VILNIAUS UNIVERSITETAS

VALERIJONAS DUMSKIS

STOCHASTINĖS PUSIAUSVYROS PAIEŠKOS METODŲ TYRIMAS IR TAIKYMAS

Daktaro disertacija
Technologijos mokslai, Informatikos inžinerija (07 T)

Vilnius, 2014

Disertacija rengta 2009–2013 metais Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos institute.

Mokslinis vadovas – prof. habil. dr. Leonidas Sakalauskas (Vilniaus universitetas, technologijos mokslai, informatikos inžinerija – 07 T).

Padėka

Nuoširdžiai dėkoju moksliniam vadovui prof. habil. dr. Leonidui Sakalauskui už nuolatines ir vertingas mokslines konsultacijas per doktorantūros studijas, už patarimus ir pasiūlymus bei nuolatinį dėmesį, dėkoju Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos instituto direktoriui prof. habil. dr. Gintautui Dzemydai už visapusišką paramą, studijuojant doktorantūroje, dėkoju MII duomenų analizės skyriaus operacijų tyrimo sektoriaus darbuotojams bei doktorantams už bendradarbiavimą ir supratimą. Atskirai noriu padėkoti disertacijos recenzentams – doc. dr. Audronei Jakaitienei ir doc. dr. Igoriui Belovui, atidžiai skaičiusiems disertaciją ir pateikusiems daug vertingų patarimų bei kritinių pastabų.

Reiškiu padėką Šiaulių universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto dekanui prof. dr. Dariui Šiaučiūnui, visiems Informatikos ir Matematikos katedrų darbuotojams už visokeriopą pagalbą, ruošiant šią disertaciją. Taip pat noriu padėkoti visiems draugams ir artimiesiems už jų paramą, kantrybę, supratingumą ir meilę. Ypač dėkoju anūkams Olivijai ir Edvardui už jų smalsumą ir norą išmokti skaityti, nes tai mane skatino dirbti.

Valerijonas Dumskis

Reziumė

Disertacijos objektas – heterogeninių agentų modelio tyrimas ir taikymas stochastinėms Nešo ir Stakelbergo pusiausvyroms modeliuoti Monte Karlo metodu.

Darbo tikslas *– nustatyti heterogeninių agentų įtaką ekonominio burbulo susidarymui, sukurti ir ištirti dviejų lygių stochastinio programavimo specialių uždavinių bei stochastinės Nešo pusiausvyros paieškos Monte Karlo algoritmus.*

Netvarių būsenų (burbulų ir jų griūčių) identifikavimas labai svarbus ekonomikai bei finansams. Disertacijoje pateiktas burbulo pradžios identifikavimo matematinis modelis, kurį taikant buvo ištirtas Lietuvos nekilnojamojo turto burbulas.

Esant neapibrėžtumui, sprendimus dažnai priima keli individai, kurių interesai nesutampa. Tokiose situacijose taikoma viena iš pusiausvyros koncepcijų, būtent, stochastinė Nešo pusiausvyra. Darbe ištirta stochastinė Nešo pusiausvyra ir pasiūlytas jos gradientinės paieškos algoritmas. Stochastinės Nešo pusiausvyros gradientinės paieškos algoritmas ištirtas sprendžiant elektros rinkos su išankstiniais sandoriais uždavinį.

Kai sprendimai priimami hierarchiškai, tai situacijos modeliuojamos daugelio lygių modeliu. Dviejų lygių modelis yra atskiras daugelio lygių modelio atvejis.

Optimizavimo uždavinys, kurio tikslo funkcijoje ir ribojimuose yra sąlyginės rizikos reikšmė (angl. Conditional Value at Risk – CVaR) yra dviejų lygių uždavinys. Disertacijoje pasiūlytas tokio uždavinio sprendimo algoritmas ir testiniu uždaviniu ištirta jo elgsena.

Jei stochastinis dviejų etapų tiesinis uždavinys sprendžiamas reikšmingų imčių metodu, tai irgi gaunamas dviejų lygių uždavinys. Disertacijoje pasiūlytas stochastinio dviejų etapų tiesinio uždavinio sprendimo reikšmingų imčių algoritmas ir parodyta, kad jis leidžia sumažinti iteracijų kiekį, reikalingą sprendiniui reikiamu tikslumu rasti.

Disertaciją sudaro penki skyriai, literatūros sąrašas ir priedas. Bendra disertacijos apimtis 113 puslapių, 19 paveikslų ir 12 lentelių.

Disertacijos rezultatai pristatyti tarptautinėse mokslinėse konferencijose (3 pranešimai) ir Lietuvos mokslinėse konferencijose (4 pranešimai). Darbo rezultatai paskelbti mokslo leidiniuose, referuojamuose pripažintose tarptautinėse duomenų bazėse (Lietuvos mokslo tarybos patvirtintas sąrašas): *CEEOL* ir *Index Copernicus* – 2 straipsniai ir 1 straipsnis priimtas spausdinimui, *MatSciNet* (*MathematicalReviews*) – 1 straipsnis. Tarptautinių konferencijų darbuose, įtrauktuose į Mokslinės informacijos instituto sąrašą – publikuotas 1 straipsnis, recenzuojamoje Lietuvos tarptautinės konferencijos medžiagoje – 1 straipsnis.

Abstract

The research subject of the dissertation is the analysis of the model of heterogenous agents and its application for modelling stochastic Nash and Stackelberg equilibriums, applying the Monte Carlo method.

The aim of the dissertation is *to identify the impact of heterogeneous agents on the formation of the economic bubble, to create and examine algorithms for special bilevel stochastic programming problems and for search of the stochastic Nash equilibrium, applying the Monte Carlo method.*

Identification of unsustainable states (bubbles and their crashes) in economics and finances is of major importance. The thesis offers a mathematical model for identification of the beginning of the bubble. This model has been applied for the analysis of the real estate bubble in Lithuania.

In cases of uncertainty, decisions are often made by several individuals whose interests do not coincide. In such situations one of the concepts of the equilibrium is the stochastic Nash equilibrium. The dissertation examines the stochastic Nash equilibrium and offers the algorithm for gradient search of this equilibrium. The algorithm for gradient search of the stochastic Nash equilibrium was examined by solving the problem of electricity market with precedent agreements.

The situations in which decisions are made hierarchically are modelled employing the multilevel model. The bilevel model is a separate case of the multilevel model.

The optimization problem where the objective function and constraints contain conditional value at risk is a bilevel problem. The dissertation offers the algorithm for solving such problem and by solving the test problem the behaviour of the algorithm is investigated.

If we solve a two stage stochastic linear problem employing the method of importance sampling, we also obtain the bilevel programming problem. The dissertation proposes the algorithm for solving the two stage stochastic linear problem, employing the method of importance sampling, and

demonstrates that this algorithm enables to reduce the number of iterations, which is necessary for finding the solution with proper accuracy.

The dissertation consists of five chapters, the list of references and the appendix. The total volume of the dissertation is 113 pages, there are 19 figures and 12 tables.

The results of the dissertation were presented at international (3 papers) and national (4 papers) scientific conferences. Research results were announced in scientific publications and in reviewed recognised international data bases (the list approved by the Science Council of Lithuania): 2 articles and 1 article accepted for printing in scientific journals which are included in *CEEOL* and *Index Copernicus*, 1article in *MatSciNet* (*Mathematical Reviews*), 1 publication in International conference proceedings, included in the list of the Institute of Scientific Information, 1 publication in reviewed Lithuanian international conference proceedings.

Turinys

Žymenys ir santrumpos

$N = (1,2,...,n)$ – lošėjų (individų) aibė,

X_i – i-tojo lošėjo galimų veiksmų aibė,

$x = (x_1,...,x_n) \in X$ – veiksmų profilis, $X = X_1 \times ... \times X_n$,

$u_i : X \to \Re$ – i-tojo lošėjo naudingumo (išlošio) funkcija,

$u = (u_1,...,u_n)$ – lošėjų naudingumo funkcijų rinkinys,

(N, X, u) – normalioji nekooperatinio lošimo forma,

$x_1 \tilde{\succ} x_2$ – preferencijos sąryšis, kai pirmenybė teikiama baigmei x_1 prieš baigmę x_2,

$x = (x_1, x_2,...,x_n)$ – strategijų vektorius,

x_{-i} – kitų lošėjų be i-tojo lošėjo kontroliuojama strategijų vektoriaus x dalis,

$x = (x_i, x_{-i})$ – strategijų vektorius (i-tojo lošėjo strategijų vektoriaus komponentė ir kitų lošėjų be i-tojo lošėjo strategijų vektoriaus x dalis),

$P(A)$ arba $\Pr(A)$ – įvykio A tikimybė,

$\Re$ – vienmatė Euklido erdvė,

$\Re_+$ – vienmatės Euklido erdvės neneigiamas puserdvis,

$\Re^n$ – n matavimų Euklido erdvė,

Ω – elementariųjų įvykių aibė,

Σ – sigma algebra,

P_x – tikimybinis matas, kurio tankio funkcija $p : \Re^n \times \Omega \to \Re_+$,

(Ω, Σ, P_x) – tikimybinė erdvė,

$\xi \in \Omega$ – elementarusis įvykis tikimybinėje erdvėje (Ω, Σ, P_x),

E – matematinės viltis,

$z \sim p$ – z pasiskirstęs pagal tikimybinį tankį p,

$z \sim N(\mu, \sigma^2)$ – z pasiskirstęs pagal normalųjį dėsnį, kurio vidurkis yra μ, o standartinis nuokrypis σ.

$Ef\left(x_1, x_2, ..., x_n, \xi\right)$ – funkcijos $f: \Re^n \times \Omega \to \Re$ vidurkis,

$D_g(z)$ – atsitiktinio dydžio z dispersija g atžvilgiu,

$[t]^+ = \max\{0, t\}$,

v – ribinė reikšmė,

$CVaR_{\alpha_i}[f(x,\zeta)]$ – sąlyginė rizikos reikšmė praradimų funkcijai $f(x,\zeta)$ prie $\alpha \in (0,1)$ reikšmingumo lygmens,

$N(\mu, \sigma^2)$ – normalusis paskirstymo, kurio vidurkis μ ir dispersija σ^2, dėsnis,

$\chi^2(\mu, n)$ – χ^2 pasiskirstymo μ-kvantilis prie n laisvės laipsnių,

$\nabla F(x_t)$ – funkcijos $F(x)$ gradientas taške x_t,

$\nabla \widehat{F}(x_t)$ – funkcijos $F(x)$ gradiento įvertis taške x_t,

NF – fundamentalistų skaičius,

NS – čartistų skaičius,

GNM – Govindan ir Wilson globalus Niutono metodas,

BP – dviejų lygių programavimo uždavinys (angl. – *bilevel programing*),

CVaR – sąlyginė rizikos reikšmė (angl. – *Conditional Value at Risk*),

VaR – rizikos reikšmė (angl. – *Value at Risk*),

HAM – heterogeninių agentų modelis.

Paveikslų sąrašas

Lentelių sąrašas

1. Įvadas

1.1. Tyrimų sritis

Pusiausvyros būsena ir su ja susiję klausimai aktualūs daugeliui ekonomikos, verslo bei finansų valdymo sričių. Paprastai pusiausvyra yra kurio nors dinaminio proceso išdava. Svarbu nustatyti, 1) kurioms sąlygoms esant egzistuoja pusiausvyra ir jei ji egzistuoja, tai 2) ar ji yra vienintelė, kaip pasiekiama pusiausvyra, 3) kiek yra stabili toji pusiausvyra. Pusiausvyros paieška labai svarbi ekonominės analizės taikymams: prognozuojant baigmę ir įvertinant tinkamas modelio parametrų reikšmes, lyginant eksperimento rezultatus su modelio prognozėmis, testuojant suprojektuotą mechanizmą. Taikomuosiuose uždaviniuose dažnai analizuojama Nešo pusiausvyra, kurioje nė vienas iš lenktyniaujančių individų (lošėjų), besielgiančių nekooperuotai, neturi ketinimo (jam nenaudinga) vienpusiškai keisti savo strategiją, kai kiti individai laikosi pusiausvyros strategijos. Jei lošėjai priima sprendimus hierarchiškai, tai turime *Stakelbergo pusiausvyrą*. Daugelyje ekonomikos ir finansų sričių susiduriama su vienokios ar kitokios rūšies duomenų neapibrėžtumu, pavyzdžiui, paklausa priklauso nuo tam tikrų atsitiktinių dydžių arba kai kurių parametrų negalima tiksliai nustatyti ar išmatuoti. Tokiu atveju reikia nagrinėti stochastinę pusiausvyrą.

Praktiniuose uždaviniuose, kai esama daug skirtingų individų (lošėjų), tenka tirti jų elgsenos dinamiką, nustatyti pastarosios ribinius atvejus bei rasti parametrų reikšmes, prie kurių ši dinamika veda į pusiausvyrą.

1.2. Problemos aktualumas

Jei, priimant sprendimą, dalyvauja keletas lošėjų, kurių interesai nesutampa ir jie negali kooperuotis, toks lošimas vadinamas nekooperatiniu lošimu. Jame lošėjas, rinkdamasis iš jam galimų strategijų, siekia maksimizuoti (minimizuoti) savo tikslo funkciją, kurios reikšmė priklauso ir nuo kitų lošėjų strategijų. 1950 metais J. Nešas pasiūlė nekooperatiniams lošimams pusiausvyros koncepciją. Esant pusiausvyrai, pasak Nešo, nė vienas lošėjas neturi ketinimo keisti savo strategijos (jis tokiu atveju gautų tą patį arba mažiau), jei visi kiti lošėjai laikosi pusiausvyros strategijų.

Per keletą pastarųjų dešimtmečių įvairių stochastinės Nešo pusiausvyros modelių su neapibrėžtais duomenimis buvo pasiūlyta skirtingiems praktiniams uždaviniams spręsti.

Daugelis pusiausvyros situacijų modeliuojama dviejų lygių sprendimo priėmimo modeliais, kuriuose svarbi sprendimo priėmimo tvarka. Tie modeliai, vadinami *Stakelbergo lošimais*, kuriuose leistina strategijų aibė yra nusakoma kito, parametrinio optimizavimo uždavinio optimaliais sprendiniais. Šio tipo modeliai taikomi įvairiose srityse, kur viršutiniame lygyje lyderis maksimizuoja (minimizuoja) savo tikslo funkciją, priklausančią tiek nuo jo, tiek ir nuo pasekėjo strategijos, be to, pasirenka strategiją, į kurią reaguojantis pasekėjas priima sprendimą apatiniame lygyje taip, kad maksimizuotų (minimizuotų) savo tikslo funkciją.

Labai dažnai reikia įvertinti ne tik išlošį ar praradimą, kurie priklauso nuo atsitiktinių dydžių, bet ir riziką. Rizikos įvertinimo klausimai yra labai svarbūs finansų rinkose. Tada į modelį reikia įtraukti kurį nors rizikos matą: tai gali būti *rizikos reikšmė* – VaR (angl. *Value at Risk*) ar *sąlyginė rizikos reikšmė* – CVaR (angl. *Conditional Value at Risk*).

1.3. Tyrimų objektas

Disertacijos objektas – heterogeninių agentų modelio tyrimas ir taikymas stochastinės Nešo ir Stakelbergo pusiausvyrų modeliavimui Monte Karlo metodu.

1.4. Tyrimų tikslas ir uždaviniai

Darbo tikslas – nustatyti heterogeninių agentų įtaką ekonominio burbulo susiformavimui, sudaryti ir ištirti dviejų lygių stochastinio programavimo specialių uždavinių bei stochastinės Nešo pusiausvyros paieškos Monte Karlo algoritmus. Šiam tikslui įgyvendinti numatyti tokie uždaviniai:

1. Sukonstruoti ekonominio burbulo ir jo griūties matematinį modelį bei pritaikyti jį Lietuvos nekilnojamojo turto burbului ištirti.
2. Sudaryti Monte Karlo algoritmą sąlyginei rizikai optimizuoti, esant ribojimuose sąlyginei rizikai.
3. Atlikti reikšmingų imčių metodo tyrimą ir jį pritaikyti tiesinio dviejų etapų stochastinio programavimo uždaviniui spręsti.
4. Atlikti stochastinės Nešo pusiausvyros tyrimą ir sudaryti algoritmą tos pusiausvyros paieškai, įvertinti šio algoritmo elgseną.

1.5. Mokslinis naujumas

Nauji atlikto tyrimo rezultatai:

1. Pasiūlytas ekonominio burbulo ir jo griūties matematinis modelis, į kurį įtraukti dviejų skirtingų tipų agentai.
2. Sudarytas ir ištirtas stochastinio programavimo uždavinio, kurio tikslo funkcijoje ir ribojimuose yra sąlyginė rizikos reikšmė, sprendimo Monte Karlo algoritmas.
3. Sudarytas ir ištirtas reikšmingų imčių algoritmas, pritaikytas dviejų etapų tiesinio stochastinio programavimo uždaviniui spręsti.
4. Sudarytas ir ištirtas stochastinės Nešo pusiausvyros paieškos Monte Karlo algoritmas, jo stabdymui pritaikant statistinius kriterijus.

1.6. Praktinė darbo reikšmė

Praktiniai darbo rezultatai:

1. Pasiūlytas netvarios būsenos (burbulo ir jo griūties) matematinis modelis, kuris pritaikytas Lietuvos nekilnojamojo turto burbulo tyrimui.
2. Sudarytas Monte Karlo algoritmas sąlyginei rizikos reikšmei optimizuoti, kai esama ribojimų sąlyginei rizikos reikšmei; algoritmas ištirtas, sprendžiant sugeneruotus testinius uždavinius.
3. Sudarytas dviejų etapų tiesinio stochastinio programavimo reikšmingų imčių algoritmas, kuris ištirtas sprendžiant testinį uždavinį.

4. Sudarytas algoritmas stochastinės Nešo pusiausvyros paieškai; jis pritaikytas elektros tiekimo su išankstiniais sandoriais uždaviniui spręsti.

1.7. Ginamieji teiginiai

1. Į ekonominio burbulo matematinį modelį įtraukus dviejų skirtingų tipų agentus (čartistus ir fundamentalistus), gaunamas tikslesnis burbulo pradžios ir jo griūties nustatymas.
2. Stochastinės Nešo arba Stakelbergo pusiausvyros nuoseklios Monte Karlo paieškos algoritmai pasižymi geru konvergavimu ir leidžia nustatyti pusiausvyros strategiją norimu tikslumu, stabdant algoritmą pagal statistinį kriterijų.

1.8. Darbo rezultatų aprobavimas

Tyrimų rezultatai buvo pristatyti ir aptarti:

1. Ponzi modelling of the real estate market, Knowledge-based technologies and OR methodologies for strategic decisions of sustainabled development : 5th international Vilnius conference, EURO-mini conference KORSD-2009, September 30–October 3, 2009
2. Finansinių burbulų tyrimas, LMD LI konferencija, 2010 06 17–18, Šiauliai.
3. The mathematical definition of the financial bubbles and crashes, 3-ioji Lietuvos jaunųjų mokslininkų konferencija: Operacijų tyrimai verslui ir socialiniams procesams, LOTD – 2010, Vilnius.
4. Sąlyginės rizikos (CVaR), esant ribojimams, stochastinis optimizavimo algoritmas, LMD LIII konferencija, 2012 06 11–12, Klaipėda.
5. Sąlyginė rizika dviejų lygių uždaviniui, 10th EUROPT Workshop on Advances in Continuous Optimization (EUROPT-2012), 5–7 07 2012, Šiauliai.
6. On Risk Aversion Optimization by Monte – Carlo Method, International Workshop “Stochastic Programming for Implementation and Advanced Applications” (STOPROG -2012), July 3-6, 2012, Neringa.

7. Stochastinės Nešo pusiausvyros paieškos algoritmas, 16-oji mokslinė kompiuterininkų konferencija „Kompiuterininkų dienos 2013“, Šiauliai: ŠU, 2013 m. rugsėjo 19–21 d.

1.9. *Darbo rezultatų publikavimas*

Tyrimo rezultatai publikuoti šiuose mokslo leidiniuose:

1. V. Dumskis. (2004) Reduced game and its solutions, *Lietuvos matematikos rinkinys*, t. 44, spec. nr., p. 609–611, ISSN 0132-2818.
2. V. Dumskis, L. Sakalauskas (2009). Ponzi modelling of the real estate market, *Knowledge-based technologies and OR methodologies for strategic decisions of sustainabled development : 5th international Vilnius conference, EURO-mini conference,* September 30–October 3, 2009 : Selected papers, edited by M. Grasserbauer, L. Sakalauskas, E. K. Zavadskas, Vilnius, p. 538–543, ISBN 978-9955-28-482-6.
3. V. Dumskis, L. Sakalauskas. (2012). The mathematical definition of the bubbles and crashes, *Jaunųjų mokslininkų darbai*, 4 (37), p. 212–217, ISSN 1648-8776.
4. V. Dumskis, V. Guigues, L. Sakalauskas. (2012). On Risk Aversion Optimization by Monte – Carlo Method, *International Workshop "Stochastic Programming for Implementation and Advanced Applications" (STOPROG -2012),* Proceedings, July 3-6, 2012, Neringa, p. 19–23, ISBN 978-609-95241-4-6.
5. V. Dumskis, L. Sakalauskas. (2013). Reikšmingų imčių metodas dviejų etapų stochastiniam tiesiniam uždaviniui, *Jaunųjų mokslininkų darbai*, Nr. 2 (40), p. 120–124, ISSN 1648-8776.
6. V. Dumskis, L. Sakalauskas. (2014). Stochastinės Nešo pusiausvyros paieškos algoritmas, *Jaunųjų mokslininkų darbai*, Nr. 1(41), priimtas spaudai, ISSN 1648-8776.

1.10. Disertacijos struktūra

Disertaciją sudaro penki skyriai, literatūros sąrašas ir priedas

1-asis skyrius – įvadas.

2-ame skyriuje formuluojami pusiausvyros paieškos uždaviniai: heterogeninių agentų modelis, dviejų lygių stochastinio programavimo uždavinys, Nešo pusiausvyros modelis ir atliekamas analitinis jų tyrimas.

3-iame skyriuje pristatomi rinkos finansinių burbulų ir jų griūčių tyrimai, taikant Ponzi schemą ir pasiūlytą finansinių burbulų ir jų griūčių matematinį modelį bei heterogeninių agentų modelį.

4-ame skyriuje pristatomi dviejų lygių stochastinio programavimo uždaviniai (uždavinys, kurio tikslo funkcijoje ir ribojimuose yra CVaR, dviejų etapų stochastinio tiesinio programavimo uždavinio sprendimas reikšmingų imčių metodu).

5-ame skyriuje pristatomi stochastinės Nešo pusiausvyros paieškos algoritmo bei jo taikymo tyrimo rezultatai.

Darbo pabaigoje suformuluotos išvados, pateikta literatūra ir priedas.

2 skyrius. **Pusiausvyros paieškos uždaviniai**

Šiame skyriuje pateikiama bendros pusiausvyros paieškos uždavinių analitinis tyrimas, būtent, nekooperatinio lošimo modelis, dviejų lygių programavimo uždavinys, heterogeninių agentų modelis, kurie yra panaudojami kituose skyriuose stochastinės pusiausvyros paieškos metodams ir algoritmams sudaryti. Apibrėžiama Nešo pusiausvyros sąvoka nekooperatiniams lošimams ir apžvelgiama deterministinės pusiausvyros paieškos algoritmai. Stakelbergo pusiausvyra, kuri dažnai pasitaiko nekooperatiniuose lošimuose yra nagrinėjama dviejų lygių programavimo požiūriu. Kadangi stochastinės pusiausvyros paieškos sritis yra labai plati, jos neįmanoma aprėpti vienoje disertacijoje, darbe yra išskirti ir ištirti keli tipiniai stochastinių Nešo ir Stakelbergo pusiausvyrų paieškos uždaviniai. Sudaryti stochastinės pusiausvyros paieškos metodai bei algoritmai ištirti pritaikius darbe sudarytą Monte Karlo metodiką, kuri pateikiama šiame skyriuje.

J. Nash (1951) pasiūlė kooperatinių ir nekooperatinių lošimų teorijų suvienodinimą, vadinamąją Nešo programą, t. y. kooperatinį lošimą nagrinėti kaip tam tikrą nekooperatinį lošimą. Pagal Nešo programą galima rasti tokį nekooperatinį lošimą, kuriame kuri nors Nešo pusiausvyra gali būti sprendinys duotam kooperatiniam lošimui. Tos programos rezultatai apžvelgti R. Serrano darbe (2005). Kooperatinį lošimą galima nagrinėti ir kitu požiūriu, t. y. duoto kooperatinio lošimo lošėjus padaliname į dvi dalis, apibrėždami duotam lošimui redukuotą lošimą, t. y. tokį lošimą, kuriame viena dalis lošėjų dalyvauja, o kita – ne. B. Peleg (1986) nustatė, kaip redukuoto lošimo savybėmis apibrėžti pradinio lošimo sprendinius. V. Dumskis (2004) pateikė redukuoto kooperatinio lošimo kitą variantą ir ištyrė jo savybes.

2.1. Pusiausvyros sąvoka

Sąvoka „pusiausvyra“ (angliškas atitikmuo *equilibrium*) yra kilusi iš lotynų kalbos ir reiškia lygus (*equal*) + balansas (*libra*). Šis terminas reiškia, kad sistema, veikiama konkuruojančių veiksnių, yra subalansuota. Fizikos mokslo aspektu tai reikštų, kad kūnas yra ramybės būsenos arba juda tolygiai, kai visų jį veikiančių jėgų atstojamoji yra lygi nuliui. Chemijos mokslas tuo terminu nusakytų būseną, kai reakcijų greitis ir joms atvirkštinių reakcijų greitis yra tas pats. Ekonomikos moksle tai apibūdintų situaciją (baigmę), kurioje ekonominės jėgos, tokios kaip pasiūla ir paklausa, yra subalansuotos ir, jei nėra poveikio iš išorės, nesikeičia ekonominių kintamųjų reikšmės. Pavyzdžiui, sakoma, kad rinkoje yra pusiausvyra, jei kaina nustatoma taip, kad prekių ir paslaugų kiekis, kurį parduoda pardavėjai, lygus kainų ir paslaugų kiekiui, kurį perka pirkėjai. Tokia kaina vadinama konkurencine kaina.

Paskirstymo tinklų vadovas, paslaugų teikėjas komunikacijos rinkoje, tiekėjas tiekimo grandyje veikia kaip lyderis ir priima sprendimą pirmas. Tada pasekėjai – tų tinklų vartotojai, perpardavėjai renkasi savo strategiją vadovaudamiesi lyderio priimtu sprendimu. Daugelio lygių programavime ir lošimų teorijoje tokios rūšies hierarchinio sprendimo priėmimo uždaviniai yra nagrinėjami, stengiantis surasti Stakelbergo (pusiausvyros) sprendinius.

Jei nekooperatiniame lošime nuo kitų lošėjų strategijų priklauso ne tik duoto lošėjo išlošio funkcija, bet ir jam leistinos strategijos, tai turime apibendrintą Nešo pusiausvyros uždavinį. L. Sun (2012) pateikė specialų dviejų lygių su daugeliu pasekėjų programavimo uždavinį, į kurį transformuojamas apibendrintas Nešo pusiausvyros uždavinys.

Kaip teigia M. Patriksson ir L. Wynter (1997), neapibrėžtumas būdingas beveik visų hierarchinių uždavinių taikymams ir jo nepaisymas ar supaprastinimas gali brangiai kainuoti. Skirtingi autoriai nevienodai įtraukia neapibrėžtumą į taikymus. M. Sakawa ir H. Katagiri nagrinėja dviejų lygių tiesinio programavimo uždavinius su atsitiktiniais koeficientais, taikydami interaktyvų neryškų (angl. *fuzzy*) programavimą (2010). C. Cromvik ir M. Patriksson pristato hierarchinio optimizavimo uždavinių su neapibrėžtais duomenimis taikymus (2010). O. Ozaltin ir kt., imdami tiktai baigtinį scenarijų kiekį, formuluoja dviejų lygių kuprinės uždavinio stochastinį praplėtimą, kuriame lyderio 0 – 1 sprendimo pasirinkimas sukelia neapibrėžtumą pasekėjo kuprinės talpai, (2010).

A. De Kok ir G. Muratore modeliuoja tiekimo grandies, kurioje prekių paklausa yra stochastinė, koordinavimą ir optimizavimą, kaip dviejų lygių uždavinį (2010). J. Ryu ir kt. nagrinėja dviejų lygių, esant neapibrėžtumui, sprendimo priėmimo uždavinį, kuriame pirmame lygyje sprendimas priimamas dėl paskirstymo, o antrame lygyje sprendimas priimamas dėl gamybos (2004). Jie pateikia tokio uždavinio sprendimo algoritmą, kuris paremtas parametriniu programavimu. E. Roghanian ir kt. tiria tą patį uždavinį, bet jie neapibrėžtumą traktuoja kaip ribojimų tikimybinį atvejį, kur ribojimai gali būti nepatenkinti daugiausia su tam tikra tikimybe (2007). V. Kalashnikov ir kt. pateikia dviejų lygių daugelio etapų stochastinį optimizavimo modelį, skirtą dujų tiekimo grandies kuro apimčiai subalansuoti paskirstymo tinkle, esant atsitiktinėms vieneto kainoms ir atsitiktinei paklausai (2010). Tame modelyje dujų tiekimo firma yra lyderis, o vamzdyno operatorius – pasekėjas. L. Cheng ir kt. pateikia dviejų lygių kainų formavimo ir užsakymų tarp gamintojo ir perpardavėjo modelį, esant tolygiai pasiskirsčiusiai paklausai (2009). Šiuo atveju jie nagrinėja CVaR kaip perpardavėjo tikslo funkciją. Kad būtų galima rasti optimalias neilgalaikių prekių kainas, esant ribotiems pajėgumams, reikalingi įplaukų administravimo modeliai, pavyzdžiui, viešbučių, mašinų nuomos, avialinijų, koncertinių organizacijų administravimui. Visapusiškas kainų formavimo modelis privalo būti sudarytas iš stochastinių, dinaminių ir lošimo teorijos elementų.

2.2. Heterogeninių agentų modelis (HAM)

Rinkos kainų dinamikos paaiškinimas ir prognozė dažniausiai remiasi tam tikrais fundamentaliais faktoriais. Tie faktoriai gali būti duomenys apie prekių atsargas, gamybos pajėgumus, ekonominę prognozę ir tada, remiantis šiais faktoriais, galima prognozuoti ateities kainas. Tai padeda gerai paaiškinti realią paklausą ir pasiūlą. Tačiau kai kuriose rinkose veikia ir investavimo faktorius, kuris duoda patrauklią grąžą. Taigi, fundamentaliais faktoriais pagrįstais modeliais negalima paaiškinti kainų dinamikos, kurią nulemia spekuliuotojai, nes jų įtakos negalima paaiškinti fundamentaliais faktoriais. Ekonominės realybės modeliavimo metu yra priimamos tradicinės ir gerai žinomos prielaidos: racionalių lūkesčių hipotezė, efektyvios rinkos hipotezė ir tipiško agento (individo) koncepcija. Bet buvo parodyta (Homes, 2006), kad tos prielaidos yra logiškai nesuderinamos ir kad pagal modelius gauti duomenys nesutampa su empiriniais duomenimis. Racionalių lūkesčių hipotezė, pasikliaujant ja (Friedman, 1953; Lucas, 1971) buvo taikoma ekonomikos teorijoje. Racionalių lūkesčių hipotezė postuluoja, kad visi investuotojai be sisteminės klaidos įvertina ateities kainas. M. Friedman argumentuoja (1953), kad iracionalūs investuotojai (spekuliuotojai) neišgyventų konkurencinėje rinkoje, tačiau C. Homes parodė (2006), kad pagal racionalių lūkesčių teoriją negali būti jokių sandorių: jei vienas individas turi daugiau informacijos ir nori parduoti, tai potencialus pirkėjas numanys apie vertės sumažėjimą ir nepirks. Kita efektyvios rinkos hipotezė, arba informatyviai efektyvios rinkos hipotezė (Fama, 1965), teigia, kad prekyba suteikia visą informaciją per kainą. Prekės kainos pasikeitimą lemia fundamentalūs ekonominiai faktoriai: paklausa ir pasiūla. Bet, pavyzdžiui, (Shiller, 2000) pastebimas kainos pasikeitimo neatitikimas akcijų ir obligacijų fundamentalioms reikšmėms.

2.3. Dviejų lygių programavimas (Bilevel programming – BP)

Dviejų lygių programavimo uždaviniai (BP) dažnai nagrinėjami kaip hierarchiniai modeliai, arba Stakelbergo lošimai, kuriuose vienas lošėjas (lyderis) turi privilegiją lošti pirmas ir jis paskelbia savo sprendimą kitam lošėjui (pasekėjui) arba kitiems lošėjams (pasekėjams). BP uždaviniuose sprendimo kintamasis yra suskaidytas į du vektorius x ir y. Pirmo lygio sprendimo priėmėjas (lyderis) kontroliuoja vektorių $x \in \Re^m$, o antro lygio sprendimo priėmėjas (pasekėjas) kontroliuoja vektorių $y \in \Re^n$.

Jei norima sumodeliuoti hierarchinio sprendimo priėmimo proceso neapibrėžtumus, tai būtina nagrinėti stochastinius dviejų lygių programavimo uždavinius. Tada turime (2.1) – (2.2) uždavinį:

(*viršutinis lygis*) $$\min_{x,y} E(F(x,y,\omega)), \tag{2.1}$$

kai tenkinamos sąlygos $G(x,y,\omega) \le 0,$ čia y yra tokio uždavinio sprendinys

(*apatinis lygis*) $$\min_{y} E_{\omega}(f(x,y,\omega)), \tag{2.2}$$

kai tenkinamos sąlygos $g(x,y,\omega) \le 0,$ čia $x \in \Re^m, y \in \Re^n$,

$\omega \in \Omega$ yra elementarusis įvykis tikimybinėje erdvėje (Ω, Σ, P_x), funkcijos $F: \Re^m \times \Omega \to \Re, f: \Re^n \times \Omega \to \Re, \quad G: \Re^m \times \Re^n \times \Omega \to \Re^r, \quad g: \Re^m \times \Re^n \times \Omega \to \Re^s$ tenkina tam tikras integruotinumo, diferencijuotinumo bei iškilumo sąlygas, matas P_x yra absoliučiai tolydus ir gali priklausyti nuo *x*, t. y. jis yra apibrėžiamas įvedus tankio funkciją $p: \Re^n \times \Omega \to \Re_+$, E_ω yra matematinės vilties pagal atsitiktinį dydį ω simbolis. (2.1) – (2.2) uždavinio atskiri atvejai tiriami 4 skyriuje.

Kai antro (apatinio) lygio uždavinys pakeičiamas jo KKT (Karush–Kuhn–Tucker) (Karush, 1939; Kuhn ir Tucker, 1951) optimalumo sąlygomis, tada (2.1)–(2.2) uždaviniui turime ekvivalentų vieno lygio uždavinį:

$$\min_{x,y,\lambda} E_\omega(F(x,y,\omega)), \text{ kai tenkinamos sąlygos}$$

$$\begin{aligned} G(x,y,\omega) &\le 0, & \nabla_y E_\omega(f(x,y,\omega)) + \lambda^T \nabla_y g(x,y,\omega) = 0, \\ g(x,y,\omega) &\le 0, & \lambda_i g_i(x,y,\omega) = 0, \ \lambda_i \ge 0, i = 1,\dots,s, \end{aligned} \tag{2.3}$$

čia $\lambda \in R^s$ yra Lagranžo daugikliai.

Dviejų lygių programavimo uždavinio apibendrinimas yra matematinio programavimo su ribojimais pusiausvyrai uždavinys, kuriame kito uždavinio pirmos eilės optimalumo sąlygos yra ribojimuose.

Dviejų lygių programavimo uždavinys gaunamas kaip hierarchinio (dviejų lygių) modelio, arba Stakelbergo lošimų (Stackelberg, 1934), kuriuose vienas lošėjas (lyderis) turi privilegiją pirmas paskelbti savo sprendimą prieš kitą lošėją (pasekėją), matematinė formuluotė. Aišku, čia gali būti atskirų šio uždavinio atvejų, pavyzdžiui, viršutinio lygio ribojimuose gali nebūti atsitiktinio dydžio ω. Funkcijos F, G, f, g gali būti specialaus pavidalo, pavyzdžiui, tiesinės.

Jei atsitiktiniai dydžiai yra diskretieji ir turi baigtinį reikšmių skaičių, tai (2.1)–(2.2) uždavinį galima performuluoti kaip determinuotą, galbūt, labai didelį.

Dabartiniu metu stochastinio programavimo modeliai yra plačiai naudojami, kai norima realaus reiškinio įvairius neapibrėžtumus įtraukti į kuriamą modelį. Daugelyje šios rūšies modelių į tikslo funkciją įtraukiami atsitiktinių dydžių vidurkiai. Tačiau tokioje formuluotėje galima nepastebėti ir nenustatyti ekstremalių efektų, kurie gaunami minimizuojant ar maksimizuojant vidurkius, nes čia laukiamo vidurkio minimumas ar maksimumas vargu ar gali būti garantuotas, esant įvairiems reikšmingumo lygiams. Todėl reikalinga nagrinėti neapibrėžtumą ir rizikos kontrolę kartu. Vadinasi, į modelį reikia įtraukti ne tik tikslo funkcijos reikšmės optimizavimą, bet ir tam tikro rizikos mato optimizavimą.

2.4. Nekooperatiniai lošimai

2.4.1. Nekooperatinio lošimo modelis

Lošimų teorijoje nagrinėjami modeliai, kuriais modeliuojamos situacijos, kai nepriklausomi, sau naudos ieškantys individai (lošėjai) strategiškai sąveikauja tarpusavyje. Taikant modelius, galima tirti, įvairių sričių – ekonomikos (čia istoriškai yra daugiausia taikymų), politikos, biologijos, psichologijos, lingvistikos, telekomunikacijos ir kt. – situacijas. Lošimų teorijoje yra dvi plačios tyrimų sritys: kooperatiniai lošimai ir nekooperatiniai lošimai. Nekooperatinių lošimų sąvokos nereikėtų suprasti tiesmukai, t. y. kad čia modeliuojamos tik tos situacijos, kuriose konfliktuoja skirtingų individų interesai. Taip nėra, nors nekooperatinių lošimų teorijoje daugiausia tiriamos, būtent, tokios situacijos. Kartu reikia pažymėti, kad kooperatiniai lošimai, kitaip dar vadinami koaliciniais lošimais, nagrinėja ir tas situacijas, kuriose individų interesai nebūtinai sutampa. Esminis šių dviejų rūšių modelių skirtumas – nekooperatiniuose modeliuose pagrindinis modelio elementas yra individas (lošėjas) su jo viltimis, preferencijomis ir galimais jo veiksmais, o kooperatiniuose lošimuose pagrindinis modelio elementas yra grupė (koalicija).

Optimizavimo teorija jos statinėje formuluotėje (tiesinis ir netiesinis programavimas) ar dinaminėje formuluotėje (optimalus valdymas ar variacinis skaičiavimas) gali būti nagrinėjama kaip specialūs nenulinės sumos statiniai ir dinaminiai lošimai, kuriuose yra tik vienas lošėjas.

Nekooperatinis lošimas gali būti pateikiamas įvairiomis formomis. Viena iš jų yra normalioji forma, t. y. kiekvieno lošėjo naudingumas pateikiamas kiekvienai būsenai. Atskiru atveju ta būsena priklauso tik nuo lošėjų veiksmų rinkinio. Tiesa, būsena gali papildomai priklausyti ir nuo tam tikro atsitiktinio veiksnio. Kadangi daugelis kitų nekooperatinio lošimo pateikimo formų gali būti suvestos į normaliąją formą, tai ji yra viena iš fundamentaliųjų lošimų teorijoje.

Apibrėžimas. (Normalioji lošimo forma). Baigtinis n lošėjų normaliosios formos lošimas yra trejetas (N, X, u), kuriame

- N yra baigtinė lošėjų, kurie indeksuoti i, aibė;
- $X = X_1 \times ... \times X_n$, čia X_i yra baigtinė i lošėjo galimų veiksmų aibė, kiekvienas vektorius $x = (x_1, ..., x_n) \in X$ vadinamas veiksmų profiliu;
- $u = (u_1, ..., u_n)$, čia $u_i : X \to \Re$ reali i-ojo lošėjo naudingumo (išlošio) funkcija.

Tokios formos lošimai gali būti vaizduojami n matavimų matrica. Kai aibės X_i yra baigtinės, tai lošimas vadinamas baigtiniu, priešingu atveju – begaliniu.

Paprasta strategija yra mišrios strategijos, kurioje paprasta strategija pasirenkama su tikimybe lygia 1, atskiras atvejis. Jei kiekvienam veiksmui priskiriama nenulinė tikimybė, tai turime visiškai mišrias strategijas.

Lošėjai dažnai turi priimti sprendimus neapibrėžtumo sąlygomis, nes jie yra:

- netikri dėl aplinkos objektyvių parametrų,
- ne visiškai informuoti apie įvykius lošime,
- netikri dėl kitų lošėjų veiksmų, kurie nėra determinuoti,
- netikri dėl kitų lošėjų racionalumo.

2.4.2. Pusiausvyros sąvoka nekooperatiniuose lošimuose

J. Neumann ir O. Morgenstern kooperatinius lošimus laikė daug svarbesniais, todėl trys ketvirtadaliai jų monografijos (Neumann, Morgenstern, 1944) yra skirti būtent kooperatiniams lošimams. Dabartiniu metu priešingai – svarbiausiose knygose daugiau vietos užima Nešo pusiausvyros sąvoka – nekooperatinių lošimų sąvoka (Fudenberg ir Tirole, 1991; Myerson, 1991; Osborne ir Rubinstein, 1994). Yra trys priežastys:

1. Kooperatinių lošimų teorijoje ignoruojama išorė, t. y. kad koalicija gali būti veikiama jai nepriklausančių lošėjų veiksmais.
2. Kooperatinių lošimų teorijoje daroma prielaida, kad Pareto efektyvi baigmė yra pasiekiama.
3. Kooperatinių lošimų teorijoje daroma prielaida, kad didžioji koalicija (visų lošėjų koalicija) gali susiformuoti.

1 atvejis susiklostė todėl, kad kooperatiniai lošimai paprastai aprašomi charakteringos funkcijos forma, kurioje bet kurios koalicijos išlošiai gali būti gauti nepriklausomai nuo koalicijai nepriklausančių lošėjų.

2 atvejis susijęs su į sprendinio koncepciją įtraukiamais efektyvumo aksiomų reikalavimais.

3 atvejis gaunamas todėl, kad reikalaujama superadityvių lošimų (kurie daugiausia ir nagrinėjami literatūroje) efektyvumo.

Šie kooperatinių lošimų bruožai yra problemiški, nes daugeliui lošimų teorijos taikymų ekonomikoje išorė yra svarbi, Pareto efektyvumo nėra ir didžioji koalicija nesusiformuoja. Pakanka peržiūrėti klasikinį Cournot duopolijos modelį.

Nekooperatinių lošimų teorijoje Nešo pusiausvyros sąvoka yra esminė. Nešo pusiausvyroje kuris nors lošėjas, vienpusiškai nukrypdamas nuo jos, kai kiti laikosi pusiausvyros strategijų, išlošia mažiau arba tiek pat. Taigi, nė vienas lošėjas neturi ketinimo nukrypti nuo Nešo pusiausvyros. Nešo pusiausvyros sąvoka, kaip sprendinio koncepcija, veiksminga, nes ji yra logiškai nuosekli (koherentinė). Tai koncepcija, kurioje suderinta:

a) tikėtino išlošio maksimizavimas (racionalus elgesys),

b) korektiška lošėjų prognozė apie kitų lošėjų elgesį (racionalūs lūkesčiai).

Be to, nustatyta, kad tai leidžia prognozuoti elgesį prognozę eksperimentų metu, bent jau kai subjektai turi pakankamą nagrinėjamo lošimo patirtį.

Tačiau Nešo pusiausvyra turi ir keletą trūkumų. Daugelis lošimų turi nemaža tokių pusiausvyrų ir lošėjams neaišku, kurią iš jų pasirinkti. Jei lošėjai turi sąlygas komunikuoti prieš pradėdami lošti, jie gali pasirinkti pusiausvyrą derybomis (dėl to Nešo pusiausvyra dar vadinama „savęs privertimo susitarimu“, angl. „*self-enforcing agreement*“). Bet ne visada pakanka derybų įvairovei pašalinti. Tiesa, ir be komunikavimo, daug pusiausvyrų dažnai nesukuria problemos. Tai būna tuo atveju, kai viena pusiausvyra visiems yra žymiai geresnė. Deja, ne visi lošimai turi vienokią ar kitokią pusiausvyrą, į kurią lošėjai natūraliai orientuojasi. Netgi, kai Nešo pusiausvyra tėra vienintelė, lošėjų racionalumas pats savaime negarantuoja, kad pusiausvyra bus pasiekta, nes lošėjo mintijimas, ką kiti lošėjai darys, gali tik iš dalies atitikti veiksmų eigą.

Viena iš nekooperatinių lošimų teorijos sričių yra mechanizmo projektavimas (angl. *mechanism design).* Mechanizmo projektavimo teorija yra ekonomikos teorijos „inžinerijos“ dalis. Veiksmo pradžia – tam tikro tikslo siekis. Tada tiriama, aiškinamasi, koks mechanizmas, t. y. lošimas, turėtų būti sukonstruotas, kad tikslas būtų pasiektas pusiausvyroje (tuo atveju sakoma, kad lošimas realizuoja tikslą). Kitais žodžiais, lošimas yra pasirenkamas, o ne duotas.

Priimantys sprendimus lošėjai pagal savo preferencijas vertina galimas baigmes, kurios gaunamos priklausomai nuo jų priimamų veiksmų. Preferencija gali būti nusakoma tikslo funkcija, kurią lošėjas siekia maksimizuoti (šiuo atveju tikslo funkcija vadinama naudingumo arba pelno funkcija), arba siekia minimizuoti (šiuo atveju tikslo funkcija vadinama kaštų arba nuostolio funkcija). Jei lošimas nėra trivialus, tai lošėjo tikslo funkcijos reikšmė priklauso mažiausiai nuo vieno kito lošėjo veiksmų (sprendimo kintamojo), bendru atveju – nuo visų lošėjų. Todėl lošėjas negali savo tikslo funkcijos optimizuoti nepriklausomai nuo kitų lošėjų veiksmų. Taigi, turime lošėjų galimų veiksmų rinkinius ir sprendimo priėmimas vyksta be kooperacijos.

Tradiciniuose lošimų teorijos taikymuose siekiama surasti lošimo pusiausvyrą, t. y. strategijų, kurių lošėjai neturi ketinimo keisti, aibę. Žinomos keletas išvystytų pusiausvyros koncepcijų. Gerai žinoma Nešo pusiausvyra (Nash, 1951), Stakelbergo pusiausvyra (Stackelberg, 1934), ir Pareto pusiausvyra (Wang, 1993). Šių pusiausvyros koncepcijų taikymas skirtingai motyvuojamas priklausomai nuo taikymo srities, nors jos kartais persidengia ar sutampa. Nešo pusiausvyros n lošėjų lošimui definicija siejama su strategijų rinkinio vektoriumi $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, kurį patogu užrašyti taip: $x=(x_i,x_{-i})$. Čia x_{-i} yra kitų lošėjų, be i-tojo lošėjo, kontroliuojama vektoriaus x dalis.

Apibrėžimas. Lošime (N,X,u) vektorius $x^*\in X$ yra Nešo pusiausvyra, jei $\forall i, i\in N$,

$$u_i(x_i^*,x_{-i}^*)\geq u_i(x_i,x_{-i}^*),\qquad \forall x_i\in X_i \text{ ir } (x_i,x_{-i}^*)\in X. \tag{2.4}$$

Šis Nešo pusiausvyros apibrėžimas tinka tam atvejui, kai lošėjų tikslas yra maksimizuoti savo naudingumo (išlošio) funkciją. Jei lošėjų tikslas –

minimizuoti savo naudingumo (praradimų) funkciją, tai (2.4) nelygybė keičiama į priešingą.

Modernios organizacijos ir inžinerinės sistemos turi daug individų, priimančių sprendimus. Kiekvienas iš jų, priimdamas sprendimą, siekia savo tikslų. Labai dažnai individai yra nesusikooperavę ir jų sprendimai tarpusavyje kertasi. Tai sukelia būtinybę rasti Nešo pusiausvyrą. Tokios decentralizuoto sprendimo priėmimo problemos vis dažniau domina ekonomistus, operacijų tyrimo specialistus, inžinierius, kadangi tokie uždaviniai plačiai taikomi ekonomikoje ir inžinerijoje.

Dalis Lietuvos mokslininkų pateikė svarių pasiūlymų lošimų teorijai plėtoti ir gilinti. Disertacijos kontekste ypač aktualūs darbai, kurie skirti nekooperatiniams lošimams ir kurie susiję su nagrinėjama tema. Vienas iš tokių mokslininkų, būtent, E. Vilkas (1963) sukūrė aksiomų sistemą, charakterizuojančią matricinių lošimų pusiausvyrą. Savo idėją, t. y. aksiomomis apibrėžti nekooperatinio baigtinio lošimo pusiausvyros taškus, jis pratęsė vėlesniame darbe (Vilkas, 1968). Aksiomos formuluojamos funkcionalui - vektoriui f, apibrėžtam visų lošėjų išlošių funkcijų aibėje. Aksiomų sistemoje yra trys konstruktyvaus tipo aksiomos: monotoniškumo, dominavimo, objektyvumo. Tokį funkcionalą galima interpretuoti, kaip lošėjų išlošių vektorių, kai visi lošėjai lošia „optimaliai“. Tada monotoniškumo aksiomai galima suteikti tokią prasmę: jei du lošimai turi sutampančias partijas (situacijas) ir kiekvienoje jų lošėjui i baigmė viename lošime yra geresnė negu kitame lošime, tai dalyvavimas pirmajame jam yra rezultatyvesnis už dalyvavimą kitame lošime (kai lošėjai elgiasi „optimaliai“). Dominavimo aksioma teigia, kad lošėjas, nepatirdamas jokio nuostolio, gali nesirinkti akivaizdžiai blogos strategijos. Objektyvumo aksioma reikalauja, kad lošėjo išlošio matavimo skalė sutaptų su jo naudingumo matavimo skale. Kadangi čia lyginamos skirtingų lošimų pusiausvyros situacijos, tai apibūdinama, kurias pusiausvyros situacijas laikyti panašiomis ir kuriuos lošimus – panašiais. Čia taip pat išskiriami „sunkūs“ lošimai, t. y. tokie, kuriuose yra kelios nedominuojamos pusiausvyros situacijos. Esant tokiems „sunkiems“ lošimams, $\max\min$ principo nebepakanka norint išspręsti tokius lošimus. Todėl lošėjų elgesio prognozavimui, reikia atsižvelgti į jų psichologinius, socialinius ir kitokius faktorius. J. Harsanyi (1964) pirmasis pavartojo rizikos dominavimo sąvoką (ji nepriklauso lošimo teorijai), apibrėždamas nekooperatinio lošimo bendrąjį sprendinį. E. Vilkas (1968) daro prielaidą, kad bet kurio „sunkaus“ lošimo atveju kiekvienas lošėjas i žino apriorines (subjektyvias) situacijų pasiskirstymo tikimybes ir įrodo teoremą, kad jo pasiūlytų trijų aksiomų sistema yra suderinta ir pilna. Tą funkcionalą – vektorių E. Vilkas vadina lošimo reikšme. Žinoma, tokios lošimo reikšmės savybės iš esmės priklauso nuo lošėjų subjektyvių tikimybių apie situacijų pasiskirstymą.

Bendrų resursų pasidalijimo lošimas pirmą kartą buvo suformuluotas 1957 metais. Šis lošimas yra sudėtingas, kadangi dažniausiai jis neturi Nešo pusiausvyros, bet intuityviai aišku, kad egzistuoja stabilus racionalus lošėjų elgesys. Tokiam lošimui M. B. Iskakov (2008) apibrėžia saugių strategijų pusiausvyros sąvoką. Ji yra platesnė už Nešo pusiausvyros sampratą. M. B. Iskakov apibrėžta pusiausvyra labai panaši į E. Vilko (1990) kooperatiniams lošimams apibrėžtą V–sprendinį, kuris apibrėžiamas, vartojant grasinimų ir kontragrasinimų sąvokas. V–sprendinį sudaro tokios baigmės, kurių nė viena koalicija nenori atsisakyti arba, jei ir norėtų atmesti, to ji negali padaryti.

Duotojo lošimo savybės labai priklauso nuo jame dalyvaujančių lošėjų skaičiaus. Pavyzdžiui, trijų lošėjų lošimo tyrimas iš esmės skirsis nuo dviejų asmenų lošimo analizės. Natūralus klausimas: kaip bus toliau, kai lošėjų bus daugiau negu trys. V. Bubelis (1979) savo moksliniame darbe įrodė teoremą, kad n lošėjų lošimą galima suvesti į trijų asmenų lošimą. Nors ta transformacija sudėtinga, tačiau iš esmės pagal tą teoremą pakanka išnagrinėti trijų asmenų lošimus.

2.4.3. Stochastinė Nešo pusiausvyra

Praktinėse decentralizuoto sprendimo priėmimo sistemose dažnai figūruoja neapibrėžtumas. Pavyzdžiui, ekonominėse sistemose kaštai, paklausa ir daugelis kitų elementų yra nepastovūs ir juos išmatuoti sunku. Tokios situacijos reikalauja į modelius įtraukti neapibrėžtumą. Todėl prasminga nagrinėti Nešo pusiausvyrą, esant neapibrėžtumui. Pagal nevienodus sprendimo priėmimo kriterijus galima skirtingai apibrėžti stochastinę Nešo pusiausvyrą.

Tarkime, kad neapibrėžti sistemos parametrai yra nepriklausomi stochastiniai kintamieji, tada bendra stochastinė decentralizuoto sprendimo priėmimo sistema nusakoma taip:

- $i = 1,2,...,n$ – sprendimą priimantys individai,
- x_i – i-tojo sprendimą priimančiojo individo kontroliuojamas vektorius,
- $u_i(x_1, x_2,..., x_n, \xi_i)$ – i-tojo sprendimą priimančiojo individo naudingumo (tikslo) funkcija (čia ξ_i – atsitiktinis vektorius, nusakantis tam tikrus parametrus),
- $g_i(x_1, x_2,..., x_n, \xi_i)$ – i-tojo sprendimą priimančiojo individo ribojimų funkcija.

Kadangi sistemos parametrai yra stochastiniai, tai tikslo funkcija ir ribojimai – irgi stochastiniai. Skirtingiems valdymo tikslams pasiekti taikoma atitinkama Nešo pusiausvyra. Bendru atveju sprendimą priimantys individai siekia optimizuoti savo tikslo funkcijos matematinę viltį, esant kitų funkcijų matematinių vilčių tam tikriems ribojimams. Taigi, turime tokį modelį:

$$\begin{cases} \max\limits_{x_i} E[u_i(x_1, x_2,..., x_n, \xi_i)], \\ \qquad\qquad kai \\ E[g_i(x_1, x_2,..., x_n, \xi_i)] \le 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

Aišku, kad i-tojo individo sprendimas priklauso nuo kitų individų sprendimo, kurį žymėsime

$$x_{-i} = (x_1,..., x_{i-1}, x_{i+1},..., x_n).$$

Šiuo atveju Nešo pusiausvyra yra apibrėžiama (2.6).

Apibrėžimas. Leistinas sprendinys $(x_1^*, x_2^*,..., x_n^*)$ vadinamas Nešo pusiausvyra, jei jis tenkina

$$E[u_i(x_1^*, x_2^*, ..., x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, ..., x_n^*, \xi_i)] \le \\ \le E[u_i(x_1^*, x_2^*, ..., x_{i-1}^*, x_i^*, x_{i+1}^*, ..., x_n^*, \xi_i)], \forall i \tag{2.6}$$

ir bet kuriam leistinam $(x_1^*, x_2^*, ..., x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, ..., x_n^*)$.

Tarkime, kad i-asis individas žino kitų individų strategiją x_{-i}, tada jo optimali reakcija gali būti pateikta atvaizdavimu $x_i = r_i(x_{-i}, \xi_i)$. Akivaizdu, kad n lošėjų Nešo pusiausvyra bus (2.7) lygčių sistemos sprendinys.

$$x_i = r_i(x_{-i}, \xi_i), i = 1,2,..., n \tag{2.7}$$

Kitaip tariant, Nešo pusiausvyra yra vektorinės funkcijos $r(x_1, x_2, ..., x_n) = (r_1, r_2, ..., r_n)$ nejudamas taškas.

Tarkime, $R(x_1, x_2, ..., x_n, \xi_i) = \sum_{i=1}^{n} \| x_i - r_i(x_{-i}, \xi_i) \|$. Nagrinėsime tokį minimizavimo uždavinį:

$$\begin{cases} \min\limits_{x_1, x_2, ..., x_n} R(x_1, x_2, ..., x_n, \xi_i) \\ (x_1, x_2, ..., x_n) \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} D_i \end{cases} \tag{2.8}$$

čia D_i yra i-ojo lošėjo leistinų sprendinių modelyje (2.5) Jei optimalus sprendinys $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ tenkina lygtį $R(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*, \xi_i) = 0$, tai $x_i^* = r_i(x_{-i}^*)$, $i = 1,2,..., n.$ Vadinasi, $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ turi būti Nešo pusiausvyra. Jei skaitinio sprendimo procese gauname, kad $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ tenkina $R(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*, \xi_i) \le \varepsilon$, (čia ε yra mažas teigiamas skaičius), tai vektorių $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ galima traktuoti kaip Nešo pusiausvyrą. Priešingu atveju, (2.7) lygčių sistema nesuderinama ir Nešo pusiausvyros nėra. (2.6) Nešo pusiausvyra (2.5) uždavinio konkrečiam atvejui tiriama 5 skyriuje.

2.4.4. Nešo pusiausvyros egzistencija ir tos pusiausvyros paieškos metodai

Šiame poskyryje pateikiami kai kurie Nešo pusiausvyros nekooperatiniuose lošimuose egzistencijos teiginiai ir aptariami tos pusiausvyros paieškos algoritmai, kurie gali būti taikomi stochastinės pusiausvyros strategijoms nustatyti. Normaliosios formos nekooperatinio lošimo modelį galima užrašyti, vartojant naudingumo funkcijas arba preferencijos sąryšius. Nešo pusiausvyros egzistencijos teoremose nekooperatiniam lošimui, pirmu atveju sąlygos formuluojamos naudingumo funkcijoms, o antru atveju – preferencijoms. Nekooperatinio lošimo modelis pirmu atveju yra $G=\{X_i,u_i,i=1,...,N\}$, čia $i=1,...,N$ yra lošėjai, X_i yra lošėjų strategijų aibės, o u_i yra lošėjų naudingumo funkcijos. Nekooperatinio lošimo modelis antru atveju yra $G=\{X_i,\succsim_i,i=1,...,N\}$, čia $\succsim_i$ yra lošėjų preferencijos. Jeigu lošėjų preferencijos tenkina tam tikras aksiomas, tai, remiantis Neuman ir Morgenstern teorema egzistuoja naudingumo funkcijos $u_i : X \to [0,1]$, čia $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_N$. Jei strategijos yra parenkamos su tam tikra tikimybe, tai turime mišriąsias strategijas. J. Nešo teorema baigtiniui nekooperatiniui lošimui yra tokia.

1 teorema. (Nash). Kiekvienas baigtinis lošimas turi mišrių strategijų Nešo pusiausvyrą.

Paprastų strategijų Nešo pusiausvyros egzistencija yra svarbesnė nei mišrių strategijų Nešo pusiausvyros egzistencija. Pirma, paprastų strategijų atveju nereikalaujama lošėjų preferencijų loterijų aibėje. Antra, mišrių strategijų pusiausvyros egzistencija dažnai yra kaip išvada iš paprastų strategijų pusiausvyros egzistencijos. Galima suformuluoti egzistencijos teoremą, kai strategijų aibės yra begalinės, t. y. lošimas nėra baigtinis.

2 teorema. (Debreu, Glicksberg, Fan). Tarkime, duotas nekooperatinis lošimas $G=\{X_i,u_i,i=1,...,N\}$ ir $\forall i \ X_i$ yra netuščia, kompaktinė ir iškila metrinės erdvės aibė, $u_i(x_1,x_2,...,x_N)$ yra tolydi pagal $(x_1,x_2,...,x_N)$ ir įgaubta pagal x_i.Tada duotame lošime egzistuoja bent viena paprastų strategijų Nešo pusiausvyra.

2 teorema remiamasi 5 skyriuje. 2 teoremoje strategijų aibių iškilumo ir išlošių įgaubtumo reikalavimai yra esminiai. Be to, 2 teoremoje vietoje funkcijų įgaubtumo pakaktų reikalauti kvazi įgaubtumo (Reny, 2008).

Pirmas Nešo teoremos įrodymas remiasi nejudamo taško Brauerio teorema ir nėra konstruktyvus, t. y. įrodymo procese nesukonstruojamas pats pusiausvyros taškas. Taigi, turint pusiausvyros egzistavimo įrodymą, privalu dar rasti būdą, kaip tą pusiausvyros tašką identifikuoti. C. E. Lemke ir J. T. Howson (1964) pasiūlė algoritmą Nešo pusiausvyrai rasti bimatricinio lošimo atveju. Vėliau šis algoritmas buvo praplėstas n lošėjų nekooperatiniams lošimams. Yra žinoma, kad nekooperatinio dviejų asmenų lošimo Nešo pusiausvyros paieška asimptotiškai yra ne lengvesnė už Nešo pusiausvyros paiešką n lošėjų lošime (Chen ir kt., 2009). Tai kiek netikėta, nes lošėjo išlošis mišrių strategijų atveju dviejų asmenų lošime yra tiesinis kito lošėjo atžvilgiu, priešingai nei n lošėjų lošime. Atliekant skaičiavimus pasitelkus geriausius dabar žinomus sprendiklius, minėtas tiesiškumas leidžia lengviau rasti sprendinį praktiniams dviejų nei *n* asmenų lošimams. Taigi, asimptotinis sudėtingumas tas pats, o empirinė elgsena skiriasi. C. E. Lemke ir J. T. Howson taiko tiesinės algebros operacijas Nešo pusiausvyrai surasti. 1972 metais J. T. Howson praplėtė šį algoritmą polimatriciniui lošimui, kuris taip pat turi tiesinę struktūrą. Kitiems lošimams turi būti taikomi bendresnio pobūdžio algoritmai, pavyzdžiui, S. Govindan ir R. Wilson (2003) globalus Niutono metodas (GNM). GNM yra C. E. Lemke ir J. T. Howson metodas apibendrintas ta prasme, kad dviem duotiems lošėjams ir atitinkamai parinktam starto taškui iteracijos strategijų erdvėje vyks ta pačia trajektorija. Tačiau GNM veikia ne taip efektyviai, nes naudojama trajektorijos, o ne taško skaičiavimo technika. Tai yra didelis skirtumas praktiniame pritaikyme, pavyzdžiui, S. Govindan ir R. Wilson (2004) pasiūlė spręsti daugelį polimatricinių lošimų, surandant GNM gerą starto tašką. Anksčiau nežinota, kaip panaudoti teorinį ekvivalentumą tarp dviejų lošėjų ir n asmenų lošimų, nes n asmenų lošimo redukcija į dviejų asmenų lošimą yra nekonstruktyvi. Tačiau U. Feige ir I. Talgam-Cohen (2010) pateikė tiesioginę n asmenų lošimo redukciją į dviejų asmenų lošimą per polimatricinius lošimus. Tai leidžia efektyvinti pusiausvyros paieškos n asmenų lošime algoritmą. Pirma, lošimas paverčiamas „tiesiniu“, taikant konstruktyvią redukciją, o tada gautam lošimui pritaikomas algoritmas (Wright ir kt., 2011).

Brauerio teoremos šiuolaikinis įrodymas, kuris remiasi Spernerio lema, pateikia būdą aproksimuotam Brauerio teoremos nejudamam taškui (tokiu būdu ir Nešo pusiausvyrai) surasti, nors tas algoritmas ir yra eksponentinio sudėtingumo.

2.5. Monte Karlo metodas

Daug inžinerijos, ekonomikos ir kitų mokslų taikomųjų uždavinių yra sprendžiami kompiuteriu sugeneravus tam tikras statistines imtis. Jei minėtu būdu sprendžiamas uždavinys, tai sakoma, kad tai atliekama Monte Karlo metodu. Monte Karlo metodai gali būti vartojami, kai norima:

- stebėti objektų ir procesų elgseną (generuojami atsitiktiniai objektai ir procesai),
- įvertinti sudėtingas analitines išraiškas (pvz., į kurias įeina daugialypiai integralai, sudėtingos matricinės išraiškos ir pan.),
- išspręsti sudėtingą lygčių sistemą .

2.5.1. Monte Karlo metodas objektų ir procesų elgsenai tirti

Bet kurio Monte Karlo metodo pagrindas yra tolygiai pasiskirsčiusių atsitiktinių skaičių generatorius, t. y. procedūra, kuri generuoja intervale (0,1) atsitiktinių skaičių $z^1, z^2, ..., z^n, ...$ begalinę seką. Jei reikia sugeneruoti atsitiktinį kintamąjį, pasiskirsčiusį pagal kurį nors (nebūtinai tolygųjį) dėsnį, tai galima atlikti transformacijos arba priėmimo ir atmetimo metodu (Rubinstein ir Kroese, 2007).

Vektorius $z = (z^1, ..., z^n)$, kurio komponentės yra atsitiktiniai dydžiai, vadinamas atsitiktiniu vektoriumi. Bendresniu atveju, atsitiktinių kintamųjų rinkiniui $\{z^t\}$ įvardyti, vartojamas atsitiktinio proceso terminas. Atsitiktinių procesų sugeneravimo technika skiriasi tiek, kiek skiriasi patys atsitiktiniai procesai (Kroese ir kt., 2011).

2.5.2. *Monte Karlo metodas įverčiams gauti*

Svarbu išsiaiškinti, kaip yra taikomas Monte Karlo metodas, kai siekiama įvertinti skaitines reikšmes, pavyzdžiui, matematinę viltį, išreiškiamą daugialypiu integralu. Tarkime, kad eksperimento imitacijos duomenys $z^1, z^2, ..., z^N$ yra nepriklausomi ir pasiskirstę pagal tą patį dėsnį, kurio tankio funkcija yra p. Tarkime, kad reikia įvertinti vidurkį: $l = E(f(z))$, čia $z \sim p$. Tarsime, kad $|l| < \infty$. Tada vidurkio įvertis imčiai $\{z^i\}$ yra

$$\tilde{f} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f(z^i). \tag{2.9}$$

Tarkime, kad dydžio $f(z)$ dispersija yra baigtinė ir lygi σ^2. Tada pakankamai dideliems N atsitiktinis dydis $\tilde{f}$ yra apytikriai pasiskirstęs pagal $N(l, \sigma^2 / N)$ dėsnį (tai išplaukia iš centrinės ribinės teoremos). Jei dispersija σ^2 yra nežinoma, tai ji gali būti įvertinta imties dispersija

$$\tilde{D}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (f(z^i) - \tilde{f})^2, \tag{2.10}$$

kuri pagal didžiųjų skaičių dėsnį artėja į σ^2, kai $N \to \infty$. Galima įvertinti $1-\alpha$ reikšmingumu vidurkio l pasikliovimo intervalą

$$(\tilde{f} - \eta_{1-\alpha/2} \frac{\tilde{D}}{\sqrt{N}}, \tilde{f} + \eta_{1-\alpha/2} \frac{\tilde{D}}{\sqrt{N}}), \tag{2.11}$$

čia η_γ yra pasiskirstymo $N(0,1)$ γ – kvantilis. Vietoje pasikliovimo intervalo galima imti standartinės paklaidos įvertį $\tilde{D}/\sqrt{N}$ arba santykinės paklaidos įvertį $\tilde{D}/\tilde{f}\sqrt{N}$. Įvertinimo procedūra, kuri vadinama paprastu Monte Karlo (angl. *crude Monte Carlo – CMC*) metodu, yra:

- sugeneruoti $z^1, z^2, ..., z^N \sim p$ (pavyzdžiui, atlikus nepriklausomas imitacijas,
- apskaičiuoti vidurkio l įvertį $\tilde{f}$ ir pasikliovimo intervalą.

Skaitinių dydžių įvertinimas Monte Karlo imitacijoje gali būti atliktas efektyviau, vartojant žinomą informaciją apie imitacijos modelį. Galima taikyti dispersijos sumažinimo būdus, t. y. reikšmingų imčių metodą ar sluoksniuotų imčių metodą (žr. Kroese, 2011).

Vienas dažniausiai taikomų dispersijos sumažinimo būdų – tai reikšmingų imčių metodas, kuris ypač parankus mažoms tikimybėms įvertinti. Tarkime, reikia įvertinti dydį $l = E_p H(z) = \int H(z) p(z) dz$. Čia H yra reali funkcija ir p yra atsitiktinio vektoriaus z tikimybinis tankis, kuris vadinamas nominaliu tankiu. Indeksas p prie matematinės vilties operatoriaus E rodo, kad jis yra skaičiuojamas p atžvilgiu. Tarkime, φ yra kitas tikimybinis tankis toks, kad Hp yra dominuojamas g, t. y. $\varphi(z) = 0 \Rightarrow H(z) p(z) = 0$. Naudojant tankį g, l galima išreikšti taip: $l = \int H(z) \frac{p(z)}{\varphi(z)} \varphi(z) dz = E_\varphi H(z) \frac{p(z)}{\varphi(z)}$. Taigi, jei $z^1, ..., z^N \sim \varphi$, tai

$$\hat{l} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} H(z^k) \frac{f(z^k)}{\varphi(z^k)} \tag{2.12}$$

yra l įvertis. Tankių santykis $W(z) = f(z)/\varphi(z)$ yra vadinamas tikėtinumų santykiu. Reikšmingų imčių metodo algoritmas yra toks:

1. Pasirinkti reikšmingų imčių tankį g, kuris dominuoja Hf.
2. Sugeneruoti $z^1, ..., z^N \sim \varphi$ ir rasti $Y^i = H(z^i) f(z^i)/\varphi(z^i)$, $i = 1, ..., N$.
3. Įvertinti l, t. y. rasti $\hat{l}$ bei rasti $1-\alpha$ reikšmingumu l pasikliovimo intervalą $(\hat{l} - \eta_{1-\alpha/2} \frac{\tilde{D}}{\sqrt{N}}, \hat{l} + \eta_{1-\alpha/2} \frac{\tilde{D}}{\sqrt{N}})$, čia η_γ žymi pasiskirstymo N(0,1) $\gamma-$kvantilį, o $\tilde{D}$ yra standartinis nuokrypis imčiai $z^1, ..., z^N$.

Sunkiausia, taikant reikšmingų imčių metodą, yra surasti reikšmingų imčių pasiskirstymą. Jei blogai parinktas tankis φ, tai jis lems pasikliovimo intervalo įvertinimo tikslumą. Teoriškai optimalus φ^*

minimizuoja $\hat{l}$ dispersiją ir tokiu būdu yra uždavinio $\min_{\varphi} \tilde{D}_{\varphi}[H(z)\frac{f(z)}{\varphi(z)}]$ sprendinys, čia $\tilde{D}_{\varphi}$ yra dispersija φ atžvilgiu.

2.5.3. Monte Karlo metodas optimizavimui

Darbe apsiribota uždaviniais, kuriuose tikslo funkcija ir ribojimų funkcijos yra vieno ekstremumo ir glodžiai diferencijuojamos, išreiškiamos atsitiktinių funkcijų, tenkinančių Lipšico sąlygą, matematine viltimi. Kaip žinoma, tikimybinis matas turi tris dedamąsias: diskrečiąją, singuliariąją ir absoliučiai tolydžiąją. Jei tikimybinis matas diskretusis, tai matematinė viltis išreiškiama svorine funkcija su svoriais, kurie lygūs diskrečiųjų įvykių tikimybėms. Tokiais atvejais optimizavimo ar pusiausvyros paieškos uždavinys suvedamas į determinuotą optimizavimo uždavinį. Reikia pažymėti, kad mato singuliarumas (tikimybinis matas pasiskirstęs nulinio Borelio mato, tačiau kontinuumo galios aibėje) praktiniuose uždaviniuose pasitaiko retai. Tačiau jei matas yra absoliučiai tolydus, t. y. nusakomas tankio funkcija, tai matematinė viltis išreiškiama daugialypiu integralu, kuris analitiškai apskaičiuojamas tik labai retais atvejais. Tačiau funkcijos, kurios išreiškiamos matematine viltimi, kai matas yra absoliučiai tolydus, yra glodžiai diferencijuojamos, nors glodinamos funkcijos tenkina tik Lipšico sąlygą, t. y. bendru atveju nėra diferencijuojamos (Shapiro, 2000, Rubinstein ir Melamed, 1998, Bartkutė ir Sakalauskas, 2007). Uždavinius, kai matas yra absoliučiai tolydus, praktiškai neįmanoma spręsti determinuotais optimizavimo metodais. Tačiau funkcijos išreiškiamos matematine viltimi, kai matas yra absoliučiai tolydus, gali būti aproksimuojamos statistinio modeliavimo būdu (Monte Karlo metodu). Kita vertus, galima pasinaudoti stochastinio diferencijavimo metodais ir įvertinti tokių funkcijų gradientus arba išvestines taip pat statistinio modeliavimo būdu. Disertacijoje nagrinėjami stochastinės pusiausvyros uždaviniai, kai lošėjų atsitiktinės tikslo arba ribojimų funkcijos tenkina tik Lipšico sąlygą, tačiau galimų aplinkos, kurioje veikia lošėjai, scenarijai yra pasiskirstę pagal absoliučiai tolygųjį matą. Tokiems uždaviniams spręsti taikomi stochastinės aproksimacijos, vidinio taško (angl. *interior point*), imties vidurkio aproksimacijos (angl. *Sample Average Approximation - SAA*) arba nuoseklios paieškos metodai. Stochastinės aproksimacijos metodai buvo bene pirmieji pasiūlyti spręsti stochastiniams uždaviniams, tačiau šie metodai nėra plačiai taikomi praktikoje, nes jie susiję su optimizavimo žingsnio reguliavimu, kuris ne visada yra aiškus praktiškai, nėra žinomi patikimi šių algoritmų stabdymo būdai. Vidinio taško metodai susiję su sudėtingais matriciniais skaičiavimais ir dar nėra gerai išplėtoti. SAA metodai sėkmingai taikomi stochastiniam tiesiniam kelių etapų programavimui, tačiau šių metodų taikymas netiesiniam stochastiniam programavimui yra susijęs su sudėtingu skaitmeninių algoritmų taikymu. Todėl stochastinės pusiausvyros paieškoje šie metodai nėra plačiai taikomi. Stochastinės pusiausvyros paieškos uždaviniai tiriami daugiau teoriškai, praktiniame taikyme yra daug atvirų klausimų. Mokslinėje literatūroje yra žinomos įvairių stochastinės paieškos uždavinių matematinės formuluotės, tačiau skaitmeninių stochastinės paieškos algoritmų kūrimas tik pradinėje stadijoje, pavyzdžiui, Xu ir Zhang (2013) pateikė imties vidurkio aproksimacijos (SAA) metodo aprašymą ir jį išbandė labai paprastam uždaviniui. Siekiant sukurti skaitmeninius stochastinės pusiausvyros paieškos metodus, galima pasinaudoti patirtimi, kuri yra sukaupta, kuriant ir plėtojant skaliarinio stochastinio programavimo metodus bei algoritmus.

Disertacijoje yra kuriami ir plėtojami nuoseklios Monte Karlo paieškos (Bairaksan ir Morton, 2011, Cairoli ir Dalang, 1996, Homem-di-Mello ir Shapiro, 1998, Sakalauskas, 2000, 2004) metodai stochastinės pusiausvyros paieškos uždaviniams spręsti, pasinaudojant šių metodų plėtote stochastiniame programavime. Nuoseklios Monte Karlo algoritmų esmę sudaro kintamo tūrio Monte Karlo imčių serijų generavimas, siekiant rasti uždavinio sprendinį reikiamu tikslumu, kuris yra interpretuojamas statistiškai, t. y. apskaičiuojami tikslo funkcijos ir ribojimų pasikliautinieji intervalai bei tikrinama statistinė hipotezė apie gauto sprendinio optimalumą.

Skyriaus išvados

1. Stochastinės pusiausvyros paieškos uždaviniai, dažnai pasižymintys hierarchine struktūra, būdingi įvairioms mokslo sritims – inžinerijai, ekonomikai, finansams, logistikai, tačiau juos galima formuluoti kaip pusiausvyros paieškos uždavinius su iškilomis, tenkinančioms Lipšico sąlygas, išlošio funkcijomis ir atsitiktiniais aplinkos scenarijais, pasiskirsčiusiais pagal diskretųjį ar tolydųjį tikimybinį dėsnį.
2. Daugelis sprendimų yra priimami decentralizuotai dėl didelio nepriklausomai sprendimus priimančių individų (jie gali būti heterogeniniai) skaičiaus.
3. Stochastinės pusiausvyros paieška su diskrečiaisiais pasiskirstymais gali būti suvedama į deterministinį uždavinį. Stochastinės pusiausvyros paieškos uždavinių su tolydžiaisiais pasiskirstymais sprendimo algoritmai gali būti kuriami, pritaikant Monte Karlo metodą ir statistinių išvadų teoriją.

3 skyrius. **Finansinių krizių pusiausvyros modelių tyrimas**

Šiame skyriuje finansiniai burbulai nagrinėjami Ponzi schemos bei K. Watanabe ir kt. (2007) pasiūlyto metodo požiūriu. K. Watanabe ir kt. metodas leidžia identifikuoti finansinio burbulo pradžią pagal kainos divergavimą nuo bazinės linijos. Lietuvos nekilnojamojo turto burbulo atveju, kai burbulas trumpam nustojo augti, buvo pastebėta, kad pagal šį metodą divergavimo nebėra. Todėl darbe pasiūlyta į finansinio burbulo modelį įtraukti heterogeninius agentus (fundamentalistus ir čartistus).

Skyriaus rezultatai publikuoti V.Dumskis, L. Sakalauskas (2009, 2012) darbuose, jie buvo pristatyti ir aptarti KORSD - 2009, LMD LI, LOTD - 2010 konferencijose.

3.1. Finansiniai burbulai ir jų griūtys

Pusiausvyros sąlygų paieška ir tyrimas taikomi modeliuoti daugeliui ekonominių procesų. Nesant ekonomikos pusiausvyros, ji tampa netvari, t. y. pakilimus lydi nuosmukiai. Šių pakilimų ir nuosmukių chaotiškas vystymasis dažniausiai susijęs su finansiniais burbulais.

Realiose rinkose kartais galima pastebėti finansinių piramidžių elementų. 1720 metais Izaokas Niutonas, praradęs 20 tūkstančių svarų sterlingų, pasakė: „Aš galiu apskaičiuoti dangaus kūnų judėjimą, bet ne žmonių pamišimą“. Šią didžiulę (tais laikais) sumą jis prarado viename iš pirmųjų Europos burbulų – „Pietų jūrų bendrovės“ burbule. Pirmasis labiausiai žinomas Europos spekuliatyvusis burbulas įvyko Olandijoje (angl. *Tulpenmanie* – Tulpių manija) pirmoje XVII a. pusėje.

Dažnai struktūriniai ekonomikos pasikeitimai nesamprotaujančius investuotojus gali privesti prie klaidingos minties apie „naują ekonomiką“, kuriai būdingas nenutrūkstamas augimas, žinoma, kartu ir nepaliaujamas kainų augimas. Tokie investuotojai elgiasi kaip banda (Banerjee, 1992).

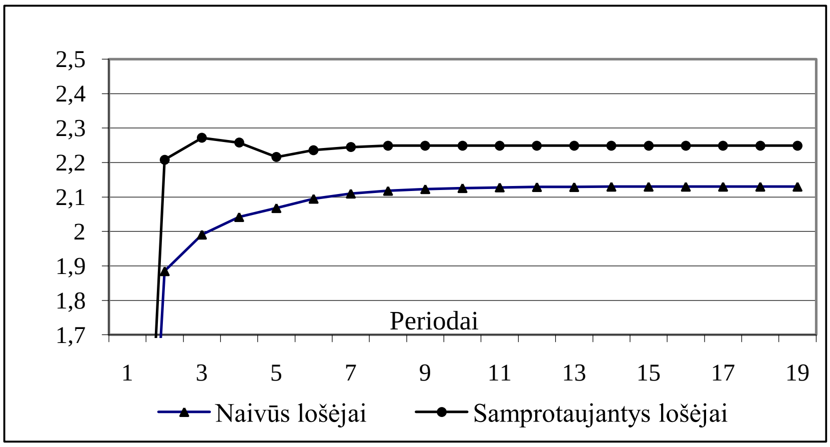
Nagrinėjant ekonominių burbulų reiškinius, galima tirti schemas, pagal kurias grąžos investuotojams mokamos iš jų pačių arba iš sekančių investuotojų pinigų. Tokios schemos vadinamos Ponzi schemomis, nes jos siejamos su Ch. Ponzi, kuris 1920 metais panaudojo šią technologiją. Ch. Ponzi schema – tai sukčiavimo schema, esanti už įstatymo ribų. Paskutinis žinomiausias Ch. Ponzi schemos pritaikymo atvejis buvo JAV, kai investuotojai prarado 18 milijardų dolerių. Tos schemos architektas 2009 metais Bernard Madoff buvo įkalintas 150 metų kalėjimo.

Esant dabartiniam globalizacijos lygiui, netvarios situacijos palietė ir informacijos technologijų sritį – 2000 metų pabaigoje sprogo interneto burbulas, o 2007 metais JAV nekilnojamojo turto burbulo sprogimo banga palietė visų pasaulio šalių ekonomikas. S. Girdzijauskas ir kt., remdamiesi logistine kapitalo valdymo teorija, identifikuoja netvarias ekonomines situacijas, siūlo metodus, kaip tas situacijas suvaldyti. Jie teigia, kad rinkos ribotumas yra pagrindinė sąlyga netvarioms ekonominėms situacijoms susidaryti, ir nurodo, kad logistinės vidinės grąžos normos elastingumas ribiniam kapitalui yra pagrindinis rodiklis, kuris parodo burbulo formavimosi intensyvumą (Girdzijauskas ir Moskaliova, 2003, 2005; Girdzijauskas ir kt., 2008, 2009).

Nagrinėsime modelius, aprašančius finansinius burbulus ir jų griūtis, t. y. Ponzi schemą, K. Watanabe ir kt. modelį bei pasiūlytą šio modelio modifikaciją.

3.2. Ponzi schema

Nagrinėjant nekilnojamojo turto rinką Ponzi schemos požiūriu, galima pasinaudoti modeliu, aprašytu D. Abreu ir M. K. Brunnermeier (2003). Tarkime, samprotaujantys investuotojai pradeda įsitikinti, kad augimas baigiasi, bet tą suvokia ne visi iškart. Kol samprotaujančių investuotojų dauguma investuoja, kaina auga dideliu greičiu (tokia yra prielaida). Mūsų atveju „burbulas“ = dauguma samprotaujančių investuotojų žino, kad augimo nebėra, bet ir toliau dar investuoja. Bet, kai tik samprotaujančių individų dauguma parduoda turtą, tada naivūs investuotojai supranta savo klaidą ir burbulas sprogsta. Tarkime, tokioje situacijoje jūs esate investuotojas. Masės tiki, kad kaina augs dideliu greičiu nenutrūkstamai. Bet jūs įsitikinate, kad firmos turtas niekam tikęs. Ar jūs neparduosite firmos akcijų tučtuojau?! Imkime „burbulo“ lošimą, kuriame yra 60 000 lošėjų (naivių – 50 0000, samprotaujančių – 10 000). Yra 20 periodų, kurių metu sprendžiama – pirkti ar parduoti. Po tų 20 periodų kaina yra lygi tikrajai prekės vertei. Kainos formavimosi procesas toks: kaina = vertė = 4000 lošimo pradžioje, toliau kaina auga 5% kiekviename periode, kol 5000 ar daugiau samprotaujančių lošėjų parduoda turtą. Lošėjų išlošiai: jeigu pardavė, tai gauna esamą kainą; jeigu dar nerealizavo, kai 5000 kitų jau tai padarė, tai gauna esamą vertę. Kiekviename periode galima mesti monetą, norint nuspėti, ar kainos augimas baigėsi. Pavyzdžiui, jei augimas baigsis po 3 periodo, tai pirmųjų trijų periodų kaina – 4000, 4200, 4410, bet visuose perioduose $T > 3$ vertė išlieka ta pati, būtent, 4410, nors kaina dar gali augti. Kada burbulas sprogsta, tada kaina nukrenta atgal iki 4410. Informacinis procesas – jei kainos augimas baigėsi, vienas atsitiktinai paimtas naivus lošėjas tučtuojau supranta, kad augimas baigėsi. Kitame periode antras naivus lošėjas tą supranta ir t. t. Iki tol, kol nesupratote, kad augimas baigėsi, jūs nežinote, kelintas (antras ar paskutinis) esate supratęs, kad augimas baigėsi. Tarkime, kad visi kiti elgiasi pagal tokią strategiją: tučtuojau parduoda turtą, kai supranta, kad kainos augimas baigėsi, bet ne anksčiau. Ar jūs tučtuojau parduosite, kai suvoksite pasibaigusį kainos augimą? Samprotaujantys lošėjai elgiasi pagal Ponzi schemą. Skirtumai tarp kainos ir vertės sumuojami pagal lošėjus, o sumos yra normalizuojamos, jas logaritmuojant M $(M = 4000)$ pagrindu. Šių normalizuotų sumų kaita pavaizduota 3.1 pav.



3.1 pav. Normalizuotos skirtumų sumos

Taigi, burbulai gali egzistuoti net ir gausaus samprotaujančių lošėjų skaičiaus atveju. Kainos ir vertės skirtumų normalizuotos sumos nuo pradinio periodo stabilizuojasi (samprotaujantiems investuotojams – aštuntame periode, o naiviems investuotojams – vienuoliktame periode). Vadinasi, kiekvienas nori parduoti, bet ne pirkti. Burbulas gali tęstis, kol yra lošėjų, nežinančių, kada kiti lošėjai ketina parduoti. Netgi menka informacija ar naujiena gali suveikti kaip stimulas parduoti turtą.

3.3. Matematinė finansinių burbulų ir jų griūčių apibrėžtis

3.3.1. Burbulų ir griūčių matematinis apibrėžimas

Nuo tada, kada pasirodė D. Sornette ir kt. mokslininkų straipsnis (1996), kuriame teoriškai nustatytos kelių ekonominių griūčių įvairiose rinkose periodinės struktūros, daugybe tyrimų nustatytos analogiškos struktūros finansų rinkose. D. Sornette teigė (2003), kad burbulas prieš pat jo griūtį gali būti charakterizuojamas logaritminiu-periodiniu energijos dėsniu ir kad juo galima prognozuoti, kada akcijų rinka patirs krachą. D. Sornette ir W.-X. Zhou (2006) sukūrė burbulų pabaigos matematinį modelį kaip spontanišką singuliarumą prie prielaidos, kad griūtis įvyksta po ekonominių rodiklių spartaus augimo, kuris yra greitesnis nei eksponentinis. Šis metodas praktiškai naudingas burbulo pabaigos prognozei, bet juo nekonstatuojama burbulo pradžia.

K. Watanabe ir kt. (2007) pasiūlė metodą kaip nustatyti burbulo pradžią. Šiuo metodu buvo ištirtas Lietuvos nekilnojamojo turto rinkos burbulas ir griūtis. Tačiau pasirodė: jei burbulas kuriais nors periodais nustoja augti, tai, vertinant situaciją K. Watanabe metodu, tiems periodams gaunami tokie patys įvertinimai kaip ir nesant burbului. Minėtam trūkumui pašalinti siūloma K. Watanabe metodą modifikuoti (tai ir daroma šiame darbe), įtraukiant į modelį dviejų tipų investuotojus.

Pastaraisiais metais investuotojų dėmesio centre – pasaulio nekilnojamojo turto rinkų burbulai ir jų griūtys. Makroekonominiu požiūriu nekilnojamojo turto sektorius yra pirmaeilis aspektas holistiniame ekonomikos elgsenos suvokime. Tačiau politikai, atrodo, neturi įrankio, kuriuo būtų galima suvaldyti nekilnojamojo turto burbulus. Tiesą sakant, jų ištikimybė ortodoksinei politikai (paprasta monetarinė politika arba žema palūkanų norma recesijai išvengti) gali situaciją tik pabloginti.

Nagrinėjant nekilnojamojo turto kainų burbulus, daugiausia dėmesio skiriama kainų ir pajamų ar nuomos santykio diagramoms. Tradiciškai akcijų rinkose jau seniai nagrinėjami kainų burbulų modeliai. Jie taikomi ir burbulams nustatyti nekilnojamojo turto rinkose. Burbulo nustatymo metodologijos gali būti dviejų rūšių. Pirmoji apima metodus, sukurtus tariamos fundamentalios vertės ir faktinės kainos pokyčiams palyginti. Jei faktinės kainos kintamumas yra reikšmingai didesnis nei tariamos fundamentalios vertės kintamumas, tvirtinama, kad kainų burbulas nustatytas netiesiogiai. Pagal antrąją metodologijos rūšį burbulai nustatomi tiesioginiais testais, tikrinant hipotezę, kad nėra burbulo, ekonometriniais metodais (vieneto šaknies testas ar kointegracijos testas). Jei kainos santykis su pajamomis ar nuomos kaina yra stacionarus arba kaina yra kointegruota su fundamentalia kaina, tai hipotezė, kad burbulo nėra, negali būti atmesta.

„Burbulo“ apibrėžimas, kurį pateikė C. P. Kindleberger (1992), dabar visuotinai priimtas: „Burbulas gali būti apibrėžtas apytiksliai kaip staigus aktyvo kainos pakilimas... tolydžiame procese, kuriame yra pradinis pakilimas, generuojantis lūkesčius apie tolesnį kilimą ir pritraukiantis naujus pirkėjus – daugiausia spekuliuotojus, kurie atlikdami sandorius siekia daugiau pelno nei naudoti nupirktą aktyvą. Pakilimą paprastai lydi atvirkštiniai lūkesčiai ir staigus kainos kritimas, dažnai sukeliantis finansinę krizę.“ Burbulas yra didelis kainos kilimas, po kurio seka griūtis. Spekuliatyvūs burbulai turi išskirtinį bruožą: kainų nukrypimas nuo fundamentalių verčių didėja ir šis reiškinys stebimas kaip sisteminis ir pastovus.

Tarkime, kad kaina periode t yra $P(t)$, o $P_0(T_i)$ ir $w(T_i)$ yra vienareikšmiškai apibrėžti parametrai pagal ankstesnius duomenis taškuose T_i taip, kad šaknis iš vidutinės kvadratinės paklaidos (RMSE - root-mean-square of error) $F(t)$ (3.7) pasiekia minimumą.

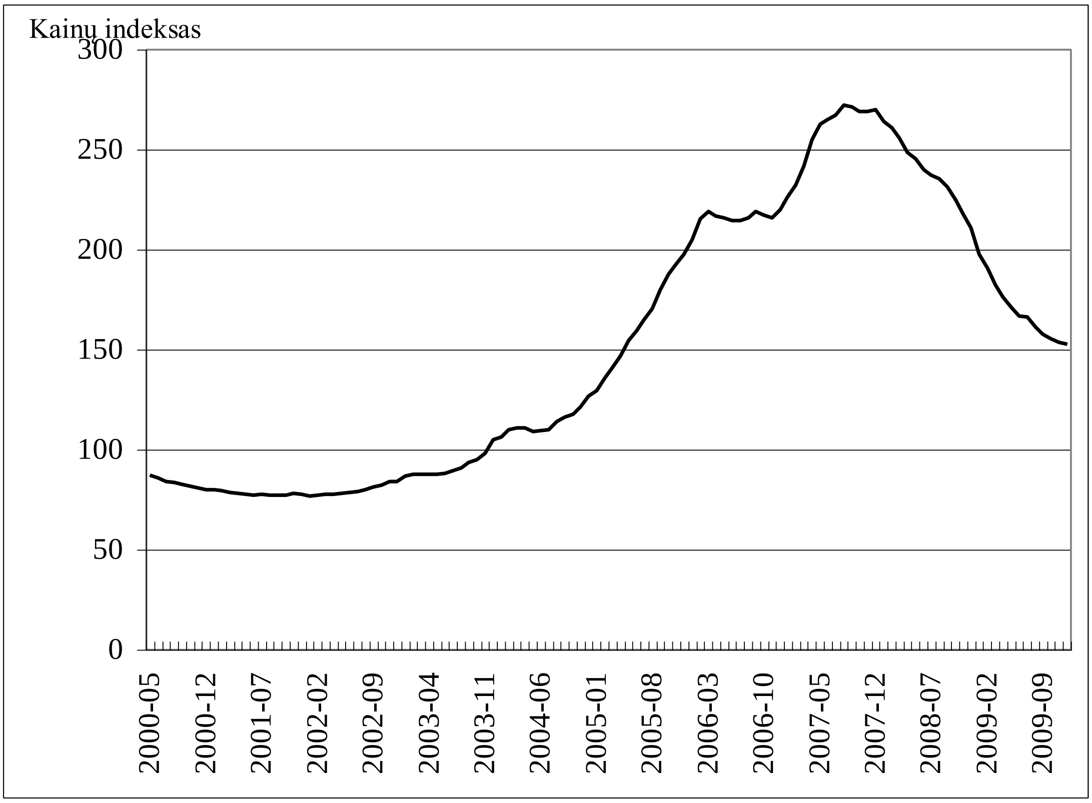
$$P(t) - P(t-1) = (w(T_i) - 1)(P(t-1) - P_0(T_i)) + F(t) \tag{3.1}$$

Kainos kinta trimis būdais, priklausomai nuo $w(T_i)$ reikšmės:

1. Jei $w(T_i) > 1$, tai kainos eksponentiškai didėja arba mažėja, o $P_0(T_i)$ yra eksponentinio divergavimo bazinė linija.
2. Jei $w(T_i) = 1$, tai kainos kinta atsitiktinai.
3. Jei $w(T_i) < 1$, tai kainos konverguoja į $P_0(T_i)$ (bazinę liniją).

Kainų burbulo susiformavimui įtakos nedaro tolimos praeities kainos, todėl modeliuojant kainų burbulą pakanka imti netolimų periodų kainas (Shiller R. J., 2000). Tą galima išreikšti „trumpos atminties“ terminu. Nagrinėjant nekilnojamojo turto rinką, šis faktas tampa dar svarbesniu. Nekilnojamojo turto rinkos kainos paprastai yra įvertinamos kas mėnesį ar kas ketvirtį. Be to, yra tam tikras paklausos reakcijos vėlavimas į pasiūlą, nes žiemos mėnesiais statybų apimtys sumažėja, vasaros mėnesiais statybų apimtys išauga. Kadangi nekilnojamojo turto rinkose burbulai yra atskirti dideliais laiko intervalais, o per tuos laiko intervalus iš esmės keičiasi statybų technologijos ir norinčių įsigyti būstą įpročiai bei poreikiai, tad burbulai, įvykę praeityje, neturi tiesioginės įtakos esamam burbului (Shiller R. J., 2000). Todėl šio darbo burbulo modelyje buvo paimtos nedidelės laiko eilutes.

Pritaikysime (3.1) lygtį Lietuvos nekilnojamojo turto burbulo duomenims tirti. Duomenys yra paimti iš OberHaus įmonės pateikiamų ataskaitų, kitų sistemingų Lietuvos nekilnojamojo turto duomenų nėra. (http://www.ober-aus.lt/files/lt/files/apzvalgos/OHBI_apzvalga_2013_liepa.pdf, 2014). Šie duomenys pateikti priedo 1 lentelėje ir pavaizduoti 3.2 pav .



3.2 pav. Nekilnojamojo turto kainų indeksas nuo 2000 05 iki 2009 12

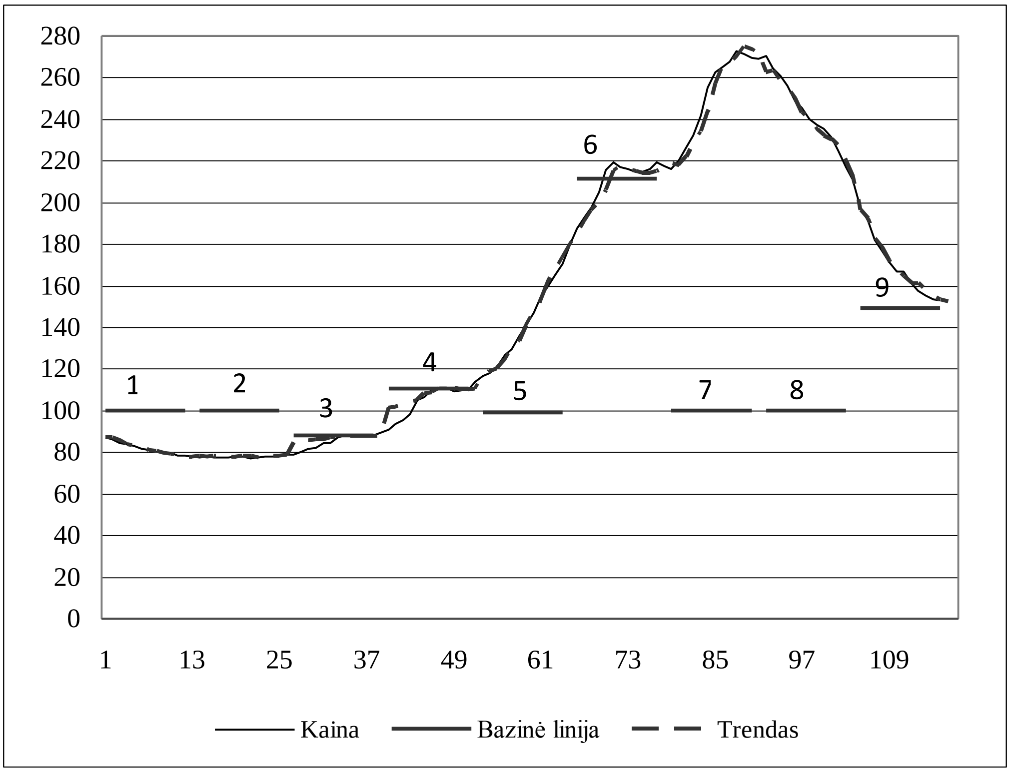
Pirma reikia nustatyti optimalų stebėjimo periodą, t. y. fiksuoti T_i. Tuo tikslu nagrinėtinas įprastas autoregresinis modelis (3.2), kurio parametrai a_j bei paklaidos $f(t)$ yra susiję pagal formulę:

$$P(t) = \sum_{j=1}^{N} a_j P(t-j) + f(t) \tag{3.2}$$

Optimalus stebėjimų intervalas yra mažiausia laiko skalės reikšmė, kuriai dėl (3.2) laiko eilutės (3.1) lygtyje nėra $w(T_i) > 1$, kai lagas $N = 5$, (lagas parinktas pagal K. Watanabe ir kt., 2007). Priedo 1 lentelės duomenims T_i reikšmė yra 12 mėnesių. Nagrinėsime eksponentinę trendo kreivę (3.3).

$$P_{trend}(t) = w(T_i)P_{trend}(t-1) + (1 - w(T_i))P_0(T_i) \quad (3.3)$$

Kiekvieno konvergavimo ir divergavimo intervalui eksponentinė trendo kreivė pavaizduota 3.3 pav.



3.3 pav. Kaina ir eksponentinė trendo kreivė, bazinė linija

3.3 pav. yra matyti konvergavimo (3, 4, 6, 9) ir divergavimo intervalai (1, 2, 5, 7, 8), kurių rezultatai atitinka K. Watanabe ir kt. (2007) tyrimų modelį. Burbulą ir jo griūtį galima identifikuoti pagal divergavimo intervalus. Iš 3.3 pav. matyti, kad 6 intervale burbulas tik nustojo augti ir jau turime konvergavimo intervalą. Divergavimui išlaikyti, kai burbulas nustojo augti, K. Watanabe modelį modifikuosime, įtraukdami į jį dviejų tipų individus.

3.3.2. Burbulų ir griūties matematinis apibrėžimas, esant dviejų tipų individams

Dabar nagrinėsime K. Watanabe ir kt. (2007) pasiūlyto metodo (jo korektiškumas atskleistas anksčiau), pritaikymą dviejų skirtingų individų tipų, t. y. čartistų ir fundamentalistų, atvejui.

Fundamentalistai: tarsime, kad yra NF fundamentalistų, įsitikinusių, kad kaina galų gale konverguoja į fundamentalią vertę.

Čartistai: tarsime, kad turime NS čartistų, kurie elgiasi pagal kainos trendą.

Kadangi tyrimą atliksime remdamiesi tais pačiais duomenimis, tai $\mathrm{T_i}$ yra lygus 12 (kurį jau nustatėme anksčiau). $\mathrm{w(T_i)}$ ir $\mathrm{P_0(T_i)}$ turi tą pačią prasmę kaip ir anksčiau, o $N = 5$. Dabar modifikuosime (3.1) lygtį į (3.4).

$$\begin{aligned} P(t) - P(t-1) = {} & \frac{NS}{NS+NF} \sum_{h=1}^{NS} \Big(\sum_{j=t-1}^{t-1+T_i} w(T_i)[P(j) - P(j-1)] + \\ & + \frac{NF}{NS+NF} \sum_{h=1}^{NF} [P(t-1) - P_0(T_i)] q(T_i) + F(t) \end{aligned} \tag{3.4}$$

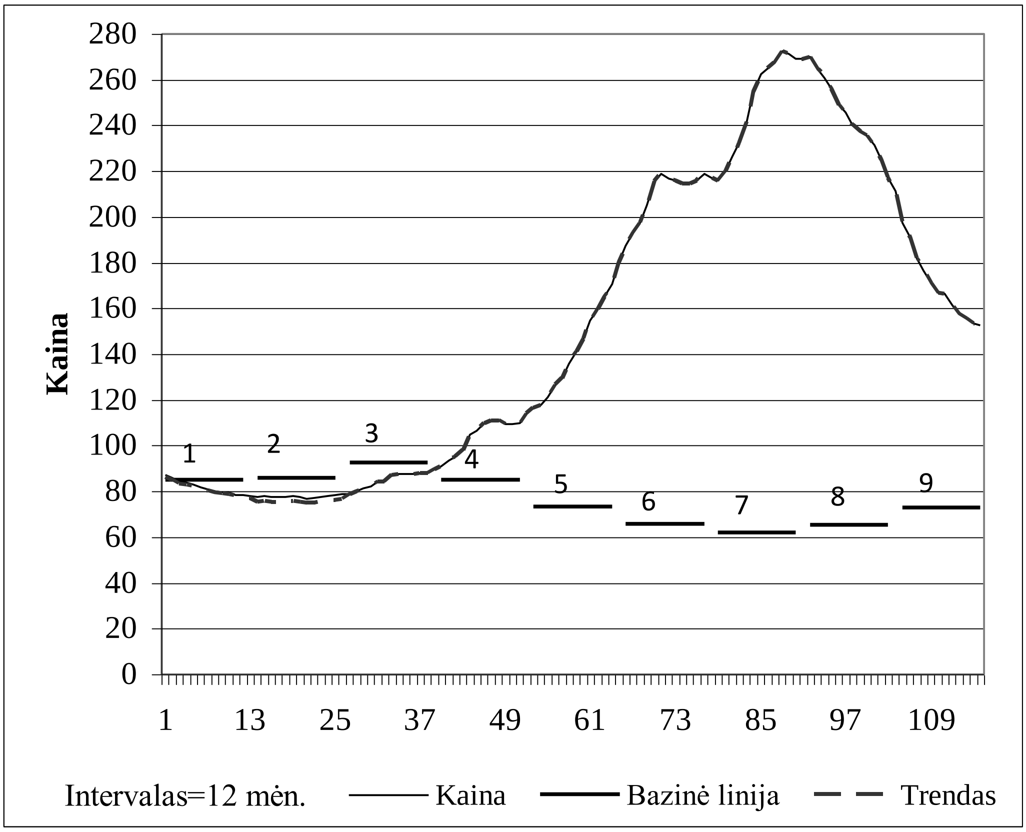
Čia – $\mathrm{q(T_i)}$ ir $\mathrm{w(T_i)}$ fundamentalistų ir čartistų prisiderinimo prie kainos greičiai. Kadangi įtraukti du individų tipai, tai jų kiekiai įvertinti (3.4). Analogiškai apibrėžiamas ir trendas (3.5).

$$P_{trend}(t) = w(T_i) P_{trend}(t-1) + (1 - q(T_i)) P_{trend}(t-1) \tag{3.5}$$

Čia – $P_0(T_i), q(T_i)$, $w(T_i)$, NS ir NF yra parametrai, pagal ankstesnius $\mathrm{T_i}$ duomenis vienareikšmiškai apibrėžiami taip, kad šaknis iš vidutinės kvadratinės paklaidos (angl. *root-mean-square-error* - *RMSE*) $F(t)$ (3.4) pasiekia minimumą.

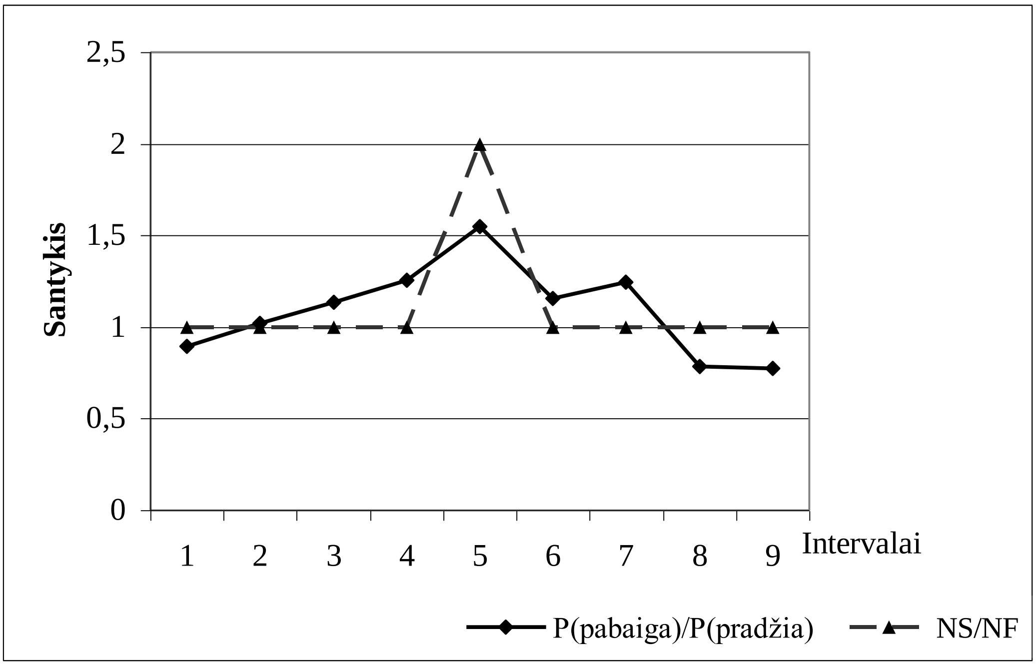
E. C. Hui ir kt. (2010) burbulų susidarymui ir jų griūčiai pasiūlė nusakyti kitokią traktuotę, įtraukdami į modelį $\mathrm{P(t-2)}$. Kaip ir mūsų atveju, jų modelyje yra du parametrai w_1 ir w_2 vietoje (3.1) lygties vieno parametro w. Jų tyrimo tikslas nustatyti, kada $w_1 + w_2$ yra mažiau, lygu ar daugiau už vieną.

3.4 pav. pavaizduota (3.5) eksponentinė trendo kreivė, bazinė linija bei kaina kiekvienam periodui. 3.4 pav. skiriasi nuo 3.3 pav. 6 intervale, kai burbulas nustoja augti. Pagal 3.4 pav. 6 intervalas yra divergavimo intervalas, t.y. burbulas dar tebėra.



3.4 pav. Kaina ir eksponentinė trendo kreivė, bazinė linija (du individų tipai)

Jei (3.4) lygtyje P = 100 (priedo 1 lentelėje pateiktas bazinis kainos indeksas buvo apskaičiuotas tariant, kad: kaina 1994 01 lygi 100), ir jei ta reikšmė yra nekilnojamojo turto fundamentali vertė, kai w=q=0.0001, tai fundamentalistų ir čartistų skaičių galima įvertinti pasinaudojus (3.4) lygtimi. Intervalas, kaip ir anksčiau, lygus 12 mėnesių. 3.5 pav. pavaizduoti kainos santykis intervalo pabaigoje ir pradžioje bei čartistų ir fundamentalistų santykis.



3.5 pav. Kainos intervalo pabaigoje ir pradžioje bei NS ir NF santykiai

Kadangi čia intervalas (12 mėn) trunka ilgai, palyginus su mėnesiniais kainų svyravimais, tai čartistų ir fundamentalistų santykis kinta lėtai. Bet jei intervalas būtų trumpesnis, tai pokyčiai būtų ryškesni. Jei imsime judantį intervalą, t. y. perstumsime intervalo pradžią ir pabaigą per tam tikrą mėnesių skaičių, tai čartistų ir fundamentalistų santykis keisis ne taip staigiai. Čartistų ir fundamentalistų kiekių pokytį galima interpretuoti kaip vieno tipo individų tapsmą kito tipo individais. Nagrinėjamame modelyje toks pasikeitimas nenumatytas. Be to, kiekvienas individas gali keisti savo lūkesčius fundamentalios vertės aspektu. Šiame modelyje į individų lūkesčių pasikeitimą nėra atsižvelgta.

3.3.3. Paprastas heterogeninių agentų modelis (HAM)

Šiame poskyryje nagrinėjamas modelis, taip pat turintis du individų su savo lūkesčiais tipus bei individų persijungimo iš vieno tipo į kitą taisyklė. Būtina aprašyti tradicinį heterogeninių agentų modelį (HAM) (Zwinkels ir kt., 2010) ir ištirti agentų elgseną. Pagrindinė modelio prielaida tokia: yra dviejų tipų individai – fundamentalistai ir artistai, turintys heterogeninius lūkesčius.

Fundamentalistų paklausa išreikšta kainos laiko momentu t ir laukiamos kainos laiko momentu $t+1$ skirtumu

$$D_t^F = a^F(E_t^F(P_{t+1}) - P_t)) . \tag{3.6}$$

Čia: a^F yra teigiamas parametras, E – yra matematinės vilties operatorius. Fundamentalistų paklausa didės, jei jie tikėsis, kad būsima kaina bus didesnė nei esama ir atvirkščiai. Fundamentalistai tikisi, kad pervertintų aktyvų kaina mažės, o nuvertintų aktyvų kaina didės iki tokio laipsnio, kol aktyvų kaina atspindės fundamentalią vertę. Tai išreiškiama (3.7) formule.

$$E_t^F(P_{t+1}) = P_t + b_1^F(P_t - F_t)^+ + b_2^F(P_t - F_t)^- \tag{3.7}$$

(3.7) formulėje F_t yra periodo t fundamentali vertė. Jei $P_t - F_t \geq 0$, tai $(P_t - F_t)^+ = P_t - F_t$, priešingu atveju lygu 0. Jei $P_t - F_t < 0$, tai $(P_t - F_t)^- = P_t - F_t$, priešingu atveju lygu 0.

Čartistų paklausa apibrėžiama (3.8) formule.

$$D_t^C = a^c(E_t^C(P_{t+1}) - P_t)) \tag{3.8}$$

čia – $$E_t^C(P_{t+1}) = P_t + b_1^C(P_t - P_{t-1})^+ + b_2^C(P_t - P_{t-1})^- \quad (3.9$$

Fundamentalistus ir čartistus galima apibūdinti kaip į individus, kurie naudoja skirtingas strategijas rinkai įvertinti ir sprendimams priimti. Individai renkasi savo strategiją, įvertinę tam tikrą prognozinę strategiją, t. y.

$$A_t^F = -\sum_{k=1}^{K}[(E_{t-k-1}^F(P_{t-k}) - P_{t-k}]^2 \tag{3.10}$$

$$A_t^C = -\sum_{k=1}^{K}[(E_{t-k-1}^C(P_{t-k}) - P_{t-k}]^2 \tag{3.11}$$

Čia: K = 4 mėnesiai, A_t^F ir A_t^C – fundamentalistų ir čartistų prognozės. Remiantis (3.10) ir (3.11) galima apibrėžti persijungimo (iš čartisto į fundamentalistą ir atvirkščiai) (3.12) taisyklę:

$$W_t = [1 + \exp(-\gamma[\frac{A_t^F - A_t^C}{A_t^F + A_t^C}]]^{-1} \tag{3.12}$$

Reali paklausa (3.13) yra egzogeninio ir endogeninio komponentų funkcija (neigiama kainos funkcija).

$$D_t^R = a^R - b^R P_t \tag{3.13}$$

Tarsime, kad pasiūla (3.14) yra tiesinė kainos funkcija:

$$S_t = a^S + b^S P_t \tag{3.14}$$

Bendra paklausa:

$$D_t^M = D_t^R + W_t D_t^F + (1 - W_t) D_t^C \tag{3.15}$$

Kaina kinta pagal (3.16):

$$P_{t+1} = P_t + \delta(D_t^M - S_t) \tag{3.16}$$

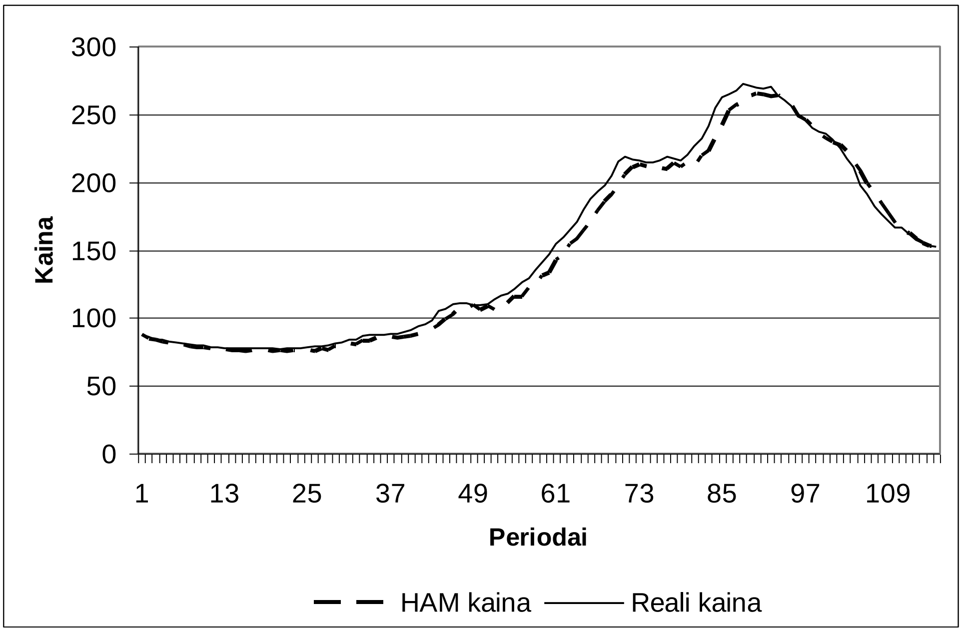
Čia fundamentali kaina yra judantis kainos vidurkis kai $M = 3$.

Anksčiau pateiktos formulės leidžia nustatyti kainos pokytį (3.17).

$$\begin{aligned} \Delta P_{t+1} &= a + bP_t + W_t(\alpha_1 (P_t - F_t)^+ + \alpha_2 (P_t - F_t)^-) + \\ &+ (1 - W_t)(\beta_1 (P_t - P_{t-1})^+ + \beta_2 (P_t - P_{t-1})^-) \end{aligned} \tag{3.17}$$

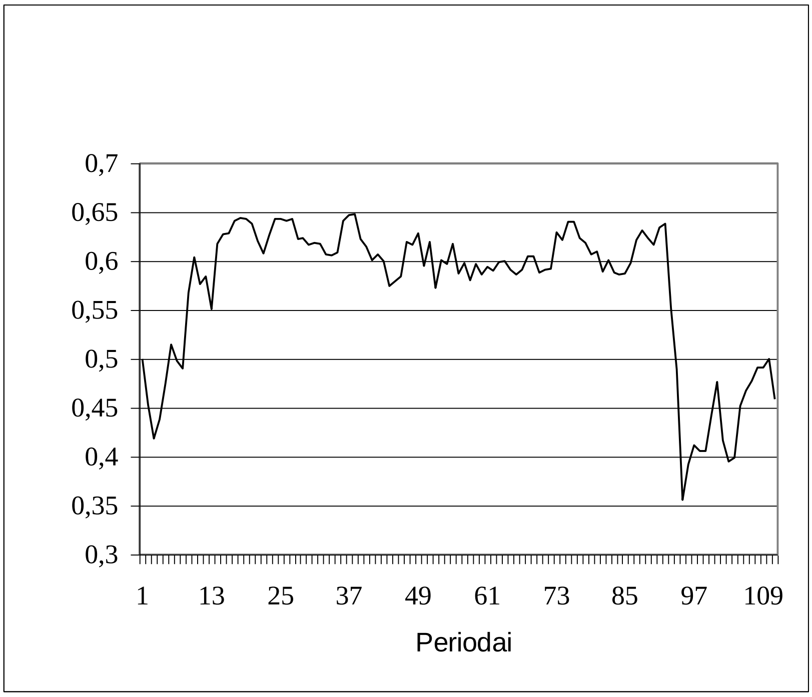
Čia – $a = \delta(a^R - a^S)$, $b = \delta(b^R - b^S)$, $\alpha_1 = \delta a^F b_1^F$, $\alpha_2 = \delta a^F b_2^F$ ir $\beta_1 = \delta a^C b_1^C$, $\beta_2 = \delta a^C b_2^C$. $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ – nusako fundamentalistų ir čartistų poveikį kainai.

Mažiausių kvadratų metodu nustatoma, kad $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ ir a, b, γ su reikšmėmis – $\alpha_1 = -0{,}012$, $\alpha_2 = -3{,}275$, $\beta_1 = 0{,}003646$, $\beta_2 = 0{,}0002336$, $a = 0{,}0002173$, $b = 0{,}954$, $\gamma = 0{,}625$ – atitinka realius duomenis.

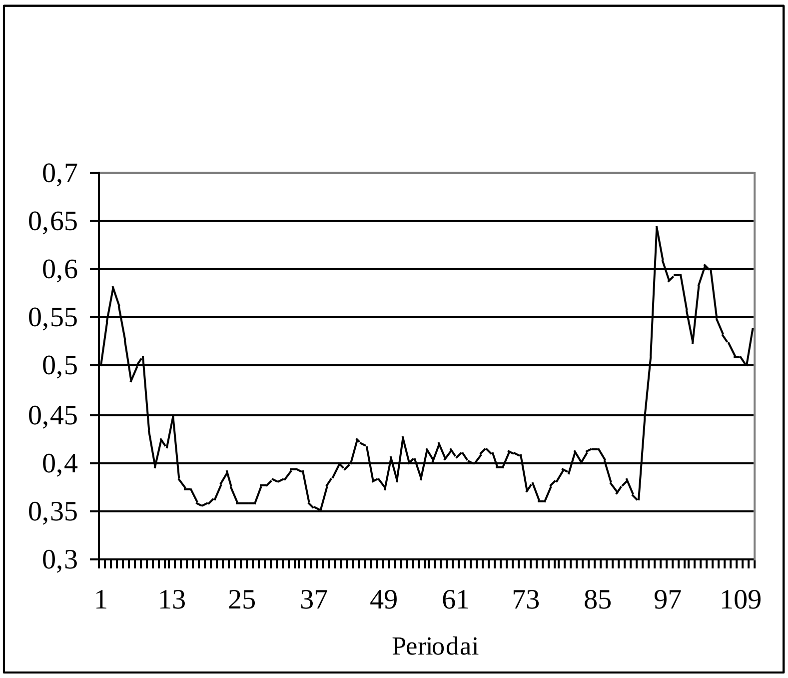


3.6 pav. Kaina pagal HAM ir reali kaina

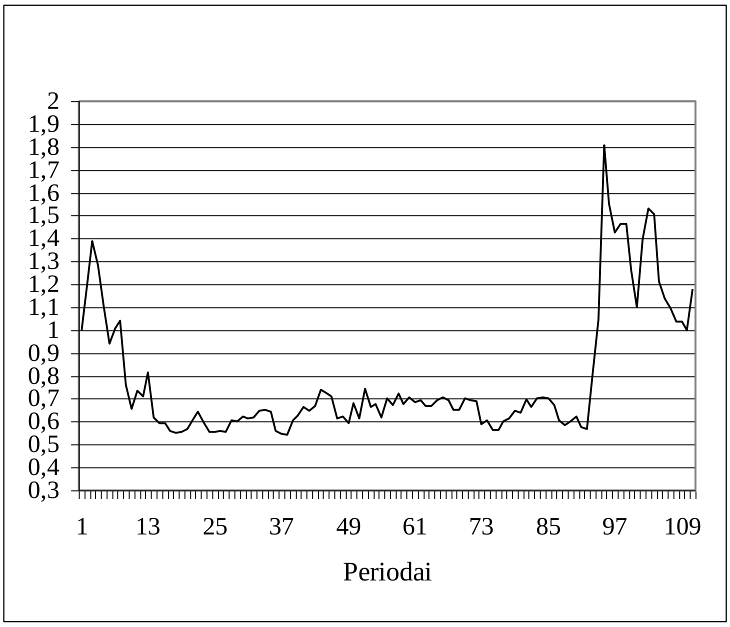
HAM modelyje nustatytos fundamentalistų ir čartistų dalys populiacijoje, randamas santykis NS/NF. Šie rezultatai pavaizduoti atitinkamai 3.7 pav., 3.8 pav. ir 3.9 pav.



3.7 pav. Fundamentalistų dalis



3.8 pav. Čartistų dalis



3.9 pav. Čartistų ir fundamentalistų dalių santykis

Rezultatų pagal (3.4) lygtį ir pagal HAM modelį palyginimui pakanka pažiūrėti į 3.5 pav. ir 3.9 pav. Matyti, kad darbe sudarytame modelyje nėra persijungiama iš čartistų į fundamentalistus, ir atvirkščiai. Tai paaiškinama tuo, kad (3.4) lygtyje fundamentalistų ir čartistų skaitiniai dydžiai įvertinami pagal kainos pokytį intervalo gale ir pradžioje, o intervalo ilgis yra didelis (12 mėn.). HAM modelyje numatyta taisyklė, kaip vieno tipo individas tampa kito tipo individu. Remiantis (3.4) lygtimi aprašytu modeliu galima nustatyti burbulo pradžią, tačiau šiame modelyje trūksta atitinkamos dinamikos. Iš HAM modelio aiškėja, kad burbulo pradžioje staigiai išauga čartistų skaičius.

Skyriaus išvados

1. Darbe pasiūlytas ekonominio burbulo matematinis modelis apima dviejų tipų individus – fundamentalistus ir čartistus. Šiuo modeliu ištirtas Lietuvos nekilnojamojo turto burbulas.
2. Pagal šį modelį ekonominis burbulas identifikuotas kainos divergavimu nuo bazinės linijos. Jei burbulas trumpam nustoja augti, tai minėtas divergavimas išlieka. Nagrinėtas paprastas HAM modelis, kuriame taip pat yra dviejų tipų individai. Juo nustatyta, kad burbulo pradžia pasižymi staigiu čartistų skaičiaus padidėjimu.

4 skyrius. **Dviejų lygių stochastiniai uždaviniai**

Dviejų lygių uždavinys dažnai pasitaiko versle bei inžinerijoje, kai sprendimai priimami hierarchiškai. Šiame skyriuje nagrinėjami du stochastiniai dviejų lygių programavimo uždaviniai. Šio darbo 4.1 poskyryje analizuojamas dviejų lygių stochastinis programavimo uždavinys, į kurį suvedamas stochastinio programavimo uždavinys, kai CVaR patenka į tikslo funkciją ir ribojimus. Sudarytas 4.1 algoritmas šio uždavinio sprendimui. Šis algoritmas ištirtas, sprendžiant testinį uždavinį.

4.2 poskyryje tiriamas reikšmingų imčių metodo taikymas dviejų etapų stochastiniam tiesiniam uždaviniui. Reikšmingų imčių metodo taikymas šiam uždaviniui susiveda į dviejų lygių uždavinio sprendimą. Sukurtas 4.2 algoritmas šiam uždaviniui spręsti. Šiuo algoritmu spręstas uždavinys, kurio sprendinys buvo pateiktas tarptautinėje duomenų bazėje. (Sakalauskas ir Žilinskas, 2008) Nustatyta, kad reikšmingų imčių metodas leidžia sumažinti iteracijų skaičių, reikalingą duoto tikslumo sprendiniui surasti.

Skyriaus rezultatai publikuoti V. Dumskis, V. Guigues, L. Sakalauskas (2012), V. Dumskis, L. Sakalauskas (2012) straipsniuose. Šie rezultatai buvo pristatyti ir aptarti nacionalinėje – LMD LII ir tarptautinėse – EUROPT – 2012, STOTPROG – 2012 konferencijose.

4.1. Stochastinis programavimas, kai CVaR patenka į tikslo funkciją ir ribojimus

4.1.1. VaR ir CVaR rizikos matai

Realiame gyvenime sprendimai dažnai priimami esant neapibrėžtumui. Taigi, susiduriama su tam tikra rizika. Yra daug rizikos matų. *Dispersija* ir *vidutinis kvadratinis nuokrypis* tapo tradiciniais rizikos matais ekonomikoje ir finansuose nuo to laiko, kai pasirodė H. Markowitz mokslinis darbas (1952). 1990 metais buvo pasiūlytas kitas rizikos matas – VaR (angl. *Value at Risk – rizikos reikšmė*), kuris dabar labai populiarus bankininkystėje ir finansuose (Guldimann, 2000). VaR taikymo esmė tokia: atliekama jau turimų duomenų statistinė analizė ir vertinama, ar duoto portfelio praradimai viršys tam tikrą dydį. VaR plačiai naudojamas kaip rizikos matas, įvertinant finansinių aktyvų portfelio praradimus tiek finansų matematikoje, tiek finansų rizikos vadyboje. VaR yra įtrauktas ir į bankų priežiūros Europos Sąjungoje susitarimo dokumentą „Basel II Capital Accord“ (Basel Committee on Banking Supervision, 2005).

Tarkime, yra duotas reikšmingumo lygmuo $\alpha \in (0,1)$ ir praradimo funkcija $f(x,\zeta): R^n \times R^m \to R.$ Čia: x sprendimo priėmimo kintamasis, o ζ reiškia neapibrėžtumo faktorius, kurie apibrėžti tikimybinėje erdvėje (Ω, F, P). Tada VaR apibrėžiamas kaip funkcijos f $\alpha-$kvantilis, būtent,

$$VaR_\alpha(x) = \min\{v | P(f(x,\zeta) \le v) \ge \alpha\}. \tag{4.1}$$

Čia $P(\cdot)$ žymi tikimybę. Tačiau VaR, kuri yra sprendimo priėmimo kintamojo x funkcija, bendru atveju yra neiškila ir sunkiai apskaičiuojama, todėl VaR optimizavimo uždaviniai sunkiai sprendžiami. Dėl tos ir kitų priežasčių dabartinėje mokslinėje literatūroje nagrinėjamas kitas rizikos matas – CVaR (angl. *Conditional Value at Risk – sąlyginė rizikos reikšmė*).

Tarkime, $x \in R^n$ ir atsitiktinio dydžio $\tilde{z} = f(x,\zeta)$ pasiskirstymo funkcija yra $F(x,.)$. Duotam reikšmingumo lygmeniui $\alpha \in (0,1)$ CVaR yra apibrėžiamas taip – $CVaR = E_{\alpha-tail}[\tilde{z}]$, čia E žymi matematinę viltį. Atsitiktinio dydžio $\tilde{z}$ pasiskirstymo $\alpha - tail$ funkcija yra tokios formos:

$$F_\alpha(x,v) = P(\tilde{z} \le v) = \begin{cases} 0, & jei \quad v < VaR_\alpha(x), \\ \dfrac{F(x,v)-\alpha}{1-\alpha}, & jei \quad v \ge VaR_\alpha(x). \end{cases} \tag{4.2}$$

Nors CVaR apibrėžtas kaip $f(x,\zeta)$ matematinė viltis, tačiau patogiau yra vartoti kitą CVaR apibrėžimą, kurį pateikė R. T. Rockafelar ir S. Uryasev (Rockafelar ir Uryasev, 2002):

$$CVaR_\alpha(x) = \min\{\varphi(x,v,\alpha) | v \in R\}. \tag{4.3}$$

Čia funkcija $\varphi(x,v,\alpha)$ yra:

$$\varphi(x,v,\alpha) = v + \frac{1}{1-\alpha} E[f(x,\zeta) - v]^{+}, \tag{4.4}$$

kai $[t]^{+} = \max\{0,t\}$,

Jei rizikos matas tenkina monotoniškumo, subadityvumo, teigiamo homogeniškumo ir perkėlimo invariantiškumo savybes, tai toks rizikos matas vadinamas koherentišku.

Populiarus rizikos matas VaR turi trūkumų – jis nėra subadityvus ir nėra įgaubtas (Artzner ir kt. 1997, 1999). Apskritai, VaR nėra koherentiškas. VaR yra koherentiškas tiktai tuo atveju, kai praradimai turi normalųjį pasiskirstymą (Artzner ir kt., 1999). Kad CVaR yra koherentiškas rizikos matas, pirmasis tą faktą įrodė G. Pflug (2000). CVaR tenkina dar ir papildomas savybes: jis yra tolydus reikšmingumo lygmens α atžvilgiu, yra iškilas pagal α ir x, jei praradimų funkcija yra iškila pagal x (Rockafelar ir Uryasev, 2002).

CVaR turi stabilius statistinius įverčius, lyginant su VaR. Jei praradimų pasiskirstymas yra tolydus, tai CVaR yra praradimų, kurie viršija VaR lygį, sąlyginė matematinė viltis. Šis faktas labai svarbus, valdant riziką, nes CVaR suteikia informacijos ne tik apie tam tikrą praradimų lygį, bet ir apie praradimų pasiskirstymo uodegą. Tačiau dėl priežiūros ir kontrolės reikalavimų - Basel II ir Solvency II (EU Directive, 2009) VaR išlieka standartu ir yra plačiai taikomas portfeliui planuoti.

Rizikos įvertinimo, jos optimizavimo uždaviniai labai aktualūs finansų rinkose. R. T. Rockafellar ir S. Uryasev (2000) pasiūlė sąlyginės rizikos reikšmės optimizavimo metodą, t. y. jie parodė, kad tiesinis programavimas gali būti panaudotas CVaR optimizuoti. Gali būti, kad CVaR yra ir ribojimuose. Paprastą metodą šio tipo uždaviniams spręsti galima rasti S. Uryasev moksliniame darbe (2000). Išsamią apžvalgą apie VaR ir CVaR optimizavimą pateikia A. Prékopa (2003) bei P. Kall ir J. Mayer (2011). P. Krokhmal su bendraautoriais (2002) buvo pirmieji, nagrinėję uždavinius, kuriuose CVaR yra ribojimuose. D. Roman ir kt. (2007) pasiūlė metodą, kaip minimizuoti dispersiją, esant ribojimams pelnui ir CVaR, – tokio pobūdžio ribojimai yra geriau nei ribojimai dispersijai, nes minimizuoti griežtai iškilą tikslo funkciją yra patogiau skaičiavimų požiūriu. Nenoras rizikuoti gali būti nusakytas svorine funkcija, kai svoris θ suteikiamas funkcijai, kurią norime optimizuoti, o svoris $(1-\theta)$ suteikiamas rizikos matui ($0 \le \theta \le 1$).

Apskritai, optimizavimo uždavinys, kai CVaR yra tikslo funkcijoje ir ribojimuose, yra ***dviejų lygių stochastinį programavimo uždavinys*** (žr. (2.1) – (2.2)), nes ribojimai – kito uždavinio optimalus sprendinys.

4.1.2. Uždavinio formuluotė, Monte Karlo įverčiai

Nagrinėkime rizikos lygio optimizavimo uždavinį su daugeliu ribojimų CVaR:

$$\begin{gathered} F_0(x) = \theta \cdot E\left[f_0(x,\zeta)\right] + (1-\theta) \cdot CVaR_{\alpha_0}\left[f_0(x,\zeta)\right] \to \min_x \\ F_i(x) = CVaR_{\alpha_i}[f_i(x,\zeta)] \le \phi_i,\ i = 1, 2, ..., m, \end{gathered} \tag{4.5}$$

čia sąlyginė rizikos reikšmė (CVaR) pagal (4.3)–(4.4) yra

$$CVaR_\alpha(x) = \min_{v \in \Re}\left(v + \frac{1}{1-\alpha} E[f(x,\zeta) - v]^+\right) \tag{4.6}$$

$0 < \alpha_i < 1, i = 0,1, 2, ..., m,\ \zeta \in \Omega, (\Omega, \Sigma, P_x)$ yra tikimybinė erdvė, $f_i : \Re^n \otimes \Omega \to \Re$, $i = 0,1,...,m$. Tarkime, kad atsitiktinės (glodinamos) funkcijos $f_i : \Re^n \otimes \Omega \to \Re, i = 0,1, 2,...,m$ yra Lipšico funkcijos, o neapibrėžtumas nusakomas absoliučiai tolydžiu tikimybiniu matu, kurio tankio funkcija yra $p(x,\cdot) : \Re^m \to \Re_+$.

Taigi, (4.5) galima užrašyti kaip dviejų lygių stochastinio programavimo uždavinį:

$$\begin{gathered} F_0(x) = \theta \cdot \int_{R^l} f_0(x,z) \cdot p(x,z)dz + \\ + (1-\theta) \cdot \left(v_0 + \frac{1}{\alpha_0} \cdot \int_{R^l}\left(f_0(x,z) - v_0\right)^+ \cdot p(x.z)dz\right) \to \min_{x, v_0} \\ F_i(x) = \min_{v_i \in \Re}\left(v_i + \frac{1}{\alpha_i} \cdot \int_{R^l}\left(f_i(x,z) - v_i\right)^+ \cdot p(x,z)dz\right) \le \phi_i, i = 1, 2, ..., m. \end{gathered} \tag{4.7}$$

Pastebėsime, kad dėl (4.5) Lagranžo funkcija yra $F_0(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i \cdot F_i(x)$ ir, norint ją apskaičiuoti, reikia spręsti antro lygio uždavinį (4.6). Išplėstinė Lagranžo funkcija (LF) apibrėžiama taip:

$$
\begin{aligned}
&L(x,\lambda,v) \equiv El(x,\lambda,v,\zeta) = \\
&= \theta \cdot \int_{R^l} f_0(x,z) \cdot p(x,z)dz + \\
&+ \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \cdot \left(v_i - \phi_i + \frac{1}{\alpha_i} \cdot \int_{R^n} \left(f_i(x,z) - v_i \right)^+ \cdot p(x,z)dz \right),
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

Ribojimų išplėstinių funkcijų (CF) apibrėžtis:

$$
L_i(x,v) \equiv El(x,v,\zeta) = v_i - \phi_i + \frac{1}{\alpha_i} \cdot \int_{R^n} \left(f_i(x,z) - v_i \right)^+ \cdot p(x,z)dz \tag{4.9}
$$

LF funkciją galima traktuoti kaip stochastinės Lagranžo funkcijos –

$$
l(x,\lambda,v,\zeta) = \theta \cdot f_0(x,\zeta) + \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \cdot \left(v_i - \phi_i + \frac{\left(f_i(x,\zeta) - v_i \right)^+}{\alpha_i} \right) \tag{4.10}
$$

vidurkį, o CF – kaip ribojimų atsitiktinių funkcijų –

$$
l_i(x,v,\zeta) = v_i - \phi_i + \frac{\left(f_i(x,\zeta) - v_i \right)^+}{\alpha_i} \tag{4.11}
$$

vidurkius. Čia $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m)$, $\lambda_i \geq 0, i = 1,2,...,m$, $\lambda_0 = 1-\theta$, $\phi_0 = 0$, $v = (v_0, v_1, ..., v_m)$.

Būtina atkreipti dėmesį, kad $l(x,\lambda,v,\zeta)$ ir $l_i(x,v,\zeta), i = 1,2,...,m$ tenkina Lipšico sąlygą pagal x ir v, todėl egzistuoja jų subgradientai (Clarke, 1983), kuriuos galima traktuoti kaip stochastinius gradientus. Kadangi neapibrėžtumas nusakomas absoliučiai tolydžiu matu, tai matematinės viltys, nurodytos aukščiau esančiose formulėse, yra glodžiai diferencijuojamos funkcijos (Rubinstein ir Melamed, 1998; Bartkute ir Sakalauskas, 2007). Jei tikimybinis tankis p turi ir Lipšico savybę, tai tikimybinė tikslo funkcija dukart glodžiai diferencijuojama (Bartkutė ir Sakalauskas, 2007). Taigi, išplėstinė Lagranžo funkcija $L(x,\lambda,v)$ ir išplėstinės ribojimų funkcijos $L_i(x,v)$ yra glodžiai diferencijuojamos ir jų gradientus galima išreikšti matematinėmis viltimis. Pažymėkime LF gradientą $G(x,\lambda,v) = Eg(x,\lambda,v,\zeta)$ ir CF gradientą $G_i(x,v) = Eg_i(x,v,\zeta)$, $i = 1,2,...,m$.

Tarkime, kad $x^* \in R^n$ yra (4.5) stochastinio programavimo uždavinio sprendinys. Remiantis Karush–Kuhn–Tucker teorema (Bertsekas, 1982) ir CVaR diferencijavimo taisyklėmis (Rockafellar ir Uryasev, 2002) egzistuoja tokie $\lambda_i^* \geq 0$, $v_i^* \geq 0$, $i = 0,1,...,m$, kad

$$\begin{aligned} &G(x^*,\lambda^*,v^*) \equiv \nabla F_0(x^*) + \sum_{i=0}^{m} \lambda_i^* \cdot G_i(x^*,v^*) = 0, \\ &\lambda_i^* \cdot (L_i(x^*,v^*) - \phi_i) = 0, \qquad i = 1,2,..., m, \\ &\Pr\left(f_i(x^*,\zeta) \geq v_i^*\right) = \alpha_i, \qquad i = 0,1,..., m. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Jei atsitiktinės tikslo funkcijos $f_i(x^*,\zeta), i = 0,1,...,m$ yra tiesinės, tai duotą uždavinį galima transformuoti į didelį tiesinio programavimo (LP) uždavinį ir jį spręsti imties vidurkio aproksimacijos metodu (angl. *Sample Average Approximation* – SAA) metodu. Tačiau gautas LP uždavinys gali būti labai didelis ir jo sprendimas pareikalautų nemažų skaičiavimo resursų (Kall ir Mayer, 2011). Be to, kai kurios funkcijos $f_i(x^*,\zeta)$, $i = 0,1,...,m$ gali būti netiesinės, tada duoto uždavinio transformacija į LP nebetinka. Taigi, modeliavimo Monte Karlo imčių sekomis metodas gali būti naudingas (žr. 2.5 poskyrį).

Tarkime, kad kuriam $x \in \Re^n$ galima generuoti Monte Karlo imtis

$$Z = (z^1, z^2,..., z^N), \tag{4.13}$$

čia z^i yra nepriklausomi vektoriai, vienodai pasiskirstę pagal tankio funkciją $p(x,\cdot): \Omega \to R_+$. Tada, remiantis, (2.9) galima apskaičiuoti atitinkamus Monte Karlo įverčius:

$$\begin{aligned} &\tilde{F}_0(x,v) = \frac{1}{N_0} \sum_{j=1}^{N} \theta \cdot f_0(x,z^j) + \frac{1-\theta}{N_0} \sum_{\substack{j=1, \\ f_0(x,z^j) > v_0}}^{N} f_0(x,z^j), \\ &\tilde{F}_i(x,v) = \frac{1}{N_i} \sum_{\substack{j=1, \\ f_i(x,z^j) > v_i}}^{N} f_i(x,z^j), \end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\Pr_i = \frac{N_i}{N},$$

čia N_i yra įvykių $\{v_i : f_i(x, z^j) \ge v_i\}$, $i = 0,1,...,m.$, kurie pasirodo (4.13) imtyje, dažniai. Remiantis (2.10) galima apibrėžti atitinkamas imčių dispersijas:

$$\tilde{D}_0^2(x,v) = \frac{1}{N_0}\sum_{j=1}^{N}\left(\begin{matrix}\theta \cdot f_0(x,z^j) + \\ +(1-\theta)\cdot\left(v_0 + \dfrac{\left(f_0(x,z^j)-v_0\right)^+}{\Pr_0}\right) - \tilde{F}_0(x)\end{matrix}\right)^2, \tag{4.15}$$

$$\tilde{D}_i^2(x,v) = \frac{1}{N_i}\sum_{\substack{j=1,\\ f_i(x,z^j)>v_i}}^{N}\left(f_i(x,z^j) - \tilde{F}_i(x)\right)^2, \quad i = 1,..., m.$$

Monte Karlo įvertis išplėstinei Lagranžo funkcijai yra:

$$\tilde{L}(x,\lambda,v) = \tilde{F}_0(x,v) + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i \cdot \tilde{F}_i(x,v) \tag{4.16}$$

Tikslo funkcijos gradientą ir ribojimų funkcijų gradientus galima aproksimuoti stochastiniais gradientais (Sakalauskas, 2002). Tarkime, kad atsitiktinių funkcijų $L(x,\lambda,v)$ ir $L_i(x,v)$ stochastiniai gradientai yra tokie vektoriai $G_i(x,z^j)$, kuriems $EG_i(x,\zeta) = \nabla f_i(x)$, $i = 0,1,...,m.$ Pavyzdžiui, stochastinis gradientas gali būti gautas kaip atsitiktinės funkcijos subgradientas: $G_i(x,\zeta) = \partial F_i(x,\zeta)$, $i = 0,1,...,m.$ Remiantis (2.9), tikslo funkcijos ir ribojimų funkcijų stochastinių gradientų įverčiai yra tokie:

$$\begin{gathered}\tilde{g}_0(x,v) = \frac{1}{N_0}\sum_{j=1}^{N}\left(\theta \cdot G_0(x,z^j) + \frac{1-\theta}{\Pr_0}\cdot G_0^{\#}(x,v,z^j)\right),\\ \tilde{g}_i(x,v) = \frac{1}{N_i}\sum_{j=1}^{N}G_i^{\#}(x,v,z^j),\end{gathered} \tag{4.17}$$

čia $G_i^{\#}(x,v,z^j) = G_i(x,z^j)$, jei $f_i(x,z^j) > v_i$, priešingu atveju $G_i^{\#}(x,v,z^j) = 0$, $i = 0,1,...,m.$

Lagranžo funkcijos stochastinio gradiento įvertis:

$$q(x,\lambda,v) = \tilde{g}_0(x,v) + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i \cdot \tilde{g}_i(x,v) \equiv \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}Q(x,\lambda,v,z^j), \tag{4.18}$$

čia imties Lagranžo gradientas yra:

$$Q(x,\lambda,v,z^j) = \theta \cdot G_0(x,z^j) + (1-\theta) \cdot G_0^{\#}(x,v,z^j) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot G_i^{\#}(x,v,z^j).$$

Žinoma, $EQ(x,\lambda,v,\zeta) = Eq(x,\lambda,v) = \nabla_x L(x,\lambda,v)$.

Atitinkama imties kovariacijos matrica yra:

$$A(x,\lambda,v) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \left(Q(x,\lambda,v,z^j) - q(x,\lambda,v)\right) \cdot \left(Q(x,\lambda,v,z^j) - q(x,\lambda,v)\right)^T \quad (4.19)$$

4.1.3. Stochastinis optimizavimo algoritmas

(4.5) ar (4.12) uždavinių sprendiniams rasti gali būti panaudoti (4.14)–(4.19) įverčiai. Vietoje greičiausio nusileidimo Monte Karlo serijomis metodo, kuris išvystytas L. Sakalausko darbe (2002) stochastinio netiesinio optimizavimo uždaviniams (šis metodas lėtai konverguoja funkcijoms, kurioms hesianas yra beveik išsigimęs) taikytinas stochastinis kintamos metrikos metodas (angl. *Stochastic Variable Metric* – SVM), užtikrina spartesnį konvergavimą (Uryasev, 1992).

Tarkime, kad duoti pradinis taškas $x^0 \in \Re^n$ ir vektoriai $\lambda^0, v^0 \in \Re_+^m$ ir kad (4.13) tam tikro pradinio dydžio N^0 atsitiktinė imtis sugeneruota šiame taške ir Monte Karlo įverčiai (4.14)–(4.19) yra apskaičiuoti. Tada taikoma tokia stochastinė SVM procedūra:

$$\begin{aligned} x^{t+1} &= x^t - (A^t)^{-1} \cdot q(x^t,\lambda^t,v^t) \\ \lambda_i^{t+1} &= \max[0, \lambda_i^t + \gamma_i(\tilde{L}_i(x^t,v) + \mu_\beta \cdot \tilde{D}_i(x^t,v))],\ i = 1,2,...,m, \\ v_i^{t+1} &= v_i^t + \pi_i \cdot \left(\frac{\Pr_i}{\alpha_i} - 1\right), \quad i = 0,1,...,m. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Čia $\gamma_i > 0, \pi_i > 0$ yra normalizavimo daugikliai, μ_β yra standartinio normaliojo pasiskirstymo β-kvantilis. (4.19) kovariacijos matrica vartojama optimizavimo metrikai keisti.

Monte Karlo (4.20) įverčiai, apskritai, yra atsitiktiniai. Pastebėsime, kad sprendinio paieškos pradžioje nebūtina generuoti didelio tūrio (4.13) imtis.

Daug svarbiau turėti didelio tūrio (4.13) imtis tiktai optimumo nustatymo momentu. Dėl to imties dydis, užtikrinantis konvergavimą, gali būti parenkamas pagal tokią taisyklę (Sakalauskas, 2002):

$$N^{t+1} = \frac{\chi^2(\omega, n)}{(q^t)^T \cdot (A^t)^{-1} \cdot (q^t)}, \tag{4.21}$$

čia ω yra χ^2 pasiskirstymo kvantilis prie n laisvės laipsnių.

Algoritmo stabdymą galima atlikti statistiniu būdu, t. y. patikrinus hipotezę apie Lagranžo funkcijos gradiento lygybę nuliui ir (4.12) sąlygų išpildymą. Vadinasi, optimalumo hipotezė gali būti priimta tam tikrame taške x su reikšmingumu μ, jei teisinga tokia nelygybė:

$$(N-n)\cdot(\tilde{\nabla}_x L)\cdot A^{-1}\cdot(\tilde{\nabla}_x L) \le \chi^2(\mu, n). \tag{4.22}$$

Čia $\chi^2(\mu, n)$ yra χ^2 pasiskirstymo μ-kvantilis prie n laisvės laipsnių; $\tilde{\nabla}_x L = \tilde{\nabla}_x L(x, \lambda)$ yra LF gradiento įvertis; A – normalizavimo matrica (4.19) taške (x, λ), N – (4.13) imties dydis. Algoritmas gali būti stabdomas, jei optimalumo hipotezė neatmetama pagal (4.22), o ribojimų sąlygos (4.23) artėja į nulį su duota tikimybe β, t. y:

$$\tilde{F}_i(x, v) + \mu_{\beta_i} \cdot \tilde{D}_i(x, v)/\sqrt{N} \le 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{4.23}$$

tikslo funkcijos ir ribojimų įvertinti pasikliovimo intervalų (žr. (2.11)) ilgiai neviršija duoto tikslumo ε_i:

$$2\eta_{\beta_i} \cdot \tilde{D}_i(x, v)/\sqrt{N} \le \varepsilon_i, \quad i = 0, 1, \ldots, m, \tag{4.24}$$

η_{β_i} yra standartinio normaliojo pasiskirstymo β_i kvantilis, v parametrai gerai parinkti CVaR Monte Karlo įverčiui:

$$|\Pr_i - \alpha_i| \le \eta_\beta \cdot \sqrt{\frac{\Pr_i \cdot (1 - \Pr_i)}{N}}, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{4.25}$$

Jei (4.22)–(4.25) sąlygos įvykdytos, tai optimizavimą galima stabdyti ir teigti, kad leistino tikslumo optimumas surastas. Jei bent viena iš šių sąlygų neišpildyta, tai turi būti sugeneruota kita imtis ir optimizavimas tęsiamas. Nagrinėjamo uždavinio sprendimo eiga nurodoma 4.1 algoritmu.

4.1 lentelė. Sąlyginės rizikos optimizavimo algoritmas

4.1 algoritmas. Sąlyginės rizikos (CVaR) optimizavimas
Tikslas: rasti tikslo funkcijos, į kurią įeina CVaR, reikšmę, kai yra ribojimai CVaR. **Pradinės sąlygos:** Tikslo funkcijos ir ribojimų formalizuotas aprašymas. **Galinės sąlygos:** Sprendinio vektoriai $x^* = (x_1^*,..., x_n^*),\ v^* = (v_1^*,..., v_m^*)$, tikslo funkcijos reikšmė $F_0(x^*, v^*)$. 1. Fiksuoti uždavinį apibūdinančius parametrus: kintamųjų skaičių n, ribojimų skaičių m, svorį θ, Monte Karlo imties pradinį ilgį N^0, tikslo funkcijos ir ribojimų funkcijų tikslumus $\varepsilon_i, i = 0,1,..., m$, CVaR reikšmingumo lygmenis $\alpha_i, i = 0,1,..., m$, pasikliautinojo intervalo tikimybę β, optimalumo hipotezės tikimybę μ, normalizavimo daugiklius γ_i, π_i, maksimalų iteracijų skaičių *iter*. 2. Nustatyti pradinį nuoseklios paieškos tašką $x^0 = (x_1^0,..., x_n^0)$, $v^0 = (v_1^0,..., v_m^0)$, pradinį parametrų vektorių $\lambda^0 = (\lambda_1^0,..., \lambda_m^0)$, nustatyti iteracijų skaitliuką $t = 0$. 3. **While** iteracijų skaičius t neviršija *iter* **Do** 3.1 Generuoti Monte Karlo imtį $Z = (z^1, z^2,..., z^{N^0})$ (4.13). 3.2 Apskaičiuoti įvykių $\{v_i^t : f_i(x, z^j) \ge v_i^t\}$ dažnius N_i $i = 0,1,..., m$. 3.3 Apskaičiuoti tikslo funkcijos $\tilde{F}_0(x^t, v^t)$, ribojimų funkcijų $\tilde{F}_i(x^t, v^t)$ įverčius ir $\Pr_i = N_i / N$ (4.14). 3.4 Apskaičiuoti tikslo funkcijos dispersijos įvertį $\tilde{D}_0^2(x^t, v^t)$, ribojimų funkcijų dispersijų įverčius $\tilde{D}_i^2(x^t, v^t)$, $i = 1,..., m$ (4.15). 3.5 Apskaičiuoti Lagranžo funkcijos $\tilde{L}(x^t, \lambda^t, v^t)$ įvertį (4.16).

4.1 algoritmas. Sąlyginės rizikos (CVaR) optimizavimas
3.6 Apskaičiuoti tikslo funkcijos ir ribojimų funkcijų gradientų įverčius $\tilde{g}_0(x^t, v^t)$, $\tilde{g}_i(x^t, v^t)$ (4.17), Lagranžo funkcijos gradiento įvertį $q(x^t, \lambda^t, v^t)$ (4.18), $(\nabla_x L(x, \lambda, v) = q(x^t, \lambda^t, v^t))$. 3.7 Apskaičiuoti kovariacijos matricą $A(x^t, \lambda^t, v^t)$ (4.19). 3.8 Apskaičiuoti gradiento statistiką T^2 3.9 Patikrinti stabdymo sąlygą: **If** (4.22) & (4.23) &(4.24) & (4.25) **Then** grąžinti uždavinio sprendinį $x^* = x^t = (x_1^t, ..., x_n^t)$, $v^* = v^t = (v_1^t, ..., v_m^t)$, tikslo funkcijos reikšmę $F_0(x^t, v^t)$. **Else** nustatyti t=t+1 ir rasti kitą tašką $x^{t+1}, \lambda^{t+1}, v^{t+1}$ (4.20) bei Monte Karlo imties ilgį N^{t+1} (4.21.). 4. **Done.**

4.1.4. Algoritmo testavimas

Poskyryje 4.1.3 pateiktą algoritmą tirsime, įvedę (4.26) testines funkcijas

$$f_i(x, \zeta) = \max_{1 \le k \le k_n} \left(a_{0,k} + \sum_{j=1}^{n} a_{j,k} \cdot (x_j + \zeta_j) \right), \quad 0 \le i \le m, \tag{4.26}$$

kurios yra atkarpomis tiesinės funkcijos, čia funkcijų $f_i(x, \zeta)$ išraiškose esantys koeficientai $a_{0,k}$ ir $a_{j,k}$ generuojami atsitiktinai:

$$a_{j,k} = a'_{j,k} - \frac{1}{k_n} \cdot \sum_{k=1}^{k_n} a'_{j,k}, \quad a_{0,0} = \vartheta, \quad a_{1,0} = 1 + 3 \cdot \vartheta, \quad a'_{0,k} = 2\vartheta, \quad a'_{1,k} = \vartheta, \quad 1 \le k \le k_n,$$

$m = 0{,}1$, ϑ yra standartinis normalusis dydis (imties dydis $M = 100$). CVaR reikšmingumo lygmuo $\alpha_0 = \alpha_1 = 0{,}1$, CVaR ribojimų reikšmės ϕ_1 yra duotos 4.2 lentelėje. Nagrinėjami atvejai, kai kintamųjų skaičius n = 2, 5, 10, 20, 50.

4.2 lentelė. Testinių funkcijų duomenys ir optimizavimo rezultatai

n	v_0	v_1	ϕ_1	ε	k_n	Minimalus iteracijų skaičius	Maksimalus iteracijų skaičius	Vidutinis iteracijų skaičius
2	3,34	3,46	4,5	0,015	5	8	16	9,4
5	4,93	6,82	7	0,1	11	8	22	12,46
10	8,33	8,63	9	0,1	21	6	14	7,7
20	12,42	9,59	11,5	0,075	31	14	53	26,6
50	20,84	14,01	15	0,1	76	44	88	59,9

Reiktų pažymėti, kad pasirinkta testinių funkcijų klasė yra gana universali, nes bet kurią iškilą funkciją galima aproksimuoti (4.26) pavidalo funkcijomis paėmus pakankamai didelį skaičių k_n ir atitinkamai parinkus koeficientus $a_{j,k}$.

(4.7) uždavinys su (4.26) tikslo ir ribojimų funkcijomis buvo išspręstas taikant 4.1 algoritmą, kai kintamieji ζ_j pasiskirstę pagal normalųjį dėsnį N(0,0.5). 4.1 algoritmo stabdymo sąlygos tikrintos su tikimybe 0,95. Siekiant išvengti didelių imties tūrio, generuojamo pagal (4.21) svyravimų, generavimas būdavo nutraukiamas, kai tik pasikliovimo intervalai (4.24), (4.25) būdavo įvertinami reikiamu tikslumu ε, nurodytu 4.2 lentelėje.

Suvidurkinti (uždavinys spręstas 100 kartų) optimizavimo rezultatai pateikti 4.3 lentelėje, kai kurie taip pat nurodyti 4.2 lentelėje.

4.3 lentelėje pateiktos suvidurkintos sprendžiamo uždavinio charakteristikų priklausomybės nuo iteracijų skaičiaus (vidurkinimas atliktas, kartojant uždavinio sprendimą 100 kartų). Joje pateiktos vidutinių tikslo funkcijos ir CVaR tikimybių priklausomybės nuo iteracijų skaičiaus, iliustruojančios pasiūlytos procedūros konvergavimą. Pavyzdžiui, visi testiniai uždaviniai buvo išspręsti reikiamu tikslumu ε (nurodytu 4.2 lentelėje), t. y. algoritmas sustojo pagal kriterijus (4.22)–(4.25) po tam tikro iteracijų skaičiaus (žr. 4.3 lentelė) 4.2 lentelėje pateikti maksimalus, minimalus ir vidutinis iteracijų skaičius, reikalingas uždaviniui išspręsti reikiamu tikslumu ε. 4.3 lentelėje taip pat pateiktas algoritmo stabdymo (stabdymo sąlygų išpildymo) dažnis bei Hottelingo statistikos ir atitinkamo χ^2 skirstinio kvantilio santykio (šis santykis artėja į kritinę stabdymo reikšmę, lygią 1) kitimas, priklausomai nuo iteracijų skaičiaus. 4.3 lentelėje pateiktas kiekvienos iteracijos vidutinis Monte Karlo imties ilgis, rodantis imties adaptaciją optimizavimo procese. Gauti Monte Karlo simuliacijos rezultatai iliustruoja pasiūlytos (4.20) procedūros konvergavimą, reikiamu tikslumu sprendžiant stochastinio programavimo uždavinius, kuriuose CVaR įeina į tikslo funkciją ir ribojimus.

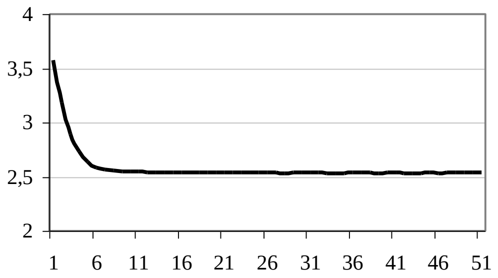
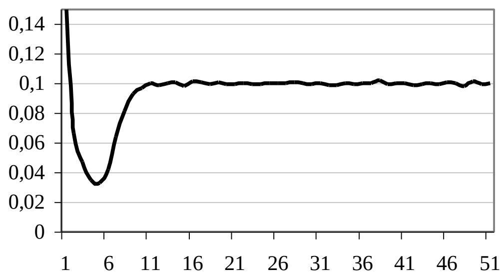
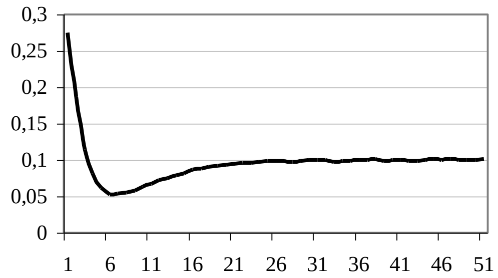
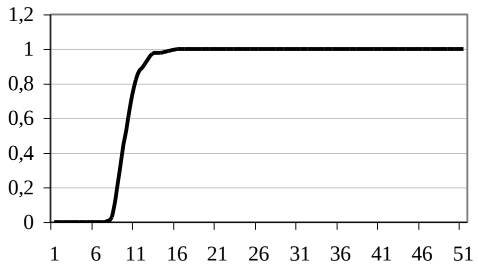
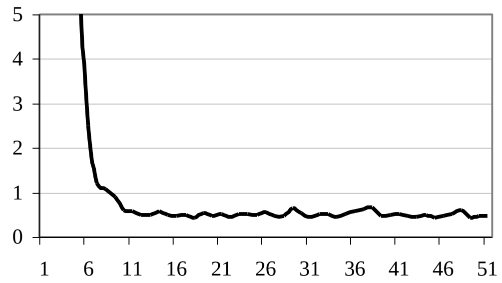
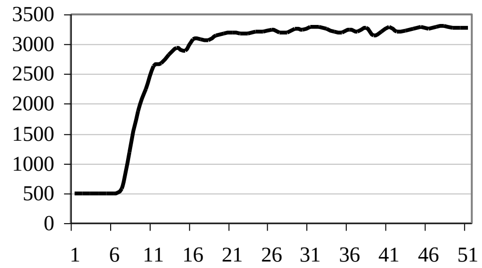
Akivaizdu, kad, sprendžiant didesniu tikslumu, reikės didesnio iteracijų skaičiaus ir Monte Karlo imties dydžio. Pavyzdžiui, kai kintamųjų skaičius 2 ir tikslumas $\varepsilon = 0{,}015$ reikėjo nemažiau iteracijų ir nemažesnio Monte Karlo imties dydžio, lyginant su tuo atveju, kai kintamųjų buvo 5 ir tikslumas $\varepsilon = 0{,}1$.

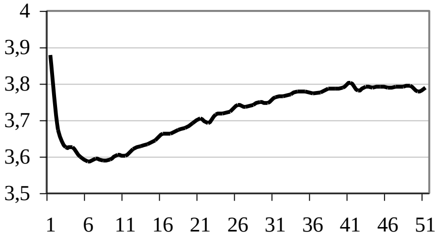
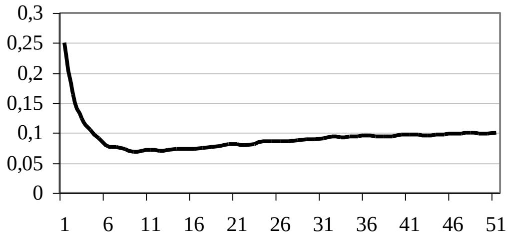
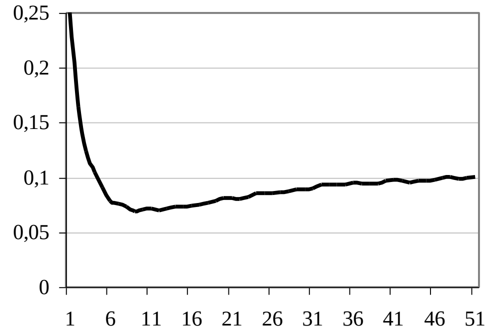
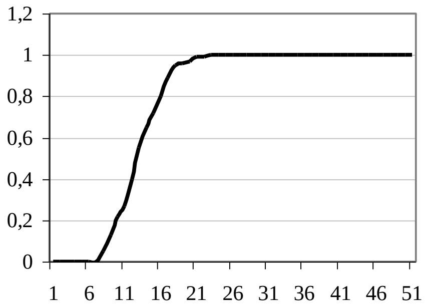
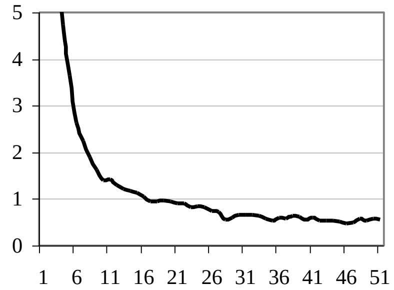
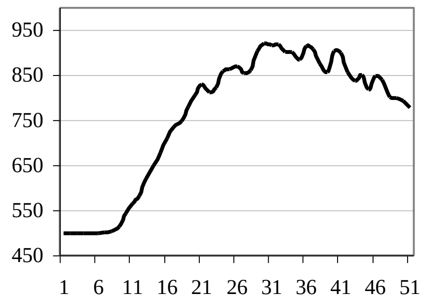
Sukurto algoritmo priklausomybė nuo funkcijos kintamųjų skaičiaus nebuvo tiriama. Tačiau galima pastebėti, kad didėjant kintamųjų skaičiui auga ir laikas, kuris reikalingas optimizavimo uždaviniui išspręsti.

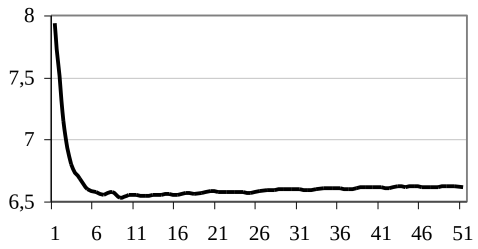
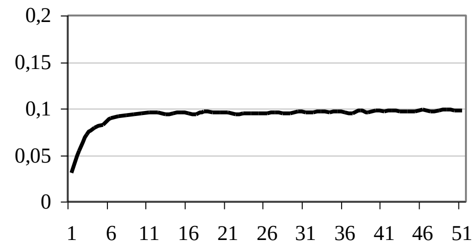
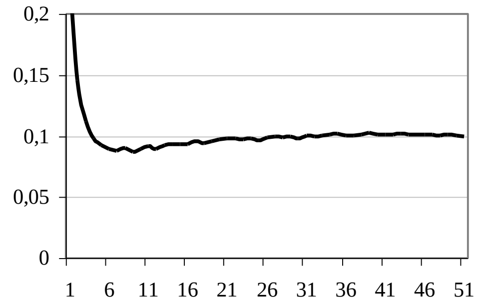
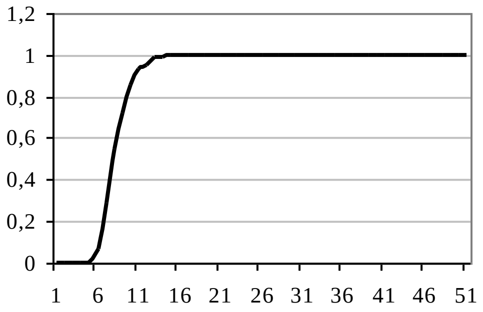
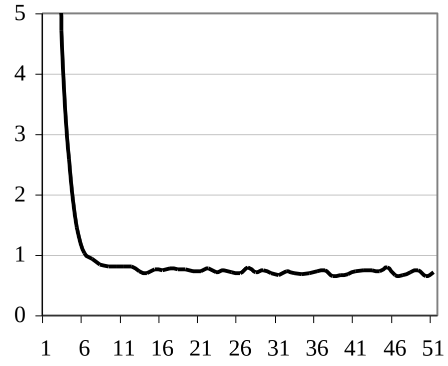
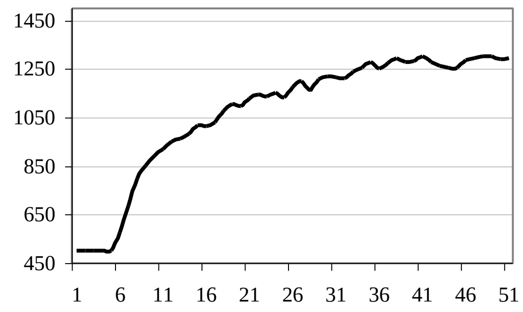
Pavaizduotų priklausomybių tyrimas leidžia stebėti sukurto algoritmo adaptacines savybes. Iš tikrųjų, iš (4.24) formulės matyti, kad pasikliovimo intervalo ilgis priklauso nuo tikslo funkcijos dispersijos. Kadangi atvejais, kai n=5, 50, pasitaikė tokios tikslo funkcijos, kurių dispersijos optimumo zonoje buvo mažesnės negu pradinėse iteracijose, t. y. šioje zonoje jos buvo lėkštos, tai ir sąlygojo imties tūrio sumažėjimą stabdymo momentu (žr. 4.3 lentelėje - Monte Karlo imties dydis). Šio fakto galima išvengti, reguliuojant maksimalią Monte Karlo imties dydžio reikšmę.

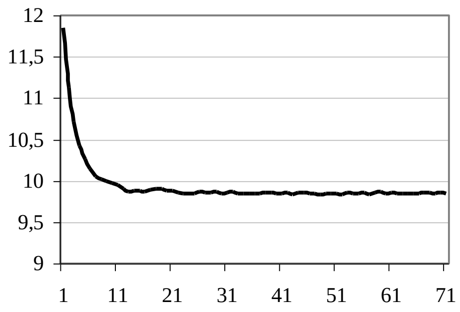
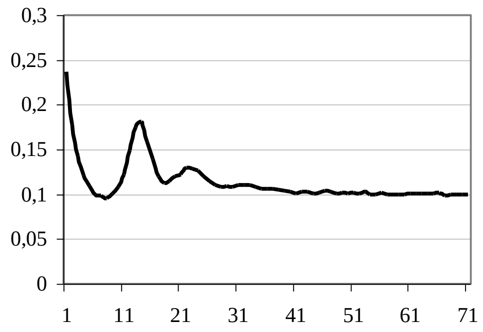
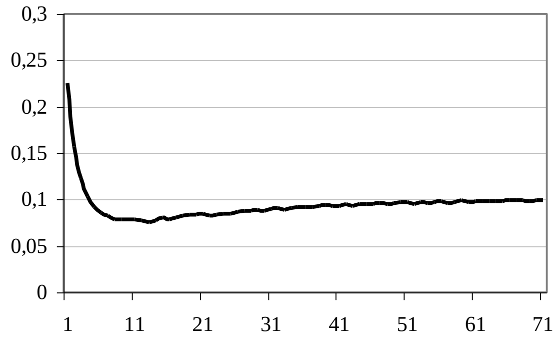
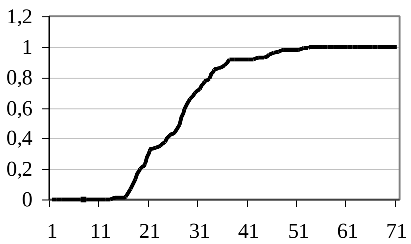
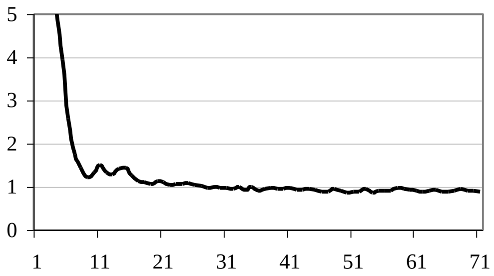
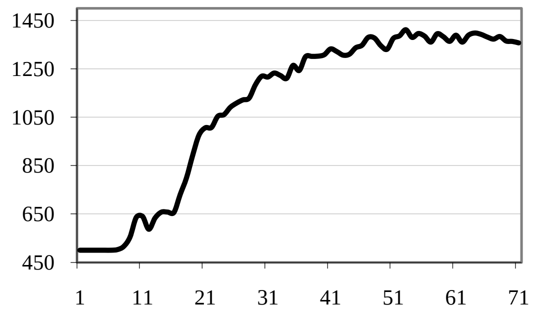
Modeliavimo rezultatai leidžia padaryti išvadą, jog duoto tikslumo sprendinį galima surasti, naudojant racionalius skaičiavimo resursus, t y., tikrinant algoritmo stabdymo sąlygą su tikimybe 0,95, CVaR skaičiuojant reikšmingumo lygmeniu 0,1, kai testinių funkcijų kintamųjų skaičius yra 2, 5, 10, 20, 50, vidutinis iteracijų skaičius kinta nuo ≈ 8 iki ≈ 60, o Monte Karlo imties dydis kinta nuo ≈ 950 iki ≈ 6000.

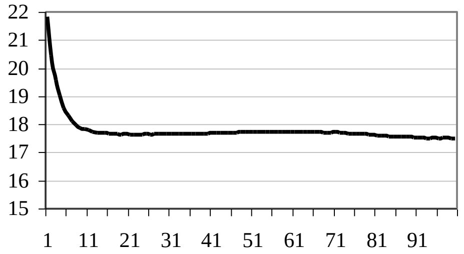
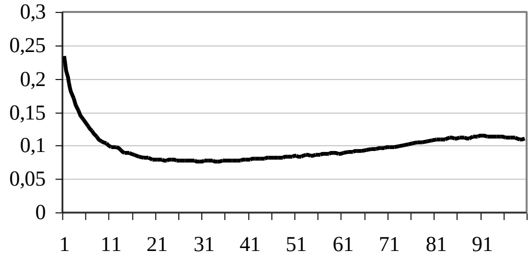
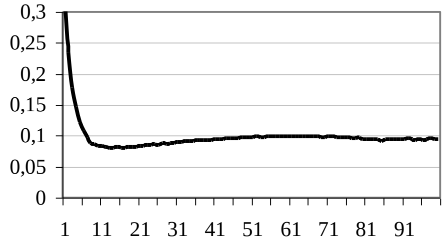
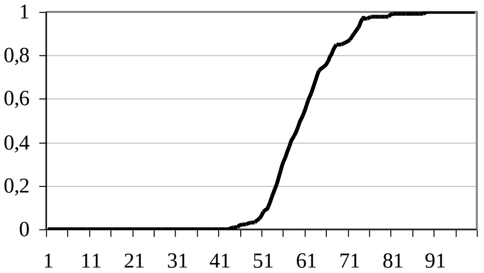
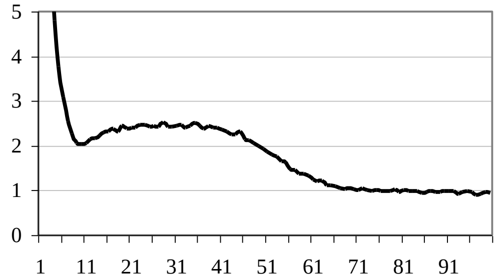
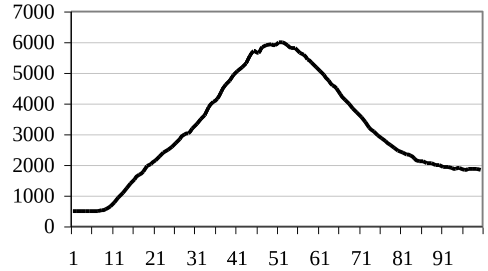
4. 3 lentelė. CVaR optimizavimo rezultatų grafikai, kai kintamųjų skaičius n yra lygus 2, 5, 10, 20, 50.

<table>
<tr><td colspan="3">Kintamųjų skaičius n=2</td></tr>
<tr><td>Tikslo funkcija</td><td>Dažniai Pr_0</td><td>Dažniai Pr_1</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Stabdymo dažnis</td><td>Hotellingo stabdymo kriterijus</td><td>Monte Karlo imties dydis</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">Kintamųjų skaičius n=5</td></tr>
<tr><td>Tikslo funkcija</td><td>Dažniai Pr_0</td><td>Dažniai Pr_1</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Stabdymo dažnis</td><td>Hotellingo stabdymo kriterijus</td><td>Monte Karlo imties dydis</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="3">Kintamųjų skaičius n=10</th></tr>
<tr><th>Tikslo funkcija</th><th>Dažniai Pr_0</th><th>Dažniai Pr_1</th></tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr><th>Stabdymo dažnis</th><th>Hotellingo stabdymo kriterijus</th><th>Monte Karlo imties dydis</th></tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">Kintamųjų skaičius n=20</td></tr>
<tr><td>Tikslo funkcija</td><td>Dažniai Pr_0</td><td>Dažniai Pr_1</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Stabdymo dažnis</td><td>Hotellingo stabdymo kriterijus</td><td>Monte Karlo imties dydis</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Kintamųjų skaičius n=50		
Tikslo funkcija	Dažniai Pr_0	Dažniai Pr_1
		
Stabdymo dažnis	Hotellingo stabdymo kriterijus	Monte Karlo imties dydis
		

4.2. Reikšmingų imčių metodas dviejų etapų tiesiniam stochastiniam uždaviniui

Statistinis modeliavimas dažniausiai taikomas stochastiniam programavimui, kai žinomi atsitiktinių parametrų tikimybiniai skirstiniai. Statistinio įverčio pasikliovimo intervalo ilgis (2.11) priklauso nuo dispersijos. Vadinasi, sumažinti pasikliovimo intervalo ilgį, reikia mažinti dispersiją. Viena iš dispersijos mažinimo ir kartu scenarijų skaičiaus mažinimo priemonių – reikšmingų imčių metodas (žr. poskyrį 2.5.2), kuris remiasi tuo, kad tam tikros atsitiktinio kintamojo reikšmės daro didesnę įtaką parametrui, kurį norime įvertinti (Bucklew, 2004; Changhe ir Druzdzel, 2006; Kurtz ir Song, 2013). Jei „reikšmingos“ reikšmės dažniau parenkamos imtyje, tai įverčio dispersija gali būti sumažinta. Vadinasi, vadovaujantis reikšmingų imčių metodologija reikia parinkti tokį pasiskirstymą, kuris „padažnintų“ svarbias reikšmes. Realizuojant reikšmingų imčių metodą modeliavime, pagrindinė problema yra „reikšmingo“ pasiskirstymo toks parinkimas, kad generuojamos kintamųjų reikšmės patektų į reikšmingas sritis.

4.2.1. Stochastinio programavimo tobulinimas, taikant reikšmingų imčių metodą

Tarkime, kad reikia minimizuoti tam tikrą tikimybinę tikslo funkciją $F(z)$ (tikėtini kaštai, tikėtinas laikas ir pan.):

$$F(x) \equiv Ef(x,\omega) \to \min_{x \in D \subset \Re^n} . \tag{4.27}$$

Čia $\omega \in \Omega$ yra elementarusis įvykis iš tikimybinės erdvės (Ω, Σ, P_x); funkcija $f : \Re^n \times \Omega \to \Re$ tenkina tam tikrus integruotumo, diferencijuotumo ir iškilumo reikalavimus; $D \subset \Re^n$ yra leistinų sprendinių aibė; P_x yra tikimybinis matas, kuris absoliučiai tolydus ir, apskritai, priklauso nuo x, t. y. jis gali būti apibrėžtas tankio funkcija $p : \Re^n \times \Omega \to \Re_+$; E yra matematinės vilties simbolis.

Esant tokioms tikslo funkcijos prielaidoms, nagrinėjamas uždavinys užrašomas kartotiniu integralu:

$$F(x) \equiv \int_{\Omega} f(x,s)p(x,s)ds \tag{4.28}$$

Įveskime atsitiktinį vektorių, jį apibrėždami tankio funkcija $\varphi : \Re^m \times \Omega \to \Re_+$, kuri priklauso nuo determinuotų parametrų $y \in \Re^m$ vektoriaus (jo parinkimą aptarsime vėliau). Dabar (4.28) tikslo funkcija tampa vidurkiu naujo atsitiktinio vektoriaus atžvilgiu:

$$F(x) \equiv \int_{\Omega} f(x,s) \cdot q(x,y,s) \cdot \varphi(y,s)ds. \tag{4.29}$$

Čia: $q(x,y,s) = \dfrac{p(x,s)}{\varphi(y,s)}$, $\varphi(y,s) > 0 \quad s \in \Omega$. Atsitiktinės funkcijos po (4.29) integralu antrasis momentas yra:

$$D(x,y) = \int_{\Omega} \left(f(x,s) \cdot q(x,y,s) \right)^2 \cdot \varphi(y,s)ds = \int_{\Omega} \frac{\left(f(x,s) \cdot p(x,s) \right)^2}{\varphi(y,s)} ds. \tag{4.30}$$

Lengva įsitikinti, kad atsitiktinės funkcijos po (4.29) integralu dispersija $M(x,y) - F(x)^2$ mažėja, jei antrasis momentas (4.30) mažėja. Vadinasi, keičiant (4.30)-oje kintamąjį y, galima sumažinti dispersiją, taigi idėja – optimizuoti y parinkimą (žr. poskyrį 2.5.2)

Tuo tikslu sprendžiamas ***dviejų lygių stochastinis optimizavimo uždavinys*** (žr. (2.1), (2.2)):

$$F(x) \equiv \int_{\Omega} f(x,s) \cdot q(x,y,s) \cdot \varphi(y,s)ds \to \min_{x \in D \subset \Re^n}, \tag{4.31}$$

$$D(x,y) \equiv \int_{\Omega} \left(f(x,s) \cdot q(x,y,s) \right)^2 \cdot \varphi(y,s)ds \to \min_{y}. \tag{4.32}$$

Čia pirmasis uždavinys yra lyderio, o antrasis – pasekėjo uždavinys (Christiansen ir kt., 2001).

Nagrinėkime, pavyzdžiui, dviejų etapų tiesinį stochastinį uždavinį:

$$\begin{gathered} F(x) = c \cdot x + E\left\{ \min_r [a \cdot r \mid W \cdot r + T \cdot x \le h, \quad r \in R_+^m] \right\} \to \min, \\ Ax = b, \quad x \in \Re_+^n, \end{gathered} \tag{4.33}$$

Čia matricos W, T, A ir vektoriai c, a, h, b yra atitinkamų matavimų, h vektorius yra atsitiktinis daugiamatis normalusis $N(\tau, \Sigma)$, τ yra vidurkių vektorius, Σ yra kovariacijos matrica. Vektoriaus, kuris pasiskirstęs pagal

$N(y,\Sigma),$ tankio funkciją pažymėkime $\varphi(\cdot,y)$. Tarkime, kad vidurkių vektorius y tankio funkcijoje $\varphi(\cdot,y)$ yra keičiamas dispersijai sumažinti. Pažymėkime

$$f(x,h) = \min_{\substack{W\cdot r+T\cdot x\le h \\ r\in R_+^m}} a\cdot r. \tag{4.34}$$

Po nesudėtingų pertvarkymų turime:

$$F(x) \equiv c\cdot x + \int_\Omega f(x,h)\cdot q(y,h)\cdot \varphi(h,y)dh \tag{4.35}$$

čia

$$q(y,h) = \frac{p(h,\tau)}{\varphi(h,y)} = \exp\left(-(\tau-y)^T\cdot\Sigma^{-1}\cdot(\tau+y-2h)\right). \tag{4.36}$$

Atitinkamai:

$$D(x,y) = \int_\Omega \frac{\left(f(x,h)\cdot p(h,\tau)\right)^2\cdot}{\varphi(h,y)}dh. \tag{4.37}$$

Lengva įsitikinti, kad (4.37) gradientas parametrų vektoriaus y atžvilgiu yra:

$$\begin{aligned} H(x,y) &= \frac{\partial D(x,y)}{\partial y} = \int_\Omega (h-y)\cdot\Sigma^{-1}\cdot d(x,y,h)\cdot\varphi(h,y)dh = \\ &= E(h-y)\cdot\Sigma^{-1}\cdot d(x,y,h), \end{aligned} \tag{4.38}$$

čia

$$d(x,y,h) = \left(f(x,h)\cdot p(h,\tau)\right)^2\cdot\frac{d\varphi(h,y)}{dy}. \tag{4.39}$$

Nesunku įsitikinti, jog (4.33) tikslo funkcijos gradientas pagal x gali būti taip pat išreikštas tam tikros vektorinės funkcijos matematine viltimi. Iš tikrųjų, pagal tikslo funkcijos dualumą ji gali būti išreikšta taip:

$$F(x) = c\cdot x + E\left\{\max_e[(h-T\cdot x)\cdot e \,|e\cdot W^T + a \ge 0, \quad e\in R_+^d]\right\}.$$

Pagal matematinės vilties diferencijavimo taisykles ir maksimumo savybes (Rubinstein ir Melamed, 1998; Sakalauskas, 2002, 2004) galima įsitikinti, kad tikslo funkcijos gradientas yra lygus matematinei vilčiai:

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x} = Eg(x,h) \tag{4.40}$$

čia

$$g(x,h) = c - T\cdot e^*, \tag{4.41}$$

o e^* yra dualaus tiesinio uždavinio:

$$(h - T \cdot x)^T \cdot e^* = \max_e [(h - T \cdot x)^T \cdot e \mid e \cdot W^T + a \geq 0, \quad e \in R_+^d]$$

sprendinys.

4.2.2. Monte Karlo reikšmingų imčių metodas stochastiniam programavimui

Apibrėžkime Monte Karlo įverčius ir iteracinę procedūrą (4.33) stochastinio programavimo uždavinio sprendimui reikšmingų imčių metodu. Tarkime, kad bet kuriam leistinam sprendiniui $r \in D \subset R^n$ galima sugeneruoti tam tikro dydžio *N* Monte Karlo imtį:

$$Z = (z^1, z^2, ..., z^N), \tag{4.42}$$

čia z^j, $1 \leq j \leq N$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai vektoriai, kurių tankis $p(h,\cdot y)$. Įverčiai, naudojant šią imtį, apskaičiuojami pagal (4.43), (4.44) ir (4.45) (žr. (2.9), (2.10)):

$$\tilde{F}(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} f^j, \tag{4.43}$$

$$\tilde{G}(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} g^j, \tag{4.44}$$

$$\tilde{H}(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} (z^j - y) \cdot \Sigma^{-1} \cdot d^j. \tag{4.45}$$

Čia pažymėta: $f^j = f(x, z^j)$, $g^j = g(x, y, z^j) = g(x, z^j) \cdot q(y, z^j)$, $d^j = d(x, y, z^j)$, $1 \leq j \leq N$.

Tarkime, pradinė aproksimacija $x^0 \in \Re^n$, $y^0 = \tau$, pradinis imties dydis N^0 yra duoti, o atsitiktinė seka $\{x^t, y^t, N^t\}_{t=0}^{\infty}$ yra apibrėžta taip:

$$x^{t+1} = x^t - \rho \cdot \tilde{G}_\varepsilon(x^t, y^t), \tag{4.46}$$

$$y^{t+1} = y^t - \alpha \cdot \tilde{H}(x^t, y^t), \tag{4.47}$$

$$N^{t+1} = \frac{1}{b^t} \cdot N.^t \tag{4.48}$$

Čia $\widetilde{G}_{\varepsilon}(x^t, y^t)$ yra stochastinio gradiento ε-projekcija į leistiną aibę (žr. apibrėžimą – Sakalauskas ir Žilinskas, 2008), $\rho > 0$, $\alpha > 0$, $b^t > 0$ yra tam tikri metodo parametrai.

Galima įrodyti, kad (4.46) – (4.48) tipo procedūros konverguoja beveik tikrai (b. t.) į stochastinio optimizavimo arba stochastinės paieškos uždavinio sprendinį, atitinkamai parinkus metodo parametrų reikšmes (žr. Sakalauskas, 2002, 2004). Pastebėsime, kad Monte Karlo imties dydžio pagal (4.48) parinkimas leidžia išspręsti uždavinį, atliekant priimtiną skaičiavimų kiekį ir, sukonstruoti statistines algoritmo stabdymo taisykles, pasiremiant Monte Karlo įverčių asimptotiniu Gauso konvergavimu (Sakalauskas, 2002; Sakalauskas ir Žilinskas, 2008). Iš tikrųjų, iteracinis procesas gali būti stabdomas patikrinus statistinę hipotezę apie tikslo funkcijos gradiento lygybę nuliui, kai lošėjų tikslo funkcijų įverčių pasikliovimo intervalai tampa reikiamo dydžio.

Dviejų etapų tiesinio stochastinio programavimo uždavinio sprendimo reikšmingų imčių metodu eiga nusakoma 4.2 algoritmu. Šis algoritmas pateiktas 4.4 lentelėje.

4.4 lentelė. Reikšmingų imčių algoritmas dviejų etapų tiesinio stochastinio programavimo uždaviniui

4.2 algoritmas. Dviejų etapų tiesinio stochastinio programavimo uždavinio sprendimas reikšmingų imčių metodu

Tikslas: rasti dviejų etapų tiesinio stochastinio programavimo uždavinio sprendinį ir tikslo funkcijos reikšmę.

Pradinės sąlygos: dviejų etapų tiesinio stochastinio programavimo uždavinio formalizuotas aprašymas.

Galinės sąlygos: dviejų etapų tiesinio stochastinio programavimo uždavinio sprendinio vektorius $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, tikslo funkcijos optimali reikšmė $F(x^*)$.

1. Surašyti uždavinį apibūdinančius parametrus: pirmojo ir antrojo etapų kintamųjų ir ribojimų skaičius n_1, m_1, n_2, m_2, pradinį Monte Karlo imties N^0 ilgį, tikslo funkcijos tikslumą ε, pasikliautinojo intervalo tikimybę β, optimalumo hipotezės tikimybę $1-\mu$, maksimalų iteracijų skaičių *iter,* nurodyti metodo parametrus $\rho > 0, \quad \alpha > 0, \quad b^0 > 0.$
2. Inicializuoti uždavinio koeficientų matricas A, W, T bei vektorius a, b, h, τ, σ.
3. Nustatyti pradinį gradientinės paieškos tašką $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ determinuotam uždavinio analogui, kai atsitiktiniai dydžiai h pakeičiami jų vidurkiais τ, t. y. $h_i = \tau_i, i = 1,2,..., m_1$. Nustatyti iteracijų skaitliuką $t = 0$ bei $y^0 = \tau$.
4. Patikrinti ar pradinis taškas yra leistinas:

   4.1. Patikrinti pirmojo etapo uždavinio ribojimus $Ax = b$ pradiniam taškui $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_{n_1}^0)$.

   4.2. **If** pradinis taškas netenkina ribojimų **Then** suprojektuoti tašką į ribojimų sritį.
5. **While** iteracijų skaičius t neviršija *iter* **Do**

4.2 algoritmas. Dviejų etapų tiesinio stochastinio programavimo uždavinio sprendimas reikšmingų imčių metodu

5.1. Patikrinti ribojimus apskaičiuotame taške $x^t = (x_1^t, x_2^t, ..., x_{n_1}^t)$.

5.2. Generuoti Monte Karlo imtį $Z = (z^1, z^2, ..., z^{N^0})$ pagal tikimybinį tankį $p(h, y^t)$ (4.42).

5.3. Apskaičiuoti tikslo funkcijos $\tilde{F}(x^t, y^t)$ (4.43) ir gradiento $\tilde{G}(x^t, y^t)$ (4.44) įverčius, apskaičiuoti $\tilde{H}(x^t, y^t)$ (4.45). Apskaičiuoti tikslo funkcijos dispersijos įvertį $\tilde{D}(x^t, y^t)$.

5.4. Suprojektuoti gradientą $\tilde{G}(x^t, y^t)$ $\varepsilon -$leistinąja kryptimi: $\tilde{G}_\varepsilon(x^t, y^t)$.

5.5. Apskaičiuoti T^2 statistiką, Fišerio skirstinio kvantilį $Fish(\mu, n_1, N^t - n_1)$.

5.6. Patikrinti stabdymo sąlygą:

If $T^2 \le Fish(\mu, n_1, N^t - n_1) \,\&\, \eta_\beta \tilde{D}(x^t, y^t)/\sqrt{N^t} \le \varepsilon$ **Then**

grąžinti uždavinio sprendinį $x^* = x^t = (x_1^t, x_2^t, ..., x_n^t)$ ir tikslo funkcijos reikšmę $F(x^t)$.

Else

Nustatyti $t = t + 1$. Apskaičiuoti x^{t+1} (4.46), y^{t+1} (4.47), N^{t+1} (4.48).

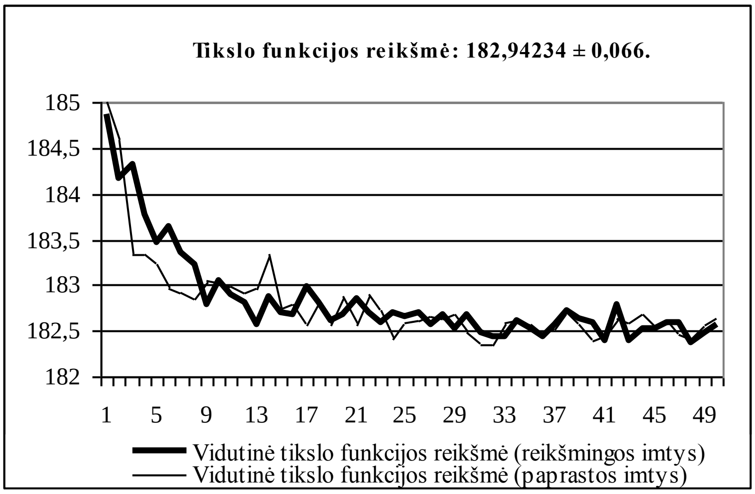
6. **Done**.

4.2.3. Reikšmingų imčių metodo tyrimas

Ištirsime reikšmingų imčių metodą, spręsdami dviejų etapų stochastinį tiesinį optimizavimo uždavinį. Spręsime uždavinį, kurio sprendimo rezultatai, netaikant reikšmingų imčių metodo, jau yra žinomi. Uždavinio matavimai yra tokie: pirmame etape yra 10 eilučių (ribojimų) ir 20 kintamųjų, antrame etape yra 20 eilučių (ribojimų) ir 30 kintamųjų. Tikslo funkcijos įvertis, pateiktas L.

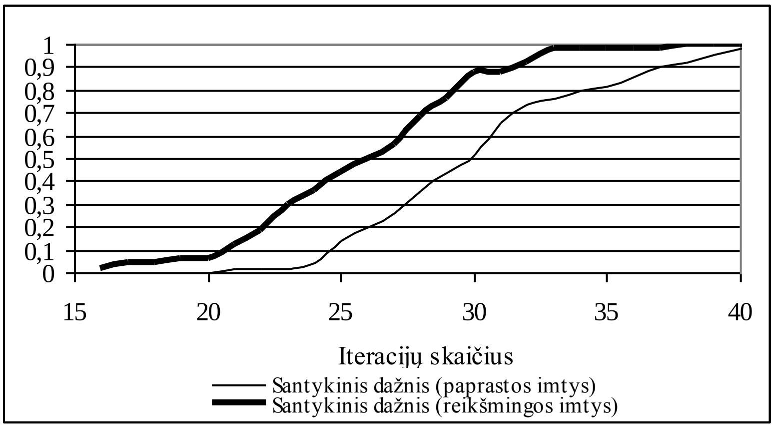
Sakalausko ir K. Žilinsko darbe (2008), yra 182,94234 ± 0,066. Uždavinio duomenis pateikiame priedo 1–5 lentelėse.

Duotas uždavinys buvo spręstas 50 kartų sukurtuoju reikšmingų imčių metodu ir palyginimui klasikiniu metodu su tokiomis parametrų reikšmėmis: $\rho = 0{,}0005, \alpha = 0{,}1,$ b^t buvo parinktas pagal (Sakalauskas ir Žilinskas, 2008) aprašytą būdą. Buvo fiksuojamas iteracijų skaičius, kai stabdymo sąlygos būdavo pirmą kartą patenkintos (statistinė hipotezė apie tikslo funkcijos gradiento lygybę nuliui neatmetama ir tikslo funkcijos įverčio pasikliovimo intervalo ilgis neviršija priimtinos reikšmės $\varepsilon = 2$). Vidutinės tikslo funkcijos reikšmės, taikant sukurtąjį reikšmingų imčių metodą ir klasikinį metodą, parodytos 4.1 pav. 4.2 pav. parodytas iteracijų skaičiaus, reikalingo algoritmo stabdymo sąlygoms pasiekti, dažnis.



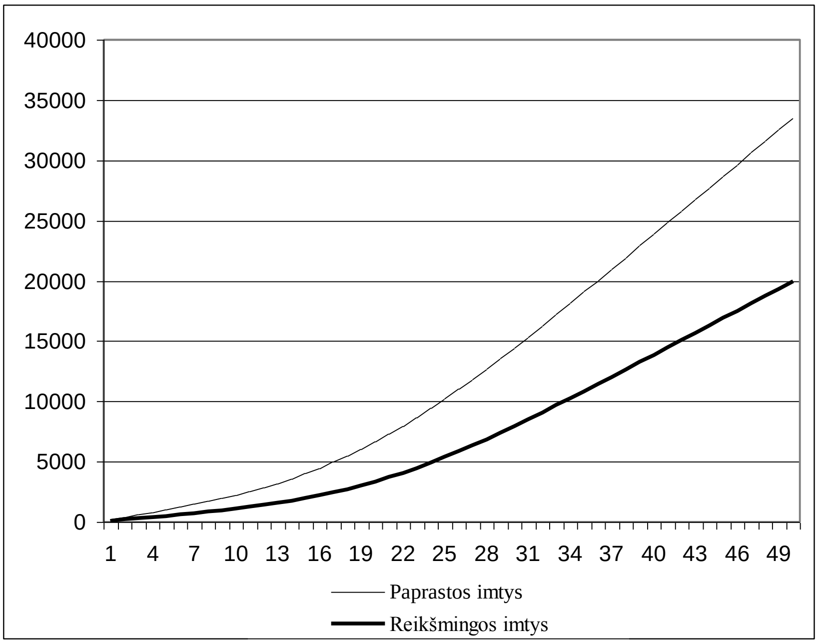
4.1 pav. Vidutinės reikšmės

Iš 4.1 pav. matyti, kad, sprendžiant dviejų etapų stochastinį tiesinį uždavinį reikšmingų imčių metodu ir klasikiniu metodu, tikslo funkcija optimumo aplinkoje elgiasi panašiai.



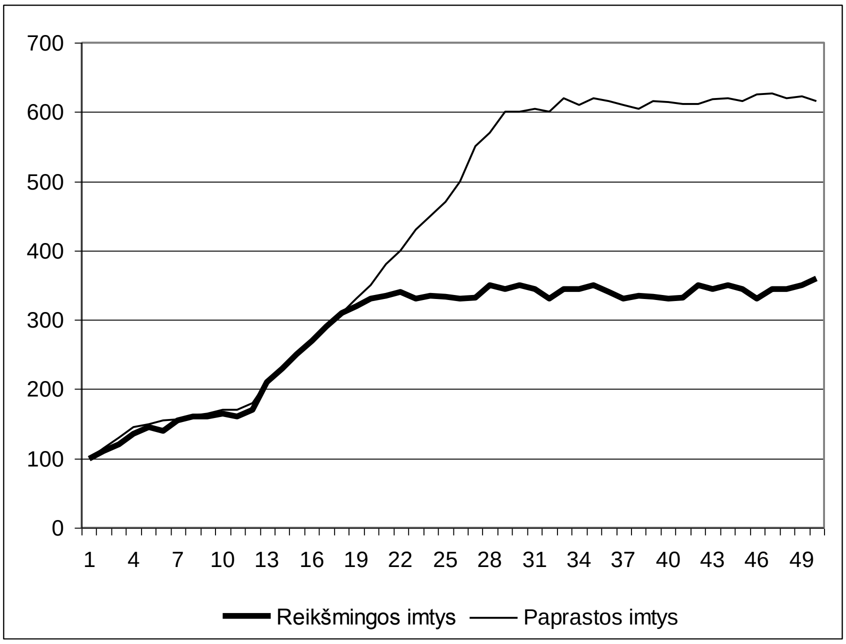
4.2 pav. Iteracijų skaičiaus, reikalingo uždaviniui išspręsti, santykinis dažnis

Tačiau iš 4.2 pav. matyti, kad reikšmingų imčių metodas leidžia 15-20% sumažinti iteracijų skaičių, reikalingą sprendiniui surasti.



4.3 pav. Bendras Monte Karlo bandymų skaičius

4.3 pav. yra pavaizduotas bendras Monte Karlo bandymų skaičius, reikalingas stabdymo sąlygoms pasiekti, priklausomai nuo iteracijų skaičiaus. Matome, kad reikšmingų imčių metodu reikia *beveik du kartus* mažiau Monte Karlo bandymų skaičiaus palyginus su standartiniu algoritmu.



4.4 pav. Monte Karlo imties dydis

4.4 pav. pavaizduotas vidutinis Monte Karlo imties dydis kiekvienoje iteracijoje. Iš čia matyti, kad reikšmingų imčių metodui užtenka *beveik dvigubai mažesnio* imties dydžio uždaviniui išspręsti duotu tikslumu.

Skyriaus išvados

1. Uždaviniai, kuriuose rizikos matas (CVaR) įeina į tikslo funkciją ir ribojimus, priklauso stochastinių dviejų lygių programavimo uždavinių klasei. Sukurtas algoritmas tokiems uždaviniams spręsti, generuojant reguliuojamo dydžio Monte Karlo imtis. Testiniu uždaviniu ištirta sukurto algoritmo elgsena bei algoritmo stabdymas pagal statistinius kriterijus.

2. Sprendžiant stochastinį tiesinį dviejų etapų uždavinį reikšmingų imčių metodu gaunamas dviejų lygių stochastinis uždavinys. Taikant pasiūlytą procedūrą tokiam uždaviniui spręsti, nustatyta, kad reikšmingų imčių metodas leidžia *beveik du kartus* sumažinti Monte Karlo bandymų skaičių, reikalingą uždaviniui išspręsti duotu tikslumu.

5 skyrius. **Stochastinės Nešo pusiausvyros paieška**

Stochastinės Nešo pusiausvyros uždavinius tenka spręsti daugelyje žmogaus veiklos sričių, kuriose reikia rasti pusiausvyrą, t. y. tokią situaciją, kurioje kiekvienas lošėjas, vienpusiškai keisdamas strategiją (kai kiti lošėjai laikysis tos situacijos strategijų), atsidurs blogesnėje padėtyje, esant vienokios ar kitokios rūšies neapibrėžtumui. Jei reikia rasti ekstremalias (minimalias ar maksimalias) kelių funkcijų, kurios priklauso nuo tų pačių determinuotų kintamųjų ir atsitiktinio kintamojo reikšmių, reikšmes, tai tas funkcijas galima laikyti lošėjų naudingumo funkcijomis, o kintamuosius – lošėjų strategijomis. Strategijos, prie kurių pasiekiamos ekstremalios šių funkcijų (kiekviena funkcija optimizuojama pagal vieną kintamąjį) reikšmės, yra stochastinės Nešo pusiausvyros strategijos.

Šiame skyriuje tiriama stochastinė Nešo pusiausvyra, jos suradimui pasiūlytas gradientinės paieškos algoritmas. Šis algoritmas pritaikytas elektros tiekimo su išankstiniais sandoriais rinkos modelio stochastinės Nešo pusiausvyros paieškai.

Skyriaus rezultatai pristatyti ir aptarti mokslinėje kompiuterininkų konferencijoje „Kompiuterininkų dienos 2013“. Šie rezultatai publikuoti V. Dumskis, L. Sakalauskas (2014).

5.1. Stochastinė Nešo pusiausvyra

Nešo pusiausvyrą galima nagrinėti dviem požiūriais: kaip patarimą lošėjams ir kaip prognozę. Jeigu Nešo pusiausvyra tiriama kaip patarimas, tai bet koks nurodymas, kuris nėra pusiausvyra, kažkuriam lošėjui bus blogas. Taigi, bet kuris patarimas lošėjui turi būti geriausias jo atsakas tiems, kuriems jau patarta. Šis požiūris tinka tuo atveju, kai norima nuspėti „visiškai racionalių“ ir gebančių apskaičiuoti bei įvertinti savo pozicijas, lošėjų elgesį. Tokiu būdu jie gali duoti sau atitinkamą patarimą. Kada siekiama prognozuoti, tai Nešo pusiausvyra gali būti suprantama kaip dinaminio proceso, kuriame lošėjai adaptuoja savo elgesį pagal kitų dalyvių veikimo būdą, tam tikras stabilus – geriausią rezultatą duodantis taškas. Šis požiūris populiarus biologijos moksle, kai tiriama populiacijos dinamika. Čia jokių prielaidų apie racionalumą nedaroma: yra tik savo interesų siekimas. Šis evoliucinis požiūris taikomas ir ekonomikoje (Hoffbauer ir Sigmund, 1988; Maynard Smith, 1974).

Stochastiniu atveju reikia priimti sprendimą, nežinant konkrečios atsitiktinių dydžių realizacijos. Kad, priimant sprendimą, būtų gauta Nešo pusiausvyra, reikia atsižvelgti į visus įmanomus neapibrėžtumo realizacijos scenarijus, nes stochastinės Nešo pusiausvyros uždaviniuose tikslo funkcija ir/ar ribojimai yra susiję su atsitiktinių dydžių įverčiais. Pavyzdžiui, ribojimai gali reikšti atitinkamoms prekėms ateities poreikius $h(\xi)$, priklausančius nuo atsitiktinių veiksnių ξ, ir kurių reikšmės, priimant sprendimą, nėra žinomos. Tokiu atveju galima siekti pusiausvyros, kurioje kiek įmanoma daugiau lošėjų išlošia beveik tikrai arba kurioje lošėjų laukiami išlošiai patenka į tam tikrą intervalą.

Jei visi atsitiktiniai dydžiai yra diskretieji, tai duotą uždavinį galima performuluoti kaip determinuotą, galbūt labai didelio matavimo, ir Nešo pusiausvyros paieškai pritaikyti žinomus deterministinius algoritmus. Bet, jei atsitiktiniai dydžiai apibrėžiami absoliučiai tolydžiomis tankio funkcijomis, tai rasti Nešo pusiausvyrą minėtu būdu negalima. Stochastinės Nešo pusiausvyros uždavinio sprendimui pageidautina turėti algoritmus, kurie labiau tiktų esant galimų scenarijų įvairiam neapibrėžtumui.

5.2. Stochastinės Nešo pusiausvyros uždavinys

Bendru atveju (5.1) uždavinį (Sakalauskas, 2000) galima nagrinėti kaip netiesinės Nešo pusiausvyros uždavinį:

$$F_j(x_1, x_2, ..., x_n) = Ef_j(x_1, x_2, ..., x_n, \xi) \to \min_{x_j \in D_j \subset R^{n_j}} . \tag{5.1}$$

Čia $\xi \in \Omega$ yra elementarusis įvykis tikimybinėje erdvėje (Ω, Σ, P_x), funkcijos $f_j : \Re^n \times \Omega \to \Re$ tenkina tam tikras integruotinumo, diferencijuotinumo bei iškilumo sąlygas, matas P_x yra absoliučiai tolydus ir gali priklausyti nuo *x*, t.

y., jis apibrėžiamas įvedus tankio funkciją $p : \Re^n \times \Omega \rightarrow \Re_+$, E – matematinės vilties simbolis.

Jei atsitiktiniai vektoriai (5.1) išraiškoje yra diskretieji, agentų tikslo funkcijas $F_j(x)$ galima apskaičiuoti kaip funkcijų $f_j(x,\cdot)$ vidurkius ir išspręsti (5.1) uždavinį kaip netiesinio programavimo uždavinį (dažniausiai labai didelį) (Ermolyev ir Wets, 1988).

Sprendžiant (5.1) tipo uždavinius, kai atsitiktiniai kintamieji yra tolydieji, dažniausiai daroma prielaida, kad kiekviename taške $x \in D \subset \Re^n_+$ galima konstruoti baigtines atsitiktinio dydžio ξ realizacijų sekas (čia $D = D_1 \otimes D_2 \otimes ... \otimes D_m \in \Re^n$) bei apskaičiuoti atitinkamas funkcijų f_j ir jų gradientų reikšmes šioms realizacijoms. Po to Monte Karlo metodu nesunku įvertinti (5.1) uždavinio tikslo funkciją ir jos gradientą, kurie išreiškiami matematinėmis viltimis.

Tarsime, kad galima sukonstruoti tam tikro ilgio *N* Monte Karlo imtį:

$$Z = (z^1, z^2, ..., z^N), \tag{5.2}$$

čia z^k yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, vienodai pasiskirstę su tankiu $p(x,\cdot) : \Omega \rightarrow \Re_+$, $x \in D \subset \Re^n$. Dabar galima įvesti tokius tikslo funkcijų ir jų dispersijų imties įverčius (žr. (2.9), (2.10)):

$$\tilde{F}_j(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f_j(x, z^k), \qquad x \in D \subset \Re^n, \quad 1 \le j \le n, \tag{5.3}$$

$$\tilde{D}_j^2(x) = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^{N} (f_j(x, z^k) - \tilde{F}_j(x))^2 \qquad x \in D \subset \Re^n, \quad 1 \le j \le n. \tag{5.4}$$

Pasinaudojus vidurkio diferencijavimo taisyklėmis (žr. Sakalauskas, 2002), tikslo funkcijų gradientus dažnai galima įvertinti su ta pačia (5.2) Monte Karlo imtimi be esminių papildomų skaičiavimų:

$$\tilde{g}_j(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} g_j(x, z^k), \qquad x \in D \subset \Re^n, \qquad 1 \le j \le n. \tag{5.5}$$

Pasinaudojus (5.2) Monte Karlo imtimi, taip pat galima apskaičiuoti kovariacinę matricą:

$$A(x) = \frac{1}{N-n}\sum_{k=1}^{N}(g(x,z^k) - \tilde{g}(x)) \cdot (g(x,z^k) - \tilde{g}(x))^T \ . \qquad (5.6)$$

Kovariacinė matrica toliau bus reikalinga sprendinio tikslumui vertinti, čia pažymėta $g(x,z^k) = (g_1(x,z^k,..., g_n(x,z^k))$, $\tilde{g}(x) = (\tilde{g}_1(x),...,\tilde{g}_n(x))$.

5.2. Gradientinės paieškos metodas

Pasinaudojus lošėjų tikslo funkcijų bei jų gradientų Monte-Karlo įverčiais, galima sukonstruoti stochastinę Nešo pusiausvyros radimo procedūrą. Tarkime, yra duotas tam tikras pradinis artinys $x^0 \in D \subset \Re^n$, šiame taške yra sugeneruota tam tikro pradinio ilgio N^0 Monte Karlo imtis (5.2), ir apskaičiuoti atitinkami įverčiai (5.3), (5.4), (5.5), (5.6) šiai imčiai. Tuomet stochastinės pusiausvyros paieška, kuri yra paremta gradientais, konstruojama iteraciniu būdu:

$$x_j^{t+1} = x_j^t - \rho_j \cdot \tilde{g}_j(x^t). \qquad (5.7)$$

Čia $\rho_j > 0$ yra tam tikri daugikliai, reguliuojantys gradientinio žingsnio ilgį, $1 \le j \le n$. Žingsnio ilgis gali būti nustatomas eksperimentiniu keliu.

(5.7) procedūroje parenkama tam tikro ilgio (5.2) imtis. Klausimas – kokio ilgio turi būti ši imtis? Kartais imties ilgis laikomas pastoviu visoms iteracijoms optimizavimo procese ir parenkamas pakankamai didelis, kad tenkintų reikiamą tikslumą visose iteracijose. Tačiau nėra poreikio skaičiuoti įverčius dideliu tikslumu optimizavimo pradžioje, nes šiuo momentu apskaičiuojama tik apytikslė kryptis link optimumo. Todėl galima imti nedideles imtis optimalios paieškos pradžioje ir tik vėliau, didinant imties ilgį, pasiekti tikslo funkcijos reikšmę reikiamu tikslumu, priimant sprendimą apie optimalaus sprendinio radimą (Sakalauskas, 2000, 2002). Tokia schema realizuojama, kai kiekvienoje kitoje iteracijoje imties ilgis yra atvirkščiai proporcingas funkcijos gradiento įverčio normos kvadratui esamoje iteracijoje. Kadangi gradiento įverčio paklaida yra atvirkščiai proporcinga imties ilgiui, tai ši paklaida yra santykinė. Tačiau yra žinoma, kad metodai su santykine gradiento paklaida gali būti konverguojantys. Praktiniam taikymui siūloma iteracijoje $t+1$ tokia imties ilgio reguliavimo taisyklė (žr. Sakalauskas, 2000, 2002):

$$N^{t+1} = \min\left(\max\left(\left[\frac{n \cdot Fish(\gamma, n, N^t - n)}{\rho \cdot (\tilde{g}(x^t)^T \cdot (A(x^t))^{-1} \cdot (\tilde{g}(x^t))}\right] + n, N_{\min}\right), N_{\max}\right), \qquad (5.8)$$

čia $Fish(\gamma, n, N^t - n)$ yra Fišerio pasiskirstymo, turinčio $(n, N^t - n)$ laisvės laipsnių, γ - kvantilis.

Siekiant išvengti didelių imties ilgio svyravimų, paprastai nurodomos mažiausia ir didžiausia imties ilgio vertės ($N_{min} \approx 20$ .. 50 ir $N_{max} \approx 1000$ .. 5000). Pastebėsime, kad N_{max} taip pat gali būti parinktas pagal tikslo funkcijos įverčio pasikliautinojo intervalo sąlygas.

Konstantos parinkimas formulei(5.8):

$$n \cdot Fish(\gamma, n, N^t - n) > \chi^2_\gamma(n),$$

čia $\chi^2_\gamma(n)$ yra χ^2 pasiskirstymo prie n laisvės laipsnių γ – kvantilis, atitinka imties gradiento normos kvadrato (5.6) kovariacijų matricos indukuotoje metrikoje asimptotinį pasiskirstymą pagal Fišerio dėsnį, o atsitiktinė gradiento paklaida šiuo atveju neviršija gradiento normos su tikimybe $1-\gamma$. (5.8) taisyklė taip pat garantuoja (5.7) sekos konvergavimą (Sakalauskas, 2000, 2002).

Klausimas apie optimalaus sprendinio galimą radimą turi būti tiriamas kiekvienoje optimizavimo proceso iteracijoje. Kadangi težinomi tik agentų tikslo funkcijų ir jų gradientų Monte Karlo įverčiai, galima tikrinti tik statistines optimalumo hipotezes. Kadangi šių įverčių stochastinė paklaida priklauso nuo Monte Karlo imties ilgio, klausimas apie galimą optimalumą gali būti priimtas, jeigu, pirma, nėra pagrindo atmesti hipotezę apie gradientų lygybę nuliui ir, antra, imties ilgis yra pakankamas tikslo funkcijoms įvertinti reikiamu tikslumu.

Reikia pabrėžti, kad imties (5.3) ir (5.5) įverčių skirstiniai gali būti aproksimuoti normaliuoju dėsniu, remiantis centrine ribine teorema vienmačiu ir daugiamačiu atveju. Todėl būtinąsias pirmos eilės optimalumo (stacionarumo) sąlygas galima patikrinti pritaikius gerai žinomą daugiamatę

Hotellingo T^2-statistiką. Optimalumo hipotezė taške x^t gali būti laikoma patvirtinta su tikimybe $1-\mu$, jei:

$$T_t^2 \equiv (N^t - n)\cdot(\tilde{g}(x^t))^T \cdot (A(x^t))^{-1}\cdot(\tilde{g}(x^t))/n \le Fish(\mu, n, N^t - n) \qquad (5.9)$$

Toliau galima pasinaudoti asimptotiniu normališkumu dar kartą ir nuspręsti, kad tikslo funkcija yra apskaičiuota tikslumu ε, jeigu jos pasikliautinosios ribos neviršija reikiamos tikslumo ribos:

$$\eta_\beta \cdot \tilde{D}_j(x^t)/\sqrt{N^t} \le \varepsilon \qquad (5.10)$$

čia η_β yra normaliojo skirstinio β – kvantilis (žr. (2.11)).

Jei nors viena (5.9), (5.10) sąlygų netenkinama, tuomet (5.7) procedūra kartojama taške, apskaičiuotame pagal (5.7), kai (5.2) imties ilgis nustatomas pagal (5.8). Jei abi šios sąlygos tenkinamos tam tikroje iteracijoje, tai priežasčių hipotezei apie optimumo radimą atmesti nėra ir, vadinasi, galima stabdyti optimizavimą bei priimti sprendimą apie optimumo radimą reikiamu tikslumu. Taigi, optimizavimą baigsime po baigtinio skaičiaus Monte Karlo imčių generavimo.

Stochastinės Nešo pusiausvyros paieškos procedūra ir jos stabdymas nusakomi 5.1 algoritmu, kuris pateiktas 5.1 lentelėje.

5.1 lentelė. Stochastinės Nešo pusiausvyros paieškos algoritmas

5.1 algoritmas. Stochastinės Nešo pusiausvyros paieška
Tikslas: rasti tikslo funkcijų $F_j(x_1, x_2, ..., x_n) = Ef_j(x_1, x_2, ..., x_n, \xi) \to \min\limits_{x_j \in D_j \subset R^{n_j}}$, $j = 1,...,n$ minimalias (maksimalias) reikšmes.   **Pradinės sąlygos:** Tikslo funkcijų formalizuotas aprašymas.   **Galinės sąlygos:** Sprendinio vektorius $x^* = (x_1^*, ..., x_n^*)$, tikslo funkcijų reikšmės $F_j(x^*, v^*)$, $j = 1,...,n$.   1. Fiksuoti uždavinį apibūdinančius parametrus: kintamųjų skaičių n, Monte Karlo imties pradinį, minimalų ir maksimalų N^0, $N_{\min}$, $N_{\max}$ ilgius, tikslo funkcijų tikslumą ε, pasikliautinojo intervalo tikimybę β, optimalumo hipotezės tikimybę $1-\mu$, paieškos žingsnio ilgį

5.1 algoritmas. Stochastinės Nešo pusiausvyros paieška
$\rho_j > 0$, maksimalų iteracijų skaičių *iter*. 2. Nustatyti pradinį nuoseklios paieškos tašką $x^0 = (x_1^0,..., x_n^0)$, nustatyti iteracijų skaitliuką $t = 0$. 3. **While** iteracijų skaičius t neviršija *iter* **Do** 3.10 Generuoti Monte Karlo imtį $Z = (z^1, z^2,..., z^{N^0})$ (5.2). 3.11 Apskaičiuoti tikslo funkcijų $\tilde{F}_j(x^t)$ įverčius ir (5.3). 3.12 Apskaičiuoti tikslo funkcijų dispersijų įverčius $\tilde{D}_j^2(x^t)$ (5.4). 3.13 Apskaičiuoti tikslo funkcijų gradientų įverčius $\tilde{g}_j(x^t)$ (5.5). 3.14 Apskaičiuoti kovariacijos matricą $A(x^t)$ (5.6). 3.15 Apskaičiuoti gradiento statistiką T^2 (5.9). 3.16 Patikrinti stabdymo sąlygą: **If** (5.9) & (5.10) **Then** grąžinti uždavinio sprendinį $x^* = x^t = (x_1^t,..., x_n^t)$, tikslo funkcijų reikšmes $F_j(x^t)$. **Else** Nustatyti t=t+1 ir rasti kitą tašką x^{t+1} (5.7) bei Monte Karlo imties ilgį N^{t+1} (5.8). 4. Done.

5.3. Stochastinis Nešo pusiausvyros modelis elektros rinkai su išankstiniais sandoriais

Nagrinėkime neatidėliotinų sandorių elektros rinką (Xu ir Zhang, 2013), kurioje yra M generatorių tarpusavyje varžosi siūlydami kainą, kol paklausa dar nežinoma (neapibrėžta). Paklausa rinkoje aprašoma atvirkštine funkcija $p(Q,\xi(\omega))$, čia $p(Q,\xi(\omega))$ yra rinkos kaina, Q yra bendra elektros pasiūla rinkoje ir $\xi : \Omega \to \Re$ yra tolydus atsitiktinis dydis. Paklausos neapibrėžtumas yra charakterizuojamas atsitiktinio dydžio ξ skirstiniu. Prieš tai, kol rinkos paklausa yra nežinoma, generatoriai $i, i = 1,...,M,$ pasirenka elektros kiekius q_i, kuriuos jie gamins. Generatoriaus laukiamas pelnas gali būti aprašytas taip:

$$U_i(q_i, Q_{i-1}) = E[q_i p(Q,\xi) - C_i(q_i) + H_i(p(Q,\xi))].$$

Čia $Q = q_i + Q_{-i}$ yra bendra pasiūla, Q_{-i} yra varžovų i-tajam gamintojui bendra pasiūla, $q_i p(Q,\xi)$ yra i-tojo generatoriaus pajamos, pardavus q_i elektros kiekį, jeigu rinkos paklausos scenarijus bus $p(Q,\xi(w))$, $C_i(q_i)$ – bendri kaštai, kurie patiriami, gaminant kiekį q_i, $H_i(p(Q,\xi)$ – mokėjimai pagal sutartis su perpardavėjais. Kontraktai naudojami kaip rizikos mažinimo priemonė, esant neapibrėžtumui. Jie gali būti abipusiai arba vienpusiai. Nagrinėjami tik vienpusiai kontraktai, kai i-asis generatorius elektros perpardavėjui moka $w_i(p-f)$ tik tuo atveju, jei $p > f$ (f – kaina; w_i – yra kiekis pagal kontraktą). Taigi,

$$H_i(p(Q,\xi)) = -w_i \max(p(Q,\xi) - f, 0).$$

i-asis generatorius siekia maksimizuoti laukiamą pelną, parinkdamas gamybos kiekį q_i, t. y.

$$u_i(q_i, Q_{i-1}, \xi) = q_i p(Q,\xi) - C_i(q_i) - w_i \max(p(Q,\xi) - f, 0) \to \max_{q_i}.$$

Generatoriaus laukiamas pelnas gali būti išreikštas taip:

$$U_i(q_i, Q_{i-1}) = \mathrm{E}[u_i(q_i, Q_{i-1}, \xi)].$$

Remiantis (2.6), stochastinė Nešo pusiausvyra yra toks rinkinys $q^* = (q_1^*, q_2^*, ..., q_M^*)$, kuriam

$$-U_i(q_i^*, Q_{i-1}^*) = \min_{q_i \in Q_i}[-U_i(q_i, Q_{-i}^*)], \forall i, i = 1, ..., M,$$

čia $q_i = [0, q_i^*]$ ir q_i^* yra i-tojo generatoriaus ribinis pajėgumas.

Funkcijos $U_i(q_i, Q_{i-1})$ ir strategijų aibės $q_i = [0, q_i^*]$ tenkina 2 skyriaus 2 teoremos sąlygas, todėl egzistuoja bent viena paprastų strategijų Nešo pusiausvyra.

Tarkime, yra trys generatoriai. Imama atvirkštinė paklausos funkcija $p(q,\xi) = \alpha(\xi) - \beta q$. Čia ξ yra atsitiktinis intervale $[0,1]$ tolygiai pasiskirstęs dydis, $\beta = 1$, $\alpha(\xi) = \alpha\xi + \alpha_0$ ir $\alpha = 20$, $\alpha_0 = 30$. Kontrakto kaina $f = 22$. 5.2 lentelėje pateikti kiekiai w_i pagal kontraktus ir patiriamų kaštų $C_i(q_i)$ funkcijos.

5.2 lentelė. Kiekiai pagal sutartis ir kaštų funkcijos

Generatorius	w_i	$C_i(q_i)$
1	10	$q_1^2 + 2q_1$
2	8	$2q_2^2 + 2q_2$
3	0	$2q_3^2 + 3q_3$

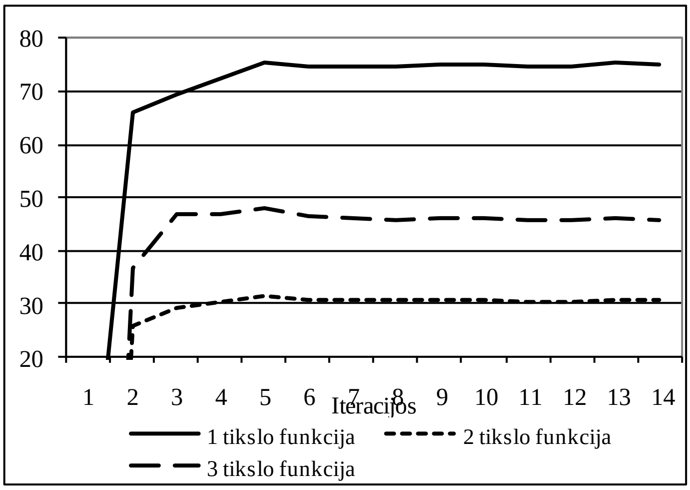
Po 10 (t = 10) iteracijų gautas sprendinys (nustačius pradinį tašką (10,10,10)) ir analizinis sprendinys pateikti 5.3 lentelėje.

5.3. lentelė. Uždavinio sprendimo rezultatai

t	q_1	q_2	q_3	Q	$E[p(Q,\xi)]$	U_1	U_2	U_3	N^t
1	10	10	10	30	10,274	-17,26	-117,26	-127,26	2
2	7,827	5,827	5,727	19,382	20,708	65,91	25,69	35,81	9
3	7,784	5,132	4,634	17,550	22,324	70,64	30,05	46,60	204
4	7,983	5,000	4,250	17,233	22,547	72,65	30,62	46,95	2283
5	8,151	4,961	4,079	17,191	22,959	74,33	30,70	48,14	926
6	8,358	5,022	4,036	17,416	22,505	73,38	30,02	46,14	4085
7	8,440	4,992	3,968	17,401	22,793	74,58	30,21	47,05	10316
8	8,532	5,011	3,963	17,506	22,540	74,79	30,58	46,03	3656
9	8,552	4,980	3,936	17,468	22,384	74,37	30,46	45,31	2538
10	8,544	4,944	3,906	17,394	22,609	74,93	30,48	46,08	39748
	Analizinis sprendinys								
q^*	8,642	4,980	3,923	17,545	21,687	75,70	30,70	46,50	

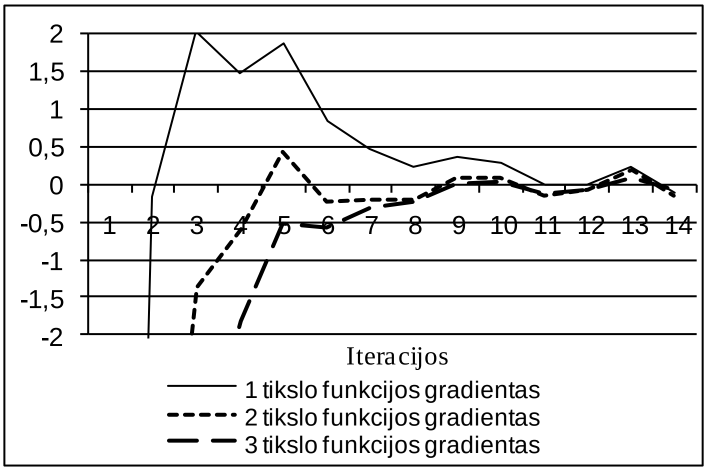
Vadovaujantis aprašytąja (5.7) procedūra, stabdymą galima atlikti anksčiau, kai patenkintos optimalumo sąlygos ir pasiekiamas pageidautinas tikslumas. Būtina pastebėti, kad generatorių gaminami kiekiai yra tarpusavyje labai susiję, t. y. jie yra koreliuoti, nes kiekvienas iš jų adaptuoja savo elgesį pagal kitus.

Tyrimo rezultatai pavaizduoti 5.1 pav.–5.6 pav. 5.1 pav. pateiktas tikslo funkcijų kitimas, o 5.2 pav. – tikslo funkcijų gradientų kaita. 5.3 pav. pateikti 1–3 generatorių tikslo funkcijų pasikliovimo intervalų ilgiai (pasikliovimo tikimybė – 0,95), esant atitinkamai iteracijai. 5.4 pav. pavaizduotas Hotellingo T^2 statistikos kitimas. Atskirų generatorių gaminami kiekiai ir bendras kiekis parodyti 5.5 pav.



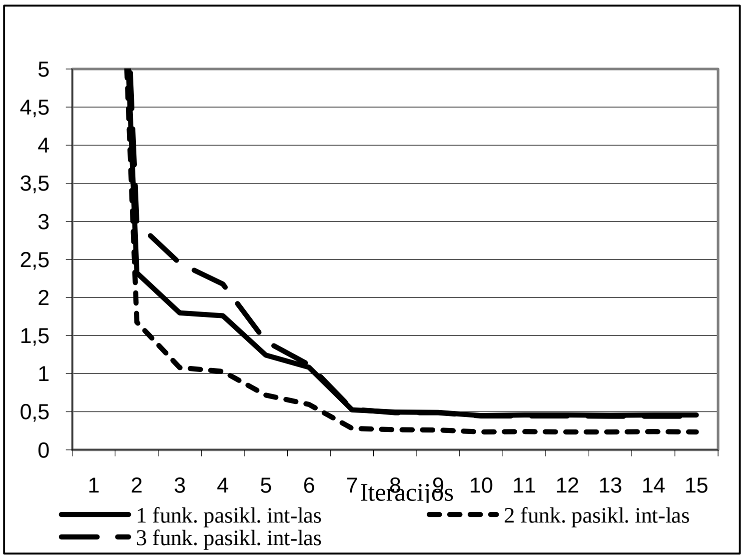
5.1 pav. Generatorių tikslo funkcijos

Iš 5.1 pav. matyti, kad tikslo funkcijos labai kinta tik prie pirmųjų *trijų* iteracijų, vėliau jų kitimas nėra žymus, t.y. optimumas buvo pasiektas jau po kelių iteracijų.



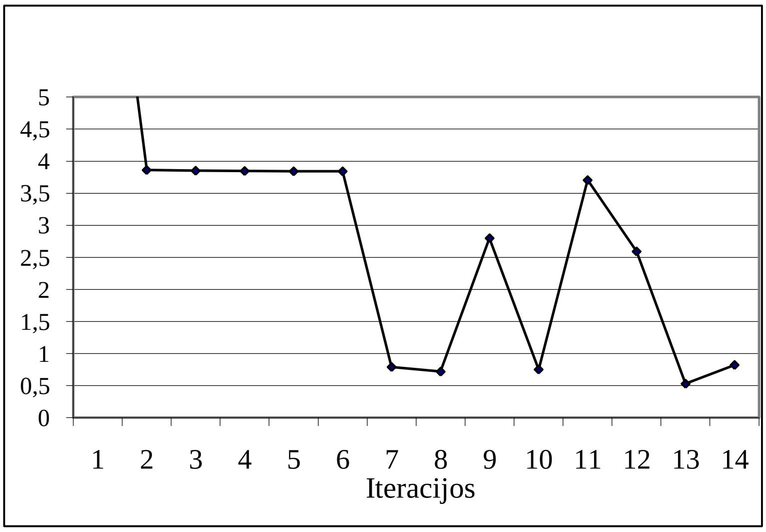
5.2 pav. Generatorių tikslo funkcijų gradientai

Kadangi algoritmas yra pagrįstas tikslo funkcijų gradientais, tai tikslo funkcijų kitimas priklauso nuo to, kiek tikslo funkcijų gradientai skiriasi nuo nulio. Iš 5.2 pav. matyti, kad tikslo funkcijų gradientai 7 iteracijoje yra absoliučia verte nedidesni nei 0,5. 5.1 algoritmo greitį sąlygoja tikslo funkcijų gradientų artėjimas į nulį. Reikia pažymėti, kad 5.1 algoritme yra reguliuojamas imties dydis pagal (5.8) formulę. Iš (5.8) formulės matome, kad imties dydis yra atvirkščiai proporcingas stochastinio gradiento normos, indukuotos (5.6) kovariacine imties matrica, kvadratui. Ši formulė leidžia atsižvelgti į tai, kad optimizavimo pradžioje nereikia imti didelių imčių. O jei nagrinėjama strategija yra arčiau optimalios strategijos, tai tada imamos didesnės imtys, siekiant gauti duoto tikslumo sprendinį. Siekiant išvengti galinčių pasitaikyti labai didelių imties ilgio svyravimų, (5.8) formulėje parenkamas minimalus ir maksimalus ($N_{min} \approx 20$ .. 50 ir $N_{max} \approx 1000$ .. 5000) imties ilgiai.



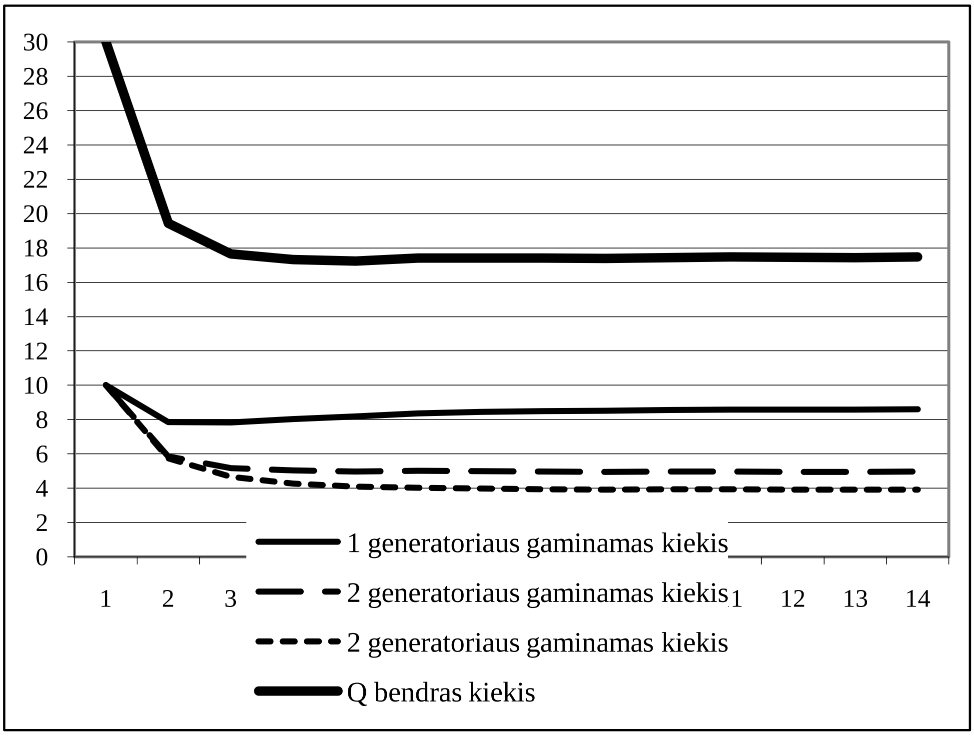
5.3 pav. Generatorių tikslo funkcijų pasikliovimo intervalų ilgiai

Iš 5.3 pav. matyti, kad jau 7 iteracijoje tikslo funkcijų pasikliovimo intervalų ilgiai yra nedidesni nei 0,5.

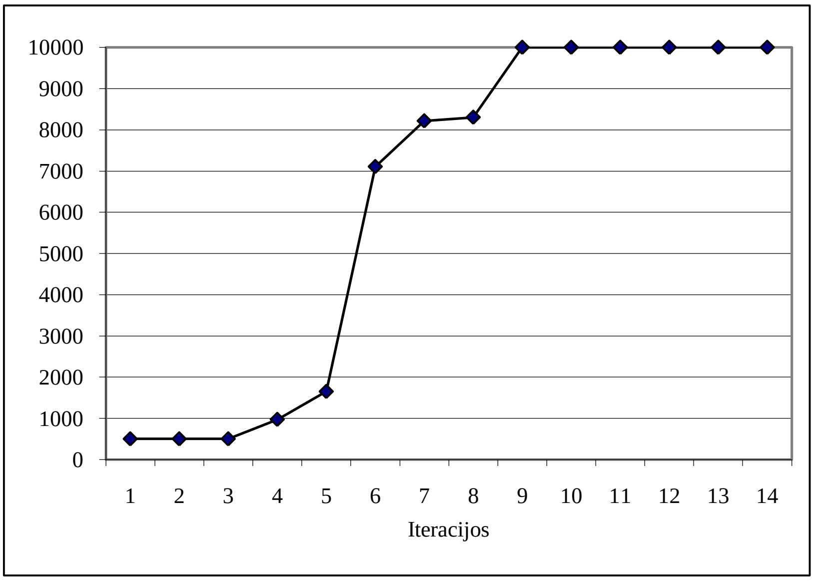


5.4 pav. Hotelingo T^2 statistikos ir Fišerio skirstinio kvantilio santykis

5.4 pav. yra pavaizduotas Hotelingo statistikos ir atitinkamo Fišerio skirstinio kvantilio santykis, kuris rodo, kad algoritmą jau buvo galima stabdyti po 7 iteracijų (minėtas santykis yra mažesnis už 1).



5.5 pav. Generatorių gaminami kiekiai ir bendras kiekis



5.6 pav. Imties ilgio kitimas

Imties ilgis, kuris apskaičiuojamas pagal (5.8), pavaizduotas 5.6 pav. Buvo paimtos tokios imties ilgio reikšmės: minimali N_{min} = 500 ir maksimali N_{max}=10000. Iš 5.6 matome, kad optimizavimo pradžioje yra parenkamos nedidelės imtys, o, kai esama netoli optimalios strategijos (7-14 iteracijos), tai imtys yra didelės.

Taigi, modeliavimo rezultatai rodo, kad testinis uždavinys sukurtuoju algoritmu išsprendžiamas per kelias iteracijas (5-10).

Skyriaus išvados

1. Sukurtas stochastinės Nešo pusiausvyros paieškos algoritmas, pagrįstas nuoseklios gradientinės Monte Karlo paieškos metodu, generuojant atsitiktinių imčių sekas su reguliuojami imties tūriu.
2. Algoritmo vykdymas nutraukiamas, vertinant sprendinio optimalumą ir tikslumą statistiniais kriterijais, t. y. patikrinama hipotezė apie pusiausvyros radimą ir apskaičiuojant lošėjų tikslo funkcijų pasikliovimo intervalų ilgius.
3. Sukurtasis algoritmas pritaikytas elektros tiekimo rinkos su išankstiniais sandoriais modeliui ir juo nustatytos rinkos stochastinės Nešo pusiausvyros strategijos duotu tikslumu.

Darbo išvados

Stochastinės pusiausvyros paieškos uždaviniai, dažnai pasižymintys hierarchine struktūra, būdingi įvairioms mokslo sritims – inžinerijai, ekonomikai, finansams, logistikai. Daugelį taikomųjų stochastinės pusiausvyros paieškos uždavinių galima formuluoti kaip pusiausvyros paieškos uždavinius su iškilomis, tenkinančioms Lipšico sąlygas išlošio funkcijomis ir atsitiktiniais aplinkos scenarijais, pasiskirsčiusiais pagal diskretųjį ar tolydųjį tikimybinius dėsnius.

Darbe ištirtos rinkos netvarios būsenos, t. y. ekonominiai burbulai ir jų griūtys. Disertacijoje pasiūlytas matematinis burbulo modelis, kuriame yra dviejų tipų agentai – fundamentalistai ir čartistai. Šiuo modeliu ištirtas Lietuvos nekilnojamojo turto burbulas.

Kadangi realiose situacijose dažnai tenka atsižvelgti į riziką, tai į optimizavimo uždavinius būtina įtraukti rizikos kriterijus. Tai galima pasiekti, įvedus rizikos kriterijus į tikslo funkciją bei ribojimus, o tokiu būdu gaunamas uždavinys yra dviejų lygių stochastinis programavimo uždavinys. Sukurtas nuoseklios Monte Karlo paieškos metodas (4.1 algoritmas) šiam uždaviniui spręsti.

Reikšmingų imčių metodo taikymas tiesiniam dviejų etapų stochastiniam programavimo uždaviniui spręsti transformuoja duotą uždavinį į dviejų lygių stochastinį programavimo uždavinį. Šiame darbe sukurtas 4.2 algoritmas šiam uždaviniui spręsti.

Sukurtas stochastinės Nešo pusiausvyros gradientinės paieškos 5.1 algoritmas buvo pritaikytas testiniam elektros rinkos su išankstiniais sandoriais uždaviniui spręsti.

Šioje disertacijoje atlikti tyrimai leidžia padaryti tokias išvadas:

1. Heterogeninių agentų įtraukimas pagerina ekonominio burbulo matematinio modelio adekvatumą, t. y. jei burbulas trumpam nustoja augti, tai kainos divergavimo nuo bazinės linijos efektas modelyje išlieka.

2. Sprendžiant 4.1 algoritmu testinį rizikos optimizavimo uždavinį, į kurio tikslo funkciją ir ribojimus įeina sąlyginė rizika, leidžia surasti duoto tikslumo sprendinį, t y., tikrinant algoritmo stabdymo sąlygą su tikimybe 0,95, CVaR skaičiuojant reikšmingumo lygmeniu 0,1, kai testinių funkcijų kintamųjų skaičius yra 2, 5, 10, 20, 50, vidutinis iteracijų skaičius kinta nuo ≈ 8 iki ≈ 60, o Monte Karlo imties dydis kinta nuo ≈ 950 iki ≈ 6000.

3. Sprendžiant 4.2 algoritmu tiesinį dviejų etapų stochastinio programavimo uždavinį, reikia *15-20% mažiau* iteracijų duoto tikslumo sprendiniui rasti, be to, vidutinis Monte Karlo imties dydis stabdymo momentu yra *beveik dvigubai mažesnis*.

4. Stochastinės Nešo pusiausvyros gradientinės paieškos 5.1 algoritmas yra efektyvus, nes juo sprendžiant testinį uždavinį, pakako kelių (≈ 10) iteracijų duoto tikslumo sprendiniui rasti, kai Monte Karlo imties dydis neviršijo 10 000.

5. Sukurti algoritmai buvo ištirti statistinio modeliavimo būdu, sprendžiant testinius ir praktinius stochastinės paieškos uždavinius, o gautos tokiu būdu išvados taikytinos sukuriant ir tiriant kitų stochastinės pusiausvyros paieškos uždavinių algoritmus.

Literatūra

1. Abreu D., Brunnermeier M. K. (2003). Bubbles and crashes, *Econometrica*, Vol. 71, No. 1, p. 173–204.
2. Artzner Ph., Delbaen F., Eber J.-M., and Heath D. (1997). Thinking coherently, *Risk*, 10(11), p. 68–71.
3. Artzner Ph., Delbaen F., Eber J.-M., and Heath D. (1999). Coherent measures of risk, *Mathematical Finance*, 9, p. 203–228.
4. Banerjee A. (1992). A simple model of herd behaviour, *Quarterly Journal of Economics* 107, No. 3, p. 797–817.
5. Bayraksan G., Morton D.P. (2011). A Sequential Sampling Procedure for Stochastic Programming. *Operations Research*, vol. 59, No 4, p. 898-913.
6. Bartkute V., Sakalauskas L. (2007). Simultaneous Perturbation Stochastic Approximation for Nonsmooth Functions. *European Journal of Operational Research, Elsevier Science*, vol. 181, No. 3, p. 1174–1188.
7. Basel Committee on Banking Supervision. (2005). Consultative Document, *The Application of Basel II to Trading Activities and the Treatment of Double Default Effects*, 91 p.
8. Belianin A. B., Ysupova O. G. (2001). Finansovyie piramidy s točki zrenija teorii igr, *Naučnyi doklad*, Nr. 2K/10, 76 p.
9. Bertsekas D. P. (1982). Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods. *Academic Press, New York, London*.
10. Billingsley P. (1968). Convergence of Probability Measures. *New York: JohnWiley and Sons*.
11. Borm P., Gijsberts A., Tijs S. H. (1989). A Geometric-Combinatorial Approach to Bimatrix Games. *Methods of Operations Research*, 59, p. 199–209.
12. Bubelis V. (1979). On Equilibria in Finite Games, *International Journal of Game Theory*, 8(2), p. 65–79.

13. Bucklew J. A. (2004). Introduction to rare event simulation, *Springer-Verlag, New York.*

14. Cairoli R., Dalang R.C. (1996). Sequential Stochastic Optimization. *Wiley Series in Probability and Statistics, Wiley & Sons*.

15. Changhe Yuan C., Druzdzel M. J. (2006). Importance sampling algorithms for Bayesian networks: Principles and performance. *Mathematical and Computer Modelling*. Vol. 43, No. 9–10, p. 1189–1207.

16. Chen X., Deng X., Teng S. (2009). Settling the complexity of computing two-player Nash equilibria. *Journal of the ACM (JACM)* 56, 3, p. 1–57.

17. Cheng L., Wan Z., Wang G. (2009). Bilevel Newsvendor Models Considering Retailer with CVaR Objective, *Computers and Industrial Engineering*, 57(1), p. 310–318.

18. Christiansen S., Patriksson M., Wynter L. (2001). Stochastic bilevel programming in structural optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. Vol. 21, No. 5, p. 361–371.

19. Clarke F.H. (1983). Optimization and Nonsmooth Analysis, *A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons.*

20. Cromvik C., Patriksson M. (2010). On the Robustness of Global Optima and Stationary Solutions to Stochastic Mathematical Programs with Equilibrium Constraints, part 2: Applications, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 144(3), p. 479–500.

21. Datta R.S. (2003). Universality of Nash Equilibria, *Mathematics of Operations Research*, 28 (3), p. 424–432.

22. Datta R.S. (2010). Finding all Nash equilibria of a finite game using polynomial algebra, *Economic Theory*, 42 (1), p. 55–96.

23. De Kok A.G., Muratore G. (2010). Coordinating Supply Chains: A Bilevel Programming Approach, *International Workshop on Supply Chain Models for Shared Resource Management, Brussels.*

24. Dickhaut J., Kaplan T. (1993). A Program for Finding Nash Equilibria. *In H.R.Varian (eds.), Economic and Financial Modeling with Mathematica, New York: Springer-Verlag.*
25. Directive 2009/138/EC of the European Parliament and of the Council of 25 November 2009.
26. Ermolyev Yu., Wets R. (1988). Numerical Techniques for Stochastic Optimization, *Springer-Verlag, Berlin*.
27. Fama E.F. (1965). Random walks in stock market prices, *Financial Analysis Journal*, 51(1), p. 55–59.
28. Feige U., Talgam-Cohen I. (2010). A direct reduction from k-player to 2-player approximate Nash, *Algorithmic Game Theory, Third International Symposium, SAGT 2010, Athens, Greece, October 18–20, Proceedings*, p. 138–149.
29. Friedman M. (1953). The case for flexible exchange rates, in: *Essays in Positive Economics (University of Chicago Press)*, p. 157–203.
30. Fudenberg, D. and Tirole J. (1991). Game Theory, *Cambridge: MIT Press*.
31. Gambit (*Lošimų teorijos programinės įrangos ir įrankių biblioteka baigtinių normaliosios ir išplėstos formos lošimų konstrukcijai ir analizei),* [prieiga per internetą]<http://econweb.tamu.edu/gambit>.
32. Girdzijauskas S., Moskaliova V. (2003). Finansinių piramidžių modeliai. *Ekonomika*: *mokslo darbai*. T. 64, p. 37–48.
33. Girdzijauskas S., Moskaliova V. (2003). Virtualių finansinių piramidžių nestabilumo modeliavimas. *Informacijos mokslai: mokslo darbai*. T. 27, p. 105–114.
34. Girdzijauskas S., Moskaliova V. (2005). Finansinių piramidžių stabilumo modeliavimas. *Informacijos mokslai*. T. 35, p. 158–169.
35. Girdzijauskas S., Pikturna A., Ivanauskas F., Merkevičius E., Moskaliova V. (2008). Investigation of the Elasticity of the Price Bubble Functions. *Continuous optimization and knowledge-based technologines:*

20th EURO Mini conference (*EurOPT–2008), May 20–23, 2008, Neringa, Lithuania,* p. 131–136.

36. Girdzijauskas S., Štreimikienė D., Čepinskis J., Moskaliova V., Jurkonytė E., Mackevičius R. (2009). Formation of Economic Bubbles: Causes and Possible Preventions. *Technological and Economic Development of Economy*. Vol. 15 (2), p. 267–280.
37. Glasserman P. (2004). Monte Carlo Methods in Financial Engineering. *Springer-Verlag, New York*.
38. Govindan S., Wilson R. (2003). A global Newton method to compute Nash equilibria, *Journal of Economic Theory*, 110, 1, p. 65–86.
39. Govindan S., Wilson R. (2004). Computing Nash equilibria by iterated polymatrix approximation, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 28, 7, p. 1229–1241.
40. Guldimann T. (2000). The story of Risk Metrics, *Risk* 13 (January), p. 56–58.
41. von Stackelberg H. (1934). The Theory of Market Economy, *Oxford University Press, Oxford, UK.*
42. Harsanyi J. C. (1964). A General solution for finite non-cooperative Games, based on Risk-Dominance, Advances in game theory, *Wiley, Princeton*, p. 651–679.
43. Harsanyi J. C. (1973). Oddness of the number of equilibrium points: a new proof, *International Journal game Theory*, 2, p. 235–250.
44. Herings P. J.-J., Peeters R. (2005). Globally Convergent Algorithm to Compute All Nash Equilibria for n-Person Games, *Annals of Operations Research*, 137, p. 349–368.
45. Herings, P.J.-J., Peeters R. (2010). Homotopy methods to compute equilibria in game theory, *Economic Theory*, 42, p. 119–156.
46. Hoffbauer J., Sigmund K. (1988). The Theory of Evolution and Dynamical Systems, *Cambridge Univ. Press, Cambridge, U.K.*

47. Homes C. H. (2006). Heterogeneous Agent Models in Economics and Finance, *Handbook of Computational Economics,* Vol. 2: *Agent-Based Computational Economics*, chapter 23.
48. <http://ober-haus.lt/files/lt/files/apzvalgos/OHBI_apzvalga_2013_liepa.pdf>[2014-01-17]
49. Hui E. C. M., Zheng X., Hui W. (2010). A dynamic mathematical test of international property securities bubbles and crashes, *Physica A*, 389, p. 1445–1454.
50. Iskakov M. B. (2008). Equilibrium in Safety Strategies and Equilibriums in Objections and Counterobjections in Noncooperative Games, *Automation and Remote Control*, Vol. 69, No. 2, p. 278–298.
51. Kalashnikov V. V., Pérez-Valdés G. A., Tomasgard A., Kalashnykova N. I. (2010). Natural Gas Cash-Out Problem: Bilevel Stochastic Optimization Approach, *European Journal of Operational Research*, 206(1), p. 18–33.
52. Kall P., Mayer J. (2011). Stochastic Linear Programming: Models, Theory, and Computation, *Springer, International Series in Operations Research and Management Science*.
53. Karush W. (1939). Minima of Functions of Several Variables with Inequalities as Side Constraints, *M.Sc. Dissertation, Dept. of Mathematics, Univ. of Chicago, Chicago, Illinois.*
54. Kindleberger C. P. (1992). Bubbles, *New Palgrave Dictionary, Houndsmill.*
55. Kostreva M. M., Kinard L. A. (1991). A Differential Homotopy Approach for Solving Polynomial Optimization Problems and Noncooperative Games, *Computers and Mathematics with Applications*, 21, p. 135–143.

56. Krokhmal P., Palmquist J., Uryasev S. (2002). Portfolio optimization with Conditional Value-at-Risk objective and constraints, *Journal of Risk* 4, p. 11–27.
57. Kroese D. P., Taimre T. and Botev Z. I. (2011). Handbook of Monte Carlo Methods. *JohnWiley & Sons, New York.*
58. Kuhn H. W.; Tucker A. W. (1951). Nonlinear programming. *Proceedings of 2nd Berkeley Symposium. Berkeley: University of California Press*, p. 481–492.
59. Kurtz N., Song J. (2013). Cross-entropy-based adaptive importance sampling using Gaussian mixture, *Structural Safety*, Vol. 42., p. 35–44.
60. Kushner H. J., Yin G. G. (2003). Stochastic Approximation and Recursive Algorithms and Applications. *Springer-Verlag, New York, second edition.*
61. L'Ecuyer P. and Simard R. (2007). TestU01: A C library for empirical testing of random number generators. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 33(4), Article 22.
62. Lemke C. E., Howson J. T. (1964). Equilibrium Points of Bimatrix Games, *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 12 (2) p. 413–423.
63. Lewis P. A., Goodman A. S. and Miller J. M. (1969). A pseudo-random number generator for the system/360. *IBM Systems Journal*, 8(2), p.136–146.
64. Lin G.H., Chen X., Fukushima M. (2009). Solving Stochastic Mathematical Programs with Equilibrium Constraints via Approximation and Smoothing Implicit Programming with Penalization, *Mathematical Programming*, 116 (1-2), p. 343–368.
65. Lucas R. E.(1971). Investment under Uncertainty, *Econometrica*, Vol. 39, No. 5, p. 659–681.
66. Maynard Smith J. (1974). The theory of games and the evolution of animal conflicts, *J. Theor. Biol.*, Vol. 47, p. 209–221.

67. Markowitz H. M. (1952). Portfolio Selection, *Journal of Finance*, 7 (1), p. 77–91.
68. Myerson R.B. (1991). Game Theory: Analysis of Conflict, *Harvard University Press.*
69. Nash J.F. (1951). Noncooperative Games, *Annals of Mathematics*, 54, p. 286–295.
70. Osborne M. J. (2000). An introduction to game theory.
71. Osborne M., Rubinstein A. (1994). A Course in Game Theory, *Cambridge: MIT Press*.
72. Ozaltin O. Y., Prokopyev O. A., Schaefer A. J. (2010). The Bilevel Knapsack Problem with Stochastic Right-hand Sides, *Operations Research Letters*, 38 (4), p. 328–333.
73. Patriksson M., Wynter L. (1997). Stochastic Nonlinear Bilevel Programming, *Technical Report, PRISM, Universit´e de Versailles – Saint Quentin en Yvelines, Versailles, France*.
74. Peleg B. (1986). On the Reduced Game Property and its Converse, *International Journal of Game Theory*, 15, p. 187–200.
75. Pflug G. (2000). Some Remarks on the Value-at-Risk and the Conditional Value-at-Risk, *in: S. Uryasev (Ed.), Probabilistic Constrained Optimization: Methodology and Applications*, *Kluwer Academic Publishers.*
76. Prékopa A. (2003). Probabilistic programming. *In: Stochastic Programming, Handbooks in Operations Research and Management Science 10 (A. Ruszczyński and A. Shapiro, eds.), Elsevier, Amsterdam,* p. 267–351.
77. Reny Ph. J. (2008). Non-Cooperative Games: Equilibrium Existence, *The New Palgrave Dictionary of Economics, Second Edition*.
78. Ryu J. H., Dua V., Pistikopoulos E.N. (2004). A Bilevel Programming Framework for Enterprise-Wide Process Networks under Uncertainty, *Computers and Chemical Engineering*, 28 (6-7), p. 1121–1129.

79. Rockafellar R.T., Uryasev S. (2002). Conditional Value-at-Risk for General Loss Distributions, *Journal of Banking and Finance*, 26/7, p. 1443–1471.
80. Rockafellar R. T., Uryasev S. (2000). Optimization of Conditional Value-at-Risk, *Journal of Risk*, 2, p. 21–41.
81. Roghanian E., Sadjadi S. J., Aryanezhad M. B. (2007). A Probabilistic Bi-level Linear Multi-objective Programming Problem to Supply Chain Planning, *Applied Mathematics and Computation*, 188 (1), p. 786–800.
82. Roman D., Darby-Dowman K., Mitra G. (2007). Mean-risk models using two risk measures: a multi-objective approach, *Quantitative Finance*, 7(4), p. 443–458.
83. Rubinstein R. Y., Melamed B. (1998). Modern Simulation and Modeling. *Wiley Series in Probability and Statistics: Applied Probability and Statistics. J.Wiley & Sons, N.Y.*
84. Rubinstein R. Y. and Kroese D. P. (2007). Simulation and the Monte Carlo Method. *John Wiley & Sons, New York, Second Edition*.
85. Wang S. Y. (1993). Existence of a Pareto equilibrium, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 79 (2), p. 373–384.
86. Sakalauskas L. (2000). Nonlinear stochastic optimization by Monte-Carlo method, *Informatica*, Vol. 11, No. 4, p. 455–468.
87. Sakalauskas L. (2002). Nonlinear Stochastic Programming by Monte-Carlo estimators, *European Journal on Operational Research*, Vol. 137, p. 558–573.
88. Sakalauskas L. (2004), Nonlinear stochastic optimization by Monte-Carlo estimators, *Informatica*, Vol. 15 (2), p. 271–282..
89. Sakalauskas L., Žilinskas K. (2008). Epsilon-projection method for two-stage SLP, *Lietuvos matematikos rinkinys*, T. 48/49, spec. Nr. p. 320–326.
90. Sakawa M., Katagiri H. (2010). Interactive Fuzzy Programming Based on Fractile Criterion Optimization Model for Two-Level Stochastic

Linear Programming Problems, *Cybernetics and Systems: An International Journal*, 41(7), p. 508–521.

91. Serrano R. (2005). Fifty Years of the Nash Program, 1953-2003, *Investigaciones Ecónomicas*, 29, p. 219–258.
92. Shapiro A. (2000). Stochastic Programming by Monte-Carlo simulation methods, *Stochastic Programming E-Print Series*.
93. Shapiro A., Homem-de-Mello T. (1998). A simulation-based approach to two-stage stochastic programming with recourse. *Mathematical Programming*, vol. 81, p. 301-325.
94. Shiller R. J. (2000). Irrational Exuberance.
95. Sornette D. (2003). Why Stock Markets Crash, *Princeton University Press, Princeton, N.J.*
96. Sornette D., Zhou W.-X. (2006). Is there a real estate bubble in the US?, *Physica A*, 361, p. 297–308.
97. Sornette D.; Johansen A., Bouchaud J.-P. (1996). Stock market crashes, precursors and replicas, *Journal de Physique I France*, 6, p. 167–175.
98. Sun L. (2012). Equivalent Bilevel Programming Form for the Generalized Nash Equilibrium Problem, *Journal of Mathematical Research*, 2 (1), p. 8–13.
99. Uryasev, S. (1992). A Stochastic Quasi-Gradient Algorithm with Variable Metric, *Annals of Operations Research*, Vol. 39, p. 251–267.
100. Uryasev S. (2000). Conditional Value-at-Risk: Optimization Algorithms and Applications, *Financial Engineering News*, 14.
101. Vilkas E. (1963). Axiomatic definition of the value of a matrix game, *Theory of Probability and Its Applications*, 8, p. 304–307.
102. Vilkas E. (1968). The axiomatic definition of equilibrium points and the value of a non-coalitional n-person game, *Theory of Probability and Its Applications*, 13, p. 523–527.
103. Vilkas E. (1990), Optimalnost v igrakh i resheniyakh, *Moscow: Nauka*.

104. von Neumann J., Morgenstern O. (1944). Theory of Games and Economic Behavior, *Princeton University Press*.
105. Watanabe K., Takayasu H., Takayasu M. (2007). A mathematical definition of the financial bubbles and crashes, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Vol. 383, Issue 1, p. 120–124.
106. Wright J. R., Jiang A. X., Leyton-Brown K. (2011). Linear Solvers for Nonlinear Games: Using Pivoting Algorithms to Find Nash Equilibria in n-Player Games, *ACM SIGecom Exchanges*, Vol. 10, No. 1, p. 9–12.
107. Xu H., Zhang D. (2013) Stochastic Nash equilibrium problems: sample average approximation and applications. *Computational Optimization and Applications*, [prieiga per internetą]: <http://link.springer.com/article/10.1007/s10589-013-9538-7>.
108. Zwinkels R. C. J., Saskia ter Ellen (2010). Oil price dynamics: A behavioral finance approach with heterogeneous agents, *Energy Economics*, 32, p. 1427–1434.

Priedas

1 lentelė. Lietuvos nekilnojamojo turto kainų indeksas 2000–2009 metais

	Mėnesiai											
Metai	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12
2000					87,2	85,9	84,3	83,8	82,8	81,7	81,1	80,2
2001	79,8	79,7	78,5	78,4	77,9	77,4	77,9	77,5	77,5	77,4	78	77,7
2002	76,9	77,3	77,7	77,8	78,4	78,8	78,9	80,1	81,4	82,2	84,2	84,2
2003	87	87,8	87,5	87,5	87,9	88	89,5	90,9	93,6	95,1	98	104,9
2004	106,4	109,9	111,1	110,9	109,3	109,6	110	113,9	116,5	117,7	121,2	126,6
2005	129,5	135,8	141,1	146,7	154,5	159,7	165	170,5	180,1	187,5	193,1	197,6
2006	204,9	215,6	219	216,7	215,8	214,7	214,7	215,9	219	217,2	216	220,2
2007	226,5	232,3	241,6	255	262,6	264,9	267,5	272,5	271,2	269,3	269,1	270,1
2008	264,3	260,7	255,9	248,8	245,6	240,1	237,4	235,5	231,4	224,9	217,1	211,1
2009	197,6	191,1	182,1	176,5	171,2	166,7	166,5	161,3	157,6	155,4	153,5	152,7

2 lentelė. Matrica A, vektoriai b, c, h vektoriaus vidurkis ir nuokrypis

Matrica A **(eilutės pateiktos stulpeliais)**										c vektorius	h vidurkis	h nuokrypis	b vektorius
-3,3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0,3	-4,3	1,29	3,16
-4	0	0	1,8	0	0	-5,3	0	-3,5	-8	-0,9	0,3	0,09	-1,09
-2,3	0	-3,4	3,2	8,7	0	-3,9	0	0,3	0	1,4	4,7	1,41	1,3
0	-4	0	0	8,3	0	-1,3	7,4	4,2	8,8	2,7	-3,8	1,14	-5,02
0	5,8	0	7,3	0	0	-1,6	8,7	-2,4	-1,6	2,4	3,4	1,02	3,47
0	0	0	0	0	0	0	0	-9,1	-1,2	-1,4	2,3	0,69	3,32
-2	0	-6,6	0	0	6,9	1,6	-4,9	0	-9,1	0,1	-4,2	1,26	-3,25
0	-3,7	8,6	-4,5	-7,1	-3,2	0	0	-1,9	0	-2,9	0,3	0,09	1,15
0	0	6,4	0	8,7	-9,1	-8,4	4,6	6,3	0	1,7	-3,1	0,93	-0,21
8	0	0	-1,7	0	0	0	0	6,4	1,5	1,7	-1,5	0,45	1,76
0	0	0	6,7	0	0	0	0	0	0	0,1	2,9	0,87	
3,1	1,2	0	-3	0	0	0	0	0	8,1	0,4	-2,4	0,72	
4,1	0	0	0	-0,4	0	5,4	-3,8	-6,3	0,1	-1,3	4,7	1,41	
5,1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,5	0,3	0,09	
0	0	0	0	0	0	3,3	0	0	0	0	-0,9	0,27	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-7,9	0	3,3	0,99	
-5,8	0	-3,9	-3,7	0	0	-9,6	0	-3,2	4,9	-1,1	-0,7	0,21	
0	-6,6	2,9	-8,1	0	8,2	0	-4,5	0	-6,9	-0,7	2,3	0,69	
6,8	0	9,9	-5,8	-3	8,5	0	0	0	0	1,5	4,4	1,32	
0	0,2	0	-7,6	2,9	9,8	0	0	0	0	2,1	0,3	0,09	

3 lentelė. Matrica W

W matricos 1–15 stulpeliai														
0	0	0	0	0	0	1,5	0	0	0	0	0	0	0	0
-9,6	-9,1	8,6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1,95	0	3,15	0	0	0	0	3,4	0	0	0	0	0	0
7,9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-5,05	0	0	0	1,8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-6,7	0	0	0	0	-4,7	0	0	0	0	3,6	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	-5,8	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	0
0	0	0	0	0	-1,9	0	0	0	2,6	-8,4	0	0	0	0
3,4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1,4	0	0
0	0	0	0	0	0	0	-3,9	0	0	0	0	0	0	0
W matricos 16–30 stulpeliai														
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1,5	0	0	0	0
0	0	0	0	2,1	0	0	0	0	0	8	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-8,5	0	0	0
0	0	0	0	0	-8,8	0	0	0	0	0	0	0	0,9	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-4,8	-2,2	0	0	0	0
0	0	0	2,5	0	0	0	0	0	0	-2,5	0	0	0	0
0	0	0,9	0	0	0	0	0	0	1,5	0	0	0	0	0,85
0	-5,1	0	0	0	0	-0,3	0	5,4	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7,8	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1,6	-6,4	0	0	0	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	-0,2	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	8,3	0	0	-8,3	0	0	0	0
0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	5,8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	-4,3	0	0	0,9	0	0	0	0
0	0	3,95	4,4	0	0	0	0	0	0	0	-8,35	0	0	0
1,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1,5	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-1,9	0	0	0	0	0	0	0	0	-0,5
0	0	-4,4	0	0	0	8,3	0	0	0	0	0	0	0	0

4 lentelė. Vektorius a

Vektorius a										
1–10 koordinatės	6,2	9,63	8,78	7,06	7,19	2,66	6,79	8,19	8,13	6,82
11–20 koordinatės	8,81	3,74	1,79	1,25	8,04	6,4	3,85	1,1	7,69	9,35
21–30 koordinatės	0,28	7,65	1,49	8,5	1,8	7,73	3,6	6,67	1,2	8,1

5 lentelė. Matrica T

T matricos 1–10 stulpeliai									
0	0	0	0	6,2	-1	0	0	0	6,6
0	0	0	0	0	-0,3	0	0	0	0
0	-9,2	-6	-7,5	-8	0	0	2,2	-0,6	0
0	0	0,1	0	8,5	-0,4	0	-3,6	9,1	0
0	-5,9	0	-4,6	1,7	0	0	0	-6	-6,7
0	0	2	0	-5	2,4	-5,2	5,3	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0,8	0
0	0	-3	0	0	9	0	-5,9	-0,5	-6,3
0	0	0	0	8,2	-2,8	0	0	0	2,1
0	0	0	0	0	3,6	0	0	-4,6	-8,7
0	0	0	0,5	0	5,9	0	0	0	1,1
0	0,5	0	7,1	0	-0,3	0	-0,7	0	6,8
0	0	0	0	4,3	-5,5	0	0,6	0	-7,3
-5,6	0,3	7	0	-4	0	-0,9	0	0	0
0	0	0	0	0	-3,2	0	0	0	0
0	-5	0	0	0	-6,3	0	0	-1,1	-1,5
0	0	5,1	0	3,9	0	6	0	0	-1,3
0	0	0	0	8,8	2,4	0	0	-0,7	0
0	0	0	0	0	-2	0	0	6,3	0
0	0	1,4	0	-5	-2,7	2,7	-0,8	0	0
T matricos 11–20 stulpeliai									
0	1	0	0	-3,3	0	-4,4	0	0	0
0	0	0	0	6,2	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0,8	0,8	0	1,3	0	0
0	0	0	0	3,6	0	1,3	-8,5	0	0
0	9,3	0	0	-8,3	0	0	0	0	8,9
0	-4,7	-4,6	8,5	-1,8	0	-9,2	1,7	0	6,7
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	9,7	-8,3	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	6,8	0	0	0	0	1,4	1,5	0	0
0,6	0	9,7	0	0	-5,5	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	-7,4	0	0
0	0	-4,8	-4,2	-0,9	-1,1	-8,9	-6,6	-3,1	0
0	0	0	0	0	0	0	3,4	0	0
0	0	0	0	0	0	0	4	0	0
-7,7	0	0	0	-7,6	0	-3,3	-5,7	8	0
0	0	0	0	0	0	4,3	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-6,7	0	-3,6	0	-4,2	0	0	0