LMD mokslo darbai, 396–401
1998, Vilnius

Šaknų sąlyga antrojo laipsnio kompleksiniam polinomui ir trisluoksnių skirtumų schemų spektrinė analizė

A. Štikonas (MII)

Skaitiniuose metoduose labai svarbi yra diskrečiojo uždavinio stabilumo sąvoka. Jeigu diskretusis uždavinys yra stabilus ir aproksimuoja tolydųjį uždavinį, tuomet diskrečiojo uždavinio sprendinys konverguoja į tolydžiojo uždavinio sprendinį.

Sprendžiant diferencialinį uždavinį baigtinių skirtumų metodu, būtinasias stabilumo sąlygas galima gauti iš spektrinio stabilumo požymio, kuris įvairiems uždaviniams gali būti skirtingai formuluojamas. Jis vadinamas Neumann'o būtinąja stabilumo sąlyga arba šaknų sąlyga [1,2]. Tiesinėms skirtumų lygtims su pastoviais koeficientais šiuo metodu gautos būtinosios sąlygos dažnai yra ir pakankamosios stabilumo sąlygos.

1. Šaknų sąlyga

Nagrinėkime kompleksinį polinomą

$$P_m(q) = a_m q^m + a_{m-1} q^{m-1} + \cdots + a_1 q + a_0, \tag{1.1}$$

kurio koeficientai $a_i \in \mathbf{C}$, čia $\mathbf{C}$ – kompleksinių skaičių aibė. Toks polinomas turi lygiai m šaknų $\lambda_i \in \mathbf{C}, i = 1, \ldots, m$, jeigu $a_m \neq 0$.

Sakoma, kad polinomas P_m tenkina *šaknų sąlygą* [2], jeigu visos šio polinomo šaknys priklauso kompleksinės plokštumos uždarajam vienetiniam skrituliui, ir šaknys, esančios vienetinio apskritimo taškuose, nėra kartotinės.

Skirtumų metodai nestacionariesiems diferencialiniams uždaviniams dalinėmis išvestinėmis paprastai užrašomi dvisluoksnėmis arba trisluoksnėmis skirtumų schemomis (lygtimis). Taikant spektrinę šių schemų analizę, gaunami pirmojo arba antrojo laipsnio polinomai, kuriems reikalinga patikrinti šaknų sąlygą. Tiesinio polinomo tyrimas nesudaro jokių sunkumų, nes tokio polinomo (kai $a_1 \neq 0$) šaknis q yra vienintelė, ir belieka patikrinti, ar ji moduliu nedidesnė už vienetą. Akivaizdu, kad

$$A \equiv \{(a_0, a_1) \in \mathbf{C}, |q| \leqslant 1\} = \{|a_0| \leqslant |a_1|,\ a_1 \neq 0\}. \tag{1.2}$$

Norėdami patikrinti šaknų sąlygą, mes turime ištirti kada polinomo koeficientai priklauso aibei A.

Bendrojo (1.1) polinomo atveju tokių paprastų kriterijų nėra. Šiame darbe pasiūlytas tokio tipo kriterijus kvadratiniam polinomui

$$aq^2 + bq + c = 0,\ a, b, c \in \mathbf{C},\ a \neq 0. \tag{1.3}$$

Atvejis $a = 0$ atitinka tiesinį polinomą. Kai $a \neq 0$, tuomet (1.3) lygtį visada galima suvesti į atvejį $a = 1$.

2. Hurwitz'o kriterijus

Jeigu polinomo koeficientai yra realieji skaičiai ($a = 1$, $b \in \mathbf{R}$, $c \in \mathbf{R}$), tuomet galime naudotis *Hurwitz'o kriterijumi*, kuris teigia, kad tokio polinomo šaknys bus vienetiniame skritulyje tada ir tik tada, jeigu polinomo koeficientai tenkins nelygybes

$$|c| \leqslant 1, \quad |b| \leqslant |c| + 1. \tag{2.1}$$

Tik šių dviejų nelygybių patikrinimas žymiai palengvina spektrinio stabilumo analizę. Norėdami gauti šaknų sąlygą, pastebėsime, kad kartotinė šaknis yra vienetiniame apskritime, jeigu $c = 1$ ir $D = b^2 - 4c = 0$, t.y. $|b| = 2$. Tada šaknų sąlygą realiajam kvadratiniam polinomui užrašome

$$A \equiv \big\{|c| \leqslant 1,\ |b| \leqslant |c| + 1; \quad |b| < 2,\ c = 1\big\}. \tag{2.2}$$

Tiek (2.1), tiek (2.2) sąlyga polinomo koeficientams yra pakankamai nesudėtingos ir lengvai patikrinamos konkrečių skirtumų schemų atveju, net jeigu koeficientai $b, c \in \mathbf{R}$ priklauso nuo keleto skirtumų schemos parametrų (h, τ, σ ir t.t.). Toliau šiame darbe pateiktos sąlygos (polinomo koeficientams), kurios apibendrina Hurwitz'o kriterijų (šaknų sąlygą) kompleksiniam polinomui.

3. Šaknų sąlyga (kriterijus) kompleksiniam polinomui

Tarkime (1.3) kvadratinės lygties šaknys yra q_1 ir q_2. Pažymėkime $\mathbf{A} = \big\{(a, b, c) \in \mathbf{C}^3,\ a \neq 0\big\}$ – kvadratinio polinomo koeficientų aibę. Išskirkime šios aibės poaibius:

$$\begin{aligned} A_0 &= \big\{(a, b, c) \in \mathbf{A}, \quad |q_1| < 1,\ |q_2| < 1\big\}, \\ A_1 &= \big\{(a, b, c) \in \mathbf{A}, \quad |q_1| < 1,\ |q_2| = 1\big\}, \\ A_2 &= \big\{(a, b, c) \in \mathbf{A}, \quad |q_1| = |q_2| = 1,\ q_1 \neq q_2\big\}. \end{aligned}$$

Šaknų sąlyga bus išpildyta, jeigu polinomo koeficientai priklauso vienai iš šių aibių. Pažymėkime $A = A_0 \cup A_1 \cup A_2$. Ištyrę šias aibes, gauname:

$$\begin{aligned} A_0 &= \big\{|c|^2 + |\bar{a}b - \bar{b}c| < |a|^2\big\}, \\ A_1 &= \big\{|c|^2 + |\bar{a}b - \bar{b}c| = |a|^2,\ |c| < |a|\big\}, \\ A_2 &= \big\{|c| = |a|,\ \bar{a}b = \bar{b}c,\ |b| < 2|a|\big\}. \end{aligned}$$

TEOREMA 1 [Šaknų sąlyga]. *Kompleksinio kvadratinio polinomo šaknys bus vienetinio skritulio viduje, ir vienetinio apskritimo taškuose bus tik nekartotinės šaknys tada ir tik tada, jei*

$$A = \big\{|c|^2 + |\bar{a}b - \bar{b}c| \leqslant |a|^2,\ |b| < 2|a|\big\}. \tag{3.1}$$

IŠVADA 2. *Jei $a = 1$, tai šaknų sąlyga yra*

$$A = \left\{|c|^2 + |b - \bar{b}c| \leqslant 1, \quad |b| < 2\right\}. \tag{3.2}$$

Pastaba 3. Jei $a = 1, b = \bar{b} \in \mathbf{R}$, $c = \bar{c} \in \mathbf{R}$, tuomet (3.2) lygybė sutampa su (2.2) lygybe, kuri gaunama iš Hurwitz'o kriterijaus.

Įrodymas. Iš (3.2) gauname, kad $|c| \leqslant 1$. Jeigu $c = 1$, tuomet $|b| < 2$, o jeigu $-1 \leqslant c < 1$, tuomet

$$|b|(1-c) = |b - bc| = |b - \bar{b}c| \leqslant 1 - |c|^2 = (1 + |c|)(1-c),$$

ir teisinga tokia pat sąlyga kaip ir Hurwitz'o kriterijuje: $|b| \leqslant 1 + |c|$.

Taikomuosiuose uždaviniuose dažnai patogiau atskirti sąlygas $|c| = |a|$ ir $|c| < |a|$, ir taikyti šį kriterijų formoje $A = (A_0 \cup A_1) \cup A_2$:

$$A = \left\{|c| < |a|, \ |c|^2 + |\bar{a}b - \bar{b}c| \leqslant |a|^2\right\} \cup \left\{|c| = |a|, \ \bar{a}b = \bar{b}c, \ |b| < 2|a|\right\}. \tag{3.3}$$

Pastaba 4. Jeigu mus domina silpnesnė sąlyga, kurioje vienetinio apskritimo taškuose šaknys gali būti kartotinės, tuomet (3.1) ir (3.3) išraiškoje griežtąją nelygybę $|b| < 2|a|$ reikia pakeisti nelygybe $|b| \leqslant 2|a|$, nes kartotinė šaknis ($q_1 = q_2$) bus vienetinio apskritimo taškuose, kai polinomo koeficientai priklausys aibei

$$A_{11} = \left\{|c| = 1, \ \bar{a}b = \bar{b}c, \ |b| = 2|a|\right\}. \tag{3.4}$$

4. Šaknų sąlygos taikymai trisluoksnių skirtumų schemų analizėje

Tirsime trisluoksnių skirtumų lygčių spektrinį stabilumą Kuramoto–Tsuzuki lygčiai

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varkappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \varkappa = \alpha + \beta \mathbf{i} \neq 0, \ \alpha, \beta \in \mathbf{R}. \tag{4.1}$$

a) *Simetrinė skirtumų schema* užrašoma [3]:

$$\frac{\hat{y} - \check{y}}{2\tau} = \varkappa\Lambda(\sigma\hat{y} + (1 - 2\sigma)y + \sigma\check{y}), \ \Lambda y_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}. \tag{4.2}$$

Spektriniu metodu gauname kompleksinį polinomą

$$P(q) = (1 + 2\tau\lambda\varkappa\sigma)q^2 + 2\tau\lambda\varkappa(1 - 2\sigma)q + (2\tau\lambda\varkappa\sigma - 1),$$

čia $\lambda = \frac{4}{h^2}\sin^2(\varphi/2)$. Pirmiausia surandame

$$|a|^2 - |c|^2 = 8\tau\lambda\mathrm{Re}(\varkappa\sigma), \tag{4.3}$$

$$\bar{a}b - \bar{b}c = 4\tau\lambda(\mathrm{Re}\varkappa - 2\mathrm{Re}(\varkappa\sigma) - \tau\lambda|\varkappa|^2 \mathrm{Im}\sigma\ \mathbf{i}). \tag{4.4}$$

Jeigu $\mathrm{Re}(\varkappa\sigma) = 0$, tuomet $|a| = |c|$, ir iš (3.3) formulės būtinoji stabilumo sąlyga yra $\bar{a}b - \bar{b}c = 0$. Tada iš (4.4) lygybės turime, kad $\mathrm{Re}\varkappa = 0$ ir $\mathrm{Im}\sigma = 0$, t.y. šiuo atveju spektriškai stabili bus tik Schrödinger'io lygtis, ir tik su realiaisiais σ. Sąlyga $|b| < 2|a|$ ekvivalenti nelygybei

$$|2\tau\lambda\beta(1 - 2\sigma)| < 2\sqrt{1 + (2\tau\lambda\beta\sigma)^2},$$

kurią galime perrašyti pavidalu

$$\sigma > \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\frac{1}{\lambda^2\tau^2\beta^2}.$$

Vadinasi, kai $\sigma \geqslant \frac{1}{4}$, simetrinė skirtumų schema nesąlygiškai stabili. Kai $\sigma < \frac{1}{4}$, turėsime sąlyginį stabilumą

$$\frac{\tau}{h^2} < \frac{1}{4|\beta|}\frac{1}{\sqrt{1 - 4\sigma}}. \tag{4.5}$$

Pastaba 5. Pirmojo homogeninio kraštinio uždavinio atveju šioje nelygybėje galima lygybė.

Jeigu $\mathrm{Re}(\varkappa\sigma) > 0$, tuomet $|c| < |a|$, ir būtinoji stabilumo sąlyga užrašoma

$$|\mathrm{Re}\varkappa - \tau\lambda|\varkappa|^2 \mathrm{Im}\sigma\ \mathbf{i} - 2\mathrm{Re}(\varkappa\sigma)| \leqslant 2\mathrm{Re}(\varkappa\sigma).$$

Kadangi visiems realiesiems x, y, $a (a > 0)$ nelygybė $|x - y\mathrm{i} - a| \leqslant a$ yra ekvivalenti $y^2 \leqslant 2xa - x^2$, todėl būtinoji stabilumo sąlyga yra

$$\tau^2\lambda^2|\varkappa|^4(\mathrm{Im}\sigma)^2 \leqslant 4\mathrm{Re}(\varkappa\sigma)\cdot\mathrm{Re}\varkappa - (\mathrm{Re}\varkappa)^2. \tag{4.6}$$

Matome, kad (4.2) skirtumų schema nėra stabili, kai $\mathrm{Re}\varkappa < 0$. Jeigu $\mathrm{Re}\varkappa = \beta = 0$, tuomet iš (4.6) gauname sąlygą $\mathrm{Im}\sigma = 0$, kuri nesuderinama su sąlyga $\mathrm{Re}(\varkappa\sigma) = \mathrm{Re}(\beta\sigma\mathrm{i}) > 0$. Kai $\mathrm{Re}\varkappa > 0$, gauname būtinąją stabilumo sąlygą

$$4\mathrm{Re}(\varkappa\sigma) \geqslant \mathrm{Re}\varkappa > 0.$$

Šiuo atveju, jei

$$\frac{\tau}{h^2} \leqslant \frac{\sqrt{4\mathrm{Re}(\varkappa\sigma) - (\mathrm{Re}\varkappa)^2}}{4|\varkappa|^2|\mathrm{Im}\sigma|}, \tag{4.7}$$

tai turime sąlyginį stabilumą, kuris pereina į nesąlygiškąjį stabilumą, kai $\mathrm{Im}\sigma = 0$.

b) *DuFort–Frankel'io* skirtumų schema Kuramoto-Tsuzuki (4.1) lygčiai užrašoma

$$\frac{\hat{y} - \check{y}}{2\tau} + \varkappa\frac{\tau^2}{h^2}\frac{\hat{y} - 2y + \check{y}}{\tau^2} = \varkappa\Lambda y. \tag{4.8}$$

Šią skirtumų schemą atitinka kvadratinis polinomas

$$P(q) = (1 + \gamma\varkappa)q^2 - 2\varkappa\gamma\eta q + (\gamma\varkappa - 1),$$

čia $\gamma = \frac{2\tau}{h^2}$, $\eta = \cos\varphi$. Surandame

$$|a|^2 - |c|^2 = 4\gamma \mathrm{Re}\varkappa,$$
$$\bar{a}b - \bar{b}c = 4\gamma\eta \mathrm{Re}\varkappa.$$

Schrödingerio lygties atveju $\mathrm{Re}\varkappa = \alpha = 0$, ir stabilumo sąlyga bus

$$|2\gamma\eta\beta| < 2|1 + \gamma\beta\,\mathbf{i}|$$

arba $\eta^2\gamma^2\beta^2 < 1 + \beta^2\gamma^2$, kuri teisinga su visais γ ir a.

Jeigu $\mathrm{Re}\varkappa > 0$, tuomet stabilumo sąlyga bus

$$|4\gamma\eta \mathrm{Re}\varkappa| \leqslant 4\gamma \mathrm{Re}\varkappa,$$

kuri irgi visada teisinga.

IŠVADA 6. *DuFort–Frankel'io skirtumų nesąlygiškai stabili, kai* $\mathrm{Re}\varkappa \geqslant 0$.

c) Nagrinėjant nelyginių–lyginių [4] skirtumų schemų stabilumą buvo patikrinti $\varkappa = \alpha$ (parabolinė lygtis), $\varkappa = \mathbf{i}$ (Schrödinger'io lygtis) atvejai. Bendruoju, Kuramoto–Tsuzuki atveju, reikalinga ištirti šaknų sąlygą polinomui

$$P(q) = (1 + \varkappa\gamma)q^2 - (2 - \varkappa^2\gamma^2\eta^2)q + (1 - \varkappa\gamma),$$

čia $\gamma = \frac{4\tau}{h^2}$, o $|\eta| \leqslant 1$. Taikome pasiūlytą šaknų tyrimo metodą:

$$|a|^2 - |c|^2 = 4\gamma \mathrm{Re}\varkappa, \tag{4.9}$$

$$\bar{a}b - \bar{b}c = -4\gamma \mathrm{Re}\varkappa + 2\eta^2 \mathrm{Re}\varkappa|\varkappa|^2 + 4\gamma^2\eta^2 \mathrm{Re}\varkappa\ \mathrm{Im}\varkappa\ \mathbf{i}. \tag{4.10}$$

Ir šiuo atveju $|a| = |c|$ tik Schrödingerio lygties atveju, kai $\mathrm{Re}\varkappa = 0$. Tada iš (4.10) formulės $\bar{a}b = \bar{b}c$, ir spektrinio stabilumo sąlyga bus

$$2 + \beta^2\gamma^2\eta^2 < 2\sqrt{1 + \beta^2\gamma^2},$$

kurią parašykime pavidalu $4\eta^2 + \beta^2\gamma^2\eta^4 < 4$, nes $\beta^2 > 0$. Galutinai užrašome

$$\gamma\eta^2 < 2\sqrt{1 - \eta^2}/\beta. \tag{4.11}$$

Kadangi bendruoju atveju η gali įgyti reikšmę 1, todėl turėsime nesąlyginį nestabilumą. Tačiau kartais [4] pavyksta išskirti atvejus, kuomet $\eta \leqslant m(h) < 1$, ir sąlyginį stabilumą turėsime, kai

$$\frac{4\tau}{h^2} = \gamma < \frac{2\sqrt{1 - m^2}}{m^2}.$$

Jeigu $\mathrm{Re}\varkappa > 0$, tuomet $|c| < |a|$, ir patenkame į antrąjį atvejį. Kadangi

$$|\bar{a}b - \bar{b}c| = 2\gamma\mathrm{Re}\varkappa\sqrt{(2 - \gamma^2\eta^2|\varkappa|^2)^2 + 4\gamma^2\eta^4(\mathrm{Im}\varkappa)^2},$$

todėl šaknų sąlyga $|\bar{a}b - \bar{b}c| \leqslant |a|^2 - |c|^2$ ekvivalenti nelygybei

$$2\gamma\mathrm{Re}\varkappa\sqrt{4 - 4\gamma^2\eta 2|\varkappa|^2 + \gamma^4\eta 4|\varkappa|^4 + 4\gamma^2\eta^4(\mathrm{Im}\varkappa)^2} \leqslant 4\gamma\mathrm{Re}\varkappa,$$

arba

$$\gamma^2\eta^2|\varkappa|^4 \leqslant 4(1 - \eta^2)|\varkappa|^2 + 4\eta^2(\mathrm{Re}\varkappa)^2.$$

Pastebėsime, kad $4(1 - \eta^2)|\varkappa|^2 \geqslant 0$, todėl būtinoji stabilumo sąlyga bus

$$\frac{4\tau}{h^2} = \gamma \leqslant \frac{2\mathrm{Re}\varkappa}{|\varkappa|^2} \tag{4.12}$$

IŠVADA 7. *Nelyginė-lyginė schema sąlygiškai stabili, kai* $\mathrm{Re}\varkappa > 0$.

LITERATŪRA

[1] R. D. Richtmayer and K. W. Morton, *Difference Methods for Initial Value Problems*, Interscience Publishers, New York, 1967.

[2] N. S. Bachvalov, N. P. Zhidkov, and G. M. Kobelkov, *Numerical Methods* (in Russian), Nauka, Moscow, 1987.

[3] A. A. Samarskii, *Theory of Difference Schemes* (in Russian), Nauka, Moscow, 1989.

[4] R. Čiegis, O. Štikonienė, U. Dralle, *Stability analysis of some odd-even schemes for two-dimensional diffusion and Scrödinger problems*, University of Paderborn, SFB 376 Massive Parallel, 1997.

The root condition for polynomial of the second degree and a spectral analysis for three-level finite-difference schemes

A. Štikonas

This paper deals with a root condition for polynomial of the second degree. We propose the root condition criterion for such polynomial with complex coefficients. The criterion coincide with well-known Hurwitz criterion in the case of real coefficients. We apply this root condition criterion for some three-level finite-difference schemes for Kuramoto-Tsuzuki equations. We investigate polynomial symmetrical and DuFort-Frankel finite-difference schemes and polynomial for one odd-even scheme. We established spectral (conditionally or non-conditionally) stability for these schemes.