*LMD mokslo darbai*, 164–168
1998, Vilnius

# Внутренние оснащения полунеголономных гиперкомплексов SNGr(1,*n*,2*n*-3) проективного пространства P$_n$

**К.В. Навицкис (ВУ)**

Полунеголономным гиперкомплексом ГК≡SNGr(1,$n$,2$n$-3) n-мерного проективного пространства P$_n$ называется распределение ($n$-2)-плоскостей $\Pi_{n-2}$ на грассмановом многообразии прямых Gr(1,$n$), каждая ($n$-2)-плоскость $\Pi_{n-2}$ которого проходит через соответствующую прямую l. Пусть канонизация репера $\{A_i\}$ $(i,j=1,...,n+1)$ проведена так, что

$$\mathrm{l} = (A_1,A_2),\ \Pi_{n-2} = (A_1,A_{2,}A_5,...A_{n+1}).$$

Тогда дифференциальные уравнения распределения ГК имеют следующий вид:

$$\omega_a^\alpha = \lambda_{a\beta}^{\alpha p}\omega_p^\beta + \lambda_{ab}^{\alpha p}\omega_p^b, \tag{1}$$

где

$$\nabla \lambda_{a\beta}^{\alpha p} - \lambda_{ab}^{\alpha p}\omega_\beta^b - \delta_\beta^\alpha\omega_a^p = \lambda_{a\beta A}^{\alpha pq}\omega_q^A, \tag{2}$$

$$\nabla \lambda_{ab}^{\alpha p} = \lambda_{abA}^{\alpha pq}\omega_q^A; \tag{3}$$

здесь $\alpha,\beta,...= 3,4$; $a,b,...= 5,...,n + 1$; $A,B,...= 3,...,n + 1$.

Дифференциально-геометрический объект $H^{(1)}(\text{ГК}) = \{\lambda_{aA}^{\alpha p}\}$ алгебраически подобен дифференциально-геометрическому объекту

$$\{b_{a\alpha\beta\gamma}, b_{a\alpha}, b_{ab\alpha\beta}, b_{ab}, c_{a\alpha}\}$$

Полунеголономный гиперкомплекс назовём оснащённым (или нормализованным), если к каждой прямой l этого гиперкомплекса присоединены два подпространства $\Pi_{\mathrm{I}}$ и $\Pi_{\mathrm{II}}$ пространства $P_n$, обладаюшие следующими свойствами: 1) трёхмерная плоскость $\Pi_{\mathrm{I}}$ проходит через прямую l, но не имеет с ($n$–2) плоскостью других общих точек; 2) ($n$–4)-плоскость $\Pi_{\mathrm{II}}$ лежит в ($n$–2)-плоскости $\Pi_{n-2}$, но не проходит через прямую l; 3) подпространства $\Pi_{\mathrm{I}}$ и $\Pi_{\mathrm{II}}$ инвариантны относительно проективных преобразований, принадлежащих подгруппе стационарности прямой l.

Подпространства $\Pi_{\mathrm{I}}$ и $\Pi_{\mathrm{II}}$ определяются следующими уравнениями

$$\Pi_{\mathrm{I}}:\ x^a = \lambda_\alpha^a x^\alpha, \tag{4}$$

$$\Pi_{\mathrm{II}}:\ x^p = \lambda_\alpha^p x^\alpha, x^\alpha = 0. \tag{5}$$

Их будем называть нормальными пространствами первого и второго рода соответственно.

Гиперкомплекс ГК является оснащённым тогда и только тогда, когда на нём заданы следующие поля дифференциально–геометрических объектов

$$\nabla \lambda_\alpha^a + \omega_\alpha^a = \lambda_{\alpha A}^{ap} \omega_p^A, \tag{6}$$

$$\nabla \lambda_\alpha^p + \omega_\alpha^p = \lambda_{\alpha A}^{pq} \omega_q^A, \tag{7}$$

Характеристика $(n-2)$-плоскости $\Pi_{n-2}$ при движении прямой l вдоль линейчатой поверхности

$$\text{L:}\ \omega_p^\alpha = e_p^\alpha \Theta, \omega_p^a = \lambda_\alpha^a \omega_p^\alpha (D\Theta = 0) \tag{8}$$

определяется уравнениями

$$x^\alpha = 0, \left[\delta_\beta^\alpha x^p + \left(\lambda_{a\beta}^{\alpha p} + \lambda_\beta^b \lambda_{ab}^{\alpha p}\right) x^a\right] l_p^\beta = 0.$$

Если точка

$$a_p x^p = 0,\ x^A = 0 \tag{9}$$

и $(n-3)$-коплоскость

$$u_p = 0, T^A u_A = 0 \tag{10}$$

неподвижны, то уравнения рассматриваемой характеристики принимают вид

$$\begin{cases} x^\alpha = 0, \\ \left[\delta_\beta^\alpha x^p + \left(\lambda_{a\beta}^{\alpha p} + \lambda_\beta^b \lambda_{ab}^{\alpha p}\right) x^a\right] a_p T^\beta = 0. \end{cases}$$

Полученная система допускает нетривиальные решения для величин $T^\alpha$ только тогда, когда

$$\begin{cases} x^\alpha = 0, \\ \det \left\| \left[\delta_\beta^\alpha x^p + \left(\lambda_{a\beta}^{\alpha p} + \lambda_\beta^b \lambda_{ab}^{\alpha p}\right) x^a\right] a_p \right\| = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Эти уравнения определяют однопараметрическое семейство $(n-3)$-мерных поверхностей. Введем обозначение

$$\rho_a^p = -\frac{1}{2}\left(\lambda_{a\alpha}^{\alpha p} + \lambda_\alpha^b \lambda_{ab}^{\alpha p}\right) \tag{12}$$

Линейная поляра прямой l относительно алгебраического многообразия (11) определяется уравнениями

$$a_p\left(x^p - \rho_a^p x^a\right) = 0,\ x^\alpha = 0. \tag{13}$$

($n$–3)-плоскость не зависит от выбора точки (9) тогда и только тогда, когда

$$x^p = \rho_a^p x^a,\ x^\alpha = 0. \tag{14}$$

Велечины $\rho_a^p$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям вида (7). Следовательно, уравнения (12) устанавливают соответствие между нормальными пространствами $\Pi_{\mathrm{I}}$ и $\Pi_{\mathrm{II}}$. Это соответствие мы будем называть проективитетом Бомпьяни–Пантази.

Допустим, что определитель $\det\left\|\lambda_{ab}^{\alpha\beta}\right\|$ отличен от нуля.

В таком случае дифференциальные уравнения (1) можно разрешить относительно форм $\omega_p^a$ :

$$\omega_p^a = \mu_{p\alpha}^{aq}\omega_q^\alpha + \mu_{p\alpha}^{ab}\omega_b^\alpha. \tag{15}$$

Дифференциальными уравнениями (15) определяется расспределение прямых на грассмановом многообразии Gr($n$–2,$n$) ($n$–2)-плоскостей пространства $P_n$, каждой из которых отнесена соответствующая ($n$-2)-плоскость, т.е. полунеголономный гиперкомплекс ГК*≡SNGr($n$–2,$n$,2$n$–3). Дифференциально-геометрический объект $H^{(1)}$(ГК*) $\left\{\mu_{p\alpha}^{aq}, \mu_{p\alpha}^{ab}\right\}$ алгебраически подобен объекту

$$\left\{K^{a\alpha\beta\gamma}, K^{a\alpha}, C^{a\alpha}, K^{ab\alpha\beta}, K^{ab}\right\}$$

Компоненты объектов $H^{(1)}$(ГК) и $H^{(1)}$(ГК*) связаны соотношениями

$$\lambda_{\alpha\beta}^{\alpha p} + \lambda_{ab}^{\alpha q}\mu_{q\beta}^{bp} = 0, \lambda_{ac}^{\alpha p}\mu_{p\beta}^{cb} = \delta_\beta^\alpha\delta_a^b,$$

$$\mu_{p\alpha}^{aq} + \mu_{p\beta}^{ab}\lambda_{b\alpha}^{\beta q} = 0, \mu_{p\alpha}^{ac}\lambda_{cb}^{\alpha q} = \delta_p^q\delta_b^a.$$

Соответствие Бомпьяни–Пантази для гиперкомплекса ГК* имеет вид

$$\rho_\alpha^a = \frac{1}{2}\left(\mu_{p\alpha}^{\alpha p} - \lambda_b^p\mu_{p\alpha}^{ab}\right) \tag{16}$$

Пусть параметры нормальных пространств $\lambda_\alpha^a$ и $\lambda_\alpha^p$ удовлетворяют соотнашениям (12) и (16). Тогда они являются решениями следующей системы уравнений:

$$F_{ab}^{\beta a}\lambda_\beta^b = F_\alpha^a,\ V_{qa}^{pb}\lambda_b^q = V_a^p,$$

где

$$F_{ab}^{\beta a} = 4\delta_\alpha^\beta \delta_b^a - \lambda_{cb}^{\beta p}\mu_{p\alpha}^{ac},$$
$$V_{qa}^{pa} = 4\delta_q^p \delta_a^b + \lambda_{ac}^{\alpha p}\mu_{q\alpha}^{cb},$$
$$F_\alpha^a = \frac{1}{2}\left(4\mu_{p\alpha}^{\alpha p} + \lambda_{b\beta}^{\beta p}\mu_{p\alpha}^{ab}\right),$$
$$V_a^p = -\left(2\lambda_{a\alpha}^{\alpha p} + \lambda_{ab}^{\alpha p}\mu_{q\alpha}^{bq}\right)$$

Полунеголономный гиперкомплекс ГК будем называть оснащённым в смысле Э. Картана, если каждой прямой этого гиперкомплекса отнесена прямая

$$C(l): x^p = m_\alpha^p x^\alpha, x^a = m_\alpha^a x^\alpha,$$

не пересекающая ($n$-2)-плоскость $\Pi_{n-2}$ и инвариантная относительно проективных преобразований стационарной подгруппы прямой l. Поле прямых C(l) на гиперкомплексе ГК определяется полем объекта $\{m_\alpha^p, m_\alpha^p\}$:

$$\nabla m_\alpha^p + m_\alpha^a \omega_a^p + \omega_\alpha^p = m_{\alpha A}^{pq}\omega_q^A,$$

$$\nabla m_{\text{тм}}^\alpha + \omega_\alpha^a = m_{\alpha A}^{\alpha p}\omega_p^A,$$

Характеристика 3-плоскости (4), когда прямая l описывает линейчатую поверхность

$$\omega_p^\alpha = 0,\ \omega_p^\alpha = a_p T^a \theta (D\theta = 0)$$

определяется уравнениями

$$\begin{cases} x^a = \lambda_\alpha^a x^\alpha, \\ \left[\delta_b^a x^p + \left(\lambda_{ab}^{\alpha p} - \lambda_\beta^a \lambda_\alpha^c \lambda_{cb}^{\beta p}\right) x^a\right] T^b a_p = 0 \end{cases}$$

эта система допускает нетривиальные решения для величин $T^a$ только тогда, когда

$$\begin{cases} x^a = \lambda_\alpha^a x^\alpha, \\ \det\left\|\left[\delta_b^a x^p + \left(\lambda_{ab}^{\alpha p} - \lambda_\beta^a \lambda_\alpha^c \lambda_{cb}^{\beta p}\right) x^a\right] a_p\right\| = 0 \end{cases} \tag{17}$$

Линейная поляра прямой l относительно алгебраического многообразия (17) определяется уравнениями

$$x^\alpha = \lambda_\alpha^a x^\alpha,\ a_p\left(x^p - \lambda_\alpha^p x^\alpha\right) = 0,$$

где

$$\lambda_\alpha^p = -\frac{1}{n-3}\left(\lambda_{a\alpha}^{\alpha p} - \lambda_\alpha^a \lambda_\beta^b \lambda_{ab}^{\beta p}\right)$$

Осью полученного пучка плоскостей является прямая

$$x^p = \lambda^p_\alpha x^\alpha, \; x^a = \lambda^a_\alpha x^\alpha, \tag{18}$$

определяющая оснащение Э. Картана гиперкомплекса ГК, поскольку

$$\nabla \lambda^p_a + \lambda^\alpha_{a\beta}\omega^p_a + \omega^p_a = \lambda^{pq}_{aA}\omega^A_q,$$

Гиперкомплекс ГК будем называть оснащённым в смысле Э.Бортолотти, если к каждой прямой l∈ГК присоединена ($n$–2)-плоскость

$$B_{n-2}(l): x^p = K^p_\alpha x^\alpha + K^p_a x^a,$$

не имеющая общих точек с прямой l и инвариантная относительно проективных преобразований стационарной подгруппы прямой l.

Поле ($n$–2)-плоскостей $B_{n-2}$(l) определяется полем объекта $\{K^p_\alpha, K^p_a\}$:

$$\nabla K^p_\alpha - K^p_a\omega^a_\alpha + \omega^p_\alpha = K^{pq}_{\alpha A}\omega^A_q,$$

$$\nabla K^p_\alpha + \omega^p_\alpha = K^{pq}_{\alpha A}\omega^A_q,$$

Через 3-плоскость (4) и прямую (18) можно провести инвариантную ($n$–2)-плоскость, уравнения которой имеют вид $x^p = \tilde{G}^p_\alpha x^\alpha + \lambda^p_a x^a$, где $\tilde{G}^p_\alpha = \lambda^p_\alpha - \lambda^a_\alpha \lambda^p_a$, причём $\nabla \tilde{G}^p_\alpha - \lambda^p_\alpha\omega^a_\alpha + \omega^p_\alpha = \tilde{G}^{pq}_{\alpha A}\omega^A_q$.

Полученная ($n$–2)-плоскость определяет оснащение в смысле Э. Бортолотти гиперкомплекса ГК.

Оснащение в смысле Э.Картана индуцирует проективную связность на гиперкомплексе, которая определяется формами

$$\tilde{\omega}^q_p = \omega^q_p - m^q_\alpha\omega^\alpha_p, \tilde{\omega}^a_p = \omega^q_p - m^a_\alpha\omega^\alpha_p,$$

$$\tilde{\omega}^p_a = m^p_a - \lambda^{\alpha q}_{aA} m^p_\alpha \omega^A_q, \tilde{\omega}^b_a = \omega^b_a - \lambda^{\alpha p}_{aA} m^b_\alpha \omega^A_p.$$

**Intrinsic normalizations of semi-non-holonomic hypercomplexs SNGr(1,$n$,2$n$-3) in the projective space P$_n$**

*K.V. Navickis*

In this paper the problem of intrinsic normalizations of a semi-non-holonomic hypercomplexes SNGr(1,$n$,2$n$-3) in $n$-dimensional projective space $P_n$ is considered. It is proved that there exists three kinds of the intrinsic normalizations of SNGr(1,$n$,2$n$-3). So called intrinsic normal spaces of the first and the second kind, some correspondences betwen the normal spaces are obtained. The geometrical interpretations of all these objects and correspondences are given.