašias savybes, kaip (3) uždavinys[vi]. Tiksliau tariant, kiekviename begaliniame cilindre Ω^j (12) homogeninės lygtys turi keturis tiesiškai nepriklausomus sprendinius

$$\mathbf{U}_{ck}^{j0} = (0,0,0,1,0,0,0,0), \quad \mathbf{U}_{ck}^{j1} = (0,0,\varphi_k^j,-x_3^j,0,0,\psi_k^j,0), \tag{13}$$

$$\mathbf{U}_{sk}^{j0} = (0,0,0,0,0,0,0,1), \quad \mathbf{U}_{sk}^{j1} = (0,0,\psi_k^j,0,0,0,-\varphi_k^j,x_3^j). \tag{14}$$

(12) uždavinio, su nykstančia dešiniąja puse, sprendiniui $\mathbf{U}_k \in \mathcal{D}^l_{-\beta}H(\Omega)$ galioja tokia asimptotinė išraiška

$$\mathbf{U}_k = \sum_{j=1}^{J} \chi^j \left\{ A_{ck}^j \mathbf{U}_{ck}^{j0} + A_{sk}^j \mathbf{U}_{sk}^{j0} + B_{ck}^j \mathbf{U}_{ck}^{j1} + B_{sk}^j \mathbf{U}_{sk}^{j1} \right\} + \widetilde{\mathbf{U}}_k, \tag{15}$$

čia $\widetilde{\mathbf{U}}_k \in \mathcal{D}^l_{\beta}H(\Omega)$, $A_{ck}^j, A_{sk}^j, B_{ck}^j, B_{sk}^j \in \mathbb{R}$.

Erdvės $\mathcal{D}^l_{-\beta}H(\Omega)$ funkcijų, turinčių (15) pavidalą, klasė disertacijoje žymima $\mathbb{D}^l_{\pm\beta}H(\Omega)^*$.

(12) uždavinį atitinkantis operatorius

$$\left(\mathbf{A}^l_{-\beta\to\beta,k}\right)^* : \mathcal{D}^l_{-\beta}H(\Omega) \supset \mathbb{D}^l_{\pm\beta}H(\Omega)^* \to \mathcal{R}^l_{\beta}H(\Omega)$$

taip pat yra Fredholmo tipo, jo branduolio ir ko-branduolio dimensijos aprašomos lygybėmis:

$$\dim\ker\mathbf{A}^l_{-\beta\to\beta,k} = 2J, \quad \dim\operatorname{coker}\mathbf{A}^l_{-\beta\to\beta,k} = 0. \tag{16}$$

Apibrėžę vektorinius laukus $\mathbf{V}_k = (\mathbf{V}_{ck}, \mathbf{V}_{sk})$, $\mathbf{F}_k = (\mathbf{F}_{ck}, 0, \mathbf{F}_{sk}, 0)$, (12) uždavinį sutrumpintai užrašome tokiu pavidalu:

$$\mathbf{S}_k^*\mathbf{U}_k = \mathbf{F}_k, \quad x \in \Omega, \qquad \mathbf{V}_k = \mathbf{0}, \quad x \in \partial\Omega. \tag{17}$$

[vi](12) uždavinys nuo (3) uždavinio skiriasi narių $k\mathbf{V}_{ck}$ ir $k\mathbf{V}_{sk}$ ženklais. Stacionarių (12) uždavinių seką (gaunamą, kai $k = 0, 1, \ldots$) atitinka laiko atžvilgiu periodinis uždavinys (30). Tai yra, (12) uždavinys funkcijoms $\mathbf{V}_{ck}, \mathbf{V}_{sk}, P_{ck}, P_{sk}$ yra gaunamas ieškant (30) uždavinio sprendinio Furjė eilučių pavidalu $\mathbf{V}(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \{\mathbf{V}_{ck}(x)\cos kt + \mathbf{V}_{sk}(x)\sin kt\}$, $P(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \{P_{ck}(x)\cos kt + P_{sk}(x)\sin kt\}$. Pastebėsime, kad (30) periodiniame uždavinyje prieš greičio vektoriaus išvestinę laiko atžvilgiu yra neigiamas ženklas. Kitaip tariant, (30) yra "atgalinio laiko" uždavinys. Bendru atveju tokie uždaviniai nėra korektiški, tačiau, dėl disertacijoje nagrinėjamų uždavinių periodiškumo, (30) uždavinį galima tirti įprastais metodais.

Naudojant (4) ir (17) žymėjimus, (11) Gryno formulę galima perrašyti taip:

$$(\mathbf{S}_k\mathbf{u}_k, \mathbf{U}_k)_\Omega + (\mathbf{v}_k, \mathbf{n}P_k - \nu\partial_\mathbf{n}\mathbf{V}_k)_{\partial\Omega} = (\mathbf{u}_k, \mathbf{S}_k^*\mathbf{U}_k)_\Omega + (\mathbf{n}p_k - \nu\partial_\mathbf{n}\mathbf{v}_k, \mathbf{V}_k)_{\partial\Omega}. \tag{18}$$

2.3 disertacijos poskyryje buvo išvesta taip vadinama *apibendrintoji Gryno formulė*, kuri galioja funkcijų $\mathbf{u}_k \in \mathbb{D}^l_{\pm\beta}H(\Omega)$ ir $\mathbf{U}_k \in \mathbb{D}^l_{\pm\beta}H(\Omega)^*$ atveju.

Teorema 1.2. *Tarkime, kad* $2J \times 4J$ *eilės matricos* $\mathbb{B}_k$, $\mathbb{T}_k$, $\mathbb{S}_k$, $\mathbb{Q}_k$ *tenkina sąlygą*

$$\begin{pmatrix} -\mathbb{T}_k \\ \mathbb{Q}_k \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbb{B}_k \\ \mathbb{S}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{G}_k \\ -\mathbb{F}_k & \mathbb{O} \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Tuomet funkcijoms $\mathbf{u}_k \in \mathbb{D}^l_{\pm\beta}H(\Omega)$ *ir* $\mathbf{U}_k \in \mathbb{D}^l_{\pm\beta}H(\Omega)^*$ *galioja sąryšis*

$$(\mathbf{S}_k\mathbf{u}_k, \mathbf{U}_k)_\Omega + \langle \mathbb{B}_k\pi\mathbf{u}_k, \mathbb{T}_k\pi\mathbf{U}_k\rangle_{2J} = (\mathbf{u}_k, \mathbf{S}_k^*\mathbf{U}_k)_\Omega + \langle \mathbb{S}_k\pi\mathbf{u}_k, \mathbb{Q}_k\pi\mathbf{U}_k\rangle_{2J}. \tag{20}$$

Čia $\langle \, , \, \rangle_{2J}$ žymi skaliarinę sandaugą erdvėje $\mathbb{R}^{2J}$. Trumpai paaiškinsime kitus šioje teoremoje naudojamus žymėjimus. (19) sąlygoje esančios $2J \times 2J$ eilės matricos $\mathbb{F}_k$ ir $\mathbb{G}_k$ yra apibrėžiamos taip:

$$\mathbb{F}_k = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_k & -\mathcal{D}_k \\ \mathcal{D}_k & \mathcal{C}_k \end{pmatrix}, \quad \mathbb{G}_k = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_k & -\mathcal{D}_k \\ -\mathcal{D}_k & -\mathcal{C}_k \end{pmatrix},$$

čia

$$\mathcal{C}_k = \operatorname{diag}\left(c_k^1, c_k^2, \dots, c_k^J\right), \quad \mathcal{D}_k = \operatorname{diag}\left(d_k^1, d_k^2, \dots, d_k^J\right) \tag{21}$$

yra $J \times J$ eilės įstrižaininės matricos, sudarytos iš koeficientų

$$c_k^j = \int_{\omega^j} \varphi_k^j dy^j, \quad d_k^j = -\int_{\omega^j} \psi_k^j dy^j. \tag{22}$$

Matricos $\mathbb{F}_k$ ir $\mathbb{G}_k$ yra susijusios su funkcijų $\mathbf{u}_k \in \mathbb{D}^l_{\pm\beta}H(\Omega)$ ir $\mathbf{U}_k \in \mathbb{D}^l_{\pm\beta}H(\Omega)^*$ generuojamais srautais per cilindrų Ω_+^j, $j = 1, \dots, J$, skerspjūvius ω^j.

(20) formulėje naudojamas baigtiniamatis operatorius $\pi : \mathbf{u}_k \in \mathbb{D}^l_{\pm\beta}H(\Omega) \to \mathbb{R}^{4J}$, kuris funkcijai $\mathbf{u}_k \in \mathbb{D}^l_{\pm\beta}H(\Omega)$ priskiria $4J$-matį vektorių, sudarytą iš konstantų (6) išraiškoje:

$$\pi\mathbf{u}_k = (b_{ck}^1, \dots, b_{ck}^J, b_{sk}^1, \dots, b_{sk}^J, a_{ck}^1, \dots, a_{ck}^J, a_{sk}^1, \dots, a_{sk}^J).$$

Papildomi, lyginant su (18) formule, nariai $\langle \mathbb{B}_k\pi\mathbf{u}_k, \mathbb{T}_k\pi\mathbf{U}_k\rangle_{2J}$ ir $\langle \mathbb{S}_k\pi\mathbf{u}_k, \mathbb{Q}_k\pi\mathbf{U}_k\rangle_{2J}$ (20) formulėje atsiranda iš pagrindinės asimptotikos dalies (6) ir (15) formulėse. $\mathbb{B}_k$, $\mathbb{T}_k$, $\mathbb{S}_k$ ir $\mathbb{Q}_k$ yra $2J \times 4J$ eilės matricos, o $\pi\mathbf{u}_k$ ir $\pi\mathbf{U}_k$ yra $4J$-mačiai vektoriai, sudaryti iš koeficientų (6) ir (15) išraiškose. Todėl kiekvienas iš reiškinių

$$\mathbb{B}_k\pi\mathbf{u}_k, \quad \mathbb{S}_k\pi\mathbf{u}_k, \quad \mathbb{T}_k\pi\mathbf{U}_k, \quad \mathbb{Q}_k\pi\mathbf{U}_k$$

apibrėžia $2J$ sąryšių tarp konstantų $\{a_{ck}^j, a_{sk}^j, b_{ck}^j, b_{sk}^j\}_{j=1}^J$ arba $\{A_{ck}^j, A_{sk}^j, B_{ck}^j, B_{sk}^j\}_{j=1}^J$.

Asimptotinės sąlygos begalybėje

[6] monografijoje yra pateikta metodika, kuri leidžia Gryno formulės pagalba formuluoti įvairias kraštines sąlygas elipsiniams uždaviniams aprėžtose srityse. Šią idėją galima pritaikyti ir begalinių sričių atveju (tai buvo atlikta [8] straipsnyje stacionariems Stokso ir Navjė-Stokso uždaviniams begalinių cilindrų sistemose). Tarkime, kad $\mathbf{h}_k, \mathbf{H}_k \in \mathbb{R}^{2J}$ yra žinomi vektoriai. Pasinaudojant (20) apibendrintaja Gryno formule, (4) ir (17) uždavinius papildykime sąryšiais $\mathbb{B}_k\pi\mathbf{u}_k = \mathbf{h}_k$ ir $\mathbb{Q}_k\pi\mathbf{U}_k = \mathbf{H}_k$, t.y., nagrinėkime tokius uždavinius

$$\mathbf{S}_k\mathbf{u}_k = \mathbf{f}_k, \quad x \in \Omega, \qquad \mathbf{v}_k = \mathbf{0}, \quad x \in \partial\Omega, \qquad \mathbb{B}_k\pi\mathbf{u}_k = \mathbf{h}_k, \tag{23}$$

$$\mathbf{S}_k^*\mathbf{U}_k = \mathbf{F}_k, \quad x \in \Omega, \qquad \mathbf{V}_k = \mathbf{0}, \quad x \in \partial\Omega, \qquad \mathbb{Q}_k\pi\mathbf{U}_k = \mathbf{H}_k. \tag{24}$$

(23) uždavinį atitinkantis operatorius

$$\mathbb{A}_k^l : \mathbb{D}_{\pm\beta}^l H(\Omega) \to \mathcal{R}_\beta^l H(\Omega) \times \mathbb{R}^{2J}$$

paveldi Fredholmiškumo savybes iš operatoriaus $\mathbf{A}^l_{-\beta\to\beta,k}$. Disertacijos 1.6 poskyryje įrodytas toks (23) uždavinio išsprendžiamumą nusakantis teiginys:

Teorema 1.3. *Tarkime, kad matricos* $\mathbb{B}_k$, $\mathbb{S}_k$, $\mathbb{T}_k$, $\mathbb{Q}_k$ *tenkina* (19) *sąryšį. Tuomet operatoriaus* $\mathbb{A}_k^l$ *branduolys ir ko-branduolys yra aprašomi formulėmis*

1) $\ker \mathbb{A}_k^l = \{\mathbf{u}_k : \mathbf{S}_k\mathbf{u}_k = \mathbf{0},\ \mathbf{v}_k|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}, \mathbb{B}_k\pi\mathbf{u}_k = \mathbf{0}\}$;

2) $\operatorname{coker} \mathbb{A}_k^l = \{(\mathbf{U}_k, \mathbb{T}_k\pi\mathbf{U}_k) : \mathbf{S}_k^*\mathbf{U}_k = \mathbf{0},\ \mathbf{V}_k|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}, \mathbb{Q}_k\pi\mathbf{U}_k = \mathbf{0}\}$.

Ši teorema pirmiausiai teigia, kad (23) sistemos sprendinio vienatis priklauso nuo matricos $\mathbb{B}_k$ parinkimo asimptotinėse sąlygose $\mathbb{B}_k\pi\mathbf{u}_k = \mathbf{h}_k$. Antra, kad (23) uždavinys turi sprendinį $\mathbf{u}_k = (\mathbf{v}_{ck}, p_{ck}, \mathbf{v}_{sk}, p_{sk}) \in \mathbb{D}_{\pm\beta}^l H(\Omega)$ tada ir tik tada, kai uždavinio dešinioji pusė tenkina ortogonalumo sąlygą

$$\int\limits_\Omega \mathbf{f}_k \cdot \mathbf{U}_k dx + \langle \mathbf{h}_k, \mathbb{T}_k\pi\mathbf{U}_k\rangle_{2J} = 0 \tag{25}$$

su kiekvienu (24) homogeninio uždavinio sprendiniu $\mathbf{U}_k$.

Laiko atžvilgiu periodinis Stokso uždavinys

Antrasis disertacijos skyrius yra skirtas (1) uždavinio sprendinių egzistavimo ir vienaties klausimų analizei. Naudojantis (9), (10) formulėmis ir [2], [4] straipsnių rezultatais apibrėžiama erdvė $\mathbb{D}^2_{\pm\beta}H(\Omega \times (0, 2\pi))$, sudaryta iš laiko atžvilgiu periodinių funkcijų $\mathbf{u} = (\mathbf{v}, p)$ turinčių:

(a) specialią struktūrą ir (b) tam tikrą glodumą (žr. žemiau):

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(x,t) &= \sum_{j=1}^{J}\chi^j(x_3^j)\mathbf{v}_p^j(y^j,t)+\widetilde{\mathbf{v}}(x,t),\\ p(x,t) &= \sum_{j=1}^{J}\chi^j(x_3^j)p_p^j(x_3^j,t)+\sum_{j=1}^{J}\chi^j(x_3^j)p_0^j(t)+\widetilde{p}(x,t).\end{aligned}\tag{26}$$

Šių funkcijų Puazeilio dalis

$$\mathbf{v}_p^j(y^j,t)=\Big(0,0,v^j(y^j,t)\Big),\quad p_p^j(x_3^j,t)=-q^j(t)x_3^j.$$

yra apibrėžiama eilutėmis

$$v^j(y^j,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\Big\{\Big(b_{ck}^j\varphi_k^j(y^j)+b_{sk}^j\psi_k^j(y^j)\Big)\cos kt+\Big(b_{sk}^j\varphi_k^j(y^j)-b_{ck}^j\psi_k^j(y^j)\Big)\sin kt\Big\},$$

$$q^j(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\{b_{ck}^j\cos kt+b_{sk}^j\sin kt\}.$$

Erdvės $\mathbb{D}^2_{\pm\beta}H(\Omega\times(0,2\pi))$ apibrėžime tariama, kad (26) funkcijos tenkina tokias sąlygas[vii]:

$$\begin{aligned}v^j &\in C(0,2\pi;\mathring{H}^1(\omega^j))\cap L^2(0,2\pi;H^2(\omega^j)),\\ \partial_t v^j &\in L^2(0,2\pi;L^2(\omega^j)),\quad q^j\in L^2(0,2\pi),\\ p_0^j &\in L^2(0,2\pi),\quad \text{visiems}\quad j=1,\dots,J,\\ \widetilde{\mathbf{v}}\in L^2(0,2\pi;H^2_\beta(\Omega)),&\quad \partial_t\widetilde{\mathbf{v}}\in L^2(0,2\pi;L^2_\beta(\Omega)),\\ \nabla\widetilde{p}\in L^2(0,2\pi;L^2_\beta(\Omega))&\quad \widetilde{p}\in L^2(0,2\pi;L^2_{\beta'}(\Omega)).\end{aligned}\tag{27}$$

(1) Stokso uždaviniui buvo išvesta apibendrintoji Gryno formulė

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}\int_\Omega \mathbf{S}\mathbf{u}(x,t)\cdot\mathbf{U}(x,t)dxdt+\langle\mathbb{B}\Pi\mathbf{u},\,\mathbb{T}\Pi\mathbf{U}\rangle_\infty\\ &=\int_0^{2\pi}\int_\Omega \mathbf{u}(x,t)\cdot\mathbf{S}^*\mathbf{U}(x,t)dxdt+\langle\mathbb{S}\Pi\mathbf{u},\,\mathbb{Q}\Pi\mathbf{U}\rangle_\infty,\end{aligned}\tag{28}$$

galiojanti funkcijoms $\mathbf{u}\in\mathbb{D}^2_{\pm\beta}H(\Omega\times(0,2\pi))$ ir $\mathbf{U}\in\mathbb{D}^2_{\pm\beta}H(\Omega\times(0,2\pi))^*$ (šios erdvės apibrėžimas yra analogiškas $\mathbb{D}^2_{\pm\beta}H(\Omega\times(0,2\pi))$ apibrėžimui). (28) sąryšyje yra naudojamas begaliniamatis projektorius $\Pi\mathbf{u}=(\pi\mathbf{u}_0,\pi\mathbf{u}_1,\dots)$ ir operatoriai (begalinės matricos)

[vii] Paskutinė įdėtis (27) formulėje galioja bet kuriam β', tenkinančiam sąlygą $0<\beta'<\beta$.

$\mathbb{B}, \mathbb{S}, \mathbb{T}, \mathbb{Q} : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$, apibrėžiami lygybėmis

$$\mathbb{B}^j = \operatorname{diag}(\mathbb{B}_0^j, \mathbb{B}_1^j, \ldots), \quad \mathbb{S}^j = \operatorname{diag}(\mathbb{S}_0^j, \mathbb{S}_1^j, \ldots),$$
$$\mathbb{T}^j = \operatorname{diag}(\mathbb{T}_0^j, \mathbb{T}_1^j, \ldots), \quad \mathbb{Q}^j = \operatorname{diag}(\mathbb{Q}_0^j, \mathbb{Q}_1^j, \ldots).$$

Kaip ir stacionariuoju atveju, Gryno formulė periodinį Stokso uždavinį papildo asimptotinėmis sąlygomis begalybėje

$$\mathbb{B}\Pi\mathbf{u} = \mathbf{h}. \tag{29}$$

Čia $\mathbf{h}$ žymi skaičių seką, sudarytą iš duotų periodinių funkcijų $h^j = h^j(t)$, $j = 1, \ldots, J$, Furjė koeficientų. (28) formulė (1) Stokso uždaviniui su (29) asimptotinėmis sąlygomis begalybėje apibrėžia formaliai jungtinį uždavinį

$$\begin{cases} -\partial_t\mathbf{V} - \nu\Delta\mathbf{V} + \nabla P &= \mathbf{F}, \quad (x,t) \in \Omega \times (0, 2\pi), \\ -\nabla \cdot \mathbf{V} &= \mathbf{0}, \quad (x,t) \in \Omega \times (0, 2\pi), \\ \mathbf{V} &= \mathbf{0}, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0, 2\pi), \\ \mathbf{V}(x,0) = \mathbf{V}(x, 2\pi), & \qquad x \in \Omega. \end{cases} \tag{30}$$

$$\mathbb{Q}\Pi\mathbf{U} = \mathbf{H}.$$

2.4 disertacijos poskyryje yra įrodoma tokia teorema:

Teorema 1.4. *Tarkime, kad laiko atžvilgiu periodinės funkcijos* $\mathbf{f} = \mathbf{f}(x,t)$ *ir* $h^j = h^j(t), j = 1, \ldots, J$, *yra pakankamai glodžios (žr. detales teoremos įrodyme disertacijoje). Taip pat tarkime, kad galioja* (28) *apibendrintoji Gryno formulė. Tuomet teisingi tokie teiginiai.*

(i) Jei (30) *homogeninis uždavinys su homogeninėmis asimptotinėmis sąlygomis* $\mathbb{Q}\Pi\mathbf{U} = \mathbf{0}$ *turi tik trivialų sprendinį, tai* (1), (29) *uždavinys turi vienintelį sprendinį* $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x,t)$, $p = p(x,t)$ *klasėje* $\mathbb{D}^2_{\pm\beta}H(\Omega \times (0, 2\pi))$.

(ii) Tarkime, kad homogeninis (30) *uždavinys turi netrivialių sprendinių* $\mathbf{U}(x,t) = (\mathbf{V}(x,t), P(x,t))$. *Tuomet* (1), (29) *uždavinys turi sprendinį* $\mathbf{u} = (\mathbf{v}, p) \in \mathbb{D}^2_{\pm\beta}H(\Omega \times (0, 2\pi))$ *tada ir tik tada, kai suderinamumo sąlyga*

$$\int_0^{2\pi}\int_\Omega \mathbf{f}(x,t) \cdot \mathbf{V}(x,t)dxdt + \langle \mathbf{h}, \mathbb{T}\Pi\mathbf{U}\rangle_\infty = 0 \tag{31}$$

galioja visiems (30) *homogeninio uždavinio sprendiniams* $\mathbf{U} = \mathbf{U}(x,t)$. *Šiuo atveju pora* $(\mathbf{v}, p)$ *nėra apibrėžiama vienareikšmiškai.*

2.6 disertacijos poskyryje nagrinėjami du uždaviniai, kai skysčio srautas yra fiksuojamas tik viename cilindre, o kituose cilindruose formuluojamos sąlygos, slėgio funkcijai p (ne slėgio gradientui ∇p). Šie pavyzdžiai rodo, kad disertacijoje pateikta metodika galima formuluoti korektiškas asimptotines sąlygas begalybėje, kurios praplečia iki šiol naudotų sąlygų klases.

Rezultatų naujumas

Disertacijoje gauti rezultatai yra nauji. Metodika, leidžianti formuluoti korektiškas asimptotines sąlygas begalybėje (1) uždaviniui iki šiol nebuvo pasiūlyta.

Aprobacija

Disertacijos rezultatai pristatyti Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto Diferencialinių lygčių ir skaičiavimo matematikos katedro seminare bei žemiau išvardintose tarptautinėse mokslinėse konferencijose.

- "Diferential equations and their applications", Panevėžys, Lietuva, 2009 m. rugsėjo 10–12 d.
- "Regularity aspects of PDEs", Będlewo, Lenkija, 2010 m. rugsėjo 5–11 d.
- "Parabolic and Navier-Stokes equations", Będlewo, Lenkija, 2012 m. rugsėjo 3–7 d.
- "Applied Mathematics and Scientific Computing", Šibenik, Kroatija, 2013 m. birželio 10–14 d.
- "EQUADIFF 13", Praha, Čekijos Respublika, 2013 m. rugpjūčio 26–30 d.

Publikacijos

Disertacijos rezultatai publikuoti žemiau išvardintuose darbuose.

Išspausdinti straipsniai:

- M. Skujus, On the Green's formula for a Stokes type problem, *Lietuvos Matematikos Rinkinys, LMD darbai*, **48/49**, 72-77 , 2008.
- M. Skujus, On the time-periodic Stokes problem set in domains with cylindrical outlets to infinity, *Asymptotic Analysis*, **81**(2), 93-119, 2013.

Spaudai priimti straipsniai:

- M. Skujus, Asymptotic conditions at infinity for the time-periodic Stokes problem in a system of pipes, priimtas į žurnalą *Analysis and Applications.*

Išvados

Disertacijoje nagrintėta (1) laiko atžvilgiu periodinė Stokso sistema srityse su cilindriniais išėjimais į begalybę. Tyrimų tikslas buvo rasti būdą, kaip užfiksuoti vienintelį šios sistemos sprendinį su neaprėžtu Dirichlė integralu. Kitaip tariant, pateikti metodiką, kuri leidžia suformuluoti asimptotines sąlygas begalybėje, užtikrinančias sprendinio egzistavimą ir vienatį periodiam Stokso uždaviniui. Šiam tikslui pasiekti, periodinis uždavinys buvo išskaidytas į elipsinių Stokso tipo uždavinių seką periodinio sprendinio Furjė koeficientams. Sekant [8], [7] darbų idėjomis, šie stacionarūs uždaviniai buvo nagrinėjami tam tikrose svorinėse Sobolevo erdvėse $\mathbb{D}^l_{\pm\beta}H(\Omega)$, kurioms priklauso ir funkcijos su begaliniais Dirichlė integralais. Disertacijoje buvo parodyta, kad Stokso tipo uždavinio sprendinių vienatis šioje klasėje gali būti garantuota tinkamai suformulavus asimptotines sąlygas begalybėje. Korektiškam sąlygų begalybėje formulavimui buvo panaudota Stokso tipo uždaviniams išvesta apibendrintoji Gryno formulė.

Aukščiau minėti rezultatai buvo pritaikyti nagrinėjant laiko atžvilgiu periodinį Stokso uždavinį. Pirmiausiai buvo apibrėžta specialių periodinių funkcijų klasė $\mathbb{D}^l_{\pm\beta}H(\Omega\times(0,2\pi))$. Šios klasės elementai pasižymi specialia asimptotine struktūra ir gali turėti neaprėžtus Dirichlė integralus. Periodiniam Stokso uždaviniui buvo išvesta apibendrintoji Gryno formulė, galiojanti funkcijoms iš klasės $\mathbb{D}^2_{\pm\beta}H(\Omega\times(0,2\pi))$. Gauti teoriniai rezultatai leido parodyti, kad:

- laiko atžvilgiu periodinio sprendinio $(\mathbf{v},p)\in\mathbb{D}^2_{\pm\beta}H(\Omega\times(0,2\pi))$ vienatis gali būti užtikrinama suformuluojant asimptotines sąlygas begalybėje;
- bendro pavidalo asimptotinės sąlygos gali būti gaunamos iš apibendrintosios Gryno formulės.

Disertacijos pabaigoje buvo pateikti keli pavyzdžiai, kai fiksuojant skysčio srautą viename cilindre, o kituose užfiksuojant skysčio slėgio reikšmes, gaunamas sprendinio egzistavimas ir vienatis klasėje $\mathbb{D}^2_{\pm\beta}H(\Omega\times(0,2\pi))$. Šie pavyzdžiai praplečia (1) uždaviniui iki šiol naudotų korektiškų sąlygų begalybėje klasę.

Summary

The object of this doctoral thesis is the time-periodic Stokes system set in domains with several cylindrical outlets to infinity. It is well known that in such unbounded domains the Stokes system have an infinite family of solutions. Our aim is to find a way how to select a unique solution having the infinite Dirichlet integral, i.e., to find the methods of imposing the asymptotic conditions at infinity which ensure the existence and uniqueness of the solution. In order to achieve this goal the time-periodic Stokes problem was reduced into a sequence of elliptic Stokes-type problems. Following the ideas presented in [8], [7], we studied these problems in the weighted Sobolev spaces $\mathbb{D}^l_{\pm\beta}H(\Omega)$, consisting the vector-fields with unbounded Dirichlet's integrals. The asymptotic representations of solutions to the Stokes-type problems were derived. It was shown that uniqueness of solutions from this class can be guaranteed by imposing the asymptotic conditions at infinity. The generalized Green formula, valid for the functions from the class $\mathbb{D}^l_{\pm\beta}H(\Omega)$ was derived. It was proved that the correct asymptotic conditions may be formulated with the help of this generalized Green formula. In particular, a special class of matrices was presented. This class can be used to impose in the outlets such conditions as the flow-rate or the total pressure.

Combining results obtained for the elliptic Stokes-type problems and the known results for the non-steady problems set in cylindrical domains we defined a set $\mathbb{D}^l_{\pm\beta}H(\Omega \times (0, 2\pi))$ consisting of time-periodic functions. These functions admit the special asymptotic representation and may have infinite Dirichlet's integrals. For the time-periodic Stokes problem we derived so called generalized Greens formula which is valid for functions from the class $\mathbb{D}^2_{\pm\beta}H(\Omega \times (0, 2\pi))$. It was shown that:

- the uniqueness of the time-periodic solution $(\mathbf{v}, p) \in \mathbb{D}^2_{\pm\beta}H(\Omega \times (0, 2\pi))$ can be achieved by imposing asymptotic conditions at infinity;
- general conditions at infinity may be obtained from the generalized Green formula.

Finally, we have presented several examples, showing that the flow-rate condition in one outlet combined with the prescribtion of the total pressure in the other outlets yield the existence and uniqueness of the time-periodic solution in $\mathbb{D}^2_{\pm\beta}H(\Omega \times (0, 2\pi))$.

Literatūra

[1] H. Beirao da Veiga, On the time-periodic solutions of the Navier-Stokes equations in an unbounded cylindrical domains. Leray's problem for periodic flows, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **178**(3), 301–325, 2005.

[2] G.P. Galdi, A.M. Robertson, The relation between flow rate and axial pressure gradient for time-periodic Poiseuille flow in a pipe, *J. Math. Fluid Mech.*, **7**, 215–223, 2005.

[3] J.G. Heywood, On uniqueness questions in the theory of viscous flow, *Acta Math.*, **136**, 6-102, 1976.

[4] V. Keblikas, On the time-periodic problem for the Stokes system in domains with cylindrical outlets to infinity, *Lithuanian Math. J.*, **7**(2), 147–163, 2007.

[5] V. Keblikas, K. Pileckas, On the existence of the nonstationary Poiseuille solution, *Siberian Math. J.*, **46**(3), 514–526, 2005.

[6] J.L. Lions, E. Magenes, *Nonhomogeneous boundary value problems*, Springer Verlag, Berlin, 1972.

[7] S.A. Nazarov, B.A. Plamenevskii, *Elliptic boundary value problems in domains with piecewise smooth boundaries*, Walter de Gruyter and Co, Berlin, 1994.

[8] S.A. Nazarov, K. Pileckas, Asymptotic conditions at infinity for the Stokes and Navier–Stokes problems in domains with cylindrical outlets to infinity, *Quaderni di Matematica, Advances in Fluid Dynamics*, **4**, 143–243, 1999.

[9] K. Pileckas, On the nonstationary linearized Navier–Stokes problem in domains with cylindrical outlets to infinity, *Mathematische Annal.*, **332**, 395–419, 2005.

[10] K. Pileckas, Existence of solutions with the prescribed flux of the Navier–Stokes system in an infinite cylinder, *J. Math. Fluid Mech.*, **8**(4), 542–563, 2006.

[11] K. Pileckas, Navier–Stokes system in domains with cylindrical outlets to infinity. Leray's problem, *Handbook of Mathematical Fluid Dynamics*, **4**, Ch. 8, p. 445–647, Elsevier, 2007.

[12] K. Pileckas, Global solvability in $W_2^{2,1}$-weighted spaces of the two-dimensional Navier-Stokes problem in domains with strip-like outlets to infinity, *J. Math.Fluid Mech.*, **10**(2), 272–309, 2008.

[13] V.A. Solonnikov, On the solvability of boundary and initial-boundary value problems for the Navier-Stokes system in domains with noncompact boundaries, *Pacific J. Math.*, **93**(2), 443-458, 1981.

Trumpos žinios apie disertacijos autorių

Gimimo data ir vieta

1984 metų lapkričio 28 diena, Jurbarkas.

Išsilavinimas

- 1995–2003 Jurbarko Antano Giedraičio-Giedriaus gimnazija.
- 2003–2007 Matematikos bakalauras, Vilniaus universitetas.
- 2007–2009 Matematikos magistras (Magna cum laude), Vilniaus universitetas.
- 2009–2013 Matematikos doktorantūros studijos, Vilniaus universitetas.

Akademinio darbo patirtis

- 2005–2008 Laborantas, Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos institutas.
- 2009–dabar Lektorius, Vilniaus universitetas.
- 2011–2012 Jaunesnysis mokslo darbuotojas mokslinių tyrimų projekte "Kraštiniai Navjė-Stokso lygčių sistemos uždaviniai neaprėžtose srityse" (projektą finansavo LMT pagal sutartį nr. MIP-2011/030). Projekto vadovas – prof. K. Pileckas.
- 2012–dabar Jaunesnysis mokslo darbuotojas bendrame Vilniaus universiteto ir Ciuricho universiteto mokslinių tyrimų projekte "Asymptotic Problems and Applications" (projektas finansuojamas Lietuvos ir Šveicarijos bendradarbiavimo programos "Research and Development" pagal sutartį nr. ŠMM-3-01/01). Projekto vadovas – prof. K. Pileckas.

Stažuotės

- 6 mėnesių trukmės (2013 07 01 – 12 31) stažuotė Ciuricho universiteto Matematikos institute, prof. M. Chipot mokslinėje grupėje. Vizitas finansuotas Šveicarijos stažuočių programos SCIEX-NMS^{ch}.

Stipendijos ir apdovanojimai

- Vardinė akademiko Vytauto Statulevičiaus stipendija, 2008 m.
- Asociacijos INFOBALT stipendija už darbą "Apie skysčio periodinio tekėjimo matematinį modeliavimą", 2013 m.