

**VILNIAUS UNIVERSITETAS  
KAUNO HUMANITARINIS FAKULTETAS**

**INFORMATIKOS KATEDRA**

Verslo informatikos studijų programa  
Kodas 62109P101

**PALAIKYTĖ RASA**

**MAGISTRO BAIGIAMASIS DARBAS**

**LOGISTINIAI KAPITALO KAUPIMO MODELIAI;  
GAMYBOS (COBB-DOUGLAS) FUNKCIJOS TYRIMAI**

Kaunas 2008

**VILNIAUS UNIVERSITETAS  
KAUNO HUMANITARINIS FAKULTETAS**

INFORMATIKOS KATEDRA

Verslo informatikos studijų programa  
Kodas 62109P101

**PALAIKYTĖ RASA**

MAGISTRO BAIGIAMASIS DARBAS

**LOGISTINIAI KAPITALO KAUPIMO MODELIAI;  
GAMYBOS (COBB-DOUGLAS) FUNKCIJOS TYRIMAI**

Leidžiama ginti \_\_\_\_\_

Magistrantas \_\_\_\_\_  
(parašas)

Darbo vadovas \_\_\_\_\_  
(parašas)

Dr. Doc. S. Girdzijauskas  
(darbo vadovo mokslinis laipsnis, pedagoginis  
vardas, vardas, pavardė)

Darbo įteikimo data \_\_\_\_\_

Registracijos Nr. \_\_\_\_\_

Kaunas 2008

## TURINYS

LENTELIŲ SĄRAŠAS.....	4
PAVEIKSLŲ SĄRAŠAS.....	5
SANTRUMPŲ SĄRAŠAS .....	6
SANTRAUKA ANGLŲ KALBA .....	7
IVADAS.....	8
1. TEORINĖ DALIS .....	10
1.1. Gamybos funkcija.....	10
1.1.1. Gamybos veiksniai.....	12
1.1.2. Gamybos veiksnys - žemė.....	13
1.1.3. Gamybos veiksnys – kapitalas.....	14
1.1.4. Gamybos veiksnys – darbas .....	15
1.1.5. Izokvantos (vienodi kiekiai).....	16
1.2. Cobb-Douglas gamybos funkcija .....	17
1.3. Logistinis kitimas .....	24
2. SIŪLOMAS LOGISTINIS COBB-DOUGLAS GAMYBOS FUNKCIJOS MODELIS.....	26
3. LOGISTINIO COBB-DOUGLAS GAMYBOS FUNKCIJOS MODELIO TYRIMAS .....	29
3.1. Eksperimento duomenys.....	29
3.2. Logistinio Cobb-Douglas gamybos funkcijos modelio sudarymas .....	34
3.2.1. Logistinio Cobb-Douglas gamybos funkcijos modelio parametrų nustatymas .....	35
3.2.2. Kapitalo augimo normos $i$ nustatymas.....	36
3.2.3. Darbo augimo normos $j$ nustatymas .....	38
3.2.4. Maksimalaus kapitalo $K_m$ ir maksimalaus darbo $L_m$ nustatymas.....	39
3.2.5. Technologinio koeficiento $A$ ir $\alpha$ nustatymas .....	40
3.3. Logistinis Cobb-Douglas gamybos funkcijos modelis.....	40
IŠVADOS.....	52
LITERATŪRA.....	53
PRIEDAI .....	56

## LENTELIŲ SĄRAŠAS

<a href="#">1 lentelė JAV kapitalo duomenys 1899 – 1922 metams</a> .....	30
<a href="#">2 lentelė JAV darbo duomenys 1899 – 1922 metams</a> .....	31
<a href="#">3 lentelė JAV gamybos išeiigos duomenys 1899 – 1922 metams</a> .....	32
<a href="#">4 lentelė JAV realių santykinų duomenų rinkinys</a> .....	33
<a href="#">5 lentelė Realaus ir eksperimento metu gauto kapitalo palyginimas</a> .....	37
<a href="#">6 lentelė Realaus ir eksperimento metu gauto darbo palyginimas</a> .....	38
<a href="#">7 lentelė Darbo reikšmės</a> .....	41
<a href="#">8 lentelė Kapitalo reikšmės</a> .....	42
<a href="#">9 lentelė Gamybos išeiigos palyginimas</a> .....	44
<a href="#">10 lentelė Sumodeliuoti kapitalo rezultatai pagal logistinio kaupimo rekurentinę funkciją</a> .....	46
<a href="#">11 lentelė Sumodeliuotos darbo reikšmės panaudojant logistinio kaupimo rekurentinę funkciją</a> .....	48
<a href="#">12 lentelė Reali išeiiga, išeiiga pagal Cobb-Douglas gamybos funkciją ir išeiiga panaudojus logistinio kaupimo rekurentines funkcijas</a> .....	50
<a href="#">13 lentelė Realių duomenų ir Cobb-Douglas funkcijos rezultatų palyginimas</a> .....	57
<a href="#">14 lentelė Visų periodų kapitalo kitimas</a> .....	58
<a href="#">15 lentelė <math>i</math> koeficiento nustatymas mažiausių kvadratų metodu</a> .....	61
<a href="#">16 lentelė Kapitalo reikšmės 8 pirmiems periodams</a> .....	63
<a href="#">17 lentelė <math>i</math> koeficiento nustatymas mažiausių kvadratų metodu 8 periodams</a> .....	63
<a href="#">18 lentelė Realaus ir bandymo metu gauto kapitalo reikšmių palyginimas 8 pirmiems periodams</a> .....	64
<a href="#">19 lentelė Kapitalo reikšmės 5 pirmiems periodams</a> .....	66
<a href="#">20 lentelė <math>j</math> koeficiento nustatymas mažiausių kvadratų metodu 8 periodams</a> .....	66
<a href="#">21 lentelė Realaus ir bandymo metu gauto darbo reikšmių palyginimas 5 pirmiems periodams</a> .....	67
<a href="#">22 lentelė Kapitalo palyginimas, kai <math>K_m</math> lygus 6000</a> .....	69
<a href="#">23 lentelė Darbo palyginimas, kai <math>L_m</math> lygus 350</a> .....	70
<a href="#">24 lentelė Logistiniai koeficientai</a> .....	71
<a href="#">25 lentelė Realių ir suprognuozuotų duomenų palyginimas</a> .....	71

## PAVEIKSLŲ SĄRAŠAS

<a href="#">1 pav. izokvantų žemėlapis .....</a>	17
<a href="#">2 pav. Realios išėigos ir gautos panaudojus Cobb-Douglas gamybos funkcija išėigos palyginimas .....</a>	34
<a href="#">3 pav. Kapitalo kitimas.....</a>	36
<a href="#">4 pav. Realaus ir su nustatytais koeficientais apskaičiuoto kapitalo palyginimas .....</a>	37
<a href="#">5 pav. Darbo kitimas .....</a>	38
<a href="#">6 pav. Realaus ir su nustatytais koeficientais apskaičiuoto darbo palyginimas .....</a>	39
<a href="#">7 pav. Realaus ir pagal logistinę funkcija paskaičiuoto darbo palyginimas.....</a>	41
<a href="#">8 pav. Realaus ir pagal logistinę funkcija gauto kapitalo palyginimas .....</a>	43
<a href="#">9 pav. JAV Gamybos išėigos rezultatai .....</a>	45
<a href="#">10 pav. Realaus kapitalo ir pagal logistinio kaupimo rekurentinę funkcija sumodeliuoto kapitalo reikšmių palyginimas .....</a>	47
<a href="#">11 pav. Realaus darbo ir pagal logistinio kaupimo rekurentinę funkcija sumodeliuoto darbo reikšmių palyginimas .....</a>	49
<a href="#">12 pav. Realios, logistinio Cobb-Douglas modelio ir Cobb-Douglas gamybos funkcijos išėigos grafinis palyginimas .....</a>	51
<a href="#">13 pav. Realaus ir bandymo metu gauto kapitalo reikšmių 8 pirmiems periodams grafinis palyginimas .....</a>	64
<a href="#">14 pav. Eksponentinis kapitalo augimas .....</a>	65
<a href="#">15 pav. Realaus ir bandymo metu gauto darbo reikšmių 5 pirmiems periodams grafinis palyginimas..</a>	67
<a href="#">16 pav. Eksponentinis darbo augimas .....</a>	68
<a href="#">17 pav. Prognozės rezultatai.....</a>	72

## SANTRUMPŲ SĄRAŠAS

doc. – docentas;

dr. – daktaras;

K – kapitalas;

L – darbas;

p./psl. – puslapis;

pan. – panašiai;

pvz. – pavyzdžiui;

Q – produkto apimtis;

t – laikas;

t.y. – tai yra;

t.t. – taip toliau;

vnt. – vienetas;

žr. – žiūrėti.

## SANTRAUKA ANGLŲ KALBA

PALAIKYTĖ, Rasa. (2008) *Logistic Models of Capital Accumulation; Research of Cobb-Douglas Production Function*. MBA Graduation Paper. Kaunas: Vilnius University, Kaunas Faculty of Humanities, Department of Informatics. 73 p.

### SUMMARY

The aim of the work is to analyze production function, Cobb-Douglas production function and create logistic Cobb-Douglas production function model using logistic functions for labour and capital evaluating.

The main tasks are to review production function and its features, analyze Cobb-Douglas function and logistic capital accumulation models. After analysing Cobb-Douglas production function and logistic accumulation models propose logistic Cobb-Douglas production function model. Measure the coefficients of this model, and use it to calculate USA production output in 1899 -1922. Compare the possibilities of Cobb-Douglas production function and logistic Cobb-Douglas production function model to calculate production output.

The methods used in the work are the following: general identification method, comparison, deduction, designing, analysis of alternatives, analysis of documents, synthesis, generalization, conversation methods, observation.

Results – after analysing Cobb-Douglas production function and logistic capital accumulation models the logistic Cobb-Douglas production function model was created. It outlines the trend of USA production output in 1899 – 1922. It is better than simple Cobb-Douglas production function, because there is no need to find the values of labour and capital every year, because it is very difficult to measure these values. Also the logistic Cobb-Douglas production function model was created by using logistic accumulation recurrent relations functions for capital and labour values modification, with which the values of production output is closer to the real output than by using simple Cobb-Douglas production function. This model is better than Cobb-Douglas production function, because its standard deviation is 41,049 and standard deviation of Cobb-Douglas production function is 42,622. Besides the sum of differences between real and modelled values' squares is lesser then using logistic model than simple Cobb-Douglas production function.-

The work comprises of 49 pages, including 25 charts and 17 images.

## IVADAS

**Tiriama problema** – kaip galima būtų optimaliai pritaikyti logistinius kapitalo kaupimo modelius gamybos funkcijai išreikšti skaičiuojant gamybos išeią.

**Problemos ištirimo lygis** – šiuo metu logistiniai kapitalo kaupimo modeliai nėra plačiai išvystyta ir išnagrinėta sritis. Apie logistinius kapitalo kaupimo modelius pagrindinę literatūrą yra aprašęs doc. S. Girdzijauskas.

**Darbo objektas** – gamybos funkcija, Cobb-Douglas gamybos funkcija, logistinės kapitalo kaupimo funkcijos, logistinis Cobb-Douglas modelis.

**Darbo tikslas** – apžvelgus gamybos funkciją ir išnagrinėjus Cobb-Douglas gamybos funkciją sudaryti logistinę Cobb-Douglas gamybos funkcijos modelį panaudojant logistines funkcijas darbo ir kapitalo įvertinimui.

Siekiant užsibrėžto tikslo, yra sprendžiami tokie **uždaviniai**:

- ✓ Apžvelgti gamybos funkciją ir jos savybes;
- ✓ Aprašyti Cobb-Douglas gamybos funkciją;
- ✓ Aprašyti logistines kapitalo kaupimo funkcijas;
- ✓ Pasiūlyti metodą gamybos išeią skaičiuoti remiantis kapitalo ir darbo įeią;
- ✓ Išanalizavus Cobb-Douglas gamybos funkcijos sudarymo principą ir pritaikius logistines funkcijas sudaryti gamybos funkcijos modelį 1899-1922 metų gamybos išeią įvertinti.
- ✓ Nustatyti logistinės Cobb-Douglas gamybos funkcijos parametrus, kuriuos naudojant būtų galima rasti gamybos išeią bei pateikti jų grafinį atvaizdavimą;
- ✓ Palyginti paprastos Cobb-Douglas funkcijos ir logistinės funkcijos modelio galimybes įvertinti gamybos išeią 1899-1922 metais;

**Darbo loginės struktūros paaiškinimas.** Darbą sudaro pradiniai puslapiai, įvadas, analitinis skyrius, siūlomo sprendimo skyrius, eksperimentinis skyrius, išvados ir baigiamieji puslapiai.

Pirmoje dalyje analizuojama gamyba, gamybos funkcija, jos savybės, Cobb-Douglas gamybos funkcija ir logistinės kapitalo kaupimo funkcijos.

Antroje dalyje apibrėžiamas siūlomas sprendimas – logistinis Cobb-Douglas gamybos funkcijos modelis.

Trečioje dalyje atliekamas logistinio Cobb-Douglas modelio sudarymas, skaičiuojami funkcijos parametrai, braižomi grafikai.



Išvados išdėstomi gauti rezultatai, kurių buvo siekiama iškeliant darbo tikslą ir apibrėžiant darbo uždavinius.

Baigiamuosius puslapius sudaro literatūra ir priedai.

**Svarbiausia naudota literatūra.** Rašant darbą buvo naudota 31 literatūros šaltinis, iš kurių 4 knygos, 7 internetiniai puslapiai ir 20 mokslinių straipsnių (publikuotų Internete). Iš naudotų šaltinių 6 yra lietuvių, 1 rusų ir 24 anglų kalba.

#### **Tyrimo metodai:**

Darbe naudoti įvairūs tyrimo metodai kurie toliau aprašyti ir paaiškinta jų paskirtis.

- ✓ Visuotinio atpažinimo metodas – temos parinkimui, tikslo ir uždavinių iškėlimui ir informacijos rinkimui.
- ✓ Pokalbio metodas – gilinant ir patikslinant gautą informaciją bei renkantis temą.
- ✓ Mokslinės literatūros analizė – informacijos šaltinių analizavimui.
- ✓ Analizės metodas – analitiniame skyriuje suskaidant analizuojamą informaciją į sudėtinės dalis;
- ✓ Dedukcija – aprašant gamybos, Cobb-Douglas gamybos funkciją, logistinius kapitalo kaupimo modelius.
- ✓ Palyginimas – lyginant gamybos funkcijų savybes bei grafikus;
- ✓ Dokumentų analizės metodas – renkant pirminius duomenis;
- ✓ Sintezės metodas – atskirų savybių, nustatytų parametru jungimas į vieną visumą;
- ✓ Alternatyvų metodas – lyginant funkcijos grafikus.
- ✓ Apibendrinimo metodas – bendrų savybių ir požymių nusakymui.
- ✓ Priežastingumo analizė – atliekant tyrimą.
- ✓ Indukcija – darant skyrių ir bendras išvadas.

**Rezultatai:** Darbe išnagrinėta gamybos funkcija, Cobb-Douglas gamybos funkcija, logistinės kapitalo kaupimo funkcijos ir jų pritaikymas Cobb-Douglas gamybos funkcijoje. Nustatyti parametrai logistinių modelių sudarymui. Sudarytas logistinis Cobb-Douglas gamybos funkcijos modelis panaudojant logistines būsimosios vertės funkcijas darbui ir kapitalui įvertinti. Jis įvertina gamybos išėigos tendencijas JAV pramonėje. Sudarytas logistinis modelis remiantis logistiniais rekurentiniais ryšiais, kuris tiksliau įvertina gamybos išėigą pagal turimą kapitalą ir darbą negu Cobb-Douglas gamybos funkcija.

**Darbo struktūra ir apimtis.** Darbą sudaro lentelių, paveikslų, santrumpų sąrašai, santrauka anglų kalba, įvadas, 3 darbo dalys, išvados, literatūros sąrašas ir priedai. Pagrindinės darbo medžiagos apimtis iki priedų yra 56 lapai, įskaitant 25 lenteles, 17 paveikslų ir 42 formules. Darbe yra 10 priedų.

# 1. TEORINĖ DALIS

Šiame skyriuje pateikiama naudojama literatūra, išskiriamos pagrindinės sąvokos, apibrėžiama tyrimo sritis, apžvelgiamos pripažintos teorijos.

Skyriuje aprašomi literatūros šaltiniai, apibūdinama gamyba, jos veiksniai, funkcija bei išskirta Cobb-Douglas gamybos funkcija ir jos savybės.

## 1.1. Gamybos funkcija

Gamybos funkcija yra esminis visų ekonomikų elementas. Gamybos funkcijos tyrimai turi gana ilgą istoriją, jie datuojami XIX amžiaus pradžia. Ekonomistai tyrinėjo ir tebetyrinėja gamybos funkcijos elementus, analizuoja jų sąveikas bei poveikį galutiniam rezultatui.

Gamybos funkcija yra vadinamas ryšys tarp gamybos veiksnių sąnaudų ir gamybos rezultatų. Internetiniame puslapyje <http://william-king.www.drexel.edu/top/Prin/txt/MPCh/firm4a.html>, kuriame analizuojama gamybos funkcija, gamyba apibrėžiama tam tikrų indelių į gamybą transformacija į išėigą. Indėliais apibrėžiami produkcijos veiksniai, kuriems priskiriami žemė, darbas, kapitalas, žaliavos, verslo paslaugos. Indėlių transformacija į išėigą negalima be technologijos. Tai reiškia, kad gamybos proceso metu, kuriame nenaudojama technologija, ribotas indėlių kiekio panaudojimas sąlygos ribotą gamybos išėigą. Ryšys tarp indėlių ir maksimalaus išėigos kiekio yra vadinamas gamybos funkcija.

Samuelson (1961, 570) teigia, kad gamybos funkcija – tai gamyboje naudojamų veiksnių pavertimas gamybos išėiga techninių žinių panaudojimo proceso metu tiek įmonės, tiek valstybės lygyje ([Samuelson P.A.](#), 1972).

Heathfield, D. F. (1972) teigia, kad gamybos funkcija yra maksimaliai išėigai gauti, technologiškai apibrėžtos gamybos proceso metu panaudojamų gamybos veiksnių matematinė išraiška. Gali būti daugybė indėlio (gamybos veiksnių) bei išėigos kombinacijų, tačiau gamybos funkcija apibrėžia tik maksimalios išėigos gavimą. Alternatyviai, gamybos funkcija gali būti apibrėžiama kaip minimalių gamybos veiksnių panaudojimas maksimaliam gamybos rezultatui gauti. Paprastai daroma prielaida, kad unikali gamybos funkcija gali būti sudaroma kiekvienai gamybos technologijai (Heathfield, D. F., 1972) (Wikipedia, 2008).

Martinkus B. (2002, psl. 30) nurodo, kad gamybos funkcija rodo maksimalią produkcijos gamybos apimtį, kurią įmonė gali pagaminti su tam tikru išteklių kiekiu. Tai galima išreikšti šia funkcija:

$$Q = f(I_1, I_2, \dots, I_n), \quad (1)$$

čia  $Q$  – produkto apimtis;

$I_1, I_2, \dots, I_n$  – gamybos išteklių panaudotas kiekis tam produktui pagaminti.

Gamybos ištekliai tam pačiam produkcijos kiekiui pagaminti gali būti jungiami daugeliu skirtingų būdų. Veiksmingiausias būdas yra toks, kuriam reikia mažiausiai išteklių. Tačiau labiausiai domina išteklių produkcijos santykis ir vertinė išraiška, pigiausias tam tikros produkcijos pagaminimo būdas. Norėdami nustatyti tam tikros produkcijos gamybos išlaidas, turime žinoti išlaidų kiekį, kainą (Martinkus B., 2002, psl. 30):

$$Q = f(K_1 I_1, K_2 I_2, \dots, K_n I_n), \quad (2)$$

čia:  $K_1 I_1, K_2 I_2, \dots, K_n I_n$  – panaudotų išteklių kainos, kurias įmonė turi sumokėti, kad gautų šiuos išteklius ir tai priklausys nuo paklausos ir pasiūlos sąveikos išteklių rinkoje (Martinkus B., 2002, psl. 30).

Kiti autoriai (Arrow, K.J., P. Dasgupta., Maler K.G., 2003, p. 647-685) pateikia kitokią gamybos funkciją, kuri yra sutinkama kur kas dažniau vartant ekonomikos teorijos vadovėlius bei mokslinius tyrimus. Gamybos rezultatai, pasiekti per tam tikrą laiką turės sekančią matematinės lygties formą:

$$Y = f(K, L, N)^t, \quad (3)$$

Pagal Samuelson (1961, 570), ši funkcija turėtų būti skaitoma taip – išeiga ( $Q$ ) yra tam tikra kapitalo ( $K$ ), darbo ( $L$ ) ir išteklių ( $N$ ) funkcija ( $f$ ) tam tikrame laiko periode (Arrow, K.J., P. Dasgupta., Maler K.G., 2003, p. 647-685).

Ši lygtis parodo tik tai, kad gamybos rezultatų kiekis yra kažkokia funkcija nuo sunaudoto išteklių kiekio (konkrečiai nuo kapitalo ir darbo sąnaudų kiekio). Gamybos funkcija yra išreikšta fiziniiais rezultatų ir sąnaudų vienetais, todėl ji yra tik prielaida ekonominei analizei, kuri operuoja piniginiiais vienetais. Tačiau negalima išvengti to darbo norint nustatyti kaštų ir pajamų funkcijas.

Vienas iš būdų gamybos funkcijai apibrėžti yra atskirų gamybos veiksmų kombinacijos ir išeigos lentelė. Kitas būdas – formulių panaudojimas gamybos funkcijai apibrėžti. Formulėmis daugiau apibrėžiama kintanti išeigos variacija, kuomet gamybos veiksmų kitimas yra minimalus, tačiau Moroney, J. R. (1972, psl. 39-51) pažymi, kad tai nėra realu. Kai kurie fiksuoti, nekintantys veiksniai,

tokie kaip darbuotojai, įrankiai, naudojami gamybos procese, gali reikšti, kad tik tam tikrų gamybos veiksnių kombinacija (ne visų gamybos veiksnių) gali įtakoti maksimalią gamybos išėigą.

Viena iš tokių formulių yra linijinė funkcija:

$$Q = a + bX_1 + cX_2 + dX_3... , \quad (4)$$

čia a, b, c ir d yra empiriškai apibrėžti parametrai.

Kita funkcija yra Cobb-Douglas gamybos funkcija (apie ją plačiau bus kalbama kitame poskyryje). Ši funkcija vadinama multiplikatyvine funkcija (Moroney, J. R., 1972, psl. 39-51).

Kiekviena įmonė ieško techniškai ir ekonomiškai efektyvių gamybos metodų. Keičiantis gamybos metodui keičiasi ir įmonės gaminamos produkcijos visuma, o keičiantis gamybos išteklių kainoms keičiasi ir gamybos išlaidos. Todėl įmonė turi efektyviai spręsti, kaip ir kada keisti esamą gamybos metodą, kad gamyba išliktų efektyvi (Martinkus B., 2002, psl. 30).

Reikėtų pažymėti, kad gamybos funkcija aprašo technologijų, o ne ekonominę elgseną. Įmonė gali maksimizuoti pelną, pagal paskaičiuotą gamybos funkciją, tačiau bendrais aspektais gamybos funkcija yra gamybinių problemų sprendimo elementas. Tai reiškia, kad modeliuojant ir skaičiuojant ilgojo laikotarpio gamybos funkciją, įmonė gali rinktis kapitalo investicijų šaltinius technologijos, kuri bus naudojama gamybos procese, įsigijimui.

Siekiant giliau išanalizuoti gamybos funkciją, reikia įvertinti jos veiksnus. Beveik visi autoriai skiria pagrindinius tris gamybos funkcijos veiksnus – žemę, kapitalą ir darbą. Sekančiuose poskyriuose bus plačiau analizuojamas kiekvienas iš šių elementų ir jo vaidmuo gamybos funkcijoje.

### **1.1.1. Gamybos veiksniai**

Norint pagaminti naujų prekių, reikalinga planinga žmogaus veikla – darbas, kuriuo jis galėtų keisti gamtos teikiamas dovanas. Taigi žmogus tik darbu sukuria materialines vertybes savo poreikiams tenkinti, naudodamas gamtoje esančias medžiagas. Todėl gamtiniai ištekliai ir sudaro vieną pagrindinių gamybos veiksnių. Tačiau tai galima padaryti, turint gamybos priemonių (pastatų, įrengimų, įrankių, prietaisų ir kt.), kurios yra naudojamos gamybos procese ir vadinamos – kapitalu. Taigi bet kurio produkto gamyboje svarbūs trys pagrindiniai veiksniai: darbas, gamtiniai ištekliai ir kapitalas.

Priklausomai nuo gamybos pobūdžio ir masto skiriasi jos veiksnių įtakingumas. Paanalizavus visus veiksnus galima suskirstyti į tris pagrindines veiksnių grupes, ekonomistų vadinamas gamybos veiksniais arba ekonominiais ištekliais: gamtinius išteklius arba žemę; darbą arba darbo jėgą; kapitalą arba gamybos priemones. Įmonės, firmos pasirenka tokį ekonomių išteklių derinį, kuris tai leidžia

padaryti, patiriant mažiausias sąnaudas. Paskutiniu metu dažnai akcentuojamas ir dar vienas – ketvirtas – gamybos veiksnys – kvalifikacija (Martinkus B., 2002, psl. 30).

### 1.1.2. Gamybos veiksnys - žemė

Ekonomistai naudoja sąvoką “**žemė**” nusakyti ne tik pačiai žemei, kaip vietai, namui ar fabrikui pastatyti, bet apibūdinti viską, kas yra gamtos duota, t.y. visus gamtos išteklius — natūraliąsias dirvos savybes, mineralines iškasenas, augaliją, žuvis, gyvūniją, saulės šviesą, vėją, vandenį. Visa tai, kas reikalinga mūsų reikmėms patenkinti, galiausiai priklauso nuo gamtos, nors, kol pasinaudojame jos došnumu, paprastai turime dar įvairiai jai pagelbėti (Кзмппбелл Р.Макконнелл, Стэнли Л.Брю, 1996).

Martinkus B. (2002, psl. 30) teigia, kad, kada kalbama apie žemę, ją reikia suprasti kaip gamybos veiksnį – gamtinius išteklius. Žemė yra natūralus gamtos veiksnys, duotas gamtos ir pati savaime nėra žmogaus veiklos rezultatas. Žemė gamybos procese gali dalyvauti trimis aspektais.

1. *Žemė kaip naudojimosi veiksnys.* Vykdančią funkciją, nuolat naudojama, ją regeneruojant, pvz., miškų ūkyje, žemės ūkyje.

2. *Žemė kaip gyvasis veiksnys.* Šiuo atveju žemė atlieka žaliavų davėjo funkciją ir šiuo atveju negali būti regeneruojama, pvz., kalnakasyba.

3. *Žemė kaip radimosi vietos veiksnys.* Čia žemė išnaudojama kaip gamybos radimosi vieta. Ji gali būti skiriama laisva ir apribota radimosi vieta, kai gamyba gali būti vykdoma tik tam tikrose klimatinėse ar tam tikras savybes turinčiose žemėse. Ypač tai pasakytina apie žemės ūkį bei gamybinę pramonę.

Bet kurios rūšies gamtiniai ištekliai yra gamybos pagrindas, nes pati gamyba yra ne kas kita, kaip gamtos teikiamų turtų pritaikymas visuomenės poreikiams. Tokių gamtinių išteklių teikia žemė arba dirva. Dirvos teikiamos medžiagos yra dvejopos: atsinaujinančios nors ir sunaudotos, o kitos – nebeatsinaujinančios. Peržengus tam tikrą ribą gamta pradeda nykti, ir išgauti iš jos turtus darosi vis kebliau ir brangiau. Vėliau gali atsitikti, kad tokios darbo ir pinigų išlaidos duos mažėjantį rezultatą.

Mažėjantis žemės derlingumas – tai tokia ekonominė situacija, kai, esant tam tikram darbo ir kapitalo kiekiui, kiekvieno papildomo žemės sklypo įtraukimas į gamybą duoda vis mažesnę derliaus prieaugį. Tai atsitinka dėl to, kad naudojamos vis mažesnio derlingumo žemės, kurių įdirbimui reikia didesnių sąnaudų.

Mažėjančio rezultatyvumo dėsnio esmė ta, kad, pridėjus daugiau kintamųjų sąnaudų prie pastoviųjų sąnaudų, išėiga iš pradžių didėja, tačiau šį procesą tęsiant, pasiekiamas toks taškas, kai iš sąnaudų vieneto išėiga ima mažėti. Šis dėsnis galioja ne tik gamtiniams ištekliams, bet ir darbui bei kapitalui.

Nuo gamtinių išteklių priklauso šalies ekonominė plėtra, t.y. gamyba. Esant pakankamiems ištekliams, sparčiau plėtojasi gamyba, nes nereikia papildomų lėšų jiems įsigyti.

Žemė ypatingos reikšmės turi ir kaip gamybos vieta. Vietovė yra patogi pirmiausia tada, kai arti yra gamybai reikalingų žaliavų ir medžiagų, netoli rinka ir kt. (Martinkus B., 2002, psl. 30).

### 1.1.3. Gamybos veiksnys – kapitalas

“**Kapitalo**” sąvoka apibūdinami visi gamyboje naudojami materialiniai ištekliai, išskyrus žemę ir darbą. Kapitalas yra žmogaus sukurtas gamybos veiksnys.

Kapitalas iš esmės apima visas “gamybos priemones”: įrengimus, mašinas, įrankius, medžiagas, kurie yra tiesiogiai naudojami gamyboje, lygiai kaip ir geležinkelius, kanalus, dokus ir kelius, kurie sudaro pastovųjį tautos kapitalą.

Praeityje sukauptas kapitalas yra naudojamas finansuoti gamybą ateičiai. Tėra vienas būdas sukaupti kapitalą — taupyti dalį pagamintos produkcijos, t.y. atidėti būsimam naudojimui dalį to, kas šiandien gaminama.

Vadinasi, kapitalo kaupimas priklauso nuo darbo ir taupymo. Šiais laikais taupomi pinigai; žmonės turintys daugiau pajamų ir nelinkę visas jas išleisti einamojo vartojimo prekėms įsigyti, patys naudoja arba skolina kitiems dalį pajamų gamybos priemonėms kurti. Apskritai pinigai yra investuojami ir jie galop virsta tokiomis gamybos priemonėmis kaip mašinos, įrengimai, fabrikai, geležinkeliai, medžiagos (Кэмпбелл Р.Макконнелл, Стэнли Л.Брю, 1996).

Martinkus B. (2002, psl. 30), kalbėdamas apie kapitalą, daugiau akcentuoja finansinę įmonės pusę, investicijas, šis autorius teigia, kad *kapitalas* – tai lėšos, naudojamos įmonės fondams ir jos veiklai finansuoti. Kapitalas kartu su darbu yra vienas svarbiausių gamybos veiksnių. Nuo jo priklauso gamybos aprūpinimas gamybos priemonėmis, žaliavomis, medžiagomis ir kt. Neturint gamybos priemonių, neįmanomas gamybos procesas.

Internete publikuojamame straipsnyje „Factors of Production“ teigiama, kapitalui piniginis ekvivalentas negali būti priskiriamas, kadangi tai nėra gamybos veiksnys, o tik priemonė gamybos veiksmui įsigyti.

Tuo tarpu, Martinkus B. (2002, psl. 30) išskiria daiktinį, piniginį ir socialinį kapitalą.

*Daiktinis kapitalas* – tai įdėtas į pagrindinius fondus (pagrindinis kapitalas) ir į apyvartines lėšas (apyvartinis kapitalas). Nuo investicijų į pagrindinius fondus priklauso gamybos techninis lygis, efektyvumas, gaminamų gaminių ar teikiamų paslaugų kokybė.

Kapitalas, kuris vadinamas *apyvartiniu*, turi būti realizuotas arba daugeliu atvejų artimiausioje ateityje paverčiamas pinigais. Jei įmonės gamybinės veiklos ciklas yra ilgesnis negu metai, tada

apyvartinėmis lėšomis vadinamas kapitalas, kuris paverčiamas pinigais per vieną apyvartos ciklą. Apyvartinės lėšos sudaro gryniesi pinigai, vertybiniai popieriai, debitoriniai įsiskolinimai, atsargos, būsimos išlaidos.

*Piniginis kapitalas* – tai finansavimo lėšos daiktinio kapitalo formavimui, t.y. pirmoji daiktinio kapitalo formavimo pakopa - gryniesi pinigai, akcijos, vertybiniai popieriai.

*Socialinis kapitalas* – žmonių socialiniams poreikiams tenkinti skirta lėšų visuma (pvz., mokyklos, ligoninėms išlaikyti ir pan.).

Šiuolaikiniai ekonomistai vis plačiau pradeda kalbėti apie „žmogiškąjį kapitalą“, kuris labai artimai susijęs su darbo jėgos ir verslumo veiksniais. Šis kapitalas turi dvi savybes, būdingas fiziniam kapitalui, būtent:

- 1) reikalauja laukti visą mokymosi laikotarpį, kol besimokantis negamina prekių ir paslaugų;
- 2) vėliau padidėja gamybinis jo pajėgumas, nes labiau išsilavinęs darbuotojas gamina daugiau ir kokybiškiau negu mažiau kvalifikuotas.

Žmogiškasis kapitalas sąlygoja tai, kad kiekvienas darbuotojas skiriasi savo produktyvumu. Darbo kokybė priklauso nuo žmogaus įgyto išsilavinimo, kvalifikacijos ir patyrimo.

Kapitalo, kaip gamybos veiksnio, efektyvumas gamyboje priklauso nuo jo investavimo tikslingumo ir pagrįstumo. *Investicijos* – tai piniginio kapitalo pavertimas į daiktinį kapitalą.

Investicijos į gamybą leidžia pagaminti daugiau prekių, suteikti paslaugų ir kelti žmonių gerovę, padidina socialines garantijas. Tai investicijos yra ekonomikos augimo indikatorius (Martinkus B., 2002, psl. 30).

#### **1.1.4. Gamybos veiksnys – darbas**

*Darbas* yra pirmoji ir svarbiausioji žmonijos egzistavimo ir tobulėjimo sąlyga. Nei gamybos veiksnys nei kapitalas, nei žemė be darbo yra neveiksmingi.

**Darbas** — tai visos fizinės ir protinės pastangos, daromos dėl atlyginimo. Pastangos, kurias daro profesionalus futbolininkas, yra darbas, nes jis tai atlieka už atlyginimą. Tuo tarpu futbolininko mėgėjo pastangos, net jei jos būtų didesnės nei profesionalo triūsas, ekonomine prasme nėra darbas. Pastangos gali būti visiškai vienodai naudingos, bet triūsai ir patarnavimai, teikiami iš meilės ar dėl potraukio, nepakliūna į ekonomikos mokslo tyrimus. Ekonomistai domisi tik viena darbo rūšimi — darbu, kuris yra atlyginamas, ir to atlyginimo dydis gali būti išreikštas pinigais (Кэмпбелл Р.Макконнелл, Стэнли Л.Брю, 1996).

Darbas gali būti klasifikuojamas pagal įvairius kriterijus:

- a) pagal poreikį: fizinis, protinis, kūrybinis;
- b) pagal išsilavinimo lygį: nekvalifikuotas, kvalifikuotas, aukštos kvalifikacijos;
- c) pagal hierarchiją: vadovaujantis, vykdomasis;
- d) pagal teisinę būklę: savarankiškas, nesavarankiškas ir t.t.

Visuomeniniu požiūriu darbas yra sąmoninga fizinė arba protinė veikla, kai dirbantysis siekia tiesiogiai ar netiesiogiai patenkinti savo poreikius.

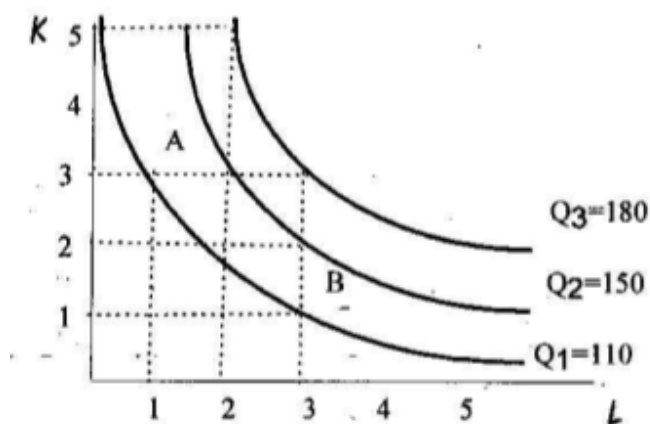
Visuomeninis darbo apibrėžimas paaiškina darbo specifiką, atsižvelgiant į pagrindinį gamybos veiksnį – žmogų – darbo jėgą. Tačiau darbo procesas neįmanomas be darbo priemonių ir darbo objekto. Todėl negalima atmesti ir kitų darbo sampratų. O kalbant apie darbo proceso analizę, reikia turėti galvoje, kad darbo procesas yra sudėtingas ekonominis – socialinis reiškinys (Martinkus B., 2002, psl. 30).

### 1.1.5. Izokvantos (vienodi kiekiai)

Gamybos funkciją galima pavaizduoti grafiškai, kapitalą atidedant vertikaliajame ašyje, o darbą – horizontaliojame.

Kiekvienas darbo ir kapitalo (mašinų) valandų derinys rodo tam tikrą gamybos apimtį. Izokvanta – tai kreivė, rodanti įvairius išteklių derinius, kuriuos naudojant pagaminamas toks pat produkcijos kiekis. Pavyzdžiui  $Q_1$  izokvanta rodo išteklių derinius, kuriuos naudojant pagaminama 110 produkcijos vienetų. Ši gamybos apimtis gali būti gauta naudojant tris kapitalo valandas ir vieną darbo valandą (A taškas) arba vieną kapitalo valandą ir tris darbo valandas (B taškas).

$Q_2$  izokvanta rodo išteklių derinius, kuriuos naudojant pagaminama 150 produkcijos vienetų. Kuo labiau izokvanta nutolus nuo koordinatinių pradžių susikirtimo taško, tuo didesnę gamybos apimtį ji rodo (Tamašauskienė Z., 2002, psl. 6).



Šaltinis: TAMAŠAUSKIENĖ, Z. (2002) Gamyba ir kaštai, p. 8.



## 1 pav. izokvantų žemėlapis

Izokvantų visuma sudaro izokvantų žemėlapi, o kiekviena izokvanta rodo maksimalią gamybos apimtį, gaunamą naudojant skirtingus išteklių derinius. Izokvantos leidžiasi žemyn (pasvirimas yra neigiamas). Tai reiškia, kad sumažinus kapitalo valandų skaičių, reikia padidinti darbo valandų skaičių, norint pagaminti tą patį produkcijos kiekį (Tamašauskienė Z., 2002, psl. 6).

### 1.2. Cobb-Douglas gamybos funkcija

Nuo gamybos funkcijos prasideda bet kokia ekonominė analizė (Humphrey T.M., 1977). Vetlov I. (2003) teigia, kad Cobb-Douglas gamybos funkcija dažniausiai naudojama struktūriniuose makroekonominiuose modeliuose, aprašant visuminės pasiūlos kreivę ir skaičiuojant potencialią gamybos (BVP) apimtį. Taikant Cobb-Douglas visuminės gamybos funkciją, gana nesunkiai atliekama ir ekonomikos augimo apskaita (Vetlov I. Baltijos saliu ekonomikos augimo apskaita // Pinigu studijos, 2003 Nr.3).

W. Cobb ir P. H. Douglas sudarė šią gamybos funkciją, atlikdami Amerikos pramonės tyrimą, kurio metu apskaičiavo darbininkų, dirbančių Amerikos pramonėje nuo 1899 iki 1922 metų ir kapitalo įtaką gamybos rezultatui ir visa tai išreiškė logaritmu (Douglas P.H., 1976, 903). Cobb-Douglas gamybos funkcija parodo fizinę išėigą, remiantis darbo ir kapitalo įeiga (Douglas P.H., 1976) ilgajame laikotarpyje. Tai reiškia, kad funkcija sukurta įvertinti gamybos išėigą per indėlius į gamybą ne trumpuoju, bet ilguoju laiko periodu (Ayres R.U. 2005).

Nors ši gamybos funkcija buvo užrašyta ir pirmą kartą panaudota 1928 m., tačiau ji turi gana ilgą priešistorę. Iki 1928 metų, kai W. Cobb ir P. H. Douglas ją sudarė, daugelis autorių stengėsi įrodyti hipotezę, kad gamybos procesus puikiai nusako tiesinė homogeninė funkcija su vieno iš substitucinių veiksnių elastingumu (Douglas P.H., 1976). Žinoma pačioje pradžioje funkcijos formavimasis ir jos įvertinimas praktikoje nepasižymėjo tokiais giliais ekonometriniais aspektais kaip dabar. Ko gero ir dabar didžiausia ekonometrinė problema, taikant gamybos funkciją yra susijusi su tuo, kad ne visi veiksniai, dalyvaujantys gamyboje, yra realiai įvertinami.

Gamybos funkcijos priešistorė siekia XIX amžiaus pradžią, o kai kuriuose šaltiniuose (Humphrey T.M., 1977) galima rasti šios funkcijos naudojimo užuominų dar net XVIII amžiuje. Žinoma, tuo metu gamybos funkcijos suvokimas buvo daugiau siejamas žemės ūkyje su derliaus prognozavimu. 1767 metais Turgot veikale „Observations on a Paper by Saint Peravy“ aiškino, kas ir kokiomis dalimis įtakoja ribinį produktyvumą – ribinę gamybą. Žinoma, tuo metu, kapitalo terminas buvo siejamas su žeme ir turimu jos plotu. Žemės ploto didėjimas sąlygojo ir bendro derliaus didėjimą,

kas reiškė, jog bendras gamybos rezultatas didėja priklausomai nuo žemės ploto didėjimo. Tačiau vėliau buvo pastebėta, kad derliaus padidėjimas, priklausomai nuo žemės yra sąlyginis reiškinys ir jei vienais metais, nekintant žemės plotui, jis būdavo maksimalus, kitais metais pasiekdavo vos minimumą.

Vėliau nei po 30 metų anglų klasikinės ekonomikos šalininkas Turgot supratimą apie gamybos funkciją išreiškė skaičiais, nors konkrečios funkcijos jis neužrašė, tačiau Thomas Malthus, žymus aritmetikas ir geometrikas, veikale „An Essay on the Principle of Population“ 1798 metais teigė, kad populiacija, jei ji nestebima, kinta geometrine progresija (1, 2, 4, 8, 16, 32 ir t.t.), o tuo tarpu maisto suvartojimas toje populiacijoje didėja aritmetine progresija (1, 2, 3, 4, 5 ir t.t.). Tokiu atveju, jeigu darbo jėgą pažymėtume  $L$ , o jos suvartojamą maisto kiekį –  $P$ , o  $t$ - įvertintume laiką, tai Malthus teoriją matematiškai būtų galima užrašyti sekančiai:

$$L = t^2, \text{ o maisto suvartojimą} - P = t + 1. \quad (5)$$

Darbo jėga ir maisto suvartojimo rodikliai Malthus teorijoje buvo priklausomi vienas nuo kito, todėl jų priklausomybę galima būtų išspręsti panaudojant logaritmą:

$$P = f(L) = 1 + \left(\frac{1}{\log 2}\right) \log L = 1 + (\text{contant}) \log L \quad (6)$$

Ši gamybos funkcija nepateikia išėigos viršutinės ribos, tačiau ji pateikia nuolat mažėjančią apatinę ribą ir darbo jėgos produktyvumo vidurkį.

Malthus padėjo pagrindą klasikiniam suvokimui apie elastingą, ilgalaikę darbo pasiūlą pragyvenimo aspekte. David Ricardo 1817 metais veikale „Principals of Political Economy and Taxation“ susiejo pirmus du supratimus apie žemės panaudojimą ir darbą, siekiant prasimaitinti. Šiuos du veiksnius jis apjungė gamybos funkcijoje  $P=f(L)$  ir teigė, kad darbas ir kapitalas bendrame rezultate turi vienodą svorį, t.y. didesniam žemės plotui apdirbti ir didesnę derlių gauti, reikalingas didesnis skaičius žmonių, dirbančių tame žemės plote.

Vėlesni suvokimai ir sampratos apie gamybos veiksnius ir jų siejimas privedė prie to, kad Thunen 1863 metais užrašė pirmąją algebrinę gamybos funkciją, kuri pakeitė geometrinę progresiją ir buvo išreikšta sekančiai:

$$p = hq^n, \quad (7)$$

čia  $p$  – darbininko indėlis;

$h$  – konstanta, apibūžianti tokius veiksnius, kaip trąšų panaudojimas ir t.t.;

$q$  – kapitalas, skirtas vienam darbininkui;

$n$  – eksponentė, kurios ribos yra nuo 0 iki 1.

Humphrey T.M. (1977) teigia, kad ši funkcija yra ne kas kita kaip Cobb-Douglas gamybos funkcija. Iš tikrųjų pati pradinė Cobb-Douglas funkcija irgi įvertino tik du veiksnius – darbą ir kapitalą, kas vėliau labai apribojo jos panaudojimą praktikoje ir paskatino naujų gamybos funkcijų atsiradimą (Akerberg D.A., Caves K., Frazer G., 2005).

Taigi, Cobb-Douglas gamybos funkciją matematiškai būtų galima užrašyti sekančiai:

$$Q = AL^{\alpha}K^{1-\alpha}. \quad (8)$$

Kiti autoriai (Charnes A., Cooper W.W., Schinnar A.P. (1976)) šią funkciją užrašo kiek kitokiu pavidalu, tačiau jos esmė išlieka nepakitusi:

$$Q = AL^{\alpha}K^{\beta}. \quad (9)$$

Tai homogeninė Cobb-Douglas funkcijos forma, kur gamybos rezultata arba išėigą, dar kitaip vadinamą produktu (Weins E. G.) įtakoja du indėliai – darbas ir kapitalas, o jų laipsnyje pateikiami  $\alpha$  ir  $\beta$  arba  $\alpha$  ir  $1-\alpha$  (priklausomai nuo formulės pateikimo) yra teigiami rodikliai, atspindintys išėigos elastingumą arba  $Q$  kitimo laipsnį priklausomai nuo kapitalo ir darbo indėlių kitimo.

Pavyzdžiui<sup>1</sup>:  $Q = 1,01 L^{0,75} * K^{0,25}$ .

Kapitalo koeficientas 0,25 parodo, kad, padidėjus kapitalo įėjimui 1%, esant kitoms sąlygoms pastovioms, išėjimas padidėtų 0,25 %. Analogiškai, pakitus darbo įėjimui 1%, išėjimas pakistų 0,75%. Pakitus ir kapitalo, ir darbo įėjimui 1%, išėjimas taip pat pakistų 1%.

Ribinės išėjimo reikšmės gali būti nustatomos atskirai kiekvienam išėjimui. Ribinis išėjimo dydis, įvertinant darbo pokytį, nustatomas taip:

$$MQ_L = \frac{dQ}{dL} = \frac{d(AL^{\alpha}K^{\beta})}{dL} = A\alpha L^{\alpha-1}K^{\beta} = AL^{\alpha}K^{\beta}\alpha L^{-1} = Q\alpha L^{-1} = \frac{\alpha Q}{L}. \quad (10)$$

Analogiškai ribinis išėjimo kintamojo dydis, įvertinant kapitalo pokytį, nustatomas taip:

---

<sup>1</sup> Pavyzdys imamas iš prof. R. Simučio „*Ekonominių procesų modeliavimo ir prognozavimo*“ paskaitų medžiagos

$$MQ_K = \frac{\beta Q}{K}. \quad (11)$$

Išėjimo kintamojo elastingumą įėjimo kintamųjų atžvilgiu nusako Cobb-Douglas funkcijos eksponenčių laipsniai.

Išėjimo kintamojo elastingumas darbo atžvilgiu nustatomas taip:

$$EQ_L = \frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{\Delta L}{L}} = \frac{\Delta Q * L}{\Delta L * Q} = \frac{\Delta Q}{\Delta L} * \frac{L}{Q} = \frac{\Delta Q}{\frac{Q}{L}}. \quad (12)$$

Pažymėtina, kad  $\frac{\Delta Q}{\Delta L} = MQ_L$  – ribinis dydis pagal darbą. Įvertinę 12 lygybę, gauname:

$$EQ_L = \frac{\frac{\alpha Q}{L}}{\frac{Q}{L}} = \frac{\alpha Q * L}{L * Q} = \alpha. \quad (13)$$

Analogiškai:

$$EQ_K = \beta. \quad (14)$$

Reikia pastebėti, kad eksponentės įgyja prasmę funkcijoje tuomet, kai jų suma lygi vienetui. Chilarescu C. Ir Vaneecloo N. (2007) teigia, kad  $\alpha$  ir  $\beta$  suma gali būti lygi vienetui tik tuo atveju, jeigu išėigos grąža (pajamos gaunamos iš produkcijos išėigos) bus laikoma pastovia. Šie autoriai teigia, kad tokiu atveju funkcijoje techniniai progresai yra neįvertinami, t.y. jie laikomi neutraliais veiksniais ir neturinčiais jokios įtakos galutiniam gamybos rezultatui. Kitaip tariant, didėjant kapitalo ir darbo jėgos efektyvumui, jų pokytis neturi jokios įtakos išėigai, t.y. kintant darbo jėgos ir kapitalo indėliui, laikoma, kad išėigos grąža yra konstanta. Tai rodo, kad, jeigu išėiga yra konstanta, vadinasi didėjant darbo jėgai, santykinai mažėja kapitalo panaudojimas ir atvirkščiai – didėjant kapitalo panaudojimui, mažėja darbo jėgos panaudojimas. Todėl buvo priimta, kad substitutinių veiksmių elastingumas yra lygus 1.

Tačiau pagrindinę Cobb-Douglas funkciją praplėtus dar vienu veiksmiu, kuris įtakoja gamybos rezultatą (išėigą) (tarkime, natūraliais resursais ir t.t.) 8 formulėje, rodančioje, kad  $\alpha=1-\beta$  arba, kad

eksponenčių suma lygi vienetui ( $\alpha + (1-\alpha) = 1$ ), atsiranda problema, kurią W.Cobb ir P.H.Douglas nustatė Amerikos pramonės tyrimo metu.

Jie nustatė, kad mokėjimų už žaliavas dalis gamybos išėgai yra labai maža, kas sąlygojo, jog žaliavų indėlis į gamybos rezultata (išėga) yra palyginti labai nežymus. Visa tai šie autoriai pateikė grafiškai. Kapitalas ir resursai tarpusavyje gana glaudžiai susiję. Jeigu nustatant kiekvieno veiksnio indėlį į išėgą, parametrai  $\alpha$  ir  $\beta$  būtų buvę apibrėžiami ekonometriškai, kaip tai daroma pastaruojų metu, jų indėlis į išėgą būtų buvęs kur kas didesnis.

Pirmasis autorius, kuris atskyrė veiksmių svarumą išėgai, buvo Robert Solow (1957). Jis atskyrė darbo jėgos kintamųjų indėlį nuo kapitalo galimumo panaudoti gamyboje indėlio į išėgą. Solow R. teigė, kad toks gamybos funkcijos pakeitimas susijęs su išėgos kitimu, priklausomai nuo indėlių į ją ir nepriklausomai nuo to, kaip tie indėliai kinta kiekvienas atskirai.

Todėl 1937 metais gamybos funkcijos išraiška buvo pakeista ir pradėta naudoti tokia jos forma:

$$Q = a L^b K^c. \quad (15)$$

Jei  $b+c = 1$ , tai pajamos dėl gamybos masto padidėjimo yra pastovios, jei  $b+c < 1$  pajamos mažėja, jei  $b+c > 1$  pajamos didėja.

Pakitus darbui ir kapitalui dydžiu  $S$ , gamybos apimtis pakis dydžiu:

$$Q = a(SL)^b (SK)^c = S^{b+c} Q. \quad (16)$$

o pokyčio ženklas priklausys nuo sumos  $(b+c)$  dydžio. Tačiau ir ši lygtis apėmė tik dviejų kintamųjų įvertinimą išėgai.

Kaip teigia Robert U. Ayres (2005), pagrindinėje Cobb-Douglas funkcijoje buvo atskirti kokybės kintamieji ir įvertinti tik du pagrindiniai – darbas ir kapitalas, ko tikrai neužtenka išsamiam tyrimui atlikti ir pagrįstoms išvadoms pateikti. Todėl, įvertindamas jų svarbą išėgai, šis autorius pateikia išsamesnę Cobb-Douglas funkciją ir užrašo ją sekančiai:

$$\begin{aligned} Y_t &= Q(A_t, H_t, K_t, G_t, L_t, F_t, R_t) \\ Y_t &= A(H_t, K_t)^a (G_t, L_t)^b (F_t, R_t)^y \end{aligned} \quad (17)$$

čia  $Y_t$  yra gamybos rezultatas arba dar kitaip vadinama išėga laike  $t$ , kurią sukuria funkcija  $Q$ , įvertinant  $K_t, L_t, R_t$  – tai kapitalo, darbo ir natūralių resursų indėlis,  $A_t$  – bendras gamybos faktorius, įvertinantis kokybės veiksmio koeficientus -  $H_t, G_t$  ir  $F_t$ .

Norint įvertinti technologinius pokyčius ir jų įtaką išėigai, į funkciją reikėjo įvesti laiko faktorių, kas ir matyti Robert U. Ayres (2005) pateikiamoje gamybos funkcijoje, kur kiekvienas veiksnis – ne tik technologiniai pokyčiai, priklauso nuo laiko faktoriaus. Robert U. Ayres (2005) gamybos funkcija yra stipriai praplėsta. Realiai Fraser I. (2002) pažymėjo, kad laiko faktorių į šią funkciją įvedė Williams 1945 metais ir gamybos funkciją užrašė sekančiai:

$$Q = A(t)L^a K^b. \quad (18)$$

Humphrey T.M. (1977), užrašydamas gamybos funkciją įtraukia net ir vietovės veiksnį, kaip galintį (bet nebūtinai) turėti, kad ir nedidelę įtaką išėigai.

Cobb-Douglas funkcija, užrašyta 15 lygtimi yra netiesinė, eksponentinė funkcija. Tačiau ji lengvai gali būti transformuojama į tiesinę, dviejų kintamųjų funkciją, ją išlogaritnavus:

$$\text{Log } Q = \log a + b \log L + c \log K. \quad (19)$$

Šios lygties koeficientų įvertinimui patogiu naudoti standartines regresinės analizės priemonės.

Pati Cobb-Douglas funkcija neapibrėžia, kurioje srityje ji yra labiausiai tinkama naudoti. Ši gamybos funkcija gali būti naudojama tiek kiekvienos konkrečios įmonės atveju, tiek industrijos ar visos šalies atveju (Khaled Abd El-Moaty Mohamed El-Shawadfy).

Bond Stephen ir Soderbom straipsnyje „*Adjustment costs and the Identification of Cobb Douglas Production function*“ (2005) Cobb-Douglas gamybos funkciją analizuoja įmonės lygmenyje, darydami prielaidą, kad dauguma arba visi indėliai į gamybos rezultatą yra tobulai lankstūs. Tokiu atveju Cobb-Douglas funkciją šie autoriai savo atveju užrašo sekančiai:

$$Y_i = A_i K_i^a L_i^b, \quad (20)$$

čia  $Y_i, K_i, L_i$  yra matuojamos gaunamo rezultato, kapitalo bei darbo charakteristikos;

$A_i$  yra gamybos charakteristika;

Kiekviena įmonė indėlį į gamybą bei gamybos rezultatą pasirenka tokį, kuris maksimaliai padidintų gaunamas įmonės pajamas.

$$R_i = PY_i - UK_i - WL_i. \quad (21)$$

Šioje formulėje minėti autoriai darė prielaidą, kad indėlio bei rezultato kainos yra vienodos visoms rinkoje veikiančioms įmonėms. Įmonė samdo darbo jėgą, kuriai turi mokėti atlyginimą  $W$  bei nuomoja kapitalą, už kurį moka  $U$  dydžio nuomą.

Makroekonominiame lygyje ekonomistai naudoja bendrinę gamybos funkciją, kad galėtų paaiškinti pajamų faktoriaus kitimą ir įvertinti technologijos pokyčių įtaką ekonominiam augimui (Humphrey T.M., 1977). Analizuojant gamybos funkciją, buvo daroma prielaida, kad kiekviena atskira industrija gali turėti atskirą, tik jai būdingą gamybos funkciją, tačiau funkcijos logaritminės formulotės panaudojimas skirtingose industrijose davė puikius rezultatus, įrodančius, kad ta pati funkcija gali būti naudojama ištirti indėlių įtaką bet kurios industrijos išėigai (Douglas P.H., 1976).

Vis tiktai, įvertinant tai, kad XX amžiaus pradžioje plačiai naudota Cobb-Douglas funkcija šiuo metu naudojama kur kas rečiau, galima būtų išskirti šios gamybos funkcijos trūkumus. Cobb-Douglas funkcijos ribotumas pasireiškia tuo, kad joje įvertinamas vieno produkto pagaminimas arba viena išėiga ir jai sukurti naudojami resursai. Ši funkcija negali būti naudojama tuo atveju, jeigu norima įvertinti kelių gamybos išėigų priklausomybę nuo indėlių (Khaled Abd El-Moaty Mohamed El-Shawadfy).

K.V. Bhanumurthy savo straipsnyje *“Arguing a case for the Cobb-Douglas production function”* pateikia tokius Cobb-Douglas funkcijos trūkumus ir tokiu būdu apibrėžia šios funkcijos naudojimo ribotumą:

1. Cobb-Douglas funkcija negali susitvarkyti su dideliu įėigos skaičiumi;
2. funkcija yra paremta ribota prielaida, kad rinkoje yra idealios sąlygos;
3. darbas ir kapitalas yra koreliuoti, ir skaičiavimai dažnai ribojami nukrypimų;
4. funkcija nėra lanksti savo forma;
5. funkcija negali išmatuoti techninio veikimo lygio ir augimo labai efektyviai.

Šiais laikais pagrindinė Cobb-Douglas funkcija naudojama kur kas rečiau. Dabar naudojamos kitos funkcijos, kurios pasirenkamos priklausomai nuo to, kuri yra patogesnė ir priimtinesnė tyrimą atliekančiam žmogui (Ayres R.U. 2005).

Pasirenkant gamybos funkcijas reiktų atsižvelgti į šiuos aspektus<sup>2</sup>:

- sąryšį tarp gamybos augimo tempo, veiksmų kiekio augimo tempo ir našumo augimo. Gamyba  $Q$  gali būti įvertinta vienetais, taip pat reikia įvertinti ir tai, kad produkto forma, sudėtis ir t.t. gali keistis;

- įvertinant darbo veiksmį, reikalinga atsižvelgti ir tinkamai įvertinti darbo valandas, darbininkų skaičių ir t.t.;

---

<sup>2</sup> Aspektai imami iš prof. R. Simučio „*Ekonominių procesų modeliavimo ir prognozavimo*“ paskaitų medžiagos

- galimas problemas, susijusias su kapitalo vertinimu (fiksiotas turtas);
- renkant duomenis laike – būtina atsižvelgti į infliaciją.

### 1.3. Logistinis kitimas

Kadangi šiame darbe yra kuriamas logistinis gamybos funkcijos modelis remiantis W. Cobb ir P. H. Douglas sudaryta gamybos funkcija JAV pramonės gamybos išėigai įvertini 1899 – 1922 metų laikotarpiui, todėl reikia apibrėžti logistinį kitimą ir jo savybes. Be to norint išsiaiškinti kitimą ir kitimo tempus, kuriais auga ne tik gamybos išėiga bet ir ištekiai – reikia apžvelgti ir eksponentinį kitimą.

Eksponentinis kitimas pasižymi tuo, kad jo augimo greitis yra proporcingas jo paties dydžiui. Todėl produktas didėja natūraliai ir augdamas duoda didėjantį prieaugį. Toks augimas akivaizdus biologinėse ir kitose populiacijose. Eksponentinio augimo dėsnis:

$$N(t)=N_0 * e^{rt}. \quad (22)$$

čia N – tam tikro produkto dydis laiko momentui t;

r – to produkto augimo greitis (pastovus dydis).

Eksponentinis augimo dėsnis duoda neapibrėžtą ir gana spartų augimą.

Realiomis sąlygomis produktas negali augti ilgą laiką didėti vienodu tempu. Didėjantis produktas yra ribojamas išorės ir vidaus veiksnių. Tai yra akivaizdu stebint uždaras biologines populiacijas: kol populiacija yra santykinai maža ir turi daug išteklių, tol jos augimo greitis didelis, o kai populiacija padidėja, o jos ištekčiai neišvengimai sumažėja, jos augimo greitis sparčiai mažėja, todėl ribotas augimas paprastai išreiškiamas logistine lygtimi (Girdzijauskas S. 2006).

Remiantis šia savybe kuriamas modelis pasižymi logistiniu kitimu, o ne eksponentiniu, tačiau reikia paminėti tai, kad eksponentinis kitimas yra susijęs su logistiniu kitimu. Augimo pradžioje eksponentiniu ir logistiniu modeliais apskaičiuotos reikšmės yra artimos. Taigi turint reikalingą reikšmių eilutę galima eksponentiniu modeliu apskaičiuoti modelio koeficientus ir juos panaudoti logistinio modelio sudarymui.

Klasikinė logistinės funkcijos išraiška yra:

$$K(x) = \frac{K}{1 + e^{-\lambda * x}}. \quad (23)$$

Ši funkcija yra apibrėžta visoje realių skaičių aibėje yra didėjanti ir kinta intervalu (0;K). kitaip tariant, visos funkcijos reikšmės yra pasiskirstę tarp dviejų horizontalių tiesių  $K(x)=0$  ir  $K(x)=K$ .



Išoriškai logistinės funkcijos grafiko centrinė dalis primena deformuotą lotynų abėcėlės raidę *S*. pažymėtina, kad argumentui (laikui) didėjant funkcija (produktas, kapitalas...) artėja prie pastovios reikšmės, lygios koeficiento  $K$  dydžiui (S. Girdzijauskas).

Dar XIX šimtmetyje, tiriant biologinių sistemų kitimą, belgų matematikas P. F. Ferchiulstas pasiūlė populiacijos diferencialinę lygtį papildyti daugikliu, turinčiu tiesiškai mažėjančios funkcijos pavidalą. Pritaikius panašų augimą ribojantį daugiklį pradinei produkto (kapitalo) kitimo diferencialinei lygčiai gaunama išraiška:

$$\frac{dK}{dt} = \left(1 - \frac{K}{K_m}\right) * \ln r * K, \quad (24)$$

čia  $K_m$  – maksimali produkto (kapitalo) reikšmė, įvertinanti didžiausias augimo galimybes.

Pertvarkius lygtį ir tariant, kad  $r=1+i$ , gauname logistinio augimo būsimąją kapitalo vertę:

$$K = \frac{K_m * K_0 * (1+i)^t}{K_m + K_0((1+i)^t - 1)} \quad (25)$$

Šiuo atveju laikoma, kad kitimas vyksta nuolatos – nenutrūkstamai, tačiau yra paplitęs diskretusis kitimas – kitimas šuoliais. Diskretųjį kitimą galima išreikšti rekurentiniais ryšiais. Eksponentinio kitimo norma išreiškiama panaudojant apribojantį daugiklį. Taigi kitimas išreiškiamas šia formule:

$$j = i * \left(1 - \frac{K_n}{K_m}\right), \quad (26)$$

čia  $j$  – logistinio kitimo norma;

$i$  – eksponentinis kitimo koeficientas;

$K_m$  – maksimali kapitalo reikšmė.

Bendra logistinio kaupimo (būsimosios vertės) rekurentinė formulė atrodytų taip:

$$K_{n+1} = K_n * \left(1 + i * \left(1 - \frac{K_n}{K_m}\right)\right), \quad (27)$$

## 2. SIŪLOMAS LOGISTINIS COBB-DOUGLAS GAMYBOS FUNKCIJOS MODELIS

W. Cobb ir P. H. Douglas sudarydami savo gamybos funkciją naudojo 1899 – 1922 metų JAV pramonės duomenis apie kapitalą, darbą ir fizinę gamybos išeią. Gamybos funkcijos sudarymui jie naudojo tokią išraišką:

$$Q = A \cdot K^\alpha \cdot L^{1-\alpha} \quad (28)$$

čia  $A$  – technologinis koeficientas;

$K$  – kapitalas;

$L$  – darbas;

$\alpha$  – gamybos koeficientas.

Jie turėdami kapitalo ir darbo duomenis nustatė  $A$  ir  $\alpha$  koeficientus, su kuriais gavo gamybos išeių rezultatai buvo arčiausiai realių to meto fizinės gamybos išeių reikšmių.

Taigi Cobb-Douglas gamybos funkciją su nustatytais koeficientais atrodė taip:

$$Q = 1,01 * K^{0,25} * L^{0,75}$$

Pagal turimus kapitalo ir darbo duomenis, kuriuos W. Cobb ir P. H. Douglas gavo iš Statistikos biuro, jie galėjo nustatyti kokia yra fizinė gamybos išeią.

Atliekamas tyrimas yra edukacinio pobūdžio, todėl su tais pačiais duomenimis, kuriuos naudojo W. Cobb ir P. H. Douglas atliekamas eksperimentas ir bandoma pritaikyti logistinius kapitalo kaupimo modelius sudarant logistinę Cobb-Douglas gamybos funkcijos modelį ir patikrinti, ar naujai sudaryti modeliai gali tiksliau nusakyti JAV pramonės išeią 1899 – 1922 metams.

Siūlomas logistinis Cobb-Douglas gamybos funkcijos modelis taip pat yra panašus į paprastą Cobb-Douglas gamybos funkciją, kadangi naudojamas ta pati išraiška:

$$Q = A \cdot K^\alpha \cdot L^{1-\alpha} \quad (27)$$

Tačiau darbo ir kapitalo įvertinimui naudojamos logistinės funkcijos:

$$K = \frac{K_0 \cdot K_m \cdot (1+i)^n}{K_m + K_0 \cdot ((1+i)^n - 1)}, \quad (29)$$

čia  $K_0$  - pradinis kapitalo kiekis;

$K_m$  – maksimali kapitalo reikšmė (ribojantis veiksnys), vertinanti didžiausias kapitalo augimo galimybes arba kapitalo išteklius;

$i$  - kapitalo augimo norma;

$n$  - skaičiuojamasis periodų skaičius.

$$L = \frac{L_0 \cdot L_m \cdot (1 + j)^n}{L_m + L_0 \cdot ((1 + j)^n - 1)}, \quad (30)$$

čia  $L_0$  - pradinis darbo kiekis;

$L_m$  - ribinis (maksimalus) darbo kiekis;

$j$  - darbo augimo norma;

$n$  - skaičiuojamasis periodų skaičius.

Įstačius kapitalo ir darbo išraiškas, gamybos funkcija būtų:

$$Q = A \cdot \left( \frac{K_0 \cdot K_m \cdot (1 + i)^n}{K_m + K_0 \cdot ((1 + i)^n - 1)} \right)^\alpha \cdot \left( \frac{L_0 \cdot L_m \cdot (1 + j)^n}{L_m + L_0 \cdot ((1 + j)^n - 1)} \right)^{1-\alpha}, \quad (31)$$

čia  $Q$ - gamybos apimtis;

$A, \alpha, \beta$ - gamybos koeficientai.

Toliau eksperimentiniame skyriuje skaičiuojami šios funkcijos koeficientai, kuriuos panaudojus funkcijoje galima gauti tiksliausias duomenis, kurie kuo mažiau skirtųsi nuo realių to meto duomenų.

Šiame modelyje nustatius koeficientus neberekės žinoti kiekvienų metų kapitalo ir darbo duomenų, kurie reikalingi skaičiuojant gamybos išėigą pagal Cobb-Douglas gamybos funkciją. Logistinis Cobb-Douglas gamybos funkcijos modelis ir yra tuo pranašesnis, kadangi savo tyrimuose W. Cobb ir P. H. Douglas turėjo nustatyti darbo ir kapitalo reikšmes, kad galėtų apskaičiuoti tų metų gamybos išėigą.

Be to remiantis logistiniais rekurentiniais ryšiais sudaromas modelis, kuris pagal turimą kiekvienų metų darbą ir kapitalą apskaičiuoja fizinę JAV gamybos išėigą 1899 – 1922 metais. Šio modelio sudarymui naudojama logistinio kaupimo (būsimosios vertės) rekurentinė formulė, pagal kurią sumodeliuojamos kapitalo ir darbo reikšmės ir įstatomos į W. Cobb ir P. H. Douglas naudotą gamybos funkciją. Taigi gaunama tokia išraiška:

$$Q = A * \left( K_n * \left( 1 + i * \left( 1 - \frac{K_n}{K_m} \right) \right) \right)^\alpha * \left( L_n * \left( 1 + j * \left( 1 - \frac{L_n}{L_m} \right) \right) \right)^{1-\alpha}, \quad (32)$$

čia  $Q$ - gamybos apimtis;

$A, \alpha, \beta$  – gamybos koeficientai;

$K_n$  – kapitalas laiko periodu  $n$ ;

$K_m$  – maksimali kapitalo reikšmė;

$i$  - kapitalo augimo norma;

$L_n$  – darbas laiko periodu  $n$ ;

$L_m$  - maksimalus darbo kiekis;

$j$  - darbo augimo norma.

Šio modelio sudarymui naudojami realūs 1899 – 1922 metų JAV pramonės duomenys, pagal kuriuos nustatomi modelio koeficientai. Jų nustatymas toliau pateikiamas kitame skyriuje.

### 3. LOGISTINIO COBB-DOUGLAS GAMYBOS FUNKCIJOS MODELIO TYRIMAS

Eksperimentiniame skyriuje aprašomi duomenys, kurie naudojami eksperimentui atlikti, pateikiama darbo eiga, aprašomi tyrimo etapai, jų vykdymas bei kilę sunkumai. Skyriaus gale pateikiami eksperimento rezultatai.

Eksperimentas yra edukacinio pobūdžio, todėl tyrimas atliekamas naudojant JAV pramonės duomenis nuo 1899 iki 1922 metų. Vertinama darbininkų, kurie dirbo JAV pramonėje tuo laikotarpiu ir kapitalo įtaka gamybos išėjai. Eksperimento metu bandoma nustatyti ar logistinėmis funkcijomis išreikšta Cobb-Douglas gamybos funkcija gali geriau įvertinti gamybos išėją nei tuo metu naudota paprasta Cobb-Douglas gamybos funkcija.

#### 3.1. Eksperimento duomenys

W. Cobb ir P. H. Douglas sudarė gamybos funkciją, atlikdami Amerikos pramonės tyrimą, kurio metu apskaičiavo darbininkų, dirbančių Amerikos pramonėje nuo 1899 iki 1922 metų ir kapitalo įtaką gamybos rezultatui ir visa tai išreiškė logaritmu (Douglas P.H., 1976, 903).

Turėdami kapitalo, darbo ir gamybos statistinius duomenis Cobb ir Douglas sudarė funkciją, kuri nusako JAV fizinę gamybos išėją priklausomai nuo kapitalo ir darbo įeigos. Funkcijai sudaryti jie naudojo tokią išraišką:

$$Q = A * L^{\alpha} * K^{\alpha-1}, \quad (33)$$

čia  $Q$  – fizinė gamybos išėjai;

$A$  – technologinis/produktyvumo koeficientas;

$L$  – darbas;

$K$  – kapitalas;

$\alpha$  ir  $\alpha-1$  – darbo ir kapitalo koeficientai.

Į bendrą kapitalo sąvoką įeina nekilnojamas turtas, į kurį įeina pastatai ir įrengimai, darbinis kapitalas, kuris apima žaliavas, prekes, reikalingas gamybos procese ir galutines prekes, bei žemė. Tačiau savo tyrime W. Cobb ir P. H. Douglas neįskaitė darbinio kapitalo ir jį atskyrė, kadangi jis yra gamybos proceso rezultatas, o ne gamybos proceso priežastis. Be to į jų skaičiavimus nebuvo įtraukiama žemė – kaip kapitalo sudedamoji dalis. Tai labai apsunkino jų eksperimentą, nes statistiniai duomenys apie kapitalą buvo pateikiami apibendrinti, apimant tiek nekilnojamą turtą, tiek žemę tiek darbinį kapitalą.

Savo skaičiavimuose jie naudojo santykinius dydžius. Toliau 1 lentelėje pateikiami duomenys apie to meto JAV kapitalą.

1 lentelė

**JAV kapitalo duomenys 1899 – 1922 metams**

<b>Metai</b>	<b>Kapitalas (mln. dolerių)</b>	<b>Santykinės kapitalo reikšmės</b>
1899	4449	100
1900	4746	107
1901	5061	114
1902	5444	122
1903	5806	131
1904	6132	138
1905	6626	149
1906	7237	163
1907	7832	176
1908	8229	185
1909	8820	198
1910	9240	208
1911	9624	216
1912	10067	226
1913	10520	236
1914	10873	244
1915	11840	266
1916	13242	298
1917	14915	335
1918	16265	366
1919	17234	387
1920	18118	407
1921	18542	417
1922	19192	431

Šaltinis: sudaryta autorės pagal Charles W. Cobb, Paul H. Douglas (1928) A Theory of Production. p. 145

Darbo sąvoka apima dirbančiųjų skaičių. Toliau lentelėje pateikiamos JAV darbo statistiniai duomenys. Į darbo reikšmes nėra įskaičiuoti administracinį darbą atliekantys darbuotojai.

2 lentelė

**JAV darbo duomenys 1899 – 1922 metams**

<b>Metai</b>	<b>Darbas (tūkstančiais)</b>	<b>Santykinės darbo reikšmės</b>
1899	4713	100
1900	4968	105
1901	5184	110
1902	5554	118
1903	5784	123
1904	5468	116
1905	5906	125
1906	6251	133
1907	6483	138
1908	5714	121
1909	6615	140
1910	6807	144
1911	6855	145
1912	7167	152
1913	7277	154
1914	7026	149
1915	7269	154
1916	8601	182
1917	9218	196
1918	9446	200
1919	9096	193
1920	9110	193
1921	6947	147
1922	7402	161

Šaltinis: sudaryta autorės pagal Charles W. Cobb, Paul H. Douglas (1928) A Theory of Production. p. 148

1899 – 1922 metų JAV gamybos išeiga yra pavaizduota žemiau esančioje 3 lentelėje. Į gamybos išeią yra įtrauktos šios sritys: maistas, drabužiai ir avalynė, cheminės medžiagos, vaistai, metalai ir metalo gaminiai, statybinės medžiagos, namų apyvokos reikmenys, baldai bei kita įvairi produkcija, tokia kaip odos, popieriaus, medienos, muilo bei tabako gaminiai.

3 lentelė

**JAV gamybos išeišos duomenys 1899 – 1922 metams**

<b>Metai</b>	<b>Gamybos išeišga (mlrd. dolerių)</b>	<b>Santykinės produkcijos reikšmės</b>
1899	350,00	100
1900	354,00	101
1901	393,10	112
1902	426,00	122
1903	433,10	124
1904	426,30	122
1905	500,40	143
1906	531,40	152
1907	533,00	152
1908	441,60	126
1909	542,20	155
1910	555,30	159
1911	535,90	153
1912	619,10	177
1913	644,20	184
1914	591,30	169
1915	661,20	189
1916	787,10	225
1917	794,50	227
1918	780,70	223
1919	763,10	218
1920	808,60	231
1921	626,40	179
1922	840,30	240

Šaltinis: sudaryta autorės pagal Charles W. Cobb, Paul H. Douglas (1928) A Theory of Production. p. 152



Norinti nustatyti lygties koeficientus W. Cobb ir P. H. Douglas panaudojo darbo, kapitalo ir gamybos fizinės išėigos statistinius duomenis, kurie apibendrintai pateikiami lentelėje, ir rado skaitines A ir  $\alpha$  reikšmes mažiausių kvadratų metodu.

4 lentelė

**JAV realių santykinių duomenų rinkinys**

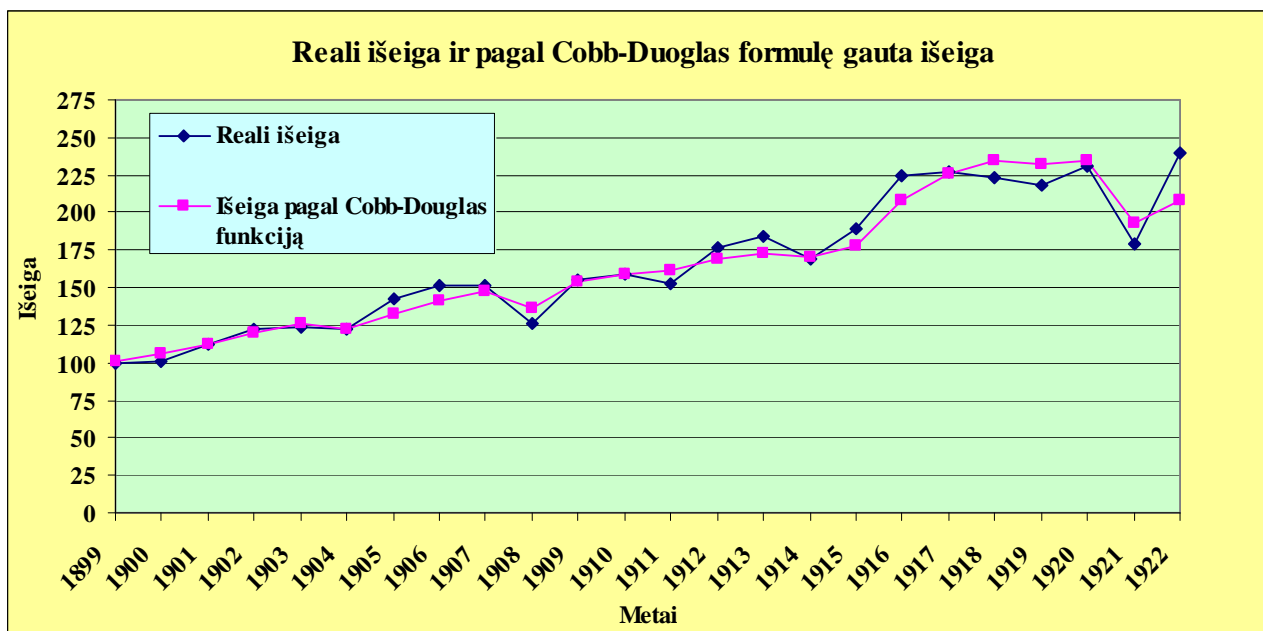
Nr.	Metai	Išeiga	Darbas	Kapitalas
1	1899	100	100	100
2	1900	101	105	107
3	1901	112	110	114
4	1902	122	118	122
5	1903	124	123	131
6	1904	122	116	138
7	1905	143	125	149
8	1906	152	133	163
9	1907	152	138	176
10	1908	126	121	185
11	1909	155	140	198
12	1910	159	144	208
13	1911	153	145	216
14	1912	177	152	226
15	1913	184	154	236
16	1914	169	149	244
17	1915	189	154	266
18	1916	225	182	298
19	1917	227	196	335
20	1918	223	200	366
21	1919	218	193	387
22	1920	231	193	407
23	1921	179	147	417
24	1922	240	161	431

Šaltinis: sudaryta autorės pagal Drucker p. F. ir Masatoshi I. (2005) Were Cobb and Douglas Prejudiced? p. 11.

W. Cobb ir P. H. Douglas nustatė, kad technologiniai pokyčiai (A) yra lygūs 1,01, o koeficientas  $\alpha$  lygus 0,25. Taigi galutinė išraiška:

$$Q = 1,01 K^{0,25} * L^{0,75}$$

Paveiksle pavaizduoti realūs to meto JAV išėigos duomenys ir išėiga, gauta panaudojus Cobb-Douglas funkciją.



2 pav. Realios išėigos ir gautos panaudojus Cobb-Douglas gamybos funkciją išėigos palyginimas

Šaltinis: sukurta autorės

Grafike pavaizduota reali išėiga, bei išėiga, kuri gaunama panaudojus Cobb-Douglas gamybos funkciją su turimais duomenimis – darbu ir kapitalu. Pagal grafiką matyti, kad Cobb-Douglas gamybos funkcija su turimomis kapitalo ir darbo reikšmėmis tiksliai atspindi gamybos išėigą. Skirtumus tarp realių duomenų ir Cobb-Douglas gamybos funkcijos rezultatų pateiktas prieduose [Žr. Priedas 1].

W. Cobb ir P. H. Douglas sudaryta gamybos funkcija yra teisinga jei yra „normalios sąlygos“, kurios reiškia, kad darbininko produktyvumo jėga arba dolerio vertė turi išlikti pastovi tam tikrą laikotarpį, be to funkcijos efektyvumas gali sumažėti skirtingais momentais, pavyzdžiui esant ekonominiams nuosmukiams ar pakilimams, esant karams ar kitokioms nenumatytoms sąlygoms.

### 3.2. Logistinio Cobb-Douglas gamybos funkcijos modelio sudarymas

Panaudojus W. Cobb ir P. H. Douglas gamybos funkcijos išraišką sudaromas naujas logistinis Cobb-Douglas gamybos funkcijos modelis, kuris yra ypatingas tuo, jog vietoje darbo ir kapitalo reikšmių naudojamos logistinės funkcijos:

Logistinė darbo funkcija:

$$L = \frac{L_0 \cdot L_m \cdot (1 + j)^n}{L_m + L_0 \cdot ((1 + j)^n - 1)}, \tag{34}$$

čia  $L_0$  - pradinis darbo (darbuotojų skaičius) kiekis;

$L_m$  - ribinis (maksimalus) darbo kiekis;

$j$  - darbo augimo norma;

$n$  - skaičiuojamasis periodų skaičius.

Logistinė kapitalo funkcija:

$$K = \frac{K_0 \cdot K_m \cdot (1+i)^n}{K_m + K_0 \cdot ((1+i)^n - 1)}, \quad (35)$$

čia  $K_0$  - pradinis kapitalo kiekis;

$K_m$  – maksimali kapitalo reikšmė;

$i$  - kapitalo augimo norma;

$n$  - skaičiuojamasis periodų skaičius.

Įstačius kapitalo ir darbo išraiškas, logistinė gamybos funkcija yra:

$$Q = A \cdot \left( \frac{K_0 \cdot K_m \cdot (1+i)^n}{K_m + K_0 \cdot ((1+i)^n - 1)} \right)^\alpha \cdot \left( \frac{L_0 \cdot L_m \cdot (1+j)^n}{L_m + L_0 \cdot ((1+j)^n - 1)} \right)^{1-\alpha}, \quad (36)$$

čia  $Q$  - gamybos apimtis;

$A, \alpha, \beta$  - gamybos koeficientai.

Logistinio Cobb-Douglas gamybos funkcijos modelio sudarymui reikalingos parametų reikšmės, kurių skaičiavimas aprašomas tolimesniuose poskyriuose.

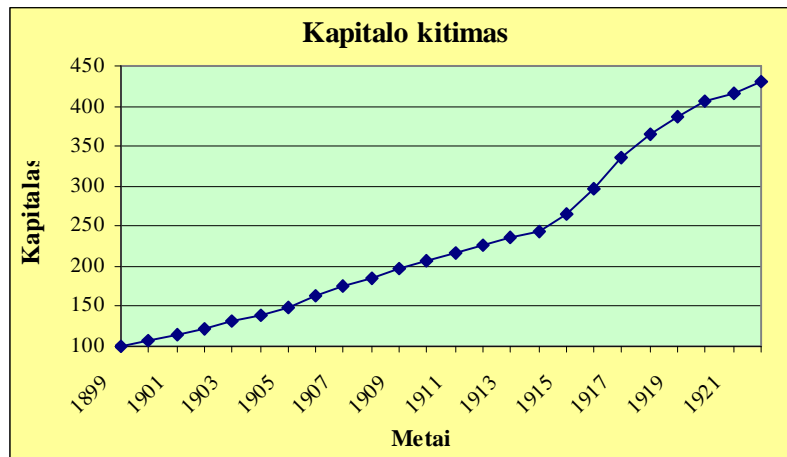
### **3.2.1. Logistinio Cobb-Douglas gamybos funkcijos modelio parametų nustatymas**

Šiame poskyryje aprašoma eksperimento eiga bei parametų nustatymas. Modelio sudarymui reikalingi šie parametrai:

- $i$  – kapitalo augimo norma;
- $j$  – darbo augimo norma;
- $K_m$  – maksimali kapitalo reikšmė;
- $L_m$  – maksimali darbo reikšmė;
- $\alpha$  – gamybos koeficientas;
- $A$  - technologinis koeficientas.

### 3.2.2. Kapitalo augimo normos *i* nustatymas

Kapitalo augimo normos *i* nustatymui reikia apsibrėžti kapitalo augimą, kadangi *i* yra kapitalo augimo greitis. Paveiksle pavaizduotas kapitalo kitimas nuo 1899 iki 1922 metų.



Šaltinis: sudaryta autorės.

**3 pav. Kapitalo kitimas**

Pagal šiuos duomenis skaičiuojamas kapitalo kitimo koeficientas. Pradiniuose skaičiavimuose buvo nustatomas kapitalo kitimas tarp kiekvieno periodo (metų) su skirtingais pradiniais kapitalais ir ieškomas vidurkis [Žr. 2 PRIEDAS]. Šių skaičiavimų rezultatai buvo atmesti, nes panaudojus gautą augimo koeficientą kapitalo kitimas neatitiko realaus kapitalo kitimo.

Taigi skaičiavimams buvo naudojamas mažiausių kvadratų metodas [Žr. 3 PRIEDAS], tačiau tolimesniuose skaičiavimuose kapitalo augimo normos *i* nustatymui imama tik pirmi 8 duomenys. Tai daroma todėl, kad pagal kapitalo kitimo grafiką (3 pav.) matosi, kad kapitalas per pirmuosius 8 periodus kinta eksponentiškai. Tiek eksponentinio, tiek logistinio augimo atveju pradinis augimas yra vienodas, t.y. augimas sutampa. Tai yra aprašyta analizės dalyje [Žr. 27 psl.]. Mažiausių kvadratų metodu buvo ieškoma tokio *i* koeficiento, kurį įstačius į regresijos lygtį, gaunami rezultatai būtų arčiausiai realių duomenų. Bandymai ir skaičiavimai yra pateikti prieduose. [Žr. 4 PRIEDAS]. Šie rezultatai buvo taip pat atmesti, nes eksponentinis augimas buvo skaičiuojamas panaudojant „MS Excel“ skaičiuoklės funkciją eksponentinio augimo nustatymui. Skaičiavimai paaiškinti prieduose [Žr. 5 PRIEDAS].

Galiausiai panaudojus programinį paketą „Statistica 6.0“ apskaičiuotas kapitalo augimo koeficientas, kuris tiksliausiai atitiko realius duomenis. Be to nustatyta tikslus pradinis kapitalas:

$$i = 0,0712;$$

$$K_0 = 99,3684;$$

Lentelėje pavaizduotas pirmųjų 8 periodų realus to meto JAV kapitalas ir kapitalas, apskaičiuotas panaudojus rastus koeficientus.

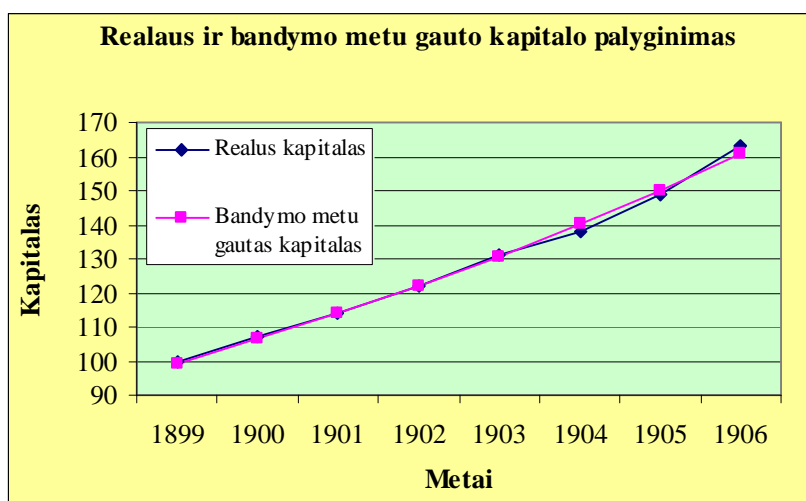
5 lentelė

#### Realaus ir eksperimento metu gauto kapitalo palyginimas

Metai	Realus kapitalas	Bandyimo metu gautas kapitalas
1899	100	99,3684
1900	107	106,4434
1901	114	114,0222
1902	122	122,1406
1903	131	130,837
1904	138	140,1526
1905	149	150,1315
1906	163	160,8208

Šaltinis: sudaryta autorės.

Paveiksle pavaizduotas 8 pirmų periodų realaus kapitalo kitimas ir su nustatytais koeficientais apskaičiuoto kapitalo kitimas.



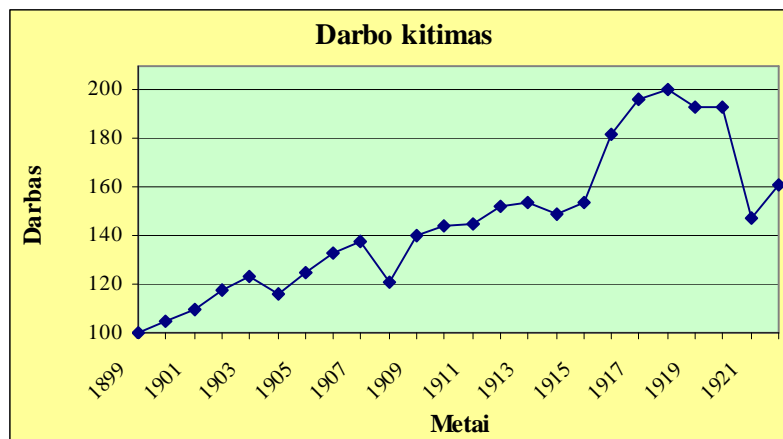
Šaltinis: sudaryta autorės.

#### 4 pav. Realaus ir su nustatytais koeficientais apskaičiuoto kapitalo palyginimas

Iš grafiko matyti, kad nustatyti koeficientai yra tikslūs, nes abu grafikai beveik identiški.

### 3.2.3. Darbo augimo normos $j$ nustatymas

Paveiksle pavaizduotas darbo kitimas nuo 1899 iki 1922 metų.



Šaltinis: sudaryta autorės.

5 pav. Darbo kitimas

$j$  – darbo kitimo koeficientas skaičiuojamas pradžioje panašiai kaip ir kapitalo kitimo koeficientas  $i$  – tik pirmiems periodams. Skaičiavimams imami pirmų 5 periodų duomenys, nes iš grafiko matosi, jog tuo metu kitimas vyksta eksponentiškai. Pirminių bandymų metu  $j$  koeficientas nustatomas mažiausių kvadratų metodu. Skaičiavimai pateikti prieduose [Žr. 6 PRIEDAS]. Toliau bandoma augimo koeficientą nustatyti panaudojant „MS Excel“ skaičiuoklės funkciją eksponentinio augimo nustatymui. Skaičiavimai paaiškinti prieduose [Žr. 7 PRIEDAS].

Galiausiai panaudojus programinį paketą „Statistica 6.0“ apskaičiuotas kapitalo augimo koeficientas, kuris tiksliausiai atitiko realius duomenis. Be to nustatyta tikslus pradinis darbas:

$$i = 0,0546;$$

$$L_0 = 99,7026;$$

6 lentelėje pavaizduotas pirmųjų 8 periodų realus to meto JAV darbas ir darbas, apskaičiuotas panaudojus rastus koeficientus.

6 lentelė

Realus ir eksperimento metu gauto darbo palyginimas

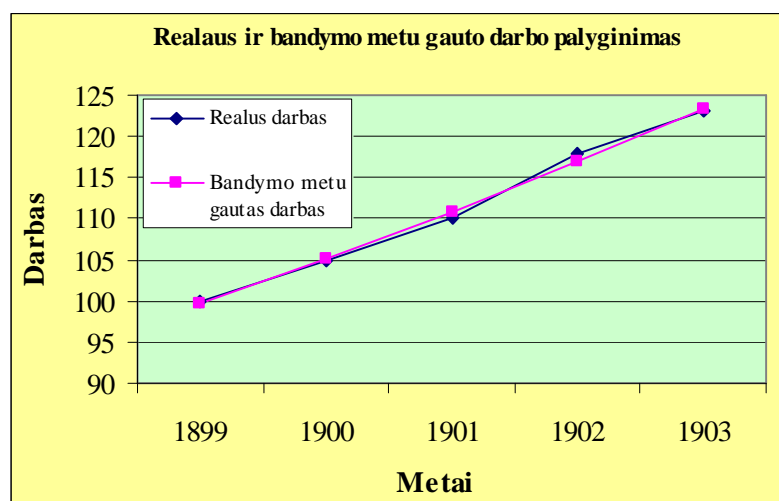
Metai	Realus darbas	Bandymo metu gautas darbas
1899	100	99,7026
1900	105	105,1464
1901	110	110,8874
1902	118	116,9418

## Realus ir eksperimento metu gauto darbo palyginimas

Metai	Realus darbas	Bandymo metu gautas darbas
1903	123	123,3268

Šaltinis: sudaryta autorės.

Paveiksle pavaizduotas 5 pirmų periodų realaus darbo kitimas ir su nustatytais koeficientais apskaičiuoto darbo kitimas.



Šaltinis: sudaryta autorės.

## 6 pav. Realus ir su nustatytais koeficientais apskaičiuoto darbo palyginimas

Iš grafiko matyti, kad nustatyti koeficientai yra tikslūs, nes abu grafikai beveik identiški.

3.2.4. Maksimalaus kapitalo  $K_m$  ir maksimalaus darbo  $L_m$  nustatymas

Panaudojus jau rastus parametrus – pradinį kapitalą  $K_0$  ir kapitalo augimo koeficientą  $i$ , kurie įstatomi į žemiau pateiktoje formulėje, ieškomas maksimalus kapitalas  $K_m$ .

$$K = \frac{K_m * 99,3684 * (1 + 0,0712)^n}{K_m + 99,3684 * ((1 + 0,0712)^n - 1)} \quad (37)$$

Pradžioje iš šios funkcijos mažiausių kvadratų metodu randamas maksimalus kapitalas, kurio reikšmė yra 6000. Skaičiavimai aprašyti prieduose [Žr. 8 PRIEDAS]. Vėliau ši reikšmė yra tiksliau apskaičiuojama panaudojus programinį paketą „Statistica 6.0“ ir maksimalus kapitalas gaunamas 6069,26.

Maksimalus darbas taip pat kaip ir maksimalus kapitalas pradžioje apskaičiuojamas mažiausių kvadratų metodu panaudojus jau rastus parametrus pagal funkciją, kuri pateikta žemiau. Skaičiavimų rezultatai pateikti prieduose [Žr. 9 PRIEDAS].

$$L = \frac{L_m * 99,7026 * (1 + 0,0546)^n}{L_m + 99,7026 * ((1 + 0,0546)^n - 1)} \quad (38)$$

Gautas maksimalus darbas yra 350, tačiau vėliau jis patikslinamas programinio paketo „Statistica 6.0“ pagalba ir gaunama reikšmė yra 303,276.

### 3.2.5. Technologinio koeficiento $A$ ir $\alpha$ nustatymas

Šių koeficientų radimui buvo panaudotas programinis paketas „Statistica 6.0“. Technologinis koeficientas  $A$  yra paliekamas toks pats, kokį naudojo W. Cobb ir P. H. Douglas savo sudarytoje gamybos funkcijoje – 1,01. Jis nepriklauso nuo kapitalo ar darbo panaudojimo, o yra veikiamas tokių dalykų kaip valdymo išlaidos ar natūralios nelaimės. Nustatyta, kad  $\alpha$  koeficiento reikšmė – 0,17.

### 3.3. Logistinis Cobb-Douglas gamybos funkcijos modelis

Radus visus reikiamus koeficientus sudaromas logistinis Cobb-Douglas gamybos funkcijos modelis. Vietoje paprastos kapitalo ir darbo išraiškos įstatomos logistinės kapitalo ir darbo funkcijos. Toliau pateikiami visi rasti koeficientai ir pagal juos sudarytos logistinės funkcijos.

$$i = 0,0546;$$

$$L_0 = 99,7026;$$

$$L_m = 303,276.$$

Taigi bendra logistinė darbo funkcija yra tokia:

$$L = \frac{303,276 * 99,7026 * (1 + 0,0546)^n}{303,276 + 99,7026 * ((1 + 0,0546)^n - 1)} \quad (39)$$

Pagal šią funkciją yra gaunamos tokios darbo reikšmės, kurios yra arčiausiai realių to meto darbo reikšmių. Toliau 7 lentelėje pateikiamas realus to meto darbas ir darbas, gautas panaudojus logistinę funkciją.

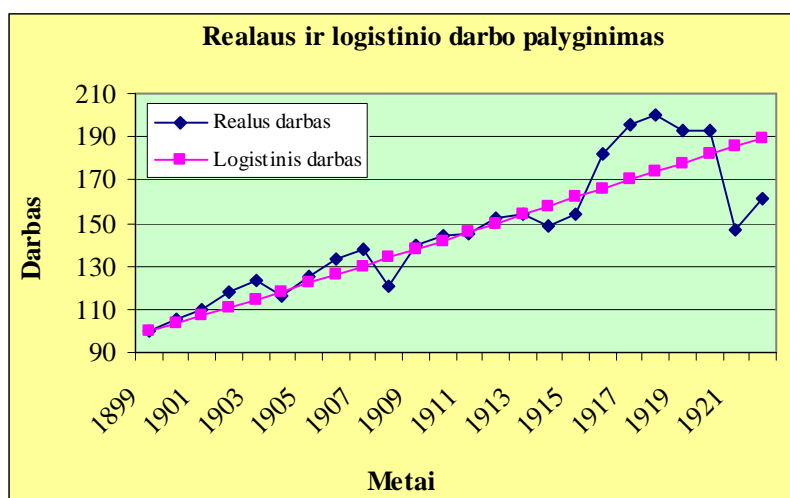


## Darbo reikšmės

Nr.	Metai	Realus darbas	Logistinis darbas
1	1899	100	99,7026
2	1900	105	103,2916128
3	1901	110	106,9418769
4	1902	118	110,6496843
5	1903	123	114,4110434
6	1904	116	118,2216932
7	1905	125	122,0771189
8	1906	133	125,9725707
9	1907	138	129,9030851
10	1908	121	133,863509
11	1909	140	137,8485248
12	1910	144	141,8526785
13	1911	145	145,8704091
14	1912	152	149,8960788
15	1913	154	153,9240046
16	1914	149	157,9484904
17	1915	154	161,9638591
18	1916	182	165,9644846
19	1917	196	169,9448229
20	1918	200	173,8994426
21	1919	193	177,8230541
22	1920	193	181,7105367
23	1921	147	185,5569642
24	1922	161	189,3576282

Šaltinis: sudaryta autorės.

Ir toliau pateikiamas šių reikšmių grafikas:



Šaltinis: sudaryta autorės.

7 pav. Realaus ir pagal logistinę funkciją paskaičiuoto darbo palyginimas

Toliau pateikti logistinės kapitalo funkcijos koeficientai:

$$i = 0,0712;$$

$$K_0 = 99,3684;$$

$$Km = 6095,26.$$

Taigi bendra logistinė kapitalo funkcija yra tokia:

$$K = \left( \frac{6065,26 * 99,3684 * (1 + 0,0712)^n}{6069,26 + 99,3684 * ((1 + 0,0712)^n - 1)} \right) \quad (40)$$

Pagal šią formulę yra gaunamos tokios kapitalo reikšmės, kurios yra arčiausiai realių to meto kapitalo reikšmių. Lentelėje pateikiamas realus to meto kapitalas ir kapitalas, gautas panaudojus logistinę funkciją.

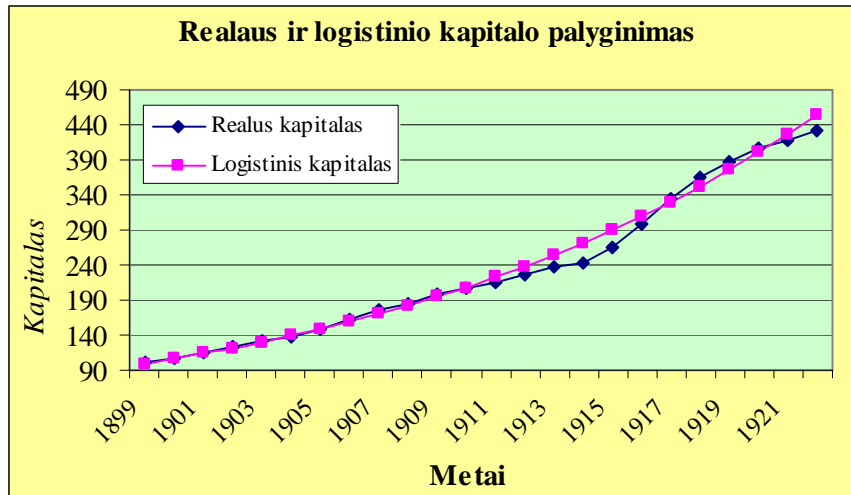
8 lentelė

#### Kapitalo reikšmės

Nr.	Metai	Realus kapitalas	Logistinis kapitalas
1	1899	100	99,3684
2	1900	107	106,3200199
3	1901	114	113,7487356
4	1902	122	121,6859587
5	1903	131	130,1649774
6	1904	138	139,2210405
7	1905	149	148,891441
8	1906	163	159,2155988
9	1907	176	170,2351411
10	1908	185	181,9939787
11	1909	198	194,5383791
12	1910	208	207,9170322
13	1911	216	222,1811089
14	1912	226	237,3843102
15	1913	236	253,5829043
16	1914	244	270,83575
17	1915	266	289,2043033
18	1916	298	308,7526048
19	1917	335	329,5472444
20	1918	366	351,6573004
21	1919	387	375,1542488
22	1920	407	400,1118398
23	1921	417	426,6059371
24	1922	431	454,7143151

Šaltinis: sudaryta autorės.

Lentelės duomenys apvaizduoti grafiškai 8 paveiksle:



Šaltinis: sudaryta autorės.

### 8 pav. Realaus ir pagal logistinę funkciją gauto kapitalo palyginimas

Iš grafiko matyti, kad gautos kapitalo reikšmės yra artimos realioms.

Panaudojus šias logistines funkcijas sudaromas logistinis Cobb-Douglas gamybos funkcijos modelis, kurio išraiška yra:

$$Q = \left( \frac{6065,26 * 99,3684 * (1 + 0,0712)^n}{6069,26 + 99,3684 * ((1 + 0,0712)^n - 1)} \right)^{0,17} * \left( \frac{303,276 * 99,7026 * (1 + 0,0546)^n}{303,276 + 99,7026 * ((1 + 0,0546)^n - 1)} \right)^{0,83}, \quad (41)$$

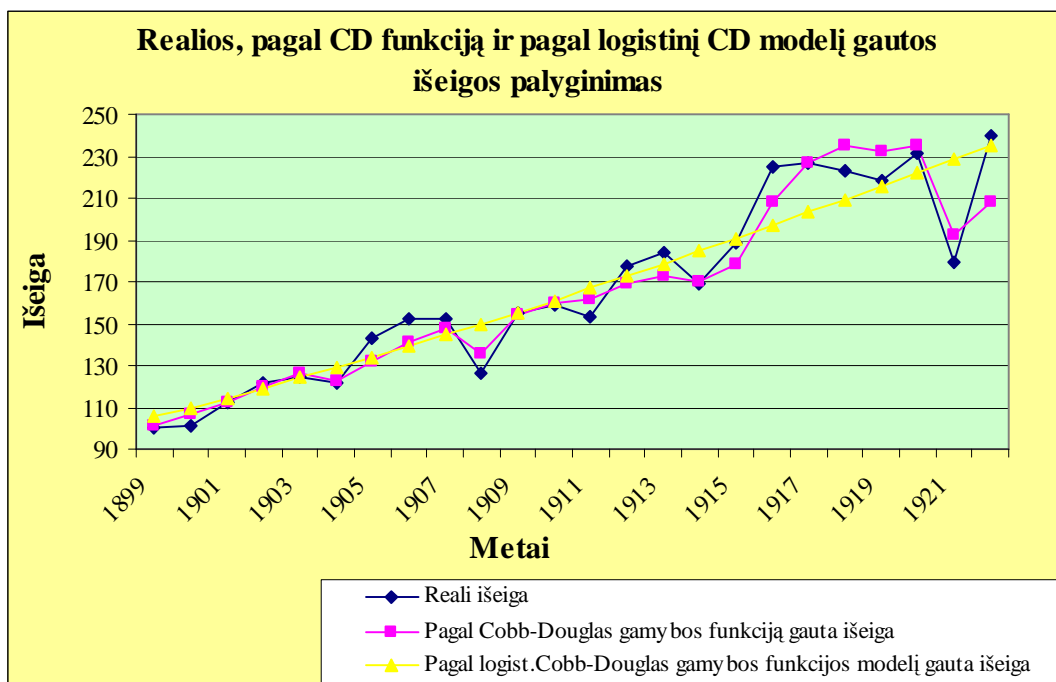
Toliau pateikiami duomenys apie realią išėigą, Cobb-Douglas gamybos funkcijos išėigą, bei išėigą, kuri gauta panaudojus prieš tai nurodytą logistinę formulę (logistinį Cobb-Douglas gamybos funkcijos modelį):

## Gamybos išėigos palyginimas

Metai	Reali išėigas	Cobb-Douglas	Logist. Cobb-Douglas	Realios ir pagal sudarytą modelį gautos išėigos skirtumas
1899	100	101	105,3796674	-5,37967
1900	101	106,5514324	109,8369415	-8,83694
1901	112	112,0965123	114,4205516	-2,42055
1902	122	120,1774091	119,129532	2,870468
1903	124	126,2025213	123,9625888	0,037411
1904	122	122,3586389	128,9180963	-6,9181
1905	143	131,9169041	133,9940964	9,005904
1906	152	141,33737	139,1882994	12,8117
1907	152	148,1183466	144,4980877	7,501912
1908	126	135,8949548	149,9205211	-23,9205
1909	155	154,1997601	155,4523454	-0,45235
1910	159	159,4443288	161,0900021	-2,09
1911	153	161,7934044	166,8296406	-13,8296
1912	177	169,5239935	172,6671323	4,332868
1913	184	173,0572966	178,5980864	5,401914
1914	169	170,2387931	184,6178667	-15,6179
1915	189	178,3127195	190,7216105	-1,72161
1916	225	207,9356627	196,9042477	28,09575
1917	227	226,3469408	203,1605206	23,83948
1918	223	234,9438828	209,4850052	13,51499
1919	218	231,9621347	215,872131	2,127869
1920	231	234,9026725	222,3162021	8,683798
1921	179	192,6829952	228,811417	-49,8114
1922	240	207,9984499	235,3518884	4,648112

Šaltinis: sudaryta autorės.

Ir pateikiamas šių reikšmių grafikas:



Šaltinis: sudaryta autorės.

### 9 pav. JAV Gamybos išėigos rezultatai

Taigi pagal gautą logistinį modelį reikšmės nėra labai tikslios, kadangi grafikas yra suglotnintas ir atspindi labiau gamybos išėigos tendencijas nei tikslias reikšmes. Tačiau modelis yra pranašus tuo, kad skaičiavimams nereikalingi kiekvienų metų kapitalo ir darbo duomenys, kuriuos W. Cobb ir P. H. Douglas naudojo savo skaičiavimuose.

Kad būtų aiškesnės šio modelio galimybės, prieduose aprašomas tokiu pat principu sudarytas logistinis modelis 1899-1917 metams, pagal kurį atliekama prognozė 1818-1822 metams [Žr. 10 PRIEDAS]. Rezultatai parodė, kad modelis tiksliai atspindi realius duomenis 4 periodams iš 5, kadangi 1921 metais buvo staigus gamybos išėigos šuolis žemyn.

Įvertinant tai, kad sudarytas modelis įvertina tolydų kitimą ir daroma prielaida, kad gamybos išėiga didėja nuolatos toliau bandoma sudaryti logistinį modelį remiantis rekurentiniais ryšiais.

W. Cobb ir P. H. Douglas savo tyrimuose naudojo jau turimus to meto darbo ir kapitalo duomenis ir pagal juos apskaičiavo gamybos išėigą. Taigi sudaromas rekurentiniais ryšiais paremtas modelis, kuris taip pat apskaičiuoja gamybos išėigą naudojant tų metų darbo ir kapitalo reikšmes. Kaip ir W. Cobb ir P. H. Douglas panaudoję kapitalo ir darbo reikšmes jas modifikavo (pakėlė laipsniu), taip ir panaudojant rekurentinių ryšių funkciją kapitalo ir darbo reikšmės yra modifikuojamos ir taip pat pakeliamos laipsniu. Bendra išraiška atrodo taip:

$$Q = 1,01 * \left( K \left( 1 + i \left( 1 - \frac{K}{K_m} \right) \right) \right)^\alpha * \left( L \left( 1 + j \left( 1 - \frac{L}{L_m} \right) \right) \right)^{\alpha-1}, \quad (42)$$

čia  $Q$  – gamybos išeiga;

$K, L$  – kapitalo ir darbo reikšmė;

$K_m, L_m$  – maksimalios kapitalo ir darbo reikšmės;

$i, j$  – kapitalo ir darbo kitimas.

Šio modelio sudarymui taip pat reikalingas parametrų nustatymas.

Toliau pateikiami detalūs skaičiavimai, kur pirmiausia sumodeliuojamos kapitalo reikšmės, po to darbo reikšmės ir randamas  $\alpha$  koeficientas.

Maksimalus kapitalas imamas iš prieš tai atliktų skaičiavimų 6095,26. 10 lentelėje pateikiamos sumodeliuotos kapitalo reikšmės, panaudojant logistinio kaupimo rekurentinę formulę. Toliau šios reikšmės bus keliamos atitinkamu laipsniu. Kapitalo reikšmių modeliavimui naudojama funkcija yra:

$$K_{sumodeliuotos} = K * \left( 1 + i \left( 1 - \frac{K}{K_m} \right) \right) = K * \left( 1 + 0,0712 \left( 1 - \frac{K}{6095,26} \right) \right) \quad (43)$$

10 lentelė

#### Sumodeliuoti kapitalo rezultatai pagal logistinio kaupimo rekurentinę funkciją

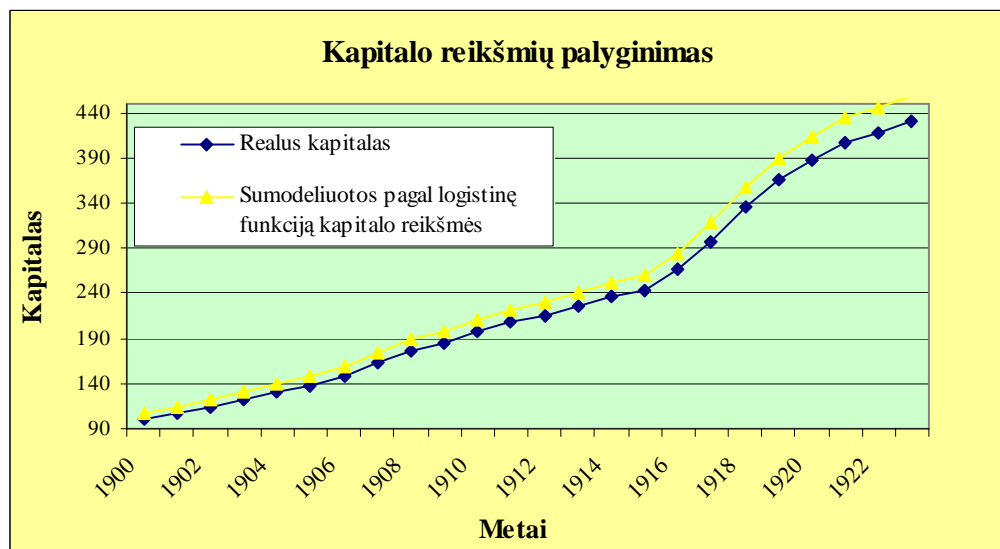
Metai	Realus kapitalas	Logistinis augimas ( $i*(1-K/K_m)$ )	Sumodeliuotas kapitalas pagal logistinę funkciją
1899	100	0,0700319	107,0032
1900	107	0,0699501	114,4847
1901	114	0,0698683	121,965
1902	122	0,0697749	130,5125
1903	131	0,0696698	140,1267
1904	138	0,069588	147,6031
1905	149	0,0694595	159,3495
1906	163	0,069296	174,2952
1907	176	0,0691441	188,1694
1908	185	0,069039	197,7722
1909	198	0,0688871	211,6396
1910	208	0,0687703	222,3042
1911	216	0,0686769	230,8342
1912	226	0,06856	241,4946
1913	236	0,0684432	252,1526
1914	244	0,0683498	260,6773
1915	266	0,0680928	284,1127
1916	298	0,067719	318,1803

## Sumodeliuoti kapitalo rezultatai pagal logistinio kaupimo rekurentinę funkciją

Metai	Realus kapitalas	Logistinis augimas ( $i*(1-K/K_m)$ )	Sumodeliuotas kapitalas pagal logistinę funkciją
1917	335	0,0672868	357,5411
1918	366	0,0669247	390,4944
1919	387	0,0666794	412,8049
1920	407	0,0664457	434,0434
1921	417	0,0663289	444,6592
1922	431	0,0661654	459,5173

Šaltinis: sudaryta autorės.

Paveiksle pateikiamas grafinis reikšmių išsidėstymas.



Šaltinis: sudaryta autorės.

**10 pav. Realus kapitalo ir pagal logistinio kaupimo rekurentinę funkciją sumodeliuoto kapitalo reikšmių palyginimas**

Toliau pavaizduotas darbo reikšmių modeliavimas. Maksimalus darbas imamas 303,276. 14 11 lentelėje pateikiami rezultatai modeliavimui panaudojant logistinio kaupimo rekurentinę formulę. Toliau šios reikšmės kaip ir sumodeliuotos kapitalo reikšmės bus keliamos atitinkamu laipsniu. Darbo reikšmių modeliavimui naudojama funkcija yra:

$$L_{\text{sumodeliuotos}} = L * \left( 1 + j \left( 1 - \frac{L}{L_m} \right) \right) = L * \left( 1 + 0,0546 \left( 1 - \frac{L}{303,276} \right) \right) \quad (44)$$

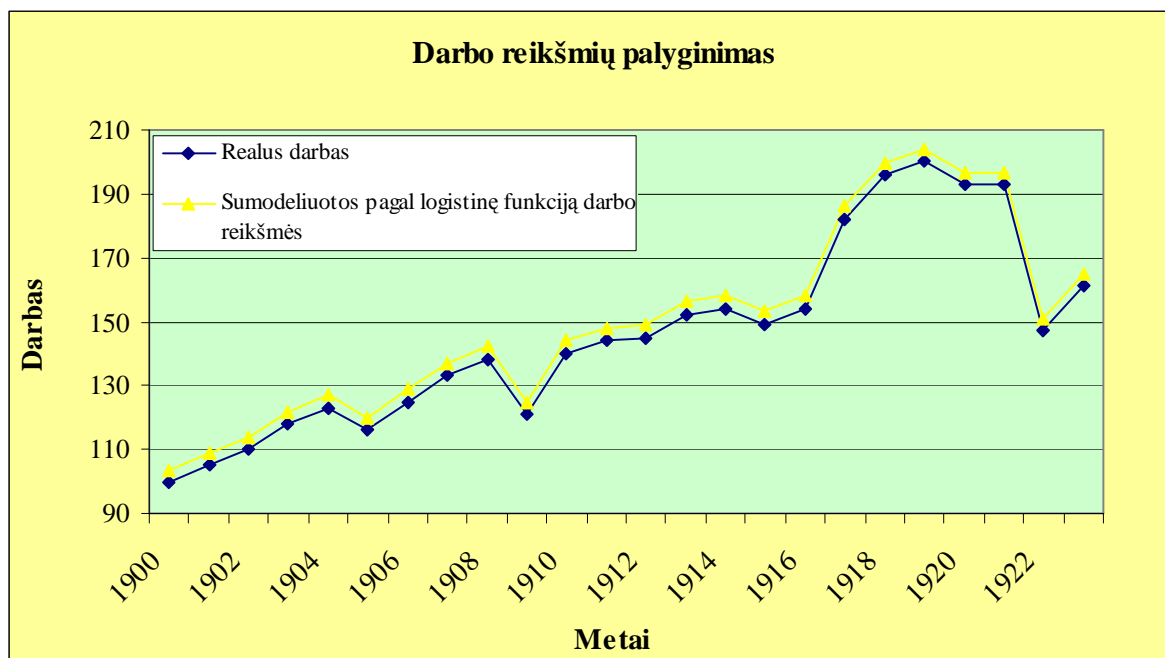
## Sumodeliuotos darbo reikšmės panaudojant logistinio kaupimo rekurentinę funkciją

Metai	Darbas	Logistinis augimas ( $i^*(1-L/L_m)$ )	Sumodeliuotas darbas pagal logistinę funkciją
1899	100	0,0365966	103,6597
1900	105	0,0356964	108,7481
1901	110	0,0347963	113,8276
1902	118	0,033356	121,936
1903	123	0,0324558	126,9921
1904	116	0,0337161	119,9111
1905	125	0,0320957	129,012
1906	133	0,0306555	137,0772
1907	138	0,0297553	142,1062
1908	121	0,0328159	124,9707
1909	140	0,0293952	144,1153
1910	144	0,0286751	148,1292
1911	145	0,0284951	149,1318
1912	152	0,0272348	156,1397
1913	154	0,0268748	158,1387
1914	149	0,0277749	153,1385
1915	154	0,0268748	158,1387
1916	182	0,0218338	185,9738
1917	196	0,0193133	199,7854
1918	200	0,0185932	203,7186
1919	193	0,0198534	196,8317
1920	193	0,0198534	196,8317
1921	147	0,028135	151,1358
1922	161	0,0256145	165,1239

Šaltinis: sudaryta autorės.

Paveiksle pateikiamas grafinis reikšmių išsidėstymas.





Šaltinis: sudaryta autorės.

**11 pav. Realaus darbo ir pagal logistinio kaupimo rekurentinę funkciją sumodeliuoto darbo reikšmių palyginimas**

Su sumodeliuotomis kapitalo ir darbo reikšmėmis sudaroma Cobb-Douglas gamybos funkcija. Pagal turimus duomenis nustatytas  $\alpha$  koeficientas, kurio reikšmė lygi 0,18.

Taigi bendra logistinės Cobb-Douglas gamybos funkcijos modelio išraiška panaudojus rekurentinius ryšius atrodo taip:

$$Q = 1,01 * K \left( 1 + 0,0712 \left( 1 - \frac{K}{6095,26} \right) \right)^{0,18} * L \left( 1 + 0,0546 \left( 1 - \frac{L}{303,276} \right) \right)^{0,82} \quad (45)$$

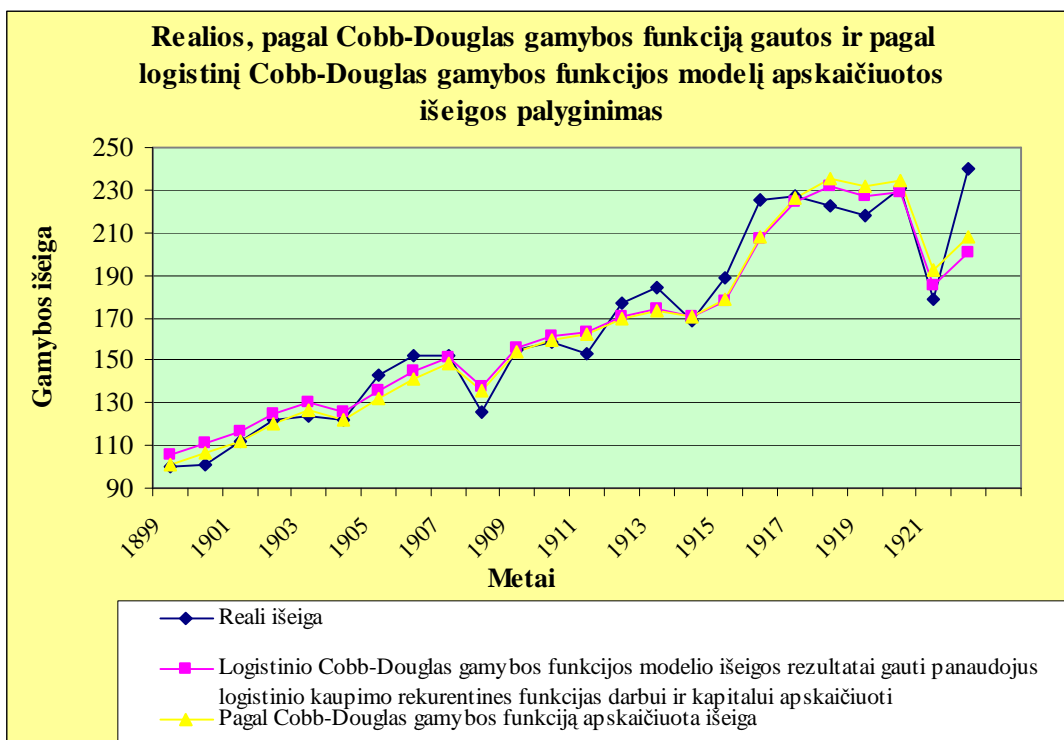
Toliau pateikiami realios išėigos rezultatai, logistinio Cobb-Douglas gamybos funkcijos modelio išėigos rezultatai gauti panaudojus logistinio kaupimo rekurentines funkcijas kapitalo ir darbo reikšmėms apskaičiuoti bei pagal Cobb-Douglas gamybos funkcijos išraišką gauti rezultatai.

**Reali išeiga, išeiga pagal Cobb-Douglas gamybos funkciją ir išeiga panaudojus logistinio kaupimo rekurentines funkcijas**

<b>Metai</b>	<b>Reali išeiga</b>	<b>Sumodeliuota išeiga</b>	<b>CD išeiga</b>
1899	100	105,3297	101
1900	101	110,9137	107
1901	112	116,4841	112
1902	122	124,7562	120
1903	124	130,6831	126
1904	122	125,9869	122
1905	143	135,637	132
1906	152	144,913	141
1907	152	151,3918	148
1908	126	137,7233	136
1909	155	156,5814	154
1910	159	161,6071	159
1911	153	163,6591	162
1912	177	171,3245	170
1913	184	174,5253	173
1914	169	171,1194	170
1915	189	178,5277	178
1916	225	208,0104	208
1917	227	225,3772	226
1918	223	232,8322	235
1919	218	228,8389	232
1920	231	231,0307	235
1921	179	187,3847	193
	240	200,5118	208

Šaltinis: sudaryta autorės.

Grafiškas išeišos palyginimas pavaizduotas 12 paveiksle.



Šaltinis: sudaryta autorės.

**12 pav. Realios, logistinio Cobb-Douglas modelio ir Cobb-Douglas gamybos funkcijos išeišos grafinis palyginimas**

Palyginus Cobb-Douglas gamybos išeišą ir išeišą gautą pagal logistinį Cobb-Douglas gamybos funkcijos modelį panaudoja logistines funkcijas darbo ir kapitalo duomenims sumodeliuoti gaunamas rezultatas yra geresnis pritaikius pastarąjį (logistinį), kadangi šiuo atveju gaunamas mažesnis standartinis nuokrypis bei skirtumų kvadratų suma yra mažesnė. Standartinis nuokrypis gaunamas 41,049, o pagal paprastą Cobb-Douglas gamybos funkciją apskaičiuotos išeišos standartinis nuokrypis yra 42,622. Atitinkamai skirtumų kvadratų suma tarp realios ir apskaičiuotos išeišos yra 1364 ir 1591. Taigi galima teigti, kad panaudojus logistines funkcijas Cobb-Douglas gamybos funkcijoje galima tiksliau apskaičiuoti gamybos išeišą, nei naudojant paprastą Cobb-Douglas gamybos funkciją su tais pačiais duomenimis.

## IŠVADOS

1. Išanalizavus gamybos, Cobb-Douglas gamybos funkciją bei logistines kapitalo kaupimo funkcijas pasiūlytas logistinis Cobb-Douglas gamybos funkcijos modelis, kuris įvertina gamybos išėigą panaudojant logistines funkcijas įėigos - darbo ir kapitalo skaiėiavimui.

2. Logistinis Cobb-Douglas gamybos funkcijos modelis sudarytas apskaiėiavus modelio koeficientus remiantis 1899-1922 metų JAV pramonės duomenis, kuriuos W. Cobb ir P. H. Douglas naudojo savo gamybos funkcijai sudaryti.

3. Modelis yra tolydusis, todėl skirtas tendencijoms nustatyti, o ne tiksliai išėigai įvertinti. Jis yra pranašesnis nei paprasta Cobb-Douglas funkcija, kadangi gamybos išėigos įvertinimui nereikia turėti kiekvieno periodo (kiekvienų metų) kapitalo ir darbo reikšmių, kurių reikia gamybos išėigai įvertinti naudojant Cobb-Douglas gamybos funkciją.

4. Pasitelkus logistinio kaupimo rekurentinių ryšių funkcijas sudarytas logistinis Cobb-Douglas gamybos funkcijos modelis, kuris įvertina gamybos išėigą pagal turimą kapitalą ir darbą. Panaudojus logistinio kaupimo rekurentinių ryšių funkcijas kapitalo ir darbo reikšmių modeliavimui ir įstaėius jas į Cobb-Douglas gamybos funkcijos išraišką gaunami išėigos rezultatai yra tikslesni nei panaudojus Cobb-Douglas gamybos funkciją gamybos išėigai gauti.

5. Logistinis Cobb-Douglas gamybos funkcijos modelis panaudojant logistines rekurentinių ryšių funkcijas yra tikslesnis nei Cobb-Douglas gamybos funkcija, kadangi pagal šį logistinį modelį gautų išėigos rezultatų standartinis nuokrypis nuo realių duomenų yra 41,049, o pagal Cobb-Douglas gamybos funkciją gautos išėigos rezultatų standartinis nuokrypis yra 42,622. Be to realios ir pagal logistinį modelį gautos išėigos skirtumų kvadratų suma yra mažesnė – 1364, o realios ir pagal Cobb-Douglas gamybos funkciją gautos išėigos – 1591.

## LITERATŪRA

1. Akerberg D.A., Caves K., Frazer G. (2005) Structural Identification of Production Functions [interaktyvus]. [žiūrėta 2007 m. rugsėjo 6 d.]. Prieiga per internetą: <<http://sticerd.lse.ac.uk/seminarpapers/ei06032006.pdf>>
2. Arrow, K.J., P. Dasgupta., Maler K.-G. (2003) Evaluating Projects and Assessing Sustainable Development in Imperfect Economies. Iš *Environmental and Resource Economics*, vol 26, Nr. 4, p. 647-685.
3. Ayres Robert.U. (2005) Economic Growth [interaktyvus]. Centre for the Study of African Economies [žiūrėta 2007 m. rugsėjo 6 d.]. Prieiga per internetą: <<http://www.cge.nevora.pt/aspo2005/absom/ASPO2005-Ayres.pdf>>
4. Bhanumurthy K.V. (2002) Arguing a case for the Cobb-Douglas production function. Iš *Review of Commerce Studies* [interaktyvus]. University of Delhi, Delhi School of Economics [žiūrėta 2007 m. sausio 5d.]. Prieiga per internetą: <<http://129.3.20.41/eps/em/papers/0409/0409012.pdf>>
5. Bond S. ir Soderbom M. (2005) Adjustment costs and the Identification of Cobb Douglas Production function [interaktyvus]. Institute for Fiscal Studies and Nuffiel College, Oxford [žiūrėta 2007 m. spalio 8 d.] Prieiga per internetą: <[http://www.nuff.ox.ac.uk/economics/papers/2005/W4/bsprod\\_jan31.pdf](http://www.nuff.ox.ac.uk/economics/papers/2005/W4/bsprod_jan31.pdf)>
6. Charles W. Cobb; Paul H. Douglas (1928) A Theory of Production. Iš *The American Economic Review*, Vol. 18, Nr. 1, pp. 139-165.
7. Charnes A., Cooper W.W., Schinnar A.P. (1976) A Theorem on Homogeneous Functions and Extended Cobb-Douglas Forms. Iš *Economic Sciences* [interaktyvus], vol.73, Nr. 10 [žiūrėta 2007 m. spalio 8 d.], p. 3747-3748. Prieiga per internetą: <<http://www.pnas.org/cgi/reprint/73/10/3747?maxtoshow=&HITS=10&hits=10&RESULTFORM AT=&fulltext=samuelson+paull&searchid=1&FIRSTINDEX=210&resourcetype=HWCIT>>
8. Chilarescu C., Vaneecloo N. (2007) A Stochastic approach to the Cobb-Douglas Production Function. Iš *Economic Bulletin* [interaktyvus]., vol. 3, Nr. 9 [žiūrėta 2007 m. spalio 8 d.], p. 1-8. Prieiga per internetą: <<http://ideas.repec.org/a/ebl/ecbull/v3y2007i9p1-8.html>>
9. Douglas P.H. (1948) Are There Laws of Production? Iš *American Economic Review*, vol. XXXVIII, p. 1-41
10. Douglas P.H. (1976) The Cobb-Douglas Production Function Once Again: Its History, Its Testing and Some New Empirical Values. Iš *The journal of Political Economy*, vol.84, Nr. 5, p.903-916

11. Drucker P. F. ir Masatoshi I. (2005) Were Cobb and Douglas Prejudiced? A Critical Re-analysis of their 1928 Production Model Identification [interaktyvus]. Graduate School of Management; Versija 2.2 Vasario 19, p. 11 [žiūrėta 2007 m. spalio 8 d.]. Prieiga per internetą: <[http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=669621](http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=669621)>
12. Fraser I. (2002) The Cobb-Douglas Production Function: An Antipodean Defence? Iš *Economic Issue* [interaktyvus], vol. 7, I dalis [žiūrėta 2007 m. spalio 8 d.], p. 39-58. Prieiga per internetą: <<http://www.econ.iastate.edu/tesfatsi/ProductionCobbDouglasFct.EmpValid.Fraser.pdf>>
13. Girdzijauskas S. (2006) Logistinė kapitalo valdymo teorija: Determinuotieji metodai. Vilnius: Vilniaus universiteto leidykla. (Vilnius : Spauda). 232 p. ISBN 9986–19–825–9
14. Girdzijauskas S., Štreimikienė D. (2007) Logistinės funkcijos taikymas ribinių dydžių dėsningumų analizėje [interaktyvus]. Vilniaus universiteto leidykla. 45 psl. [žiūrėta 2007 m. sausio 5d.]. Prieiga per internetą: <<http://www.leidykla.eu/fileadmin/Ekonomika/78/str3.pdf>>
15. Heathfield, D. F. (1971) Production Functions.-Macmillan studies in economics: Macmillan Press, New York.
16. Humphrey T. M. (1997) Algebraic Production Functions and Their Uses Before Cobb-Douglas. Iš *Economic Quarterly* [interaktyvus], vol. 83 Nr. 1 [žiūrėta 2007 m. spalio 8 d.], p. 51-83. Prieiga per internetą: <[http://www.richmondfed.org/publications/economic\\_research/economic\\_quarterly/pdfs/winter1997/humphrey.pdf](http://www.richmondfed.org/publications/economic_research/economic_quarterly/pdfs/winter1997/humphrey.pdf)>
17. Кзмпбелл Р. Макконнелл, Стэнли Л.Брю. (1996) Экономика (принципы, проблема и политика). Москва: “Москва”. p. 4.
18. Khaled Abd El-Moaty Mohamed El-Shawadfy (2007) As Estimation of Cobb-Douglas production Function in Egyptian Tourism Sector [interaktyvus]. Zagazig University [žiūrėta 2007 m. rugsėjo 6 d.] Prieiga per internetą: <<http://interstat.statjournals.net/YEAR/2007/articles/0705003.pdf>>
19. McCain R., A. Production function [interaktyvus]. [žiūrėta 2008 m. kovo 16 d.]. Prieiga per internetą: <<http://william-king.www.drexel.edu/top/Prin/txt/MPCh/firm4a.html>>
20. Malthus T. R. (1999) An Essay on the Principle of Population [interaktyvi knyga]. Oxford University Press. 208 psl. ISBN 0192837478 [žiūrėta 2007 m. sausio 5d.]. Prieiga per internetą: <<http://books.google.lt/books?id=Yxoe-sECHNgC&dq=an+essay+on+the+principle+of+population&pg=PP1&ots=MX83KvKlIK&sig=pHe9WeElpPhBFV-48rPQNSsKes&hl=lt&prev=http://www.google.lt/search?hl=lt&q=An+Essay+on+the+Principle+of+Population&btnG=Google+Paie%C5%A1ka&sa=X&oi=print&ct=title&cad=one-book-with-thumbnail>>

21. Martinkus, Bronislovas. (2002) *Darbo išteklių ekonomika ir valdymas*. Kauno Technologijos Universitetas, Kaunas: Technologija, 30 psl.
22. Moroney, J. R. (1967) Cobb-Douglass production functions and returns to scale in US manufacturing industry. Iš *Western Economic Journal*, vol 6, Nr. 1, December 1967, p 39-51.
23. [Samuelson](#) P.A. *Collected Scientific Papers* (1972). p.174
24. School of Cooperative Individualism (1999) The Cobb-Douglas Production Function . Iš *Land-Theory* [interaktyvus]. [žiūrėta 2007 m. sausio 5d.]. Prieiga per internetą: [http://www.cooperativeindividualism.org/landtheory\\_cobb\\_production\\_function.html](http://www.cooperativeindividualism.org/landtheory_cobb_production_function.html)
25. Simutis R. (2005) Gamybos funkcija. Ekonominių procesų modeliavimas ir prognozavimas. Paskaitų medžiaga.
26. Solow R. M. (1957) Technical Change and the Aggregate Production Function. Iš *Review of Economics and Statistics*, vol. 39, Nr. 3, p. 312-320.
27. Tamašauskienė, Zita. (2002) *Gamyba ir kaštai*. Šiaulių Universitetas: Šiaulių universiteto leidykla. 6 psl.
28. Vetlov I. *Baltijos šalių ekonomikos augimo apskaita // Pinigų studijos*, 2003 [interaktyvus] Nr.3, p. 14-34. [žiūrėta 2007 m. sausio 5d.]. Prieiga per internetą: [http://www.lb.lt/lt/leidiniai/pinigu\\_studijos2003\\_3/vetlov.pdf](http://www.lb.lt/lt/leidiniai/pinigu_studijos2003_3/vetlov.pdf)
29. Wiens E.G. Egwald Economics: *Microeconomics. Production Functions* [interaktyvus]. [žiūrėta 2007 m. rugsėjo 6 d.]. Prieiga per internetą: <http://www.egwald.com/economics/productionfunctions.php>
30. Wikipedia, the free encyclopedia. *Production function*. 2008 [interaktyvus]. [žiūrėta 2008 m. kovo 16 d.] Prieiga per internetą: [http://en.wikipedia.org/wiki/Production\\_function](http://en.wikipedia.org/wiki/Production_function)
31. Wikipedia, the free encyclopedia. *Factors of production* [Interaktyvus] [žiūrėta 2008 m. kovo 18 d.]. Prieiga per internetą <http://www.cr1.dircon.co.uk/TB/1/1.1.4.htm>

## PRIEDAI

<u>1 PRIEDAS. REALIŲ DUOMENŲ IR COBB-DOUGLAS FUNKCIJOS REZULTATŲ SKIRTUMAS</u> .....	57
<u>2 PRIEDAS. KAPITALO KITIMAS KIEKVIENAM PERIODUI SU SKIRTINGAIS PRADINIAIS KAPITALAIS</u> .....	58
<u>3 PRIEDAS. KAPITALO AUGIMO KOEFICIENTO <math>i</math> NUSTATYMAS MAŽIAUSIŲ KVADRATŲ METODU</u> .....	61
<u>4 PRIEDAS. KAPITALO AUGIMO KOEFICIENTO <math>i</math> NUSTATYMAS MAŽIAUSIŲ KVADRATŲ METODU PIRMIEMS 8 PERIODAMS</u> .....	63
<u>5 PRIEDAS. KAPITALO AUGIMO KOEFICIENTO <math>i</math> SKAIČIAVIMAS PANAUDOJANT SKAIČIUOKLĖS FUNKCIJĄ EKSPONENTINIAM AUGIMUI NUSTATYTI</u> .....	65
<u>6 PRIEDAS. DARBO AUGIMO KOEFICIENTO <math>j</math> NUSTATYMAS MAŽIAUSIŲ KVADRATŲ METODU PIRMIEMS 5 PERIODAMS</u> .....	66
<u>7 PRIEDAS. DARBO AUGIMO KOEFICIENTO <math>j</math> SKAIČIAVIMAS PANAUDOJANT SKAIČIUOKLĖS FUNKCIJĄ EKSPONENTINIAM AUGIMUI NUSTATYTI</u> .....	68
<u>8 PRIEDAS. MAKSIMALAUS KAPITALO <math>K_m</math> NUSTATYMAS MAŽIAUSIŲ KVADRATŲ METODU</u> .....	69
<u>9 PRIEDAS. MAKSIMALAUS DARBO <math>L_m</math> NUSTATYMAS MAŽIAUSIŲ KVADRATŲ METODU</u> .....	70
<u>10 PRIEDAS. LOGISTINIS COBB-DUOGLAS GAMYBOS FUNKCIJOS MODELIS 1899-1917 METAMS</u> .....	71



## REALIŲ DUOMENŲ IR COBB-DOUGLAS FUNKCIJOS REZULTATŲ SKIRTUMAS

13 lentelė

## Realių duomenų ir Cobb-Douglas funkcijos rezultatų palyginimas

Metai	Realī išeiga	Išeiga pagal Cobb-Douglas gamybos funkciją	Skirtumas
1899	100	101	-1
1900	101	107	-6
1901	112	112	0
1902	122	120	2
1903	124	126	-2
1904	122	122	0
1905	143	132	11
1906	152	141	11
1907	152	148	4
1908	126	136	-10
1909	155	154	1
1910	159	159	0
1911	153	162	-9
1912	177	170	7
1913	184	173	11
1914	169	170	-1
1915	189	178	11
1916	225	208	17
1917	227	226	1
1918	223	235	-12
1919	218	232	-14
1920	231	235	-4
1921	179	193	-14
1922	240	208	32

Šaltinis: sudaryta autorės.

## KAPITALO KITIMAS KIEKVIENAM PERIODUI SU SKIRTINGAIS PRADINIAIS KAPITALAIS

$i$  nustatymui buvo naudojami visi turimi kapitalo kitimo duomenys. Skaičiavimams naudojama sudėtinių procentų formulė. Taigi regresijos lygtis yra:

$$K(n) = K_0 \cdot (1+i)^n = 100(1+i)^n \quad (46)$$

Skaičiavimams naudojama ši formulė, kadangi kapitalo pokytis per laiką yra kapitalo išvestinė -  $\Delta K/\Delta t = K'$ , kuri ir yra kapitalo augimo greitis. Iš formulės išsireikštas  $i$ .

$$\begin{aligned} K &= K_0(1+i)^n \\ (1+i)^n &= K/K_0 \\ 1+i &= (K/K_0)^{1/n} \\ i &= (K/K_0)^{1/n} - 1 \end{aligned}$$

Toliau buvo atliekami skaičiavimai, imant pradinį kapitalą vis sekančiam periodui. Eilutėse yra pavaizduoti kapitalo augimo koeficientai  $i$ , atitinkamam periodui. Stulpeliuose yra pavaizduoti duomenys imant vis kitą pradinį kapitalą.

14 lentelė

### Visų periodų kapitalo kitimas

$i$ , kai $K_0=100$	$i$ , kai $K_0=107$	$i$ , kai $K_0=114$	$i$ , kai $K_0=122$	$i$ , kai $K_0=131$	$i$ , kai $K_0=138$	$i$ , kai $K_0=149$	$i$ , kai $K_0=163$
0,07							
0,067707825	0,065420561						
0,06852973	0,067795353	0,070175439					
0,069837518	0,069783362	0,071971458	0,073770492				
0,066536732	0,065672668	0,065756717	0,063554202	0,053435115			
0,068721086	0,068465486	0,069228077	0,068912476	0,066491716	0,079710145		
0,07229064	0,072672889	0,074129268	0,075120006	0,075570221	0,086811585	0,093959732	
0,073220806	0,073681712	0,075064785	0,076045331	0,076614793	0,084454147	0,086833959	0,079754601
0,070744242	0,070837309	0,071613375	0,071853218	0,071470175	0,076026979	0,074802051	0,065349391

## KAPITALO KITIMAS KIEKVIENAM PERIODUI SU SKIRTINGAIS PRADINIAIS KAPITALAIS

14 lentelė (tęsinys)

## Visų periodų kapitalo kitimas

<b>i, kai <math>K_0=100</math></b>	<b>i, kai <math>K_0=107</math></b>	<b>i, kai <math>K_0=114</math></b>	<b>i, kai <math>K_0=122</math></b>	<b>i, kai <math>K_0=131</math></b>	<b>i, kai <math>K_0=138</math></b>	<b>i, kai <math>K_0=149</math></b>	<b>i, kai <math>K_0=163</math></b>
0,070696835	0,070774289	0,071445394	0,07162694	0,071270097	0,074873166	0,07366731	0,066987165
0,068845292	0,06872989	0,069098227	0,068963652	0,068278719	0,070772909	0,068994359	0,06284255
0,066279712	0,065942146	0,065994318	0,065530759	0,064505248	0,066096164	0,063843915	0,057920979
0,064729068	0,064290997	0,064188369	0,063591507	0,062466482	0,063600834	0,061319208	0,055974601
0,06325289	0,062735647	0,06251221	0,061818279	0,0606304	0,061432904	0,059170111	0,054291314
0,061270246	0,060649424	0,0602833	0,059463094	0,058171913	0,058646763	0,0563319	0,051720351
0,063053453	0,062591956	0,0623902	0,061793687	0,060801671	0,061473907	0,05966731	0,055924022
0,066338462	0,066110033	0,066156014	0,06586949	0,065264134	0,066255861	0,065041089	0,062191608
0,069471353	0,069440264	0,069691999	0,069659777	0,069366757	0,070602202	0,069846684	0,067681122
0,070673119	0,070710527	0,071022518	0,071075483	0,070896057	0,072154285	0,07157526	0,069730693
0,070004362	0,070004592	0,070259838	0,070264803	0,070046077	0,071162743	0,07055481	0,06877531
0,069124557	0,069080804	0,069273796	0,069223727	0,068956871	0,06993454	0,069285989	0,067545023
0,067057942	0,066918046	0,066992975	0,06682574	0,06644124	0,067211287	0,06643493	0,064624763
0,065579774	0,065379289	0,065377323	0,065137983	0,064685568	0,065314104	0,064473281	0,062656992
<b>i, kai <math>K_0=176</math></b>	<b>i, kai <math>K_0=185</math></b>	<b>i, kai <math>K_0=198</math></b>	<b>i, kai <math>K_0=208</math></b>	<b>i, kai <math>K_0=216</math></b>	<b>i, kai <math>K_0=226</math></b>	<b>i, kai <math>K_0=236</math></b>	<b>i, kai <math>K_0=244</math></b>
0,051136364							
0,060660172	0,07027027						
0,05726427	0,060341607	0,050505051					
0,052531909	0,052997502	0,044465936	0,038461538				
0,05128182	0,051318188	0,0450757	0,042371556	0,046296296			
0,0501062	0,049900288	0,04486866	0,042996592	0,04527154	0,044247788		
0,047775322	0,047216194	0,042665316	0,040714542	0,041466628	0,039060161	0,033898305	
0,052982421	0,053246409	0,050435542	0,05042164	0,053433127	0,055822872	0,06165844	0,090163934
0,060257884	0,061403626	0,060142973	0,061757869	0,066479477	0,071585815	0,08085662	0,105129619
0,066481224	0,068199977	0,067941472	0,070455904	0,075883324	0,081900381	0,091523778	0,111437366
0,068824056	0,070609113	0,070646769	0,073191486	0,078246831	0,083665984	0,09172641	0,10668192
0,067865424	0,069399386	0,069312337	0,071422711	0,075615747	0,079870779	0,085924989	0,096640366

2 PRIEDAS (TĘSINYS)

KAPITALO KITIMAS KIEKVIENAM PERIODUI SU SKIRTINGAIS PRADINIAIS KAPITALAIS

14 lentelė (tęsinys)

Visų periodų kapitalo kitimas

<i>i</i> , kai $K_0=176$	<i>i</i> , kai $K_0=185$	<i>i</i> , kai $K_0=198$	<i>i</i> , kai $K_0=208$	<i>i</i> , kai $K_0=216$	<i>i</i> , kai $K_0=226$	<i>i</i> , kai $K_0=236$	<i>i</i> , kai $K_0=244$
0,066611564	0,067911402	0,067697217	0,069431833	0,072929495	0,076305963	0,080965348	0,08901559
0,063552208	0,064513325	0,06403498	0,065273581	0,067992568	0,070430867	0,073749579	0,079566653
0,061526825	0,062272919	0,061660219	0,062595147	0,064816728	0,066686707	0,069209497	0,073707361

<i>i</i> , kai $K_0=266$	<i>i</i> , kai $K_0=298$	<i>i</i> , kai $K_0=335$	<i>i</i> , kai $K_0=366$	<i>i</i> , kai $K_0=387$	<i>i</i> , kai $K_0=407$	<i>i</i> , kai $K_0=417$
0,120300752						
0,122229253	0,124161074					
0,112243346	0,108236401	0,092537313				
0,098265477	0,091017124	0,074813417	0,057377049			
0,088786067	0,081046901	0,067046144	0,05452447	0,051679587		
0,077810482	0,069507805	0,056264812	0,044443592	0,03803631	0,024570025	
0,071376789	0,063433085	0,051686969	0,041715308	0,03654645	0,029061737	0,033573141

Šaltinis: sudaryta autorės.

Gavus daug *i* koeficientų buvo skaičiuojamas šių koeficientų vidurkis.

**KAPITALO AUGIMO KOEFICIENTO *i* NUSTATYMAS MAŽIAUSIU KVADRATŲ METODU**

Skaičiavimai buvo atliekami bandymo metodu imant skirtingus *i* koeficientus ir juos įstatant į regresijos lygtį, kuri aprašyta 1 Priede. Toliau buvo ieškomas skirtumas tarp realių ir bandymo duomenų remiantis mažiausių kvadratų metodu.

15 lentelė

***i* koeficiento nustatymas mažiausių kvadratų metodu**

<b>i=0,08</b>	<b>Skirtumas</b>	<b>i=0,073</b>	<b>Skirtumas</b>	<b>i=0,072</b>	<b>Skirtumas</b>	<b>i=0,071</b>	<b>Skirtumas</b>	<b>i=0,0695</b>	<b>Skirt</b>	<b>i=0,069</b>	<b>Skirt</b>	<b>i=0,065</b>	<b>Skirt</b>	<b>i=0,0685</b>	<b>Skirt</b>	<b>i=0,068</b>	<b>Skirt</b>
100,00	0,00	100,00	0,00	100,00	0,00	100,00	0,00	100,00	0,00	100,00	0,00	100,00	0,00	100,00	0,00	100,00	0,00
108,00	1,00	107,30	0,09	107,20	0,04	107,10	0,01	106,95	0,00	106,90	0,01	106,50	0,25	106,85	0,02	106,80	0,04
116,64	6,97	115,13	1,28	114,92	0,84	114,70	0,50	114,38	0,15	114,28	0,08	113,42	0,33	114,17	0,03	114,06	0,00
125,97	15,77	123,54	2,36	123,19	1,42	122,85	0,72	122,33	0,11	122,16	0,03	120,79	1,45	121,99	0,00	121,82	0,03
136,05	25,49	132,56	2,42	132,06	1,13	131,57	0,33	130,83	0,03	130,59	0,17	128,65	5,54	130,35	0,43	130,10	0,81
146,93	79,80	142,23	17,91	141,57	12,75	140,91	8,48	139,93	3,72	139,60	2,56	137,01	0,98	139,27	1,63	138,95	0,90
158,69	93,85	152,62	13,07	151,76	7,64	150,92	3,67	149,65	0,43	149,23	0,05	145,91	9,52	148,82	0,03	148,40	0,36
171,38	70,27	163,76	0,57	162,69	0,10	161,63	1,87	160,05	8,68	159,53	12,04	155,40	57,78	159,01	15,93	158,49	20,35
185,09	82,68	175,71	0,08	174,40	2,54	173,11	8,37	171,18	23,26	170,54	29,83	165,50	110,26	169,90	37,20	169,27	45,35
199,90	222,02	188,54	12,51	186,96	3,85	185,40	0,16	183,07	3,71	182,31	7,26	176,26	76,44	181,54	11,98	180,78	17,84
215,89	320,14	202,30	18,50	200,42	5,87	198,56	0,32	195,80	4,85	194,88	9,71	187,71	105,81	193,97	16,20	193,07	24,31
233,16	633,22	217,07	82,24	214,85	46,97	212,66	21,71	209,41	1,98	208,33	0,11	199,92	65,36	207,26	0,54	206,20	3,25
251,82	1282,86	232,91	286,10	230,32	205,15	227,76	138,25	223,96	63,35	222,71	44,97	212,91	9,55	221,46	29,81	220,22	17,80
271,96	2112,54	249,92	572,04	246,91	437,07	243,93	321,44	239,52	182,92	238,07	145,76	226,75	0,56	236,63	112,99	235,19	84,53
293,72	3331,52	268,16	1034,35	264,68	822,75	261,25	637,45	256,17	406,89	254,50	342,25	241,49	30,11	252,84	283,54	251,19	230,65
317,22	5360,72	287,74	1912,93	283,74	1579,33	279,80	1281,38	273,98	898,53	272,06	787,39	257,18	173,82	270,16	684,24	268,27	588,93
342,59	5866,68	308,74	1826,87	304,17	1456,96	299,66	1133,12	293,02	729,91	290,83	616,66	273,90	62,43	288,66	513,65	286,51	420,67
370,00	5184,26	331,28	1107,56	326,07	787,95	320,94	526,15	313,38	236,59	310,90	166,41	291,70	39,63	308,44	108,94	305,99	63,89
399,60	4173,41	355,46	418,75	349,55	211,63	343,72	76,12	335,16	0,03	332,35	7,01	310,67	592,17	329,57	29,54	326,80	67,23
431,57	4299,44	381,41	237,54	374,71	75,95	368,13	4,53	358,46	56,92	355,28	114,82	330,86	1234,91	352,14	192,09	349,02	288,23
466,10	6256,13	409,26	495,30	401,69	215,92	394,27	52,80	383,37	13,19	379,80	51,85	352,36	1199,62	376,26	115,30	372,76	202,88
503,38	9289,75	439,13	1032,41	430,62	557,73	422,26	232,84	410,01	9,07	406,01	0,99	375,27	1006,91	402,04	24,64	398,10	79,14
543,65	16041,25	471,19	2936,30	461,62	1991,01	452,24	1241,81	438,51	462,59	434,02	289,67	399,66	300,65	429,58	158,15	425,17	66,83
587,15	24381,69	505,58	5562,82	494,86	4077,77	484,35	2846,05	468,98	1442,79	463,97	1086,83	425,64	28,74	459,00	784,08	454,09	533,00
	89131,46		17574		12502		8538,1		4549,7		3716,5		5112,8		3121		2757

**KAPITALO AUGIMO KOEFICIENTO  $i$  NUSTATYMAS MAŽIAUSIU KVADRATŲ METODU**

15 lentelė (tęsinys)

 **$i$  koeficiento nustatymas mažiausių kvadratų metodu**

<b><math>i=0,0675</math></b>	<b>Skirt</b>	<b><math>i=0,0672</math></b>	<b>Skirt</b>	<b><math>i=0,0671</math></b>	<b>Skirt</b>	<b><math>i=0,067</math></b>	<b>Skirt</b>	<b><math>i=0,066</math></b>	<b>Skirt</b>	<b><math>i=0,0676</math></b>	<b>Skirt</b>	<b><math>i=0,0674</math></b>	<b>Skirt</b>	<b><math>i=0,0673</math></b>	<b>Skirt</b>
100,00	0,00	100,00	0,00	100,00	0,00	100,00	0,00	100,00	0,00	100,00	0,00	100,00	0,00	100,00	0,00
106,75	0,06	106,72	0,08	106,71	0,08	106,70	0,09	106,60	0,16	106,76	0,06	106,74	0,07	106,73	0,07
113,96	0,00	113,89	0,01	113,87	0,02	113,85	0,02	113,64	0,13	113,98	0,00	113,93	0,00	113,91	0,01
121,65	0,12	121,55	0,21	121,51	0,24	121,48	0,27	121,14	0,75	121,68	0,10	121,61	0,15	121,58	0,18
129,86	1,30	129,71	1,66	129,66	1,78	129,62	1,92	129,13	3,50	129,91	1,19	129,81	1,42	129,76	1,53
138,62	0,39	138,43	0,18	138,36	0,13	138,30	0,09	137,65	0,12	138,69	0,48	138,56	0,31	138,49	0,24
147,98	1,04	147,73	1,61	147,65	1,83	147,57	2,06	146,74	5,12	148,06	0,87	147,90	1,21	147,82	1,40
157,97	25,30	157,66	28,52	157,56	29,63	157,45	30,77	156,42	43,26	158,07	24,27	157,87	26,35	157,76	27,42
168,63	54,27	168,25	59,99	168,13	61,96	168,00	63,96	166,75	85,62	168,76	52,42	168,51	56,15	168,38	58,06
180,02	24,84	179,56	29,58	179,41	31,25	179,26	32,96	177,75	52,53	180,17	23,35	179,86	26,38	179,71	27,96
192,17	34,02	191,63	40,61	191,45	42,93	191,27	45,31	189,48	72,53	192,35	31,96	191,99	36,16	191,81	38,35
205,14	8,19	204,51	12,21	204,29	13,73	204,08	15,34	201,99	36,12	205,35	7,02	204,93	9,44	204,72	10,79
218,99	8,91	218,25	5,05	218,00	4,01	217,76	3,09	215,32	0,46	219,23	10,44	218,74	7,50	218,49	6,22
233,77	60,32	232,91	47,80	232,63	43,96	232,35	40,29	229,53	12,48	234,05	64,83	233,48	55,98	233,20	51,81
249,55	183,49	248,57	157,90	248,24	149,82	247,91	141,95	244,68	75,37	249,87	192,47	249,22	174,74	248,89	166,21
266,39	501,32	265,27	452,39	264,90	436,68	264,52	421,26	260,83	283,26	266,76	518,23	266,02	484,71	265,64	468,40
284,37	337,51	283,10	292,26	282,67	277,94	282,25	263,99	278,05	145,08	284,80	353,37	283,95	322,05	283,52	306,96
303,57	30,99	302,12	16,97	301,64	13,24	301,16	9,98	296,40	2,57	304,05	36,61	303,08	25,84	302,60	21,17
324,06	119,74	322,42	158,21	321,88	172,17	321,34	186,70	315,96	362,59	324,60	108,07	323,51	131,99	322,97	144,81
345,93	402,75	344,09	480,10	343,48	507,30	342,87	535,20	336,81	851,97	346,55	378,40	345,32	427,83	344,70	453,61
369,28	313,94	367,21	391,58	366,52	419,27	365,84	447,85	359,04	781,70	369,97	289,88	368,59	338,91	367,90	364,80
394,21	163,63	391,89	228,37	391,12	252,25	390,35	277,26	382,74	588,66	394,98	144,38	393,43	184,05	392,66	205,63
420,82	14,57	418,22	1,50	417,36	0,13	416,50	0,25	408,00	81,03	421,69	21,95	419,95	8,71	419,09	4,35
449,22	332,05	446,33	234,94	445,37	206,40	444,41	179,77	434,93	15,42	450,19	368,30	448,26	297,75	447,29	265,38
<b>2618,778</b>		<b>2641,73</b>		<b>2666,7</b>		<b>2700,4</b>		<b>3500,4</b>		<b>2628,7</b>		<b>2617,7</b>		<b>2625</b>	

Šaltinis: sudaryta autorės.

Geriausias variantas gaunamas, kai  $i$  lygus 0,0674.

**KAPITALO AUGIMO KOEFICIENTO *i* NUSTATYMAS MAŽIAUSIŲ KVADRATŲ METODU PIRMIEMS 8 PERIODAMS**

Skaičiavimai buvo atliekami bandymo metodu tik 8 pirmiems periodams imant skirtingus *i* koeficientus ir juos įstatant į regresijos lygtį, kuri aprašyta 1 Priede. Toliau buvo ieškomas skirtumas tarp realių ir bandymo duomenų remiantis mažiausių kvadratų metodu. Regresijos lygtis:  $K(n)=100(1+i)^n$

16 lentelė

**Kapitalo reikšmės 8 pirmiems periodams**

<b>n</b>	<b>K</b>
0	100
1	107
2	114
3	122
4	131
5	138
6	149
7	163

Šaltinis: sudaryta autorės.

17 lentelė

***i* koeficiento nustatymas mažiausių kvadratų metodu 8 periodams**

<b>i=0,072</b>	<b>Skirt</b>	<b>i=0,071</b>	<b>Skirt</b>	<b>i=0,0706</b>	<b>Skirt</b>	<b>i=0,0705</b>	<b>Skirt</b>	<b>i=0,07</b>	<b>Skirt</b>	<b>i=0,069</b>	<b>Skirt</b>	<b>i=0,0702</b>	<b>Skirt</b>	<b>i=0,0701</b>	<b>Skirt</b>	<b>i=0,0695</b>	<b>Skirt</b>
100,00	0,00	<b>100,00</b>	<b>0,00</b>	100,00	0,00	100,00	0,00	<b>100,00</b>	<b>0,00</b>	100,00	0,00	100,00	0,00	100,00	0,00	100,00	0,00
107,20	0,04	<b>107,10</b>	<b>0,01</b>	107,06	0,00	107,05	0,00	<b>107,00</b>	<b>0,00</b>	106,90	0,01	107,02	0,00	107,01	0,00	106,95	0,00
114,92	0,84	<b>114,70</b>	<b>0,50</b>	114,62	0,38	114,60	0,36	<b>114,49</b>	<b>0,24</b>	114,28	0,08	114,53	0,28	114,51	0,26	114,38	0,15
123,19	1,42	<b>122,85</b>	<b>0,72</b>	122,71	0,50	122,68	0,46	<b>122,50</b>	<b>0,25</b>	122,16	0,03	122,57	0,33	122,54	0,29	122,33	0,11
132,06	1,13	<b>131,57</b>	<b>0,33</b>	131,37	0,14	131,32	0,11	<b>131,08</b>	<b>0,01</b>	130,59	0,17	131,18	0,03	131,13	0,02	130,83	0,03
141,57	12,75	<b>140,91</b>	<b>8,48</b>	140,65	7,02	140,58	6,67	<b>140,26</b>	<b>5,09</b>	139,60	2,56	140,39	5,69	140,32	5,39	139,93	3,72
151,76	7,64	<b>150,92</b>	<b>3,67</b>	150,58	2,49	150,49	2,23	<b>150,07</b>	<b>1,15</b>	149,23	0,05	150,24	1,54	150,16	1,34	149,65	0,43
162,69	0,10	<b>161,63</b>	<b>1,87</b>	161,21	3,21	161,10	3,59	<b>160,58</b>	<b>5,87</b>	159,53	12,04	160,79	4,89	160,68	5,37	160,05	8,68
	<b>23,92</b>		<b>15,57</b>		<b>13,75</b>		<b>13,42</b>		<b>12,60</b>		<b>14,93</b>		<b>12,77</b>		<b>12,66</b>		<b>13,11</b>

Šaltinis: sudaryta autorės.

**KAPITALO AUGIMO KOEFICIENTO  $i$  NUSTATYMAS MAŽIAUSIU KVADRATU METODU PIRMIEMS 8 PERIODAMS**

Rasta, kad geriausiai realūs duomenys atsispindi tada, kai  $i$  yra lygu 0,07. Šiuo atveju realių ir bandymo duomenų skirtumo kvadratų suma yra mažiausia ir tai reiškia, kad  $i$  geriausiai atitinka realius duomenis.

Toliau lentelėje pateikiamos 8 pirmųjų periodų realaus kapitalo reikšmės ir bandymo metu gauto kapitalo reikšmės su augimo koeficientu 0,07.

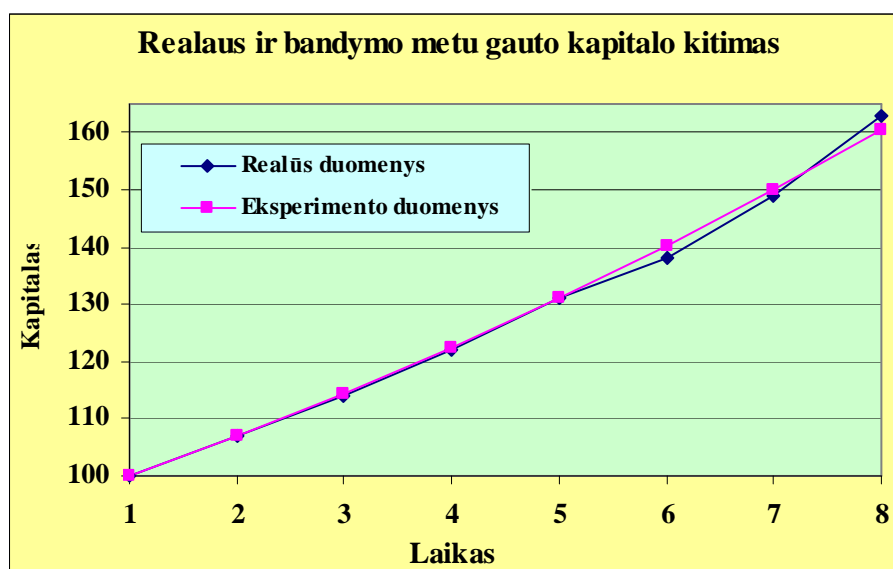
18 lentelė

**Realaus ir bandymo metu gauto kapitalo reikšmių palyginimas 8 pirmiems periodams**

Realus kapitalas	Bandymo metu gautas kapitalas
100	100
107	107
114	114,49
122	122,5043
131	131,0796
138	140,25517
149	150,07304
163	160,57815

Šaltinis: sudaryta autorės.

Paveiksle pavaizduoti pirmų 8 periodų realūs kapitalo kitimo duomenys ir kapitalo augimas, kai  $i$  imama 0,07.



Šaltinis: sudaryta autorės.

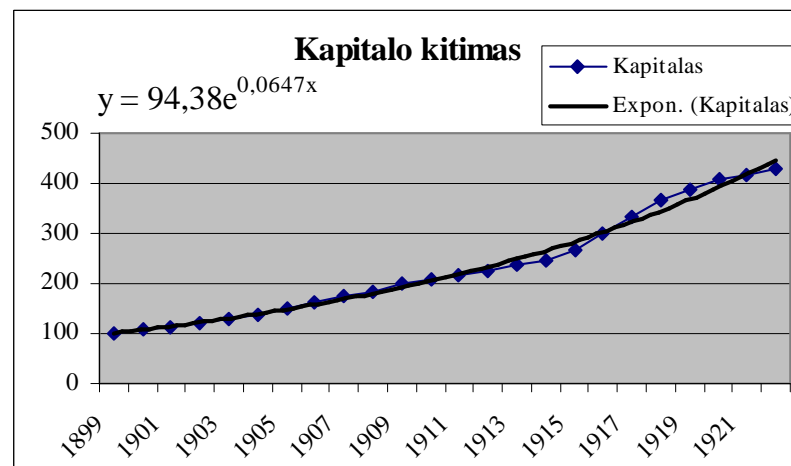
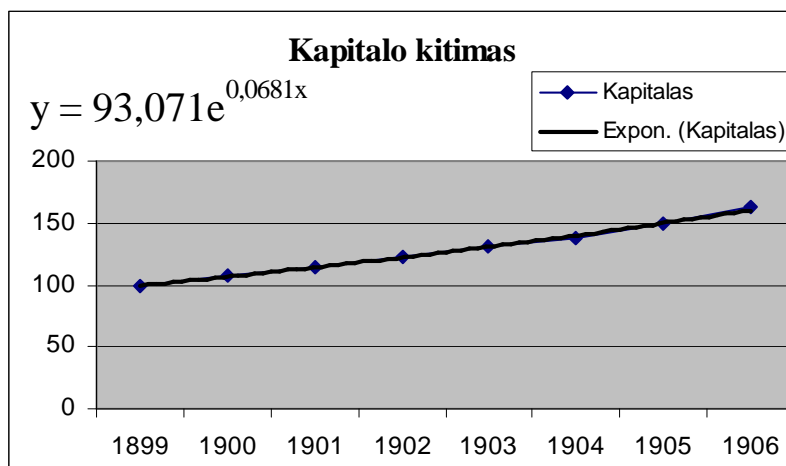
**13 pav. Realaus ir bandymo metu gauto kapitalo reikšmių 8 pirmiems periodams grafinis palyginimas**



**KAPITALO AUGIMO KOEFICIENTO  $i$  SKAIČIAVIMAS PANAUDOJANT SKAIČIUOKLĖS FUNKCIJĄ EKSPONENTINIAM AUGIMUI NUSTATYTI**

Augimo koeficientas buvo nustatomas tiek visiems duomenis, tiek pirmiems 8 periodams. Sudarius kapitalo kitimo grafikus nubrėžtos eksponentinės kryptinės linijos (trendlines).

Pirmame paveiksle pavaizduoti 8 pirmi periodai, o antrame – visi duomenys.



Šaltinis: sudaryta autorės.

**14 pav. Eksponentinis kapitalo augimas**

Paveiksluose matyti grafikai ir eksponentinės funkcijos. Iš jų galima sužinoti pradinį kapitalą ir augimo koeficientą:

Pirmiems 8 periodams  $K_0 = 93,071$ , o  $i = e^{0,0681} = 0,070472$ , o visiems duomenims  $K_0 = 94,38$ , o  $i = e^{0,0647} = 0,066839$

**DARBO AUGIMO KOEFICIENTO  $j$  NUSTATYMAS MAŽIAUSIŲ KVADRATŲ METODU PIRMIEMS 5 PERIODAMS**

Skaičiavimai buvo atliekami bandymo metodu tik 5 pirmiems periodams imant skirtingus  $j$  koeficientus ir juos įstatant į regresijos lygtį, kuri aprašyta 1 Priede. Toliau buvo ieškomas skirtumas tarp realių ir bandymo duomenų remiantis mažiausių kvadratų metodu. Regresijos lygtis:  $L(n)=100(1+i)^n$

19 lentelė

**Kapitalo reikšmės 5 pirmiems periodams**

<b>n</b>	<b>L</b>
0	100
1	105
2	110
3	118
4	123

Šaltinis: sudaryta autorės.

20 lentelė

 **$j$  koeficiento nustatymas mažiausių kvadratų metodu 8 periodams**

<b>j=0,06</b>	<b>Skirt</b>	<b>j=0,051</b>	<b>Skirt</b>	<b>j=0,05</b>	<b>Skirt</b>	<b>j=0,049</b>	<b>Skirt</b>	<b>j=0,064</b>	<b>Skirt</b>	<b>j=0,058</b>	<b>Skirt</b>	<b>j=0,055</b>	<b>Skirt</b>	<b>j=0,054</b>	<b>Skirt</b>	<b>j=0,053</b>	<b>Skirt</b>
100,00	0,00	100,00	0,00	100,00	0,00	100,00	0,00	100,00	0,00	100,00	0,00	100,00	0,00	100,00	0,00	100,00	0,00
106,00	1,00	105,10	0,01	105,00	0,00	104,90	0,01	104,00	1,00	105,80	0,64	105,50	0,25	105,40	0,16	105,30	0,09
112,36	5,57	110,46	0,21	110,25	0,06	110,04	0,00	108,16	3,39	111,94	3,75	111,30	1,70	111,09	1,19	110,88	0,78
119,10	1,21	116,09	3,63	115,76	5,01	115,43	6,59	112,49	30,40	118,43	0,18	117,42	0,33	117,09	0,83	116,76	1,54
126,25	10,55	122,01	0,97	121,55	2,10	121,09	3,65	116,99	36,17	125,30	5,28	123,88	0,78	123,41	0,17	122,95	0,00
<b>18,33</b>		<b>4,83</b>		<b>7,17</b>		<b>10,26</b>		<b>70,96</b>		<b>9,85</b>		<b>3,06</b>		<b>2,35</b>		<b>2,41</b>	

Šaltinis: sudaryta autorės.

Rasta, kad geriausiai realūs duomenys atsispindi tada, kai  $j$  yra lygu 0,054. Šiuo atveju realių ir bandymo duomenų skirtumo kvadratų suma yra mažiausia ir tai reiškia, kad  $j$  geriausiai atitinka realius duomenis. 21 lentelėje pateikti rezultatai, kurie gaunami, jei darbo augimo koeficientas imamas 0,054.

Toliau pateiktas realių ir apskaičiuotų reikšmių palyginimas.

**DARBO AUGIMO KOEFICIENTO  $j$  NUSTATYMAS MAŽIAUSIU KVADRATU  
METODU PIRMIEMS 5 PERIODAMS**

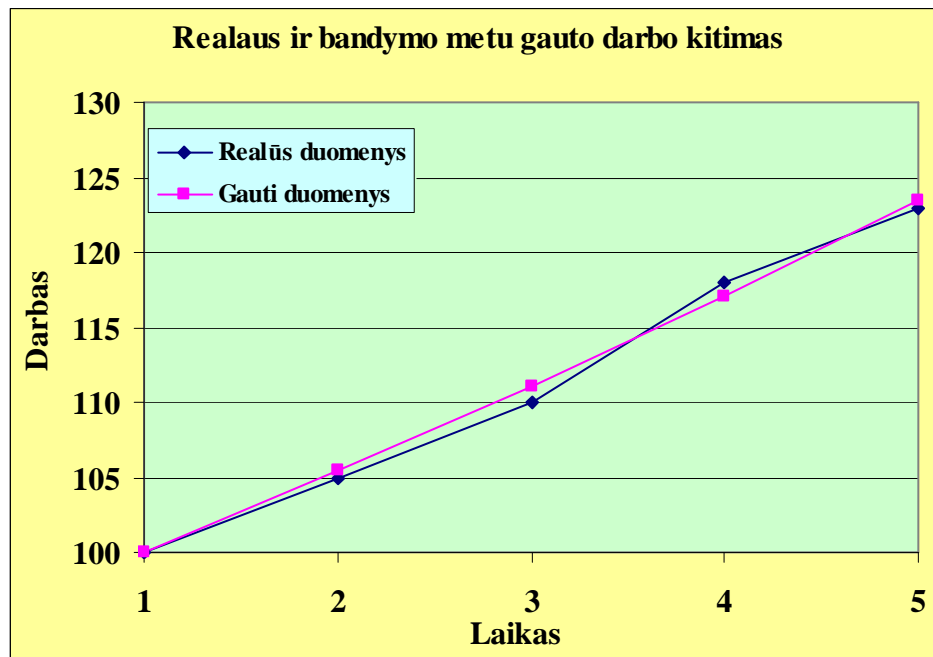
21 lentelė

Realaus ir bandymo metu gauto darbo reikšmių palyginimas 5 pirmiems periodams

Realus darbas	Bandymo metu gautos darbo reikšmės
100	100
105	105,4
110	111,092
118	117,091
123	123,413

Šaltinis: sudaryta autorės.

Paveiksle pavaizduoti pirmų 5 periodų realūs darbo kitimo duomenys ir darbo augimas, kai  $j$  imama 0,054.



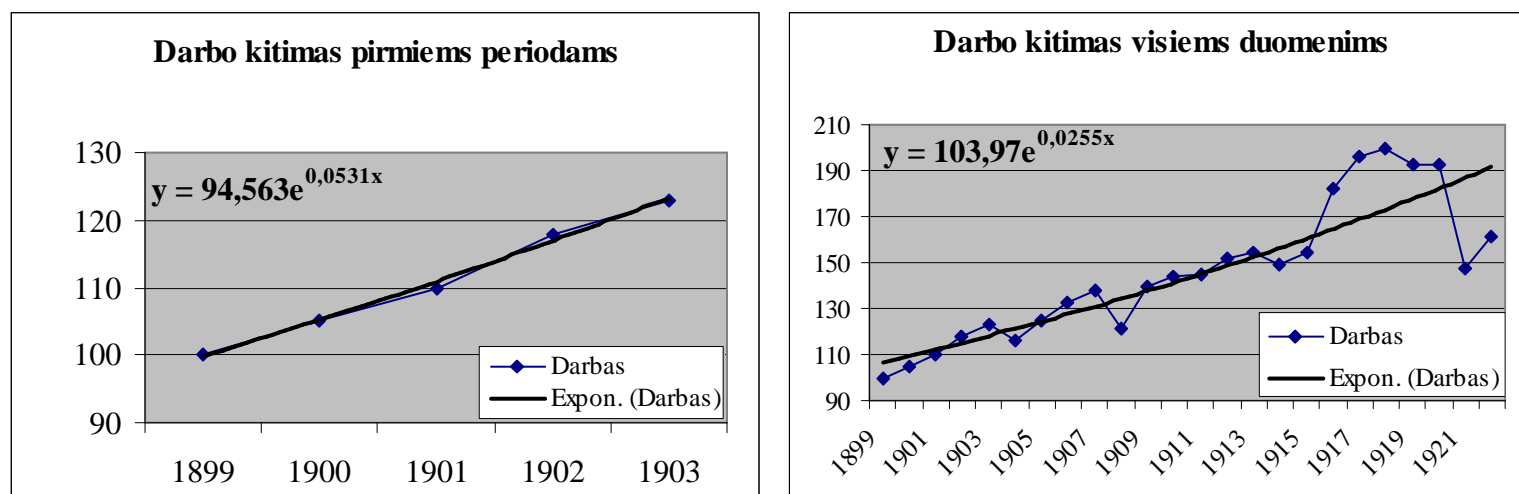
Šaltinis: sudaryta autorės.

**15 pav. Realaus ir bandymo metu gauto darbo reikšmių 5 pirmiems periodams grafinis palyginimas**

## DARBO AUGIMO KOEFICIENTO $j$ SKAIČIAVIMAS PANAUDOJANT SKAIČIUOKLĖS FUNKCIJĄ EKSPONENTINIAM AUGIMUI NUSTATYTI

Augimo koeficientas buvo nustatomas tiek visiems duomenis, tiek pirmiems 5 periodams. Sudarius darbo kitimo grafikus nubrėžtos eksponentinės kryptinės linijos (trendlines).

Pirmame paveiksle pavaizduoti 5 pirmi periodai, o antrame – visi duomenys.



Šaltinis: sudaryta autorės.

### 16 pav. Eksponentinis darbo augimas

Paveiksluose matyti grafikai ir eksponentinės funkcijos. Iš jų galima sužinoti pradinį darbą ir augimo koeficientą  $j$ :

Pirmiems 5 periodams  $L_0 = 94,563$  o  $j = e^{0,0531} = 0,054535$ , o visiems duomenims  $L_0 = 103,97$ , o  $j = e^{0,0255} = 0,025828$ .

**MAKSIMALAUS KAPITALO  $K_m$  NUSTATYMAS MAŽIAUSIŲ KVADRATŲ METODU**

Mažiausių kvadratų metodu ieškoma tokia maksimalaus kapitalo reikšmė, kurią įstačius į funkciją  $K = \frac{K_m * 99,3684 * (1 + 0,0712)^n}{K_m + 99,3684 * ((1 + 0,0712)^n - 1)}$  būtų gaunama mažiausia skirtumų tarp realių kapitalo reikšmių ir reikšmių gautų pagal logistinę funkciją kvadratų suma.

Lentelėje pateikiamas geriausias rezultatas, kai maksimalus kapitalas yra 6000.

22 lentelė

**Kapitalo palyginimas, kai  $K_m$  lygus 6000**

<b>Periodai (n)</b>	<b>Realus K</b>	<b>Logistinis K</b>	<b>Skirtumų kvadratas</b>
0	100,00	100,00	0,00
1	107,00	106,88	0,02
2	114,00	114,21	0,05
3	122,00	122,05	0,00
4	131,00	130,40	0,36
5	138,00	139,32	1,74
6	149,00	148,83	0,03
7	163,00	158,97	16,22
8	176,00	169,79	38,61
9	185,00	181,31	13,60
10	198,00	193,59	19,41
11	208,00	206,68	1,74
12	216,00	220,61	21,30
13	226,00	235,45	89,34
14	236,00	251,24	232,36
15	244,00	268,04	578,15
16	266,00	285,91	396,56
17	298,00	304,91	47,76
18	335,00	325,10	98,05
19	366,00	346,54	378,67
20	387,00	369,31	313,10
21	407,00	393,46	183,29
22	417,00	419,08	4,33
23	431,00	446,23	232,07
<b>Skirtumų kvadratų suma</b>			<b>2666,76</b>

Šaltinis: sudaryta autorės.

**MAKSIMALAUS DARBO  $L_m$  NUSTATYMAS MAŽIAUSIŲ KVADRATŲ METODU**

Mažiausių kvadratų metodu ieškoma tokia maksimalaus darbo reikšmė, kurią įstačius į

funkciją  $L = \frac{L_m * 99,7026 * (1 + 0,0546)^n}{L_m + 99,7026 * ((1 + 0,0546)^n - 1)}$  būtų gaunama mažiausia skirtumų tarp realių

darbo reikšmių ir reikšmių gautų pagal logistinę funkciją kvadratų suma.

Lentelėje pateikiamas geriausias rezultatas, kai maksimalus darbas yra 350.

23 lentelė

**Darbo palyginimas, kai  $L_m$  lygus 350**

Periodai (n)	Realus L	Logistinis L	Skirtumų kvadratas
0	100,00	100	0
1	105,00	103,57	2,06
2	110,00	107,19	7,88
3	118,00	110,88	50,73
4	123,00	114,61	70,31
5	116,00	118,40	5,77
6	125,00	122,23	7,66
7	133,00	126,10	47,55
8	138,00	130,01	63,82
9	121,00	133,95	167,67
10	140,00	137,91	4,36
11	144,00	141,89	4,44
12	145,00	145,89	0,79
13	152,00	149,90	4,42
14	154,00	153,91	0,01
15	149,00	157,92	79,48
16	154,00	161,92	62,66
17	182,00	165,90	259,11
18	196,00	169,87	682,67
19	200,00	173,82	685,52
20	193,00	177,73	233,05
21	193,00	181,62	129,58
22	147,00	185,46	1479,20
23	161,00	189,26	798,67
<b>Skirtumų kvadratų suma</b>			<b>4847,40</b>

Šaltinis: sudaryta autorės.

**LOGISTINIS COBB-DUOGLAS GAMYBOS FUNKCIJOS MODELIS 1899-1917 METAMS**

Atlikus skaičiavimus nustatyti koeficientai:

24 lentelė

**Logistiniai koeficientai**

Koeficiento pavadinimas	Santrumpa	Reikšmė
Pradinis kapitalas	$K_0$	99,3684
Kapitalo augimo koef.	$i$	0,0712
Maksimalus kapitalas	$K_m$	4462,905
Pradinis darbas	$L_0$	99,7026
Kapitalo augimo koef.	$j$	0,0546
Maksimalus kapitalas	$L_m$	337,7546

Šaltinis: sudaryta autorės.

Panaudojus logistines funkcijas sudaromas logistinis Cobb-Douglas gamybos funkcijos modelis 1899-1917 metams.

$$Q = 1,01 * \left( \frac{337,7546 * 99,7026 * (1 + 0,0546)^n}{337,7546 + 99,7026 * (1 + 0,0546)^n - 1} \right)^{0,75} * \left( \frac{4462,905 * 99,3684 * (1 + 0,0712)^n}{4462,905 + 99,3684 * ((1 + 0,0712)^n - 1)} \right)^{0,25}$$

Lentelėje pavaizduoti realūs duomenys ir gauti panaudojus sukurtą modelį.

25 lentelė

**Realių ir suprognuozuotų duomenų palyginimas**

Metai	Reali išėiga	Logist.Cobb-Douglas	Skirtumas
1899	100	100,62	-0,62
1900	101	105,21	-4,21
1901	112	109,97	2,03
1902	122	114,88	7,12
1903	124	119,95	4,05
1904	122	125,18	-3,18
1905	143	130,58	12,42
1906	152	136,13	15,87
1907	152	141,84	10,16
1908	126	147,71	-21,71
1909	155	153,74	1,26
1910	159	159,93	-0,93
1911	153	166,26	-13,26
1912	177	172,75	4,25
1913	184	179,39	4,61
1914	169	186,17	-17,17
1915	189	193,10	-4,10
1916	225	200,16	24,84
1917	227	207,35	19,65
Prognozavimas			
1918	223	214,67	8,33
1919	218	222,12	-4,12

**LOGISTINIS COBB-DOUGLAS GAMYBOS FUNKCIJOS MODELIS 1899-1917 METAMS**

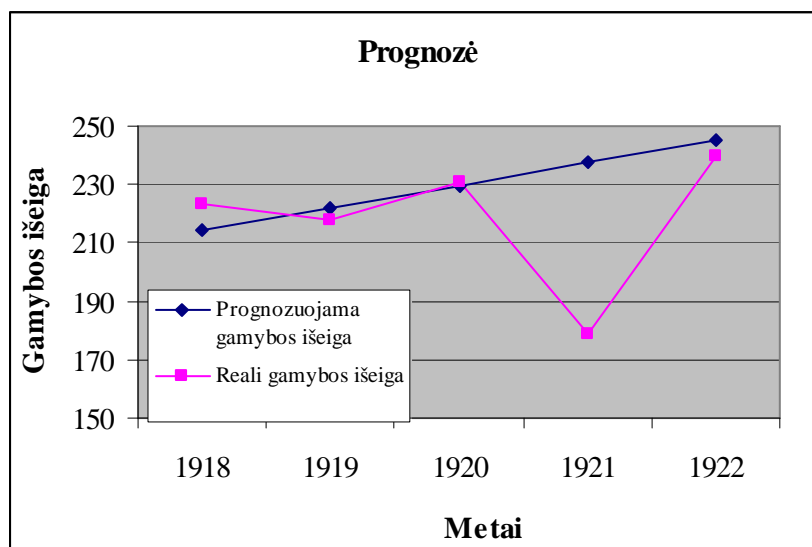
25 lentelė (tęsinys)

**Realių ir suprognuotų duomenų palyginimas**

Metai	Reali išėiga	Logist.Cobb-Douglas	Skirtumas
<b>Prognozavimas</b>			
1920	231	229,68	1,32
1921	179	237,35	-58,35
1922	240	245,12	-5,12

Šaltinis: sudaryta autorės.

Paveiksle grafiškai pavaizduota prognozė.



Šaltinis: sudaryta autorės.

**17 pav. Prognozės rezultatai**

Modelis prognozuoja tiksliai, išskyrus 1921 metus, nes tuo metu buvo stiprus nuosmukis.