LMD mokslo darbai, 80–85
1998, Vilnius

Теорема Ердёша–Винтнера и распределение Пуассона

Й. Шяулис* (ВУ)

Введение

В теории чисел хорошо известно следующее утверждение Ердёша–Винтнера.

ТЕОРЕМА. *Пусть $f(m)$ – вещественная аддитивная функция,*

$$\nu_x\big(f(m) < u\big) = [x]^{-1}\#\{m \leqslant x,\, f(m) < u\}.$$

Функции распределения $\nu_x(f(m) < u))$ слабо сходится к предельной функции распределения тогда и только тогда, если ряды

$$\sum_{|f(p)|\geqslant 1} \frac{1}{p}, \quad \sum_{|f(p)|<1} \frac{f(p)}{p} \quad \sum_{|f(p)|<1} \frac{f^2(p)}{p}$$

сходятся. В случае выполнения этого условия характеристическая функция предельного закона имеет вид

$$\prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{e^{itf(p^r)}}{p^r}\right).$$

Доказательство теоремы и ряд коментариев можно найти в [1].

Как видим, предельный закон в теореме Ердёша–Винтнера имеет характеристическую функцию специального вида. Возникает естественный вопрос: какие распределения могут быть предельными в этой теореме? Пусть K – класс таких распределений. В книге [2] (смотрите раздел 17) приведены примеры распределений, непопадающих в класс K. Там же решается вопрос о принадлежности распределения Пуасона Π_λ (параметр $\lambda > 0$) классу K. Однако этот вопрос до конца не решен. Доказано, что предельный пуассоновский закон в теореме Ердёша–Винтнера не может появиться в случае: $f(2^r) = f(3^r) = 0$ для натуральных r. Целью настоящей работы является следующий более сильный результат.

ТЕОРЕМА. *Для любого $\lambda > \ln(16/15)$ пуассоновское распределение Π_λ не принадлежит классу K.*

Наше утверждение следует из ниже сформулированной леммы, представляющей и самостоятельный интерес.

*Работа поддержана Литовским фондом науки и студий.

Лемма. *Пусть p – простое число, λ – неотрицательное вещественное число, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ – целые неотрицательные числа. Если для любого $t \in (-\pi, \pi)$*

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{e^{it\alpha_r}}{p^r}\right) = e^{\lambda(e^{it}-1)}, \tag{1}$$

то $\lambda = 0$ при $p \geqslant 3$ и $\lambda \leqslant \ln(16/15)$ при $p = 2$.

Доказательство леммы. Допустим, что $\lambda > 0$. Из равенства (1) для любого натурального k имеем

$$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \sum_{\alpha_r = k} \frac{1}{p^r}\left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Следовательно, $\mathbb{N} \subset \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$.

Кроме того из (1) следует

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{1}{p^a} + \frac{\theta}{p^{a+1}}, \quad a \in \mathbb{N}, 0 \leqslant \theta < 1.$$

Поэтому

$$\lambda = -\ln\left(1 - \frac{1}{p^a} + \frac{\theta}{p^{a+1}}\right) \leqslant -\ln\left(1 - \frac{1}{p^a}\right) \leqslant -\ln\left(1 - \frac{1}{p}\right) \leqslant \ln 2.$$

Поскольку $\lambda < 1$, то пуассоновские вероятности $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ убывает при возрастании k. Значит, из равенства (1) получаем:

$$\left.\begin{aligned}
e^{-\lambda} &= 1 - \frac{1}{p^{b_0}} + \frac{\theta_0}{p^{b_0+1}}, && b_0 \geqslant 1, 0 \leqslant \theta_0 < 1,\\
\lambda e^{-\lambda} &= \frac{1}{p^{a_1}} - \frac{1}{p^{b_1}} + \frac{\theta_1}{p^{b_1+1}}, && b_1 > a_1 = b_0, 0 \leqslant \theta_1 < 1,\\
\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda} &= \frac{1}{p^{a_1}} - \frac{1}{p^{b_2}} + \frac{\theta_2}{p^{b_2+1}}, && b_2 > a_2 \geqslant b_1, 0 \leqslant \theta_2 < 1,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} &= \frac{1}{p^{a_k}} - \frac{1}{p^{b_k}} + \frac{\theta_k}{p^{b_k+1}}, && b_k > a_k \geqslant b_{k-1}, 0 \leqslant \theta_k < 1,
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где a_k и b_k – последовательности натуральных чисел.

I. Пусть в начале $p \geqslant 5$. Поскольку

$$\ln(1 - x) = -x - \theta^* x^2, \quad 0.5 \leqslant \theta^* < 0.583$$

при $0 \leqslant x \leqslant 1/5$, то из первого равенства системы (2) имеем

$$\lambda = \frac{1}{p^{b_0}} - \frac{\theta_0}{p^{b_0+1}} + \theta^*\left(\frac{1}{p^{b_0}} - \frac{\theta_0}{p^{b_0+1}}\right)^2 = \frac{1}{p^{b_0}}\left(1 + \frac{\Delta_0}{p}\right), \quad -1 \leqslant \Delta_0 \leqslant 0.583. \quad (3)$$

Кроме того

$$\frac{1}{1-x} = 1 + \hat{\theta}x, \quad 1 \leqslant \hat{\theta} \leqslant 1.25$$

при $0 \leqslant x \leqslant 1/5$. Из второго и третьего равенств системы (2) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{2} &= \left(\frac{1}{p^{a_2}} - \frac{1}{p^{b_2}} + \frac{\theta_2}{p^{b_2+1}}\right) \Big/ \left(\frac{1}{p^{a_1}} - \frac{1}{p^{b_1}} + \frac{\theta_1}{p^{b_1+1}}\right) \\ &= \left(\frac{1}{p^{a_2-a_1}} - \frac{1}{p^{b_2-a_1}} + \frac{\theta_2}{p^{b_2-a_1+1}}\right)\left(1 + \frac{\hat{\theta}}{p^{b_1-a_1}}\left(1 - \frac{\theta_1}{p}\right)\right) \qquad (4) \\ &= \frac{1}{p^{a_2-a_1}}\left(1 + \frac{\Delta_1}{p}\right), \quad -1 \leqslant \Delta_1 \leqslant 1.45. \end{aligned}$$

В силу (3) и (4)

$$p^{a_2-a_1-b_0} = 2\frac{1 + \Delta_1/p}{1 + \Delta_0/p}.$$

Поскольку $p \geqslant 5$, то последнее выражение показывает, что

$$1.811 \leqslant p^{a_2-a_1-b_0} \leqslant 3.225.$$

Невозможность последнего неравенства показывает ошибочность предположения $\lambda > 0$.

II. Пусть теперь $p = 3$. Если $b_0 \geqslant 2$, используя равенство ($0 \leqslant x \leqslant 1/9$)

$$\ln(1-x) = -x - \theta_1^* x^2, \quad 0.5 \leqslant \theta_1^* \leqslant 0.5405,$$

из первого соотношения системы (2) получаем

$$\lambda = \frac{1}{3^{b_0}}\left(1 + \frac{\Delta_{01}}{3}\right), \quad -1 < \Delta_{01} \leqslant 0.1802. \quad (5)$$

Равенства системы (2) показывают, что для любого натуралного $k \geqslant 2$

$$\frac{\lambda}{k} = \left(\frac{1}{3^{a_k}} - \frac{1}{3^{b_k}} + \frac{\theta_k}{3^{b_k+1}}\right) \Big/ \left(\frac{1}{3^{a_{k-1}}} - \frac{1}{3^{b_{k-1}}} + \frac{\theta_{k-1}}{3^{b_{k-1}+1}}\right).$$

В зависимости от величин $b_k - a_k$ и $b_{k-1} - a_{k-1}$ последнее соотношение позволяет получить, что:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\lambda}{k} = \frac{1}{3^{a_k - a_{k-1}}}\left(1 + \frac{\Delta_{k1}}{3}\right),\ -0.333 \leqslant \Delta_{k1} \leqslant 0.375,\text{ если}\begin{cases} b_{k-1} - a_{k-1} \geqslant 2,\\ b_k - a_k \geqslant 2;\end{cases}\\
&\frac{\lambda}{k} = \frac{2}{3^{a_k - a_{k-1}+1}}\left(1 + \frac{\Delta_{k2}}{3}\right),\ 0 \leqslant \Delta_{k2} \leqslant 0.375,\text{ если}\begin{cases} b_{k-1} - a_{k-1} \geqslant 2,\\ b_k - a_k = 1;\end{cases}\\
&\frac{\lambda}{k} = \frac{1}{2\cdot 3^{a_k - a_{k-1}-1}}\left(1 + \frac{\Delta_{k3}}{3}\right),\ -0.778 \leqslant \Delta_{k3} \leqslant 0.112,\text{ если}\begin{cases} b_{k-1} - a_{k-1} = 1,\\ b_k - a_k \geqslant 2;\end{cases}\\
&\frac{\lambda}{k} = \frac{1}{3^{a_k - a_{k-1}}}\left(1 + \frac{\Delta_{k4}}{3}\right),\ -0.42 \leqslant \Delta_{k4} \leqslant 0.5,\text{ если}\begin{cases} b_{k-1} - a_{k-1} = 1,\\ b_k - a_k = 1.\end{cases}
\end{aligned}\right\}\qquad (6)$$

Сравнивая выражения λ (5) и (6) получаем, что для любого $k \geqslant 2$ возможен один из четырех случаев:

$$0.838k \leqslant 3^{a_k - a_{k-1} - b_0} \leqslant 1.6875k, \quad \text{если}\begin{cases} b_{k-1} - a_{k-1} \geqslant 2,\\ b_k - a_k \geqslant 2;\end{cases}$$

$$1.886k \leqslant 3^{a_k - a_{k-1} - b_0 + 1} \leqslant 3.375k, \quad \text{если}\begin{cases} b_{k-1} - a_{k-1} \geqslant 2,\\ b_k - a_k = 1;\end{cases}$$

$$0.3941k \leqslant 3^{a_k - a_{k-1} - b_0 - 1} \leqslant 0.778k, \quad \text{если}\begin{cases} b_{k-1} - a_{k-1} = 1,\\ b_k - a_k \geqslant 2;\end{cases}$$

$$0.811k \leqslant 3^{a_k - a_{k-1} - b_0} \leqslant 1.75k, \quad \text{если}\begin{cases} b_{k-1} - a_{k-1} = 1,\\ b_k - a_k = 1.\end{cases}$$

Взяв $k = 100$ получаем, что возможен лишь случай $a_{100} - a_{99} = b_0 + 4$, $b_{99} - a_{99} \geqslant 2$, $b_{100} - a_{100} = 1$. Выбрав $k = 101$, получаем, что ни один из двух оставшихся случаев невозможен. Значит, предположение $\lambda > 0$ и в этом случае привело к противоречию.

Если $b_0 = 1$, то всилу первого равенства системы (2) имеем $2/3 \leqslant e^{-\lambda} \leqslant 7/9$, или $0.2513 \leqslant \lambda \leqslant 0.4055$. Значит, в этом случае

$$\lambda = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{\Delta_{02}}{3}\right), \qquad -0.7383 \leqslant \Delta_{02} \leqslant 0.6495.$$

Последнее равенство и равенство (6) показывают, что для любого $k \geqslant 2$ возможен один из четырех случаев:

$$0.7307k \leqslant 3^{a_k - a_{k-1} - 1} \leqslant 1.4923k, \quad \text{если}\begin{cases} b_{k-1} - a_{k-1} \geqslant 2,\\ b_k - a_k \geqslant 2;\end{cases}$$

$$1.644k \leqslant 3^{a_k - a_{k-1}} \leqslant 2.9845k, \quad \text{если}\begin{cases} b_{k-1} - a_{k-1} \geqslant 2,\\ b_k - a_k = 1;\end{cases}$$

$$0.3045k \leqslant 3^{a_k - a_{k-1} - 2} \leqslant 0.688k, \quad \text{если}\begin{cases} b_{k-1} - a_{k-1} = 1,\\ b_k - a_k \geqslant 2;\end{cases}$$

$$0.7069k \leqslant 3^{a_k - a_{k-1} - 1} \leqslant 1.5476k, \quad \text{если}\begin{cases} b_{k-1} - a_{k-1} = 1,\\ b_k - a_k = 1.\end{cases}$$

Выбрав поочередно $k = 115$ и $k = 116$, аналогично как в случае $b_0 \geqslant 2$, получаем противоречие предположению $\lambda > 0$.

III. Пусть наконец $p = 2$ и пусть в начале $b_0 = 1$. Имея ввиду равенство (1) и убывание пуассоновских вероятностей $\lambda^k e^{-\lambda}/k!$, поочередно рассматриваем случаи:

α_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
α_2	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
α_3	3	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
α_4					0	1	2	2	2	2	2	2	2
α_5							0	1	3	2	2	2	2
α_6										3	2	1	0

Разберем к примеру последний вариант. Имеем:

$$e^{-\lambda} = \frac{89}{128} + \frac{\theta_0}{256}, \quad \lambda e^{-\lambda} = \frac{1}{4} + \frac{\theta_1}{256}, \quad \frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda} = \frac{3}{64} + \frac{\theta_2}{256},$$

где $\theta_0, \theta_1, \theta_2 \in [0, 1)$. Из первого равенства следует $\lambda \leqslant 0.363391$. Значит, $\lambda^2 e^{-\lambda}/2 \leqslant 0.04591$. Но всилу третьего равенства $\lambda^2 e^{-\lambda}/2 \geqslant 0.046875$.

Аналогичным образом получаем, что все выше указанные случаи невозможны. Значит, $b_0 \neq 1$. После достаточно громоздких и продолжительных посчетов можно получить, что $b_0 \neq 2$, $b_0 \neq 3$. Следовательно, $b_0 \geqslant 4$. Тем самым $e^{-\lambda} \geqslant 15/16$ и, значит, $\lambda \leqslant \ln(16/15)$. Лемма доказана.

Автор уверен, что и в случае $p = 2$ параметр $\lambda = 0$, но никаких закономерностей в получении противоречий, разбирая случаи $b_0 = 1$, $b_0 = 2$, $b_0 = 3$, не обнаружил.

Доказательство теоремы. Допустим $\lambda > \ln(16/15)$ и распределение Пуассона Π_λ принадлежит классу K. Тогда для некоторой аддитивной функции $f(m)$, удовлетворяющей условиям теоремы Ердёша–Винтнера, имеем

$$\prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{e^{itf(p^r)}}{p^r}\right) = e^{\lambda(e^{it}-1)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Применив хорошо известную теорему Райкова, для любого фиксированного простого числа p имеем

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{e^{itf(p^r)}}{p^r}\right) = e^{it\beta_p + \lambda_p(e^{it}-1)}, \quad t \in \mathbb{R},$$

где $\lambda_p \geqslant 0$, $\beta_p \in \mathbb{R}$.

В левой стороне равенства есть характеристическая функция случайной величины, принимающей значения $0, f(p), \ldots, f(p^r), \ldots$ с вероятностями $1 - 1/p, (1 - 1/p)p^{-1}, \ldots, (1 - 1/p)p^{-r}, \ldots$ соответственно. Отсюда и из выше стоящих равенств получаем, что каждому фиксированному p $\beta_p = 0$, а $f(p^r)$ есть целые неотрицательные числа $(r = 1, 2, \ldots)$. Для завершения доказательства теоремы достаточно применить лемму.

ЛИТЕРАТУРА

[1] P. D. T. A. Elliott, *Probabilistic Number Theory. I*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1979.

[2] P. D. T. A. Elliott, *Probabilistic Number Theory. II*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1980.

Erdiošo–Vintnerio teorema ir Puasono skirstinys

J. Šiaulys (*VU*)

Straipsnyje įrodyta, jog bet kuriam $\lambda > \ln(16/15)$ Puasono skirstinys Π_λ negali būti ribiniu Erdiošo-Vintnerio teoremoje.