LMD mokslo darbai, 502–507
1998, Vilnius

О преобразовании Хеллингера

Вайдотас Канишаускас (ШУ)

Пробразование Хеллингера широко используется в статистике случайных процессов [1], [2]. Особое место при этом занимает представления преобразования Хелингера. В настоящей работе получено нетрадиционное представление преоброзавания Хеллингера, т.е. без использования процесса Хеллингера. Эта работа является обобщением результатов автора полученых в статье [3].

В первом параграфе доказан основной результат, во втором и третьем – этот результат применяется для мультивариантных точечных процессов и процессов восстановления.

1. Основной результат

Пусть на измеримам пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$ определенно семейство вероятностных мер $\mathcal{P} = \{P_j,\ j = 1, \dots, k\}$. Преобразованием Хеллингера относительно мер $\mathcal{P}$ называется функция

$$H(\alpha; \mathcal{P}) = \mathbb{E}_Q\left[\prod_{j=1}^{k}\left(\frac{dP_j}{dQ}\right)^{\alpha_j}\right],$$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k),\ 0 < \alpha_j < 1,\ \sum_{j=1}^{k}\alpha_j = 1,$$

независящая от Q, где мера Q такая, что $P_j \ll Q$, $j = 1, \dots, k$, и $\mathbb{E}_Q$ обозначает математическое ожидание относительно меры Q.

Пусть $(E, \mathcal{E})$ – пространство Блэкуэлла, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, Q)$ – стохастический базис, $\mathcal{P} = \{P_j,\ j = 1, \dots, k\}$ семейство вероятностных мер на $(\Omega, \mathcal{F})$, μ – целочисленная случайная мера на $(R_+ \times E, \mathcal{B}(R_+) \otimes \mathcal{E})$ с $(Q, \mathbb{F})$ – компенсатором ν таким, что $\nu(\{t\} \times E) \equiv 0$.

Введем условия:

A1. Вероятностные меры P_j, $j = 1, \dots, k$ такие, что при каждом $t \geqslant 0$

$$P_j^t \sim Q^t \quad (P_j^t = P_j|_{\mathcal{F}_t}),$$

и процесс локальной плотности имеет вид

$$Z_j^t = \frac{dP_j^t}{dQ^t} = \mathcal{E}_t\big((V_j - 1) * (\mu - \nu)\big), \quad j = 1, \dots, k,\ t \geqslant 0,$$

где $\mathcal{E}_t(\cdot)$ – стохастическая экспонента, V_j строго положительные $\mathcal{P}(\mathbb{F})\otimes\mathcal{E}$ – измеримые функции такие, что для всех $t\in R_+$, $j=1,\dots,k$

$$(1-\sqrt{V_j})^2 * \nu_t < \infty \quad Q-\text{п.н.}.$$

Здесь использовали сокращение $g*\mu_t = \int\limits_0^t\int\limits_E g(s,x)\mu(ds,dx)$.

A2. Пусть для каждого $t\in R_+$, Q-п.н.

$$\left|\sum_{j=1}^k \alpha_j V_j - 1\right| * \nu_t < \infty.$$

Замечание 1. Заметим, что в силу неравенства $c_1(1-\sqrt{1+x})^2 \leqslant |x|^2/(1+|x|) \leqslant c_2(1-\sqrt{1+x})^2$, $x\geqslant -1$, где c_1 и c_2 некоторые постоянные, условие A2 эквивалентно условию:

$$\text{A2}' \quad \left(1-\sqrt{\sum_{j=1}^k \alpha_j V_j}\right)^2 * \nu_t < \infty \quad Q-\text{п.н.},\ t\in R_+.$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия A1, A2. Тогда*

$$H(\alpha;\mathcal{P}^t) = \mathbb{E}_Q\left[e^{-d(\alpha;\mathcal{P})(t)}\mathcal{E}_t\big(M(\alpha;\mathcal{P})\big)\right], \tag{1}$$

где

$$d(\alpha;\mathcal{P})(t) = \ln\frac{\sum\limits_{j=1}^k \alpha_j V_j}{\prod\limits_{j=1}^k V_j^{\alpha}} * \mu_t, \tag{2}$$

$$M(\alpha;\mathcal{P})(t) = \left(\sum_{j=1}^k \alpha_j V_j - 1\right) * (\mu-\nu)_t. \tag{3}$$

Доказательство. Применяя формулу стохастической экспоненты [1], имеем

$$Z_j^t = \mathcal{E}_t\big((V_j-1)*(\mu-\nu)\big) = \exp\{(V_j-1)*(\mu-\nu)_t + (\ln V_j - V_j + 1)*\mu_t\}.$$

В силу этого, после элементарных вычислений, получаем

$$\prod_{j=1}^k (Z_j^t)^{\alpha_j} = e^{-d(\alpha;\mathcal{P})(t)}\mathcal{E}_t\big(M(\alpha;\mathcal{P})\big),$$

где стохастические интегралы $M(\alpha; \mathcal{P})(t)$ и $\mathcal{E}_t(M(\alpha, \mathcal{P}))$ определены в силу условия A2. Также из условия A2 и неравенств

$$\prod_{j=1}^{k} y_j^{\alpha_j} \leqslant \sum_{j=1}^{k} \alpha_j y_j,$$

где $y_j > 0,\ 0 < \alpha_j < 1,\ j = 1, \dots, k,\ \sum_{j=1}^{k} \alpha_j = 1,$

$$\ln y \leqslant |y - 1|, \quad y > 0$$

следует, что для каждого $t \in R_+$

$$d(\alpha; \mathcal{P})(t) < \infty \quad Q - \text{п.н.}.$$

Теперь утверждение теоремы следует из определения $H(\alpha; \mathcal{P}^t)$.

Теорема доказана.

2. Мультивариантный точечный процесс

Пусть на стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P_\theta,\ \theta \in \Theta)$ с пространством Блэкуэлла $(E, \mathcal{E})$ задан мультивариантный точечный процесс $(T_n, X_n),\ n \geqslant 1$, целочисленная случайная мера которого

$$\mu\big([0, t] \times \Gamma\big) = \sum_{n \geqslant 1} \mathbb{I}(T_n \leqslant t)\mathbb{I}(X_n \in \Gamma), \qquad \Gamma \in \mathcal{E},\ t \geqslant 0$$

имеет $(P_\theta, \mathbb{F})$ – компенсатор вида

$$\nu_t(\theta, \Gamma) = \int_0^t \int_\Gamma h_s(\theta, x) g_s(dx)\, ds, \quad \theta \in \Theta,$$

где $h_s(\theta, x) - \mathcal{P}(\mathbb{F}) \otimes \mathcal{E}$ – измеримая строго положительная функция.

Пусть другая мера $Q(\alpha; \theta)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, $0 < \alpha_j < 1$, $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j = 1$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k), \theta_j \in \Theta$, $j = 1, \dots, k$ определенна на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F})$ так, чтобы мера μ процесса $(T_n, X_n),\ n \geqslant 1$ имела $\big(Q(\alpha; \theta), \mathbb{F}\big)$ – компенсатор вида

$$\nu_t(\alpha; \theta; \Gamma) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \nu_t(\theta_j; \Gamma), \quad \Gamma \in \mathcal{E},\ t \in R_+.$$

Теорема 2. *Пусть* $P^t_{\theta_j} \sim P^t_{\theta_1}$, $j = 2, \dots, k$, $\theta_1, \dots, \theta_k \in \Theta$, $t \in R_+$. *Тогда интеграл Хеллингера* $H(\alpha; \mathcal{P}^t_\theta)$ *имеет представление*

$$H(\alpha; \mathcal{P}^t_\theta) = \mathbb{E}_{Q(\alpha;\theta)}, \exp\{-d(\alpha; \mathcal{P}_\theta)(t)\},$$

где

$$d(\alpha; \mathcal{P}_\theta)(t) = \ln \frac{\sum\limits_{j=1}^{k} \alpha_j h(\theta_j)}{\prod\limits_{j=1}^{k} h^{\alpha_j}(\theta_j)} * \mu_t.$$

Доказательство. В силу теоремы 1, достаточно показать, что выполнены условия A1, A2 при $Q = Q(\alpha; \theta)$.

В силу условий теоремы, линейной зависимости и непрерывности компенсаторов $\nu_t(\alpha; \theta; \Gamma)$, $\nu_t(\theta_j; \Gamma)$, $j = 1, \dots, k$, $\Gamma \in \mathcal{E}$, $t \in R_+$, следует, что для каждого $t \in R_+$ P_{θ_i}-п.н. $i = 1, \dots, k$ и $Q(\alpha; \theta)$-п.н.

$$\nu_t(\alpha, \theta, E) < \infty, \; \nu_t(\theta_j; E) < \infty, \quad j = 1, \dots, k.$$

Поэтому [4] $P^t_{\theta_j} \sim Q^t(\alpha; \theta)$, $\theta_j \in \Theta$, $t \in R_+$, $j = 1, \dots, k$, и для каждого $t \in R_+$ $Q(\alpha; \theta)$-п.н.

$$\left(1 - \sqrt{V_j(\alpha, \theta)}\right)^2 * \nu(\alpha; \theta)_t < \infty, \quad j = 1, \dots, k,$$

$$\left(1 - \sqrt{\sum_{j=1}^{k} \alpha_j V_j(\alpha; \theta)}\right)^2 * \nu(\alpha; \theta)_t < \infty,$$

где $V_j(\alpha; \theta) = d\nu(\theta_i)/d\nu(\alpha; \theta)$.

Выполнены условия A1, A2. Теорема доказана.

Следствие. Если $h_s(\theta, x) = \theta\varphi(s, x)$, $\theta > 0$ тогда

$$H(\alpha; \mathcal{P}^t_\theta) = \mathbb{E}_{Q(\alpha;\theta)} \exp\left\{ -\ln \frac{\sum\limits_{j=1}^{k} \alpha_j \theta_j}{\prod\limits_{j=1}^{k} \theta_j^{\alpha_j}} \mu\big([0, t] \times E\big) \right\},$$

где $Q(\alpha, \theta) = P_{\theta(\alpha)}$, $\theta(\alpha) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \theta_j$.

3. Процесс восстановления

Пусть $N_t = \sum_{n \geqslant 1} \mathbb{I}(T_n \leqslant t)$, $t \geqslant 0$ процесс восстановления с моментами восстановления $\tau_i = T_i - T_{i-1}, i = 1, 2, \dots, (T_0 = 0)$, функции распределения которых имеет вид

$$P_\theta(\tau_1 \leqslant t) = F(\theta, t) = 1 - e^{-\theta\psi_t}, \quad \theta \in \Theta = (0, \infty).$$

Тогда из теоремы 2 следует, что

$$H(\alpha, \mathcal{P}_\theta^t) = \mathbb{E}_{\theta(\alpha)} \exp\left\{ -\ln \frac{\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \theta_j}{\prod_{j=1}^{k} \theta_j^{\alpha_j}} N_t \right\},$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, $0 < \alpha_j < 1$, $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j = 1, \theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$, $\theta_j \in \Theta$, $j = 1, \ldots, k$, $\theta(\alpha) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \theta_j$, $t \in R_+$. Из этого представления вытекает следующий полезный результат.

Теорема 3. *Пусть существует постоянная* $\lambda > 0$ *такая, что*

$$\psi(\lambda) = \mathbb{E}_{\theta(\alpha)} e^{\lambda \tau_1} < \infty.$$

Тогда для каждого $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, $0 < \alpha_j < 1$, $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j = 1$ *и* $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$, $\theta_i \in \Theta$ *существует предел*

$$c(\alpha; \theta) = \lim_{t \to \infty} t^{-1} \ln H(\alpha; \mathcal{P}_\theta^t) = -\frac{g(\alpha; \theta)}{a(\alpha; \theta)}, \tag{4}$$

где

$$g(\alpha; \theta) = \ln \frac{\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \theta_j}{\prod_{j=1}^{k} \theta_j^{\alpha_j}}, \quad 0 < a(\alpha; \theta) = \mathbb{E}_{\theta(\alpha)} \tau_1.$$

Теорема 3 доказывается также как и теорема 6 [3].

Следствие. Пусть

$$P_\theta(\tau_1 \leqslant t) = 1 - \exp\left\{ -\theta \int_0^t s^{\gamma - 1} ds \right\},$$

где $\gamma < 1$, а θ – неизвестной положительный параметр. Тогда имеет место соотношение (4), в котором

$$a(\alpha; \theta) = \frac{\gamma^{\frac{1}{\gamma}} \Gamma(\frac{1}{\gamma} + 1)}{\left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \theta_j \right)^{\frac{1}{\gamma}}},$$

где $\Gamma(a) = \int_0^\infty x^a e^{-x} \, dx$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] F. Liese and I. Vajda, Convex Statistical Distances, *Teubner – Texte zur Mathematik*, **95** (1987),

[2] B. Grigelionis, *On Hellinger transforms for solutions of martingale problems*, Stochastic Processes, A Festschrift in Honour of Gopinath Kallianpur, S. Cambanis et al. (Eds), Springer-Verlag, New York, 1993, 107–116.

[3] В. Канишаускас, Асимптотически минимаксное различение двух простых гипотез, *Liet. Matem. Rink.*, **38** (1998), 169–184.

[4] Ю. М. Кабанов, Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев, Абсолютная непрерывность и сингулярность локально абсолютно непрерывных распределений, II, *Матем. сб.*, **108** (1978), 32–61.

Apie Helingerio transformaciją

V. Kanišauskas (ŠU)

Gauta nauja Helingerio transformacijos išraiška.