Lietuvos matematikos rinkinys
Lietuvos matematikų draugijos darbai, ser. B
65 tomas, 2024, 34–44
https://doi.org/10.15388/LMR.2024.38089

Būtinosios ir pakankamosios sąlygos teoremose

Edmundas Mazėtis[a], **Grigorijus Melničenko**[b]

[a] *Matematikos institutas, Vilniaus universitetas*
Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius, Lietuva
[b] *Švietimo akademija, Vytauto Didžiojo universitetas*
K. Donelaičio g. 58, LT-44248 Kaunas, Lietuva
El. paštas: edmundas.mazetis@mif.vu.lt; gmelnicenko@gmail.com

Įteiktas 2024 liepos 23; publikuotas 2024 gruodžio 10

Santrauka. Tiek moksleiviui, tiek profesionaliam matematikui uždavus klausimą – kuo skiriasi būtinosios ir pakankamosios sąlygos, atsakyti dažnai būna sunkoka. Net ir pateikus konkrečių teiginių formuluočių, ne visuomet gaunamas teisingas atsakymas. Tuo tarpu šios dvi sąvokos yra dažnos šiuolaikinėje matematikoje. Straipsnyje bandoma išnagrinėti būtinąsias ir pakankamąsias sąlygas, tuo tikintis pakelti tiek skaitytojų, tiek ir savo matematinę kultūrą.

Raktiniai žodžiai: teorema; teoremos sąlygos ir išvados; būtinosios ir pakankamosios sąlygos; teiginių ekvivalentumas; implikacijos; logine konjunkcija; logine disjunkcija
AMS: 97G40

1 Teoremos sąvoka

Teorema yra fundamentali matematikos sąvoka, kuri suprantama kaip tvirtinimas, kurį reikalinga įrodyti. Reikia pažymėti, kad šalia sąvokos „*teorema*“ matematikoje naudojami ir tokie terminai:

- *teiginys*;
- *lema*;
- *savybė*;
- *požymis*;
- *kriterijus*;
- *tvirtinimas*.

Skirtumas tarp šių terminų dažniausiai yra sąlyginis. Daugeliu atvejų termino „*teorema*“ įvairių prasmių ir formuluočių nežinojimas sąlygoja įvairius nesusipratimus ar net klaidas.

Pavyzdžiui matematinės analizės vadovėliuose pakankamosios eilučių konvergavimo sąlygos dažnai vadinamos konvergavimo požymiais, o būtinoji konvergavimo sąlyga požymiu vadinama gana retai. Kalbant apie būtinas sąlygas, terminas „*būtinasis požymis*“ vartojamas retai.

Teoremos dažnai formuluojamos kaip būtinosios sąlygos, arba pakankamosios sąlygos, arba būtinosios ir pakankamosios sąlygos. Todėl svarbu išsiaiškinti, kas yra būtinosios sąlygos ir kas yra pakankamosios sąlygos.

2 Teoremos sąlygos ir išvados

Matematikoje susiduriama su įvairaus tipo teiginiais, išreiškiamais kaip teoremos. Kiekvienas teiginys yra arba teisingas, arba klaidingas (trečiojo negalimo dėsnis). Tai yra Aristotelio logikos dėsnis, kurį išgarsino lotyniškas posakis „*tertium non datur*“ (trečias negalimas).

1 apibrėžimas. Teorema – tai teiginys, kurio teisingumas įrodomas samprotavimų būdu – teoremos įrodymu.

Pateikiame teoremų pavyzdžių:

- *Keturkampis, kurio priešingos kraštinės yra lygios, yra lygiagretainis*;
- *Keturkampis, kurio visos kraštinės yra lygios, yra rombas*;
- *Trikampio kampų suma lygi* $180°$.

Šie pavyzdžiai yra pateikti tvirtinamąja (kategoriškąja) forma. Bet daugumos teoremų loginė struktūra yra implikacijos. Tokios teoremos struktūrą sudaro teoremos sąlyga (kas yra duota), loginė jungtis ir išvada (kas reikalinga įrodyti).

Pavyzdžiui, teoremoje „*Jei kampai yra kryžminiai, tai jie lygūs*“ teiginys „*kampai yra kryžminiai*“ yra sąlyga, „*tai*“ – loginė jungtis, „*jie lygūs*“ – išvada.

- *Teoremos sąlyga – tai ta dalis, kurioje kalbama apie tai, kas yra duota*;
- *Teoremos išvada – tai dalis, kurioje kalbama apie tai, kas turi būti įrodoma.*

Aukščiau pateiktuose teoremų pavyzdžiuose sąlyga (kas duota) ir išvada (ką reikia įrodyti) aiškiai neišskirtos, jose tvirtinama, kad objektas, tenkinantis nurodytas sąlygas, egzistuoja. Pastebėkime, kad tas teoremas irgi galima suformuluoti, aiškiai išskiriant sąlygą ir išvadą.

- *Jei keturkampio priešingosios kraštinės yra lygios, tai tas keturkampis yra lygiagretainis*;
- *Jei keturkampio visos kraštinės yra lygios, tai tas keturkampis yra rombas*;
- *Jei daugiakampis yra trikampis, tai jo kampų suma lygi* $180°$.

Duotosios teoremos atvirkštinė teorema, yra teorema, kurioje duotosios teoremos sąlyga keičiama į išvadą, o duotosios teoremos išvada tampa teoremos sąlyga. Nagrinėkime teiginius:

- *Jei keturkampis yra stačiakampis, tai jo įstrižainės yra lygios*,
- *Jei keturkampio įstrižainės yra lygios, tai keturkampis yra stačiakampis*

Čia sąlyga ir išvada yra sukeistos vietomis, taigi šie teiginiai yra atvirkštiniai. Pirmasis teiginys yra teisingas – tai teorema. Antrasis teiginys yra neteisingas, nes lygios įstrižainės gali būti ne tik stačiakampio, bet ir, pvz., lygiašonės trapecijos. Šis pavyzdys rodo, kad atvirkštinė teorema ne visada yra teisingas teiginys.

3 Teoremos implikacijos $A \Rightarrow B$ forma

Implikacija vadinama loginė operacija, kai iš dviejų teiginių A ir B sudaromas naujas teiginys „*jei A, tai B*“. Šis teiginys žymimas simboliu

$$A \Rightarrow B$$

ir skaitomas taip „*jei teisingas teiginys A, tai teisingas ir teiginys B*“, arba „*iš teiginio A išplaukia* (*seka*) *teiginys B*”. Implikacija (iš lotynų kalbos *implicatio* – ryšys, susiejimas) – binarinė loginė operacija, pagal savo savybes artimiausia ryšiui „*jei ..., tai*“. Implikacija ypač patogi, išskiriant teoremos sąlygą ir išvadą, t. y. tai, kas duota ir ką reikia įrodyti. Todėl teoremos dažnai formuluojamos teiginių implikacijos forma $A \Rightarrow B$, tuomet teiginys A – teoremos sąlyga, o teiginys B – jos išvada.

Nagrinėkime pavyzdį. Tarkime, kad teiginiai A ir B yra šie:

- A: = *keturkampis yra kvadratas*;
- B: = *keturkampis yra rombas.*

Iš turimų teiginių A ir B galima sudaryti naujus teiginius. Vienas jų, kuris skaitomas „*jei A, tai B*“, yra implikacija $A \Rightarrow B$. Šis teiginys skaitomas taip: „*jei keturkampis yra kvadratas, tai jis yra rombas*“. Kadangi kvadratas yra atskiras rombo atvejis, tai šis teiginys yra teisingas. Kitas teiginys, sudaromas iš tų pačių teiginių yra atvirkštinė implikacija $B \Rightarrow A$: „*jei keturkampis yra rombas, tai jis yra kvadratas*“. Kadangi rombas nebūtinai yra kvadratas, tai šis teiginys yra klaidingas.

Implikacijų pagalba formuluojamos ne tik teoremos, bet ir sąvokos bei dėsniai. Implikacija išreiškia priežastinius ryšius tarp teoremos sąlygų ir išvadų, o jos teisingumas priklauso nuo tų teiginių teisingumo. Išraiška $A \Rightarrow B$ žodžiais gali būti išreikšta vienu iš žemiau minimų būdų:

- *jei A, tai B*;
- *iš A seka B*;
- *kai A, tai B*;
- *B, nes A*;
- *B, kadangi A*;
- *A – pakankamoji sąlyga dėl B*;
- *B – būtinoji sąlyga dėl A.*

Teoremos sąlygos ir išvados savo ruožtu gali būti nebūtinai elementarieji teiginiai, o būti sudaryti iš kitų teiginių loginių konjunkcijos ir disjunkcijos operacijų pagalba.

Pateikiame teiginį su konjunkcija:

- *Per tris taškus, nepriklausančius vienai tiesei, nubrėžiamas apskritimas, ir, be to, vienintelis.*

Šiame pavyzdyje teoremos išvada pateikta konjunkcijos būdu $A \Rightarrow B \vee C$:

- $A :=$ *Trys taškai, nepriklausantys vienai tiesei* (*duota*).
- $B :=$ *Per tuos taškus nubrėžiamas bent vienas apskritimas* (*reikia įrodyti*).
- $C :=$ *Per tuos taškus eina tik vienas apskritimas* (*reikia įrodyti*).

4 Būtinosios ir pakankamosios sąlygos

2 apibrėžimas. Sakykime, kad yra teisinga implikacija $A \Rightarrow B$. Tuomet teiginys B vadinamas būtinąja teiginio A sąlyga; o teiginys A vadinamas pakankamąja sąlyga teiginiui B.

Paaiškinsime skirtumą tarp būtinųjų ir pakankamųjų sąlygų.

- *Kurio nors teiginio būtinosios sąlygos vadinamos tokios sąlygos, be kurių duotasis teiginys negali būti teisingas.*

Pavyzdžiui, sąlyga „„*skaičius yra lyginis*“ yra būtinoji sąlyga teiginiui „*sveikasis skaičius dalijasi iš* 6“. Kita būtinoji sąlyga šiam teiginiui – „*skaičius yra 3 kartotinis*“.

- *Kurio nors teiginio pakankamąja sąlyga vadinama tokia sąlyga, kuriai esant teiginys tampa teisingu.*

Pavyzdžiui sąlyga „*sveikasis skaičius yra* 9 *kartotinis*“ yra pakankama sąlyga teiginiui „*sveikasis skaičius dalijasi iš* 3“. Bet ši sąlyga nėra būtina, nes, pvz., „*skaičius* 12 *dalijasi iš* 3, *bet nesidalija iš* 9“.

Sugrįžkime prie implikacijos $A \Rightarrow B$ „*jei keturkampis yra kvadratas, tai jis yra rombas*“. Iš apibrėžimo matome, kad teiginys „keturkampis yra rombas“ yra būtina sąlyga teiginiui „*keturkampis yra kvadratas*“. Kitaip tariant, jei keturkampis yra kvadratas, tai jam neišvengti sąlygos „*keturkampis yra rombas*“: būdamas kvadratu, keturkampis privalo būti rombas.

Matematikoje būtinosios sąlygos reiškimui dažnai naudojamos tokios išraiškos

- „*tik tada*“,
- „*jeigu tik*“,
- „*tik tuo atveju, jei*“.

Pavyzdžiui:

- *Keturkampis yra kvadratas tik tada, kai jis yra rombas*;
- *Keturkampis yra kvadratas, tik jei jis yra rombas*;
- *Keturkampis yra kvadratas tik tuo atveju, jei jis yra rombas.*

Teiginys „*keturkampis yra kvadratas*“ yra pakankama sąlyga, kad keturkampis būtų rombas, bet ši sąlyga nėra būtina sąlyga teiginiui „*keturkampis yra rombas*“. Kvadratas yra rombas, bet rombas nebūtinai turi būti kvadratas.

Pažymėtina, kad būtinoji sąlyga – tai sąlyga B, kuri turi būti teisinga tam, kad būtų teisinga kita sąlyga A – jei būtinoji sąlyga B nėra teisinga, tai neteisinga ir sąlyga A. Pakankamoji sąlyga – tai ta sąlyga, kuri turi būti teisinga, kad būtų teisinga sąlyga A.

Pateiksime keletą pavyzdžių:

- *Tam, kad sveikasis skaičius dalintųsi iš* 10*, būtina, kad jis dalintųsi iš* 5.

Čia teiginys B: „*sveikasis skaičius dalijasi iš* 5“ yra būtinas tam, kad teiginys A: „*sveikasis skaičius dalijasi iš* 10“ būtų teisingas.

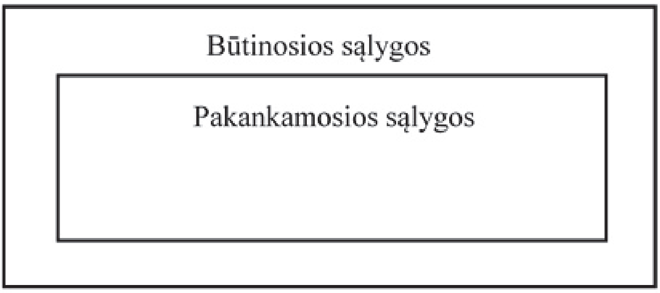
Nors pateiktieji pavyzdžiai aiškiai iliustruoja situaciją, bet nesunkiai pastebimas jų vienašališkumas ir dirbtinumas.

Tuo tarpu matematinėje analizėje pakankamosios sąlygos dažniausiai nebūna nei vienpusės, nei dirbtinos, o yra vertingos ir turi daug taikymų. Kaip pavyzdžius galima paminėti teigiamųjų skaičių eilučių konvergavimo pakankamuosius požymius (Koši ir Dalambero požymius), pakankamus funkcijos lokaliųjų ekstremumų egzistavimo požymius taikant pirmąją ir antrąją išvestines. Diferencialinių lygčių teorijoje svarbios teoremos su pakankamosiomis sąlygomis, pavyzdžiui, Koši teorema apie pirmosios eilės diferencialinių lygčių sprendinių egzistavimo ir vienaties pakankamas sąlygas.

Pateikiame daugiau pavyzdžių iš matematinės analizės kurso.

- *Tam, kad funkcija $f(x)$ būtų tolydi duotajame taške x_0, pakanka, kad ji kurioje nors to taško aplinkoje būtų diferencijuojama t. y. turėtų toje aplinkoje išvestinę.*
- *Tam, kad funkcija $f(x)$ būtų didėjanti intervale $[a, b]$, pakanka, kad ji būtų diferencijuojama tame intervale ir jos išvestinė būtų teigiama.*
- *Tam, kad tolydi ir diferencijuojama taške x_0 funkcija $y = f(x)$ įgytų tame taške ekstremumą, būtina, kad taške x_0 jos išvestinė būtų lygi nuliui* $(f'(x_0) = 0)$.

Galima sakyti, kad pakankamosios sąlygos įgalina susiaurinti objektų, susijusių su tam tikra sąvoka, aibę, o būtinosios sąlygos padeda atmesti tuos objektus, kurie nėra susiję su nagrinėjama sąvoka (žr. 1 pav.).



1 pav.

Pavyzdžiui, kad išsiaiškintume, ar funkcija $f(x)$ tolydi duotajame taške x_0, pakanka įsitikinti, kad ji kurioje nors taško x_0 aplinkoje yra diferencijuojama. Taigi pakankamosios sąlygos leidžia susiaurinti funkcijų aibę iki diferencijuojamų. O pavyzdžiui, kad išsiaiškintume, ar tolydi ir diferencijuojama taške x_0 funkcija $f(x)$ turi ekstremumą tame taške, būtina, kad $f'(x_0) = 0$. Taigi būtinosios sąlygos leidžia atmesti tas funkcijas, kurioms negalioja $f'(x_0) = 0$.

Profesionalai matematikai paprastai siekia, kad pakankamosios sąlygos būtų kiek galima platesnės, o būtinosios – kiek įmanoma siauresnės, o (idealiu atveju) – pakankamosios sąlygos yra kartu ir būtinosios. Tuomet atitinkama teiginio formuluotė paprastai vadinama požymiu arba kriterijumi.

Suformuluosime eilučių su teigiamais nariais pakankamus konvergavimo požymius.

- ***Dalambero požymis***. *Jei egzistuoja riba* $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}/a_n) = l$*, tai eilutė* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguoja, kai* $l < 1$ *ir diverguoja, kai* $l > 1$*. Kai* $l = 1$*, eilutė gali ir konverguoti, ir diverguoti.*
- ***Koši požymis.*** *Jei egzistuoja riba* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$*, tai eilutė* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguoja, kai* $l < 1$ *ir diverguoja, kai* $l > 1$*. Kai* $l = 1$ *eilutė gali ir konverguoti, ir diverguoti.*

Taigi šie konvergavimo požymiai dalija visų teigiamų skaičių eilučių aibę į tris dalis:

- 1-*oji dalis – konverguojančios eilutės, kai* $l < 1$;
- 2-*oji dalis – diverguojančios eilutės, kai* $l > 1$;
- 3-*oji dalis – eilutės, kurių konvergavimas nėra aiškus – kai* $l = 1$*, todėl konvergavimo klausimas nagrinėjamas kitais būdais.*

Šie požymiai yra pakankami, nes neduoda atsakymo, kai $l = 1$, gana paprasti ir dažnai taikomi. Žinoma, kad Koši požymis stipresnis, nei Dalambero, bet Dalambero požymis yra paprastesnis taikymui.

Nagrinėkime realaus turinio pavyzdį:

- *Norint nusipirkti knygą, būtina turėti pinigų – tai yra būtinoji sąlyga. Tam, kad nusipirktume knygą, reikia turėti pinigų, kurių pakaktų tai knygai įsigyti ir kad ta knyga būtų knygyne – tai pakankamoji sąlyga.*

Taigi turėjimas pinigų nėra pakankamoji sąlyga knygai įsigyti. Pakankamoji sąlyga yra turėjimas tokios pinigų sumos, reikalingos už tą knygą sumokėti, o taip pat, kad ta knyga būtų knygyne. Šis reikalavimas ir yra būtinas kriterijus knygai įsigyti.

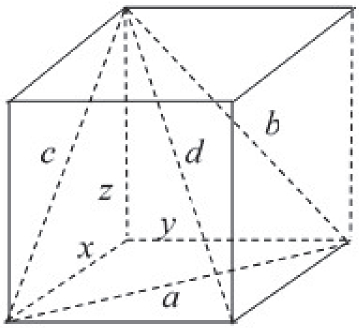
Tas faktas, kad vienas teoremos tvirtinimas yra būtina ir pakankama kito tvirtinimo sąlyga, reiškia, kad pirmasis teiginys yra teisingas tada ir tik tada, kai yra teisingas antrasis teiginys. Tai reiškia, kad minėti teiginiai turi būti arba abu teisingi, arba abu klaidingi.

Stačiakampis gretasienis, kurio visų briaunų, visų sienų įstrižainių ir gretasienio įstrižainės ilgiai yra sveikieji skaičiai, yra vadinamas tobuluoju kuboidu (2 pav.). Kaip žinia, Herono trikampiu vadinamas toks trikampis, kurio visų kraštinių ilgiai ir plotas yra sveikieji skaičiai [4, 5].

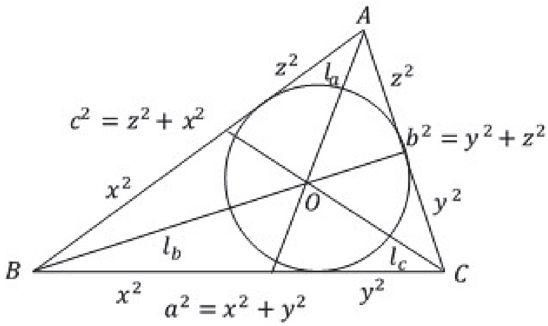
1 teorema. *[4] Kad egzistuotų tobulasis kuboidas* (*2 pav.*) *būtina ir pakankama, kad egzistuotų trikampis, kurio visų kraštinių ilgiai ir pusperimetris būtų sveikųjų skaičių kvadratai, o pusiaukampinių ilgiai būtų racionalieji skaičiai* (*3 pav.*); *toks trikampis yra panašus Herono trikampiui.*

Taigi jei teoremos pirmasis tvirtinimas yra teisingas, tai teisingas ir antrasis tvirtinimas, o jei pirmasis tvirtinimas neteisingas, tai ir antrasis neteisingas.

Straipsniuose [7, 8] teigiama, kad iki 2017 metų rugpjūčio 11 d. uždavinio apie stačiakampio tobulojo kuboido egzistavimą sprendimas buvo nežinomas. Šios problemos istorija yra nušviesta [9, 10, 11, 12] darbuose. Internete galima rasti publikacijų,



2 pav.



3 pav.

kuriose įrodinėjama, kad tobulasis kuboidas neegzistuoja (pvz., žr. archyvo arXiv.org straipsnius [1, 2] arba archyvo viXra.org straipsnius [3, 6]). Kadangi šie elektroninių preprintų archyvų straipsniai nerecenzuojami, tai minėti straipsniai nėra oficialūs moksliniai straipsniai, todėl jų rezultatai nebūtinai yra teisingi. Taigi klausimas apie tobulojo kuboido egzistavimą dar nėra iki galo išspręstas.

Egzistavimo teoremos yra ypatinga teoremų rūšis, kuriose įrodoma kurio nors objekto, pasižyminčio tam tikromis nurodytomis savybėmis, egzistavimas. Paprastai apibrėžus kurią nors matematinę sąvoką, būtina parodyti, kad objektas su sąlygoje nurodytomis savybėmis egzistuoja. Pvz., apibrėžus tobulojo kuboido sąvoką, būtina įrodyti, kad toks kuboidas egzistuoja.

Analogiškai apibrėžus lygiagrečias tieses, būtina įrodyti jų egzistavimo teoremas. Priminsime, kad euklidinėje geometrijoje dvi tiesės yra lygiagrečios, jei jos yra vienoje plokštumoje ir neturi bendrų taškų. Žodžiai „*euklidinėje geometrijoje*“ čia yra esminiai, nes neeuklidinėse geometrijose dvi plokštumos tiesės, neturinčios bendrų taškų, yra nebūtinai lygiagrečios (hiperbolinėje geometrijoje), arba lygiagrečių tiesių apskritai nėra (eliptinėje geometrijoje, kurios atskiras atvejis yra sferinė geometrija). Už planimetrijos pagrindus priėmus Hilberto aksiomatiką, neįmanoma įrodyti, kad per plokštumos tiesei nepriklausantį tašką, esantį toje plokštumoje, eina tik viena tiesė, lygiagreti su duotąja, todėl šis faktas euklidinėje geometrijoje yra aksioma.

Mokyklinėje matematikoje vienas pirmųjų pavyzdžių, kuriame atskleidžiamas ryšys tarp būtinųjų ir pakankamųjų sąlygų, yra funkcijos ekstremumų radimo uždavinys. Funkcijos tyrimo schemoje aiškiai ir nedviprasmiškai išskiriamos būtinosios ir pakankamosios sąlygos.

5 Sąlygos, kurios yra ir būtinosios ir pakankamosios

Yra matematinių teiginių, kuriuose suformuluotos ir būtinosios, ir pakankamosios sąlygos. Nagrinėkime Pitagoro teoremą. Paprastai ji formuluojama taip: stačiojo trikampio statinių kvadratų suma yra lygi jo įžambinės kvadratui. Suformuluokime ją implikacijos $A \Rightarrow B$ pavidalu:

- *Jei trikampio ABC kampas ACB yra statusis, tai trikampio ABC kraštinėms teisinga lygybė $AC^2 + BC^2 = AB^2$.*

Atkreipkime dėmesį, kad šioje implikacijos $A \Rightarrow B$ pavidalo teoremos formuluotėje

- A: = *trikampio* ABC *kampas* ACB *yra statusis;*
- B: = *tai trikampio* ABC *kraštinėms teisinga lygybė* $AC^2 + BC^2 = AB^2$.

Taikydami būtinosios sąlygos terminologiją, Pitagoro teoremą galime suformuluoti taip:

- *Tam, kad trikampio* ABC *kampas* ACB *būtų statusis, trikampio* ABC *kraštinėms būtinai turi būti teisinga lygybė* $AC^2 + BC^2 = AB^2$.

Pastebėkime, kad atvirkštinė implikacija $B \Rightarrow A$ taip pat teisinga. Kitaip tariant, teisinga teorema, atvirkštinė Pitagoro teoremai:

- *Jei trikampio* ABC *kraštinėms teisinga lygybė* $AC^2 + BC^2 = AB^2$, *tai to trikampio kampas* ACB *yra statusis.*

Taigi sąvokos „*būtinoji sąlyga*“ ir „*pakankamoji sąlyga*“ yra glaudžiai susijusios su tiesioginėmis ir atvirkštinėmis teoremomis.

Būtinosios ir pakankamosios sąlygos ypač dažnai sutinkamos geometrijos teoremose. Pateiksime tokių teoremų pavyzdžių.

- *Tam, kad stačiojo trikampio vienas kampas būtų lygus* $15°$, *būtina ir pakankama kad į įžambinę nubrėžta trikampio aukštinė būtų* 4 *kartus trumpesnė už įžambinę*;
- *Tam, kad lygiagretainis būtų kvadratas, būtina ir pakankama, kad jo įstrižainės būtų lygios ir statmenos*;
- *Tam, kad lygtis* $a \sin x + b \cos x = c$ *turėtų sprendinių, būtina ir pakankama, kad galiotų nelygybė* $|c| \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}$;
- *Tam, kad trikampis būtų lygiašonis, būtina ir pakankama, kad būtų lygios arba jo dvi aukštinės, arba dvi pusiaukraštinės, arba dvi pusiaukampinės.*

Pažymėkime, kad antrojoje teoremoje išvada užrašyta logine konjunkcijos forma, o paskutiniojoje – logine disjunkcijos forma.

6 Teoremos kaip ekvivalentumai $A \Leftrightarrow B$

Kai abi implikacijos $A \Rightarrow B$ ir $B \Rightarrow A$ yra teisingos, teiginiai A ir B vadinami ekvivalenčiais, t. y. yra teisinga ir tiesioginė implikacija ir atvirkštinė implikacija. Šiuo atveju yra teisingas ekvivalentumas $A \Leftrightarrow B$, tai reiškia, kad abu teiginiai A ir B seka vienas iš kito. Taigi ekvivalentūs teiginiai A ir B yra susieti šiomis implikacijomis:

$$\begin{cases} A \Rightarrow B \\ B \Rightarrow A \end{cases}$$

Teiginių ekvivalentumas dažnai formuluojamas, naudojant tokias išraiškas:

- *Būtina ir pakankama*;
- *Tada ir tik tada, kai*;
- *Tuomet ir tik tuomet, kai*;
- *Tuo ir tiktai tuo atveju, kai.*

Pavyzdžiui, tiesioginę ir atvirkštinę Pitagoro teoremas galima parašyti viena teorema keletu būdų:

- *Kad trikampis būtų statusis, būtina ir pakankama, kad jo dviejų kraštinių kvadratų suma būtų lygi trečiosios kraštinės kvadratui*;
- *Trikampis yra statusis tada ir tik tada, kai jo dviejų kraštinių kvadratų suma yra lygi trečiosios kraštinės kvadratui*;
- *Trikampis yra statusis tuomet ir tik tuomet, kai jo dviejų kraštinių kvadratų suma yra lygi trečiosios kraštinės kvadratui*;
- *Trikampis yra statusis tuo ir tiktai tuo atveju, kai jo dviejų kraštinių kvadratų suma yra lygi trečiosios kraštinės kvadratui.*

Matematikoje sakoma, kad sąlyga „*dviejų kraštinių kvadratų suma lygi trečiosios kraštinės kvadratui*“ charakterizuoja statųjį trikampį ta prasme, kad bet kuriam stačiajam trikampiui ši sąlyga yra teisinga, o jei trikampis nėra statusis, jis šios sąlygos netenkina.

Geometrijos kurse yra daug teoremų, kurių struktūra yra loginis ekvivalentumas. Pateiksime pavyzdžių:

- *Tam, kad į iškilųjį keturkampį būtų galima įbrėžti apskritimą, būtina ir pakankama, kad jo priešingų kraštinių ilgių sumos būtų vienodos*;
- *Tam, kad du nenuliniai vektoriai būtų statmeni, būtina ir pakankama, kad jų skaliarinė sandauga būtų lygi nuliui.*

Kai reikia suformuluoti keleto teiginių ekvivalentumą, tuomet teorema dažnai formuluojama tokiu pavidalu: „*Išvardyti teiginiai yra ekvivalentūs arba pateiktieji teiginiai yra ekvivalentūs*“ ir po to išvardijami tie teiginiai.

2 teorema. *Šie teiginiai yra ekvivalentūs:*

a) *Trikampio ABC kampas CAB yra statusis*;
b) *Trikampio ABC kraštinėms yra teisinga lygybė $AC^2 + BC^2 = AB^2$*;
c) *Apie trikampį ABC apibrėžto apskritimo spindulys R tenkina sąlygą $AB = 2R$ (viena trikampio kraštinė yra lygi apibrėžto apie trikampį apskritimo skersmeniui) arba $AC^2 + BC^2 + AB^2 = 8R^2$*;
d) *Įbrėžto į trikampį ABC apskritimo spinduliui r teisingos lygybės $r = (AC \cdot BC)/(AC + BC + AB)$ arba $r = (AC + BC - AB)/2$.*

3 teorema. *[4, 5] Pateiktieji teiginiai yra ekvivalentūs*:

a) *Egzistuoja racionalieji Diofanto lygčių sistemos*

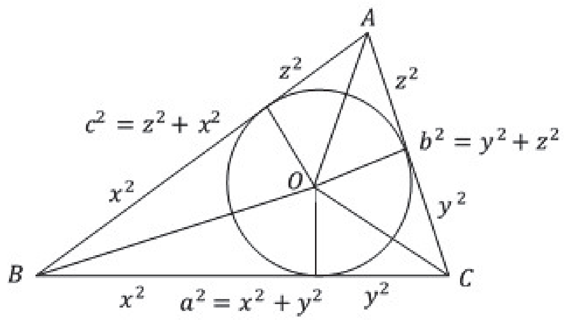
$$a^2 = x^2 + y^2, \quad b^2 = y^2 + z^2, \quad c^2 = z^2 + x^2, \quad d^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

sprendiniai;

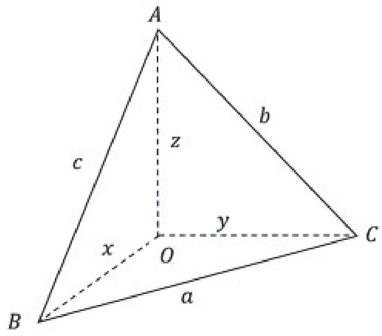
b) *Egzistuoja racionalieji Diofanto lygčių sistemos*

$$a^2 = x^2 + y^2, \quad b^2 = y^2 + z^2, \quad c^2 = z^2 + x^2, \quad d^2 = x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$$

sprendiniai;



4 pav.



5 pav.

c) *Egzistuoja tobulasis kuboidas* (*2 pav.*);

d) *Egzistuoja trikampis, kurio visų kraštinių ilgiai ir pusperimetris yra sveikųjų skaičių kvadratai, o pusiaukampinių ilgiai yra racionalieji skaičiai* (3 *pav.*), *toks trikampis yra panašus kuriam nors Herono trikampiui*;

f) *Egzistuoja trikampis, kurio visų kraštinių ilgiai, pusperimetris ir atkarpų nuo trikampio viršūnių iki taškų, kuriuose įbrėžtas į trikampį apskritimas liečia trikampio kraštines, ilgiai yra sveikųjų skaičių kvadratai* (4 *pav.*), *toks trikampis yra panašus kuriam nors Herono trikampiui*;

g) *Egzistuoja trikampis, kurio visų kraštinių ilgiai ir pusperimetris yra sveikųjų skaičių kvadratai, o atkarpų nuo trikampio viršūnių iki įbrėžto į trikampį apskritimo centro ilgiai yra racionalieji skaičiai* (4 *pav.*), *toks trikampis yra panašus kuriam nors Herono trikampiui*;

e) *Egzistuoja tetraedras, kurio trys plokštieji kampai, turintys bendrą viršūnę, yra statieji, o visos keturios sienos yra Herono trikampiai* (*5 pav.*).

Literatūra

[1] I. Lloyd. There is no perfect cuboid. e-print. https://arxiv.org/abs/2206.06160 (žiūrėta 2024-11-30). In Electronic Archive http://arxiv.org.

[2] S. Maiti. The non-existence of perfect cuboid. e-print. https://arxiv.org/abs/2005.07514 (žiūrėta 2024-11-30). In Electronic Archive http://arxiv.org.

[3] R. Majki. Perfect cuboid does not exist. e-print. https://vixra.org/abs/1808.0158 (žiūrėta 2024-11-30). In Electronic Archive https://vixra.org/.

[4] E. Mazetis, G. Melničenko. Racionalieji kuboidai ir herono trikampiai. *Liet. matem. rink., LMD darbai, ser. B.*, **59**:61–66, 2018.

[5] E. Mazetis, G. Melničenko. Racionalieji kuboidai ir herono trikampiai ii. *Liet. matem. rink., LMD darbai, ser. B.*, **60**:34–38, 2019.

[6] V.I. Saenko. Perfect cuboid does not exist. e-print. https://vixra.org/abs/1409.0144 (žiūrėta 2024-11-30). In Electronic Archive https://vixra.org/.

[7] R.A. Sharipov. *Simmetrijnyj podhod k zadache o sovershennom kuboide.* Itogi Nauki i Tekhniki, Seriya Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory, Vol. 152 (in Russian), Moscow, 2018. https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=into&paperid=358&option_lang=eng.

[8] R.A. Sharipov. Symmetry-based approach to the problem of a perfect cuboid. *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **25:2**:266–282, 2021. https://link.springer.com/article/10.1007/s10958-020-05159-4.

[9] R. van Luijk. On perfect cuboids. Math. Institute web resource. http://www.math.leidenuniv.nl/~rvl/ps/cuboids.pdf (žiūrėta 2024-11-30), 2000.

[10] M. Waldschmidt. Open diophantine problems. *Mosc. Math. J.*, **4:1**:245–305, 2004. https://webusers.imj-prg.fr/~michel.waldschmidt/articles/pdf/odp.pdf.

[11] Eric.W. Weisstein. Euler brick. From MathWorld – A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/EulerBrick.html (žiūrėta 2024-11-30).

[12] Wikipedia. Euler brick. Free encyclopedia https://en.wikipedia.org/wiki/Euler_brick (žiūrėta 2024-11-30).

SUMMARY

Necessary and sufficient conditions in theorems

E. Mazėtis, G. Melničenko

When students and professional mathematicians are asked what the difference between necessary and sufficient conditions is, they often have difficulty answering the question. Even when presented with concrete formulations of state and asked what the difference between necessary and sufficient conditions means, the answer is not always correct. Meanwhile, these two notions are widespread in modern mathematics. This article attempts to consider necessary and sufficient conditions, hoping to increase the mathematical culture of both readers and their authors.

Keywords: theorem; conditions and conclusions of a theorem; necessary and sufficient conditions; equivalence of statements; implication; logical conjunction; logical disjunction