VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS METODIKOS KATEDRA

Nerijus Kukuraitis

PASAULINIŲ OLIMPIADŲ UŽDAVINIŲ ĮVAIROVĖ SUDĖTINGUMO POŽIŪRIU

Magistro baigiamasis darbas

Vadovas
doc. dr. Romualdas Kašuba

Leidžiu ginti: ____________________
(Vadovo parašas)

VILNIUS 2012

TURINYS

ĮVADAS

Šių laikų švietimas susiduria su daugybe rimtų iššūkių. Dažnai tenka išgirsti, kad švietimas, ugdymas neatitinka laikmečio. Vienas iš gausybės įvairių pasiūlymų situacijai gerinti yra siūlymas ieškoti būdų, kaip sužadinti mokiniuose jų kūrybines galias. Apie tai byloja ir iššūkiai, su kuriais susiduria žmonija: reikalingi nestandartiniai, kūrybiški sprendimai, išeitys sprendžiančios problemas iš esmės.

Puiki priemonė tokiam lavinimui yra matematika. Čia yra visko: standartinių procedūrų, loginio mąstymo, žinojimo, kas yra tiesa, o kas ne, nestandartinių sprendimų, kūrybiškumo dvasios, fantazijos, valios, kantrybės, susitelkimo, drąsos ir t.t. Matematika - ne tik formulių pasaulis, tai daug daugiau: tai fantazijos, galvosūkių, įvairių iššūkių pasaulis. Tik ne kiekvienam yra parodomas kelias į jį. Ir viena pagrindinių, o gal net ir pati svarbiausia, ugdytojo užduočių yra praverti vaikui šį pasaulį, sužadinti smalsumą ieškoti kelio į jį, suteikti drąsos ir stiprybės klaidžioti nepažintomis teritorijomis. Olimpiados ir olimpiadiniai uždaviniai kaip tik yra apie „paslėptąją“ žemę.[1]

Olimpiadiniai uždaviniai yra iššūkis, kuris pareikalaus daug: ir žinių, ir kantrybės, o svarbiausia – kūrybiško mąstymo. Ir, žinoma, kuo rimtesnė olimpiada, tuo plotai pasireikšti tai kūrybai yra didesni, iššūkiai yra didesni. Kas nenorėtų jaustis galinčiu „susiremti“ su Pasaulinės olimpiados lygio uždaviniu?

Žengti į šią teritoriją yra baugu – kas, jei tai ne mūsų jėgoms. Kartą, 1994 metais, teko garbė dalyvauti Tarptautinėje Moksleivių Matematikos Olimpiadoje Hong Kong‘e ir nelabai sėkmingai (neišsprendžiau nei vieno uždavinio). Tad norėjosi žvilgterti dar kartą, ar ten tikrai tokie jau smalsiam eiliniam matematikos mėgėjui neįkandami uždaviniai. Ar galima juos padaryti šiek tiek „prieinamesniais“? Kaip pateikti uždavinio sprendimą, kad pats uždavinys atrodytų įveikiamas, padrąsinantis, kad atsirastų noras pačiam pabandyti jį išspręsti?

Tad pagrindinis šio darbo **tikslas** ir yra suteikti drąsos, nebūtinai galingam olimpiadininkui, išdrįsti pabandyti spręsti Tarptautinės Moksleivių Matematikos Olimpiados uždavinį. Dažnas paėmęs ir pavartęs uždavinio sprendimus, tame tarpe ir aš pats, kurių iš karto gal net ne visai supranta, ilgam, gal net visiems laikams, numos ranka ir imsis ko nors lengvesnio. Tačiau, jei

---

[1] Romualdas Kašuba, “About the so-called democratic problems proposed at International Mathematical Olympiad (IMO)“, *Teaching Mathematics: retrospective and perspectives 7th international conference. May 12-13, 2006 Proceedings,* Tartu, 2006, p. 96.

sprendimą galima suprasti, suvokti, kad jam užtenka turimų žinių, norėsis išdrįsti susirungti su kitu uždaviniu.

Šio tikslo sieksime išsikeldami **uždavinius**, visų pirma, pačiam pabandyti išspręsti Pasaulinės olimpiados uždavinį, antra, pateikti suprantamus, aiškius įvairių Pasaulinių olimpiadų uždavinių sprendimus, trečia, palyginti ir įvertinti tų uždavinių sudėtingumo lygį.

Tarptautinės Moksleivių Matematikos Olimpiadose lietuviai dalyvauja nuo 1992 metų. Nuo 2006 metų kiekvieną kartą bent pusė komandos narių grįžta su medaliais, 2007 metais iškovotas, kol kas vienintelis, aukso medalis[2]. Tokiai mažai šaliai rezultatai tikrai yra daugiau nei geri ir įkvepiantys, ypač tuos, kurie ruošiasi jose dalyvauti.

Rašant darbą iškilo tokie esminiai klausimai: kaip palyginti du olimpiadinius uždavinius, kokiais kriterijais vadovautis, kaip įvertinti, kiek kūrybos ir pastangų reikalauja uždavinio sprendimas. Supratau, jog ši „teritorija“ man visai nauja. Į ją ne taip paprasta „įžengti“. Juk dažnai toks vertinimas yra labai subjektyvus. Paprastai juk daroma yra taip: paimamas uždavinio sprendimas ir pažvelgus į jį tampa ganėtinai aišku, ar jis tavo jėgoms, ar ne. Vienam atrodys vienaip, kitam – kitaip.

Naudojantis proga šiame darbe yra aprašomi uždaviniai, kurie buvo pateikti 1994 metų olimpiadoje, o taip pat ir tų olimpiadų uždaviniai, kuriose buvo pateikti, kartojant dienraščio „Respublika“ antraštės žodžius „Lietuvis - pasaulio genijus“, lietuvių šviesuolių Giedriaus Alkausko bei Kęstučio Česnavičiaus sugalvoti uždaviniai, ir paskutiniosios, 2011 metais vykusios, Tarptautinės Moksleivių Matematikos Olimpiados uždaviniai.

Darbo struktūra tokia: pradžioje pristatomi visi uždaviniai ir jų sprendimai iš 1994 ir 2011 metų olimpiadų, tada keli lengvesni uždaviniai, kurie turėtų sužadinti skaitytojui norą pačiam pabandyti juos įveikti, ir galų gale jau minėti Giedriaus Alkausko ir Kęstučio Česnavičiaus sukurti uždaviniai, kurie buvo atrinkti į 1997 ir 2008 metų Olimpiados pagrindinius uždavinių šešetukus.

---

[2] http://www.imo-official.org/country_team_r.aspx?code=LTU (žiūrėta 2012-05-12).

ŠIEK TIEK APIE TARPTAUTINĘ MOKSLEIVIŲ MATEMATIKOS OLIMPIADĄ

Tarptautinė moksleivių matematikos olimpiada (angl. IMO) vyksta nuo 1959 metų be pertraukų. Pačioje pradžioje rungėsi tik socialistinio bloko šalys[3]. Ilgainiui dalyvaujančių šalių skaičius išaugo iki 90, o 2011 metais jau dalyvavo atstovai net iš 101 šalies[4].

Lietuva kaip nepriklausoma valstybė šioje Pasaulinėje olimpiadoje dalyvauja nuo 1992 metų ir siunčia savo atstovus kiekvienais metais. Pirmasis medalis – bronzinės spalvos – buvo parvežtas 1994 metais Vytauto Paškūno (aut. pastaba: mano bendraklasio). Neilgai reikėjo laukti ir sidabro: jį 1996 metais Lietuvai laimėjo Giedrius Alkauskas. Na, o aukso teko luktelti, bet ir juo galime pasidžiaugti, kol kas vieninteliu, bet užtat labai brangiu: 2007 metais jį parvežė Kęstutis Česnavičius. Beje, patį pirmąjį medalį, tačiau Sovietų Sąjungos rinktinės sudėtyje, iš 1986 metais Varšuvoje vykusios olimpiados parvežė vienintelis ten prasimušęs lietuvis Sigitas Keras. Būtų garbinga ir teisinga paminėti, kad nuopelnai dėl medalių ir ne tik dėl šių priklauso ir komandos vadovams, kurie atstovaudami moksleivio sprendimą dažnai savo pastangomis „uždirba“ ne vieną tašką.

Taip jau nusistovėjo, kad kiekviena šalis siunčia po 6 sprendžiančius asmenis. Uždaviniams spręsti yra skiriamos dvi dienos: pirmą dieną 3 uždaviniai (Nr.1-3) ir antrą dieną 3 uždaviniai (Nr.4-6). Sprendimui yra skiriamos 4,5 valandos, t.y. po 1,5 valandos vienam uždaviniui. Už pilną uždavinio išsprendimą skiriami 7 taškai.

Uždaviniai yra atrenkami iš preliminaraus uždavinių sąrašo (angl. Short-listed problems), kurį sudaro uždaviniai iš keturių matematikos šakų: algebros, geometrijos, kombinatorikos, skaičių teorijos.

Uždaviniai neoficialiai yra reitinguojami, t.y. skirstomi į tris grupes: sunkūs, lengvi ir vidutinio sunkumo.

Susiklostė tokia tradicija, kad uždaviniai nr. 1 ir nr. 4 laikomi lengvais, na o uždaviniai nr. 3 ir nr. 6 sunkiais. Galbūt reiktų išskirti uždavinį nr. 6 kaip didžiausią pretendentą į „sunkiausio uždavinio“ titulą.

Tad nieko nelaukdami pabandykime patys išbandyti šių uždavinių sunkumą.

---

[3] http://www.olimpiados.lt/matematika/imo/imo-virtuves-paslaptys-ir-prieskambario-kvapsniai-vietname-ir-anksciau-0359 (žiūrėta 2012-05-17).
[4] http://www.imo-official.org/results_year.aspx (žiūrėta 2012-05-12).

1994 METŲ OLIMPIADA

Naudodamasis proga pradžioje pristatau uždavinius iš 1994 metų Pasaulinės olimpiados vykusios Hong Kong'e, kurioje teko dalyvauti ir man.

Uždavinys Nr. 1[5]

Tegul *m*, *n* yra natūralieji skaičiai. Tarkime $a_1, a_2, ..., a_m$ yra tokie skirtingi aibės {1;2;...;*n*} elementai, kad, jei $a_i + a_j \leq n$, $1 \leq i \leq j \leq m$, tai egzistuoja toks *k*, 1≤ *k* ≤*m*, kad $a_i + a_j = a_k$. Įrodykite, kad $\frac{a_1 + a_2 + ... + a_m}{m} \geq \frac{n+1}{2}$.

Sprendimas[6]

Pradžiai visai pravartu paimti kokį visai konkretų atvejį ir pasinagrinėti jį. Tad tarkim turime tokius uždavinio sąlygoje aprašytos aibės narius a_1 = 3, a_2 = 6, a_3 = 11, *n* = 11 (tariame, kad a_3 yra didžiausias aibės elementas). Dabar patikrinkime, ar tai galėtų būti visi aibės nariai, t.y. ar yra patenkinta taisyklė, kad, jei $a_i + a_j \leq n$, $1 \leq i \leq j \leq m$, tai egzistuoja toks *k*, 1 ≤ *k* ≤ *m*, kad $a_i + a_j = a_k$. Žiūrime $a_1 + a_1$ = 3+3 = 6, 6 ≤ 11 = *n* toks narys yra a_2 = 6; $a_1 + a_2$ = 3 + 6 = 9, o 9 ≤ 11, todėl mūsų aibėje turi būti ir a_4 = 9, ir t.t., kol randame visus aibės narius {3; 6; 9; 11}. Patikrinam $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} = \frac{3+6+9+11}{4}$ = 7,25, o $\frac{n+1}{2} = \frac{11+1}{2}$ = 6. Taigi, 7,25 ≥ 6.

Kadangi elementų $a_1, a_2, ..., a_m$ eiliškumas nėra svarbus, tai tarkime, kad $a_1 > a_2 > ... > a_m$.

Pertvarkę nelygybę, kurią reikia įrodyti, gauname: 2($a_1 + a_2 + ... + a_m$) ≥ *m*(*n*+1). Pastebime, kad dešinėje pusėje turime *m* sumų (*n* + 1), tad norisi ir kairėje nelygybės pusėje sugrupuoti narius po du taip, kad sumos gautųsi daugmaž lygios. Ir kadangi $a_1 > a_2 > ... > a_m$, tai grupuojame didžiausią su mažiausiu ir t.t.: ($a_1 + a_m$) + ($a_2 + a_{m-1}$) + ... + ($a_m + a_1$) ≥ *m*(*n* + 1). Dabar

---

[5] 1994 m. olimpiados sąlygos lietuvių kalba iš asmeninio archyvo.
[6] 1994 m. olimpiados visi sprendimai išskyrus 2 uždavinio pirmą dalį pgl. *Short-Listed Problems for the 35th International Mathematical Olympiad*, Hong Kong: Golden Cup Printing Co. Ltd. 1994.

įrodysime, kad kiekvienas iš jų būtinai yra ne mažesnis už n + 1, t.y. $a_i + a_{m+1-i} \geq n + 1$ arba $a_i + a_{m+1-i} > n$, su visais i.

Įrodysime prieštaros būdu. Tarkime, kad $a_i + a_{m+1-i} \leq n$ su kažkuriuo i. Tada turime: $a_i < a_i + a_m < a_i + a_{m-1} < ... < a_i + a_{m+1-i} \leq n$. Ir iš sąlygos seka, jog $a_i + a_m$, $a_i + a_{m-1}$, ..., $a_i + a_{m+1-i} \in \{1;2;...;n\}$. Gavome, kad tokių narių didesnių už a_i ir priklausančių aibei $\{1;2;...;n\}$ yra i. Bet juk už a_i didesni yra tik a_1, a_2, ..., a_{i-1}, t.y. $i-1$ narių. Gavome prieštarą!

Todėl su visais $1 \leq i \leq m$ visada yra teisinga $a_i + a_{m+1-i} \geq n + 1$. Todėl yra teisinga ir $(a_1 + a_m) + (a_2 + a_{m-1}) + ... + (a_m + a_1) \geq m(n+1)$. O iš čia teisinga ir $\frac{a_1 + a_2 + ... + a_m}{m} \geq \frac{n+1}{2}$.

Kaip gi būtų galima įvertinti olimpiadinio uždavinio sudėtingumą? Kaip palyginti du skirtingus uždavinius? Kaip palyginti uždavinį iš skaičių teorijos su uždaviniu iš geometrijos? Kokiais kriterijais vadovautis? Juk čia kaip su menu - kaip įvertinti, kuris darbas reikalauja daugiau kūrybos, sudėtingesnės kūrybos?

Galbūt vienas iš pirmų kriterijų galėtų būti: ar uždavinys yra grynai „techninio“ pobūdžio.

Žinoma, tikimybė tokį uždavinį aptikti Pasaulinėje olimpiadoje artima nuliui. Tad belieka kažkokiu būdu stengtis išmatuoti tą kūrybinį uždavinio užtaisą. Uždavinio sąlyga – tai lyg vartai į mažą paslėptą pasaulėlį, į kurį taip norisi įžengti, bent kažkokiu būdu duris praverti ir trumpam žvilgtelti anapus. Todėl apie paslėptą grožį galime spręsti tik plačiai pravėrę vartus. Žinoma, kartais nutinka ir taip, kad patys vartai, t.y. uždavinio sąlyga, kuriam laikui apkerėja savo tobulumu.

Taigi, ką galėtume pasakyti apie pastarojo uždavinio sudėtingumą? Nors jam suteiktas ir pirmas numeris, bet kaip matysime vėliau, pavadinti jį lengviausiu olimpiados uždaviniu būtų klaida. Dar tiksliau byloja oficiali statistika: visų dalyvių surinktų taškų už šį uždavinį vidurkis buvo didesnis tik už vidurkį taškų surinktų už uždavinį nr. 6 (paprastai, pats sudėtingiausias olimpiados uždavinys).[7]

Šis uždavinys tampa įveikiamas kažkokiu būdu pastebėjus, jog visai naudingas gali būti Dirichlė principas.

[7] http://www.imo-official.org/year_statistics.aspx?year=1994 (žiūrėta 2012-05-28).

Uždavinys Nr. 2

Trikampis *ABC* yra lygiašonis, $AB = AC$. Tarkime, kad:

i) per kraštinės *BC* vidurio tašką *M* išvestoje tiesėje *AM* pažymėtas toks taškas *O*, kad atkarpa *OB* yra statmena *AB*;

ii) kraštinėje *BC* pažymėtas taškas *Q*, skirtingas nuo taškų *B* ir *C*;

iii) tiesėje *AB* pažymėtas taškas *E*, tiesėje *AC* – taškas *F* taip, kad skirtingi taškai *E*, *Q* ir *F* yra vienoje tiesėje.

Įrodykite, kad atkarpa *OQ* yra statmena *EF* tada ir tik tada, kai $QE = QF$.

Vertinant geometrinius uždavinius vienas iš kriterijų galėtų būti, ar uždavinio išsprendimui reikalingas brėžinio papildymas. Tada, ar tas papildymas reikalauja „gilios įžvalgos“, ar jis yra tiesiog savaime išplaukiantis iš sąlygos.

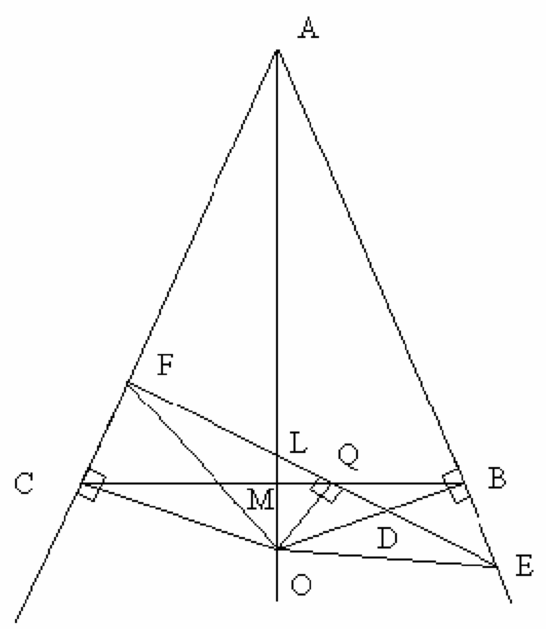
Pastarasis uždavinys, bent jau pirmoji jo dalis, nereikalauja nei jokio brėžinio papildymo, nei sudėtingų įžvalgų. Priskirčiau jį, bent jau pirmą jo dalį, prie vienų iš lengviausių Pasaulinės olimpiados geometrinių uždavinių. Beje, už šį uždavinį maksimalų balų skaičių (7 taškus), lyginant su kitais uždaviniais, surinko daugiausia dalyvių, o taip pat ir surinktų taškų vidurkis už šį uždavinį buvo didžiausias.[8]

Sprendimas

1) Pirma, įrodysime, kad jei *OQ* yra statmena *EF*, tai $QE = QF$.

I būdas. Šio uždavinio pirmai daliai įrodyti pakanka pastebėti du įbrėžtinius keturkampius ir pasinaudoti jiems būdingomis savybėmis.

[8] http://www.imo-official.org/year_statistics.aspx?year=1994 (žiūrėta 2012-05-28).



Žiūrint į ΔOFE ir turint omeny, kad $OQ \perp EF$ ir kad mums reikia įrodyti, jog $QE = QF$, kyla mintis tai bandyti daryti įrodant, kad ΔOFE yra lygiašonis, t.y. $\angle OFE = \angle FEO$. Šiuo keliu ir eisime.

Iš sąlygos: $\angle OQE = \angle OBE = 90°$. Tuomet pastebėję, kad be šių stačių kampų ΔOQD ir ΔEBD turi dar ir kryžminius kampus $\angle QDO$ ir $\angle BDE$, darome išvadą, kad jie yra panašūs, kur $\angle QOD$ ir $\angle BED$ taip pat yra lygūs. Taigi, turime įbrėžtinį keturkampį QBEO. Todėl ir $\angle QEO = \angle QBO$ (nes remiasi į tą patį lanką). O kadangi ΔCOB yra lygiašonis, tai $\angle BCO = \angle \mathbf{CBO} = \angle \mathbf{QEO}$.

Dabar mūsų žvilgsnis krypsta į $\angle QFO$. Paimkime keturkampį *OQFC*. Jis irgi yra įbrėžtinis, nes $\angle FCO + \angle FQO = 180°$. Iš čia $\angle \mathbf{QFO} = \angle \mathbf{QCO}$ (nes remiasi į tą patį lanką).

Taigi, gavome, kad $\angle QFO = \angle QCO = \angle CBO = \angle QEO$. Todėl ΔFOE yra lygiašonis. *OQ* yra aukštinė, o $FQ = QE$.

II būdas. Šis būdas kiek ilgesnis, tačiau čia užtenka tik įžvelgti atitinkamus panašius trikampius ir pasinaudoti jų savybėmis. ΔABO ir ΔBMO yra panašūs nes turi po statų kampą ir vieną bendrą kampą - $\angle AOB$. Todėl $\angle OAB = \angle MBO$.

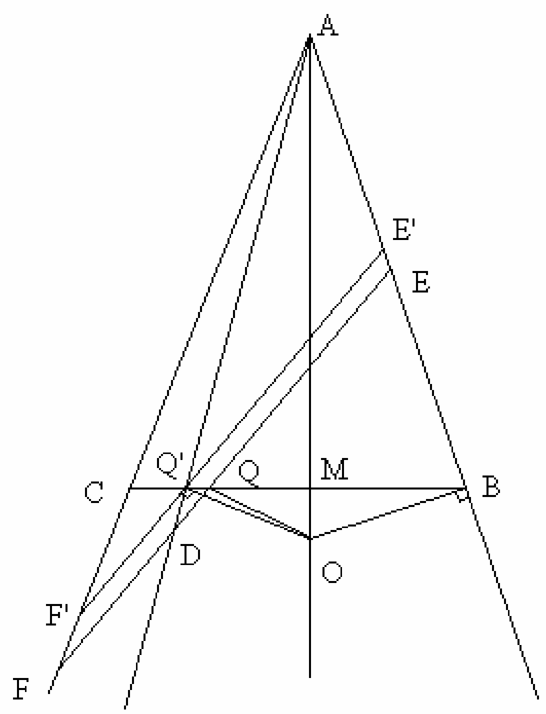
Akivaizdu, kad ΔOQD ir ΔEBD yra panašūs (lygūs atitinkami kampai). Todėl $\frac{BD}{QD} = \frac{ED}{OD}$. Iš čia $\frac{BD}{ED} = \frac{QD}{OD}$. Pritaikę ΔQDB ir ΔODE kosinusų teoremą gauname, kad $\frac{BD}{ED} = \frac{QD}{OD} = \frac{QB}{EO}$.

Taigi, ΔQDB ir ΔODE taip pat yra panašūs ir $\angle QBD = \angle DEO$. O kadangi $\angle QBD$ sutampa su $\angle MBO$, tai $\angle DEO = \angle OAB$.

ΔABC yra lygiašonis ir AM yra aukštinė, tai $\angle OAB = \angle OAC$. Taigi, turime, kad $\angle DEO = \angle OAB = \angle OAC$. O iš čia gauname, kad ΔELO ir ΔALF yra panašūs, ir todėl $\frac{EL}{AL} = \frac{OL}{FL}$.

Pertvarkę gauname: $\frac{EL}{OL} = \frac{AL}{FL}$. Ir analogiškai, $\frac{EL}{OL} = \frac{AL}{FL} = \frac{AE}{OF}$. Todėl ΔELA ir ΔOLF yra panašūs, ir $\angle OFL = \angle EAL = \angle OAB = \angle DEO$. Gavome, kad ΔFOE yra lygiašonis, kur $OF = OE$, OQ yra aukštinė dalijanti pagrindą EF į dvi lygias dalis. Todėl $EQ = QF$.

2) Dabar įrodysime „į kitą pusę“: jei $FQ = QE$, tai $OQ \perp EF$.



Šios uždavinio dalies visa sprendimo esmė glūdi prielaidoje: **tarkime, esant *FQ = QE, OQ* nėra statmena *EF***. Tokia prielaida nėra tokia jau akivaizdi ir dažnai taikoma sprendžiant geometrinius uždavinius. Bet ją teigus, uždavinys pasidaro paprastas – įveikiamas gudresniam devintokui.

Tada brėžiame $OQ' \perp E'F'$ (čia $E'F' \parallel EF$). O iš pirmos dalies įrodymo žinome, kad $F'Q' = Q'E'$.

Tegul tiesės AQ' ir atkarpos EF susikirtimo taškas yra D. Tada $FD = DE$ (nes $\Delta F'AE' \sim \Delta FAE$) ir $FQ \neq QE$, nes taškai D ir Q nesutampa. Gavome prieštarą (juk $FQ = QE$)! Todėl $OQ \perp EF$.

Uždavinys Nr. 3

Su kiekvienu natūraliuoju k pažymėkime $f(k)$ skaičių aibės $\{k+1; k+2; ...; 2k\}$ elementų, kiekvieno iš kurių užraše dvejetainėje skaičiavimo sistemoje yra lygiai trys 1-ai.

a) Įrodykite, kad su kiekvienu natūraliuoju m egzistuoja mažiausiai vienas toks natūralusis k, kad $f(k) = m$.

b) Raskite visus natūraliuosius m, su kuriais egzistuoja toks vienintelis k, kad $f(k) = m$.

Sprendimas

Sąlyga ne iš tų, kur perskaičius vieną kartą tampa visai aišku, ko čia iš mūsų nori. Tad aiškumo dėlei įsiveskime tam tikrus žymėjimus ir panagrinėkime konkretų atvejį.

A_k pažymėkime tuos aibės $\{k+1; k+2; ...; 2k\}$ elementus, kurių dvejetainiame užraše yra lygiai trys vienetai. Tada $f(k)$ nusako, kiek tokių skaičių yra aibėje A_k. Tegul aibę B_k sudaro tie aibės $\{1; 2; ...; k\}$ elementai, kurių dvejetainiame užraše yra lygiai trys vienetai, o $g(k)$ – funkcija, kuri nusako, kiek tokių elementų yra aibėje B_k.

Pavyzdžiui, tegul $k = 16$. Tada $B_{16} = \{7; 11; 13; 14\}$, $g(k) = 4$, $A_{16} = \{19; 21; 22; 25; 26; 28\}$, $f(k) = 6$.

Akivaizdu, jog $f(k)$ ir $g(k)$ yra nemažėjančios funkcijos. Ir neturėtų būti labai sunku pastebėti kaip $f(k)$ priklauso nuo $g(k)$: $f(k) = g(2k) - g(k)$.

Norint įrodyti teiginį a) reikia parodyti, kad funkcija $f(k)$ „perbėga“ visus natūraliuosius skaičius. Akivaizdu, kad $f(1) = 0$. Tad pažiūrėkime, kam bus lygu $f(k+1) - f(k)$:

$f(k+1) - f(k) = (g(2k+2) - g(k+1)) - (g(2k) - g(k)) = g(2k+2) - g(2k) - (g(k+1) - g(k))$.

Panagrinėkime kokias reikšmes gali įgyti $g(2k+2) - g(2k) - (g(k+1) - g(k))$.

$g(2k+2) - g(2k)$ gali įgyti reikšmes 0, 1 arba 2, nes aibė B_{2k+2} turės tuos pačius narius kaip ir aibė B_{2k} ir maksimum dar 2 naujus narius. Tuo tarpu $g(k+1) - g(k)$ gali įgyti reikšmes 0 arba 1.

Tada visas reiškinys $g(2k+2) - g(2k) - (g(k+1) - g(k))$ gali įgyti reikšmes 0, 1, 2 (-1 negali, nes funkcija $f(k)$ yra nemažėjanti). 2 gausime tik tuomet, kai $g(2k+2) - g(2k) = 2$, o $g(k+1) - g(k) = 0$. Bet ar gali taip būti? $g(k+1) - g(k) = 0$ tada, kai $k+1 \notin B_{k+1}$. Bet juk tada ir $2k+2 \notin B_{2k+2}$, nes jei yra skaičiai a ir $2a$, tai jų dvejetainė išraiška skirsis tik tuo, kad $2a$ dvejetainę išraišką gausime prirašę „0" iš dešinės skaičiaus a dvejetainės išraiškos, t.y. vienetų skaičius yra tas pats. Todėl, jei $g(k+1) - g(k) = 0$, tai $g(2k+2) - g(2k)$ įgis reikšmes 0 arba 1. Taigi, $f(k+1) - f(k)$ gali įgyti tik reikšmes 0 arba 1. O tai reiškia, kad funkcija $f(k)$ „neperšoka" nei vieno natūralaus skaičiaus.

Bet ar funkcija $f(k)$ įgyja ir kiek norimai dideles reikšmes?

Kadangi 2^n dvejetainiame užraše turi tik vieną vienetą, tai $f(k)$ nėra aprėžta iš viršaus (paėmus kiek norimai didelį n visada rasis skaičius didesnis už 2^n, kurio užraše dvejetainėje skaičiavimo sistemoje yra lygiai trys 1-ai). Taip įrodėme teiginį a).

b) daliai išspręsti pasinaudosime tuo, ką jau įrodėme įrodinėdami teiginį a). Taigi, jei egzistuoja, toksai m, su kuriuo egzistuoja toks vienintelis k, kad $f(k) = m$, tai tada $f(k+1) - f(k) = 1$ ir $f(k) - f(k-1) = 1$. O tai reiškia, kad $2k+1 \in B_{2k+2}$ ir $2k-1 \in B_{2k}$. $2k+1 \in B_{2k+2}$ tada ir tik tada, kai k dvejetainiame užraše yra 2 vienetai. Analogiškai, $2k-1 \in B_{2k}$ tada ir tik tada, kai $k - 1$ dvejetainiame užraše yra 2 vienetai. Tai yra įmanoma tada ir tik tada, kai $k - 1$ dvejetainiame užraše paskutinis skaitmuo yra 1, priešpaskutinis skaitmuo yra 0 ir tame užraše yra dar vienas 1. Kitaip sakant k yra tokios išraiškos: $k = 2^n + 2$, su $n \geq 2$.

Beliko rasti m. $m = f(2^n + 2)$. Pastebėkime, kad $g(2^n) = C_n^3$. Tada

$g(2^{n+1}) - g(2^n) = C_{n+1}^3 - C_n^3 = C_n^2$. Todėl

$f(2^n + 2) = g(2^{n+1}+4) - g(2^n + 2) = 1 + g(2^{n+1}) - g(2^n) = 1 + C_n^2$.

Ats.: m = $\{1 + C_n^2 \mid n \geq 2\}$.

Uždavinys Nr. 4

Raskite visas tokias natūraliųjų skaičių poras $(m;n)$, kad $\dfrac{n^3+1}{mn-1}$ būtų sveikas skaičius.

Šio uždavinio žavumas yra trumpoje sąlygoje – tik vienas sakinys. Bet kaip dažnai esti, iš pirmo žvilgsnio paprasta ir aiškiai suprantama sąlyga dar negarantuoja lengvo ir greito sprendimo.

Sprendimas

Pabandykime panagrinėti situacijas, kai $m = n$, $m > n$ ir $m < n$.

Tegul $m = n$. Tada $\frac{n^3+1}{mn-1} = \frac{(n+1)(n^2-n+1)}{(n+1)(n-1)} = \frac{n(n-1)+1}{n-1} = n + \frac{1}{n-1}$. Pastarasis skaičius bus sveikas tik, kai $n = 2$. Taigi, vieną porą jau turime: (2;2).

Dabar imkime $m > n$. Pabandykime $\frac{n^3+1}{mn-1}$ reiškinį, įgyjantį sveikas reikšmes, išsireikšti per n. Pastebėkime, kad $n^3+1 \equiv 1 \pmod n$, o $mn-1 \equiv -1 \pmod n$. Todėl, jei skaičius $\frac{n^3+1}{mn-1} \in$ Z, tai jis yra tokios išraiškos: $\frac{n^3+1}{mn-1} = kn-1$, kur $k \in Z^+$(nes $(kn-1)(mn-1) \equiv 1 \pmod n$ kaip ir $n^3+1 \equiv 1 \pmod n$). Kadangi nagrinėjame atvejį, kai $m > n$, tai $\frac{n^3+1}{mn-1} < \frac{n^3+1}{n^2-1}$ ir $kn - 1 < \frac{n^3+1}{n^2-1}$. Tada $kn - 1 < n + \frac{1}{n-1}$, o iš čia $kn - n < 1 + \frac{1}{n-1}$. Gavome, kad $(k-1)n < 1 + \frac{1}{n-1}$. Akivaizdu, kad dešinė nelygybės pusė visuomet bus mažesnė už 2 su bet kokiu $n \neq 1 \in$ N. Ir, kadangi $k \in Z^+$, tai $(k-1)n = 0$ arba $(k-1)n = 1$. Tinka tik $k = 1$. Tada turime, jog $\frac{n^3+1}{mn-1} = n - 1$. O iš čia išsireiškę m gauname: $m = n+1+\frac{2}{n-1}$. Ir nesunku pamatyti, jog dešinė lygybės pusė bus sveikas skaičius tik, kai $n = 2$ ir $n = 3$. O m abiem atvejais bus lygus 5. Dar reikia patikrinti ir atvejį, kai $n = 1$: $\frac{1^3+1}{m-1} = \frac{2}{m-1}$. Pastarasis skaičius bus sveikas su $m = 2$ ir $m = 3$. Taigi, turime dar 4 poras $(m;n)$: (5;2), (5;3), (2;1), (3;1).

Beliko išnagrinėti atvejį, kai $m < n$. Būtų labai patogu šiuo atveju kažkaip pradinį reiškinį suprastinti. Ir nesunku pastebėti, jog, jei $\frac{n^3+1}{mn-1} \in$ Z, tai ir $m^3\frac{n^3+1}{mn-1} \in$ Z. Dar daugiau, kadangi m^3 ir $mn-1$ yra tarpusavy pirminiai, tai, jei $m^3\frac{n^3+1}{mn-1} \in$ Z, tai ir $\frac{n^3+1}{mn-1} \in$ Z. Taigi, gauname:

$m^3\frac{n^3+1}{mn-1} = \frac{m^3n^3-1+m^3+1}{mn-1} = m^2n^2-mn+1+\frac{m^3+1}{mn-1}$. Matome, kad $m^3\frac{n^3+1}{mn-1} \in$ Z tada ir tik tada, kai $\frac{m^3+1}{mn-1} \in$ Z. Gavome simetrinį reiškinį. Todėl tinkamos *(m;n)* poros bus: (2;5), (3;5), (1;2), (1;3).

Ats.: (1;2), (1;3), (2;1), (2;2), (2;3), (2;5), (3;5), (5;2), (5;3).

Pilnai išspręsti šį uždavinį nėra paprasta, čia reikalinga tokių uždavinių sprendimo praktika, tam tikras pajautimas, matymas, kuriuo keliu eiti. Bet pelnyti bent porą taškelių tikrai įmanoma ramiai sau „žaidžiant“ su juo ir renkat tinkamas *(m;n)* poras. Ir iš atsakymo yra aišku, jog visas tokias poras „surinkti“ tikrai nėra sudėtinga.

Uždavinys Nr. 5

Tarkime, *S* yra visų griežtai didesnių už -1 realių skaičių aibė. Raskite visas funkcijas f: $S \to S$, tenkinančias šias dvi sąlygas:

i) $f(x+f(y)+xf(y)) = y+f(x)+yf(x)$ su visais $x,y \in S$;

ii) $\frac{f(x)}{x}$ griežtai didėja kiekviename iš intervalų $-1 < x < 0$ ir $x > 0$.

Sprendimas

Pagal pirmąją sąlygą, visiems $x \in S$ yra teisinga $f(x+f(x)+xf(x)) = x+f(x)+xf(x)$, t.y. $f(x+(1+x)f(x)) = x+(1+x)f(x)$. Jei $x+(1+x)f(x)$ pažymėtume z, tai turėtume $f(z) = z$.

O iš antrosios sąlygos išplaukia, kad lygtis $f(x) = x$ daugiausia gali turėti tris sprendinius: vieną intervale $-1 < x < 0$, kitą, kai $x = 0$, trečią intervale $x > 0$.

Taigi, tarkime yra toks sprendinys u iš intervalo (-1;0). Tada $f(u) = u$ ir, pagal pirmą sąlygą įstačius $x = y = u$, $f(u^2+2u) = u^2+2u$. Kadangi $-1 < u < 0$, gauname, kad ir $u^2+2u \in$ (-1;0). Betgi sprendinys gali būti tik vienas, todėl $u^2+2u = u$. Išsprendę lygtį gauname, kad $u = 0$ ir $u = -1$. Nei vienas iš sprendinių $\notin$ (-1;0). Vadinasi, tokio sprendinio intervale (-1;0) iš viso nėra.

Tarkime yra toks sprendinys a intervale $(0;+\infty)$. Analogiškai gauname, kad $a^2+2a = a$. Išsprendę gauname, kad $a = 0$ ir $a = -1$; abu sprendiniai $\notin (0;+\infty)$.

Patikrinkime, ar yra toks sprendinys, kai *f(x)* = *x* = 0. Įstatę į pirmąją sąlygą *x* = *y* = 0 gauname *f*(0*)* = 0. Taigi, toks sprendinys yra.

Gavome, kad visiems $x \in S$ yra teisinga *f(x+f(x)+xf(x))* = *x+(*1*+x)f(x)* = 0. Išsprendę gauname, kad $f(x) = -\frac{x}{1+x}$. Beliko tik patikrinti, ar ši funkcija tenkina visas sąlygas:

$$f(x+f(y)+xf(y)) = f(x-\frac{y}{1+y}-x\frac{y}{1+y}) = f(\frac{x+xy-y-xy}{1+y}) = f(\frac{x-y}{1+y}) = \frac{\frac{y-x}{1+y}}{1+\frac{x-y}{1+y}} = \frac{y-x}{1+x}.$$

$$y+f(x)+yf(x) = y-\frac{x}{1+x}-\frac{yx}{1+x} = \frac{y+yx-x-yx}{1+x} = \frac{y-x}{1+x}.$$

$\frac{f(x)}{x} = -\frac{1}{1+x}$ - yra didėjanti, kai -1 < *x* < 0 ir *x* > 0.

Ats.: $f(x) = -\frac{x}{1+x}$.

Šį uždavinį būtų galima palyginti su uždavinius nr. 3. Penktame uždavinyje kertinis momentas yra, iš sąlygoje suteiktos informacijos, padaryti išvadą, jog lygtis *f(x)* = *x* daugiausia gali turėti tris sprendinius: vieną intervale -1 < *x* < 0, kitą, kai *x* = 0, trečią intervale *x* > 0. Teiginys yra paprastas ir žavus, kaip ir visa, kas yra paprasta, bet tai pamatyti pačiam yra genialu. Po to belieka tik techniškai tvarkingai užbaigti uždavinį. Tuo tarpu trečiajame uždavinyje reikia pasitelkti į pagalbą dar vieną aibę, jos pagalba įžvelgti atitinkamus sąryšius, juos analizuoti. Drįstume teigti, kad pastarasis uždavinys tikrai yra sunkesnis. Bet kiekvienas turi „atmušęs“ akį į skirtingus dalykus, tad tai niekada nebus visiems tinkanti teisinga išvada, juolab, kad ir bendrai visų dalyvių surinktų taškų vidurkis liudija penktojo, kaip sudėtingesnio uždavinio, naudai.[9]

Uždavinys Nr. 6

Parodykite, kad egzistuoja natūraliųjų skaičių aibė *A*, pasižyminti šia savybe: kiekvienai begalinei pirminių skaičių aibei *S* egzistuoja toks $k \geq 2$ bei tokie du natūralieji skaičiai $m \in A$ ir $n \notin A$, kad kiekvienas iš jų dviejų gali būti užrašytas *k* skirtingų aibės *S* elementų sandauga.

[9] http://www.imo-official.org/year_statistics.aspx?year=1994 (žiūrėta 2012-05-29).

Taigi, prieš mus – sudėtingiausias 1994 metų olimpiados uždavinys. Ar tikrai?

Visų pirma, šio uždavinio sąlyga yra iš tų, kur reikia sau ramiai neišsigąsti ir duoti laiko tiesiog žvelgti į ją be įnirtingo „rakto skylutės vartams atrakinti“ ieškojimo. Kai pradeda ryškėti „vartų kontūrai“ (ko čia iš mūsų norima), pasidaro aišku, kad uždavinio sprendimas turėtų būti trumpas. Tiesiog, reikia nusakyti tokią aibę. Atrodo, jog viskas čia pat – ranka pasiekiama. Bet ... reikalinga vaizduotė, reikalinga patirtis, reikalinga kūryba, reikalinga idėja.

<u>Sprendimas</u>

Sudarykime aibę A taip:

$A = \{2*3, 2*5, 2*7, ...\} \cup \{3*5*7, 3*5*11, ..., 3*19*31, ...\} \cup \{5*7*11*13*17, ...\} \cup ...$

Čia bendrasis aibės A narys yra išraiškos $a = b_1 b_2 ... b_{b_1}$, kur $b_1 < b_2 < ... < b_{b_1}$ yra pirminiai skaičiai.

Dabar, kiekvienai begalinei pirminių skaičių aibei $S = \{ p_1, p_2, p_3, ... \}$, kur $p_1 < p_2 < p_3 < ...$, visada egzistuos toks $k = p_1$ bei $m = p_1 p_2 ... p_{p_1} \in A$ ir $n = p_2 p_3 ... p_{p_1+1} \notin A$.

Ir pastebėkime, kad sprendimas yra pats trumpiausias iš visų aukščiau pateiktų. Ar ne genialu? Šioje vietoje pacituosiu žodžius iš doc. dr. Romualdo Kašubos straipsnio „About the so-called democratic problems proposed at International Mathematical Olympiad (IMO)“ apie meną, kurie labai tinka šiam uždaviniui:

„Menas yra tai, kas atrodo (yra) gražu, nauja ir patrauklu.

Menas yra tai, ką sunku atlikti.

Menas yra tai, kas sužadina mūsų kūrybiškumą, yra iššūkis mūsų vaizduotei, praplečia mūsų žvilgsnį, yra tai, kas labai neįprasta ir nestandartiška“.

PASKUTINIOJI - 2011 METŲ OLIMPIADA

Kaip ir ketinome, panagrinėsime ir paskutiniosios Tarptautinės olimpiados, vykusios 2011 metais Amsterdame, uždavinius.

Uždavinys Nr. 1[10]

Kiekvienos keturių skirtingų natūraliųjų skaičių aibės $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ elementų sumą $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ pažymėkime S_A. Tegul n_A yra porų *(i,j)*, kur $1 \le i < j \le 4$ ir $a_i + a_j$ dalija S_A, skaičius. Nurodykite visas tokias keturių skirtingų natūraliųjų skaičių aibes *A*, su kuriomis skaičius n_A įgyja didžiausią reikšmę.

Sprendimas

I būdas. Pradžiai, paimkime, kokį aibės *A* pavyzdį. Tarkime, *A* = {1, 2, 3, 4 }. Tada S_A = 10, o n_A = 2 (nes tik sumos 1 + 4 ir 2 + 3 dalija S_A).

Suraskime n_A maksimalią reikšmę. Viso porų *(i,j)* yra šešios, todėl tikrai $n_A \le$ 6. Tegul $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$. Kadangi aibę *A* sudaro tik skirtingi natūralieji skaičiai, tai ganėtinai akivaizdu, jog $a_3 + a_4$ nedalija S_A, nes visada $S_A > a_3 + a_4 > \frac{1}{2} S_A$. Lygiai taip pat ir $S_A > a_2 + a_4 > \frac{1}{2} S_A$. Todėl maksimali n_A reikšmė yra ne didesnė už 4.

Tarkime n_A = 4. Tada $a_1 + a_2$ ir $a_1 + a_3$, ir $a_1 + a_4$, ir $a_2 + a_3$ dalo S_A. Iš to, jog $a_1 + a_4$ dalo $S_A = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ gauname, kad $a_1 + a_4$ dalo ir $a_3 + a_2$ (nes $\frac{S_A}{a_1 + a_4} = 1 + \frac{a_2 + a_3}{a_1 + a_4}$). Analogiškai, iš to, jog $a_2 + a_3$ dalo S_A, gauname, kad $a_2 + a_3$ dalo ir $a_1 + a_4$. O taip gali būti tik, kai $a_1 + a_4 = a_2 + a_3$. Gavome, kad $S_A = 2(a_1 + a_4) = 2(a_2 + a_3)$.

$a_1 + a_2$ taip pat dalo S_A, todėl $a_3 + a_4 = b_1(a_1 + a_2)$, kur b_k, $k \in$ N, ir $b_2(a_1 + a_2) = 2(a_1 + a_4)$. Priešpaskutinę lygybę padauginę iš 2 ir atėmę paskutiniąją, gauname, kad $b_3(a_1 + a_2) = 2a_3 - 2a_1$,

[10] Visos 2011 m. sąlygos iš *IMO Amsterdam 2011Language: Lithuanian.*

o iš čia $a_3 = \frac{b_3}{2}(a_1 + a_2) + a_1$. O kadangi $a_1 + a_4 = a_2 + a_3$, tai $a_4 = \frac{b_3}{2}(a_1 + a_2) + a_2$. Gavome, kad aibė A yra tokio pavidalo $\{a_1,\ a_2,\ \frac{b_3}{2}(a_1+a_2) + a_1,\ \frac{b_3}{2}(a_1+a_2) + a_2\}$. Tada $S_A = (b_3+2)(a_1+a_2)$, o $a_1 + a_3 = 2a_1 + \frac{b_3}{2}(a_1+a_2)$ dalo S_A.

Gauname lygybę: $(b_3+2)(a_1+a_2) = m\,(2a_1 + \frac{b_3}{2}(a_1+a_2))$, čia $m \in$ N. Ekvivalenti pastarajai: $(2b_3+4)a_1 + (2b_3+4)a_2 = (4m+mb_3)a_1 + mb_3 a_2$. Su $m > 5$ dešinioji lygybės pusė visada bus didesnė už kairiąją, o su $m = 1$ visada kairioji bus didesnė už dešinę. Beliko patikrinti $m = 2, 3, 4, 5$ reikšmes.

Kai ***m* = 2**, turime $4a_2 = 4a_1$. O $a_2 = a_1$ netinka, nes visi nariai aibėje A yra skirtingi.

Kai ***m* = 3**, turime $(4 - b_3)a_2 = (b_3 + 8)\ a_1$. Šiuo atveju reikia patikrinti $b_3 = 1, 2, 3$ (su $b_3 > 3$ kairioji lygybės pusė visada bus neigiama arba lygi nuliui, o dešinioji teigiama).

Kai $b_3 = 1$, turime $a_2 = 3a_1$. Bet tada $a_3 = 3a_1 = a_2$. Taigi, irgi netinka.

Kai $b_3 = 2$, turime $a_2 = 5a_1$. Tada mūsų aibė A bus tokio pavidalo $\{a_1, 5a_1, 7a_1, 11a_1\}$.

Kai $b_3 = 3$, turime $a_2 = 11a_1$. Aibė A bus tokio pavidalo $\{a_1, 11a_1, 19a_1, 29a_1\}$.

Kai ***m* = 4**, turime $(2 - b_3)a_2 = (10 + b_3)a_1$. Patikrinę $b_3 = 1$, gauname jau gautą rezultatą $a_2 = 11a_1$.

Kai ***m* = 5**, turime $(4 - 3b_3)a_2 = (16 + 3b_3)a_1$. Patikrinę $b_3 = 1$, gauname $a_2 = 19a_1$. Jis netinka, nes tada $a_4 = 19a_1 = a_2$.

Ats.: n_A įgyja maksimalią reikšmę 4 tada, kai aibės yra pavidalo $\{a_1,\ 5a_1,\ 7a_1,\ 11a_1\}$ ir $\{a_1, 11a_1, 19a_1, 29a_1\}$.

II būdas. Pradėsime nuo jau žinomos sistemos[11]:

$$\begin{cases} a_1 + a_4 = a_2 + a_3 \\ b_1(a_1 + a_2) = a_3 + a_4 \\ b_2(a_1 + a_3) = a_2 + a_4 \end{cases}$$

[11] Šis ir sekantys 2011 m. olimpiados uždavinių sprendimai pgl. http://www.math.leidenuniv.nl/~desmit/pop/2011_imo_final6.pdf (žiūrėta 2012-04-21).

čia b_1 ir $b_2 \in$ N skirtingi koeficientai nei buvo naudojami *I būde*.

Sudėję pirmą ir trečią lygtis gausime $b_2(a_1+a_3) = 2a_2+a_3-a_1$. Jei b_2=1, tai tada $2a_2+a_3-a_1$ > (a_1+a_2). Kai $b_2 \geq 3$, tada $b_2(a_1+a_3) > 3a_3 > a_2\ a_3\ 2a_2+a_3-a_1$. O kai $b_2 = 2$, gauname $3a_1+a_3 = 2a_2$.

Sudėję pirmą ir antrą lygčių sistemos lygtis gausime $(b_1+1)a_1 + (b_1-1)a_2 = 2a_3$ (akivaizdu, jog $b_1 > 2$). Įsistatę vietoj $a_3 = 2a_2 - 3a_1$, gauname $(b_1+7)a_1 = (5-b_1)a_2$. Kadangi pastarosios lygties kairioji pusė visada teigiama, tai $2 < b_1 < 5$. Beliko patikrinti $b_1 = 3, 4$.

Kai $b_1 = 3$, turime $5a_1 = a_2$. Tada aibė *A* yra tokio pavidalo $\{a_1, 5a_1, 7a_1, 11a_1\}$.

Kai $b_1 = 4$, turime $11a_1 = a_2$. Ir aibė *A* yra pavidalo $\{a_1, 11a_1, 19a_1, 29a_1\}$.

Apie šį uždavinį galima būtų sakyti, jog jo sprendimas yra beveik vien tik technikos reikalas. Ir tos technikos čia reikia ne kažin kokios. Tad įžvalgesnis devintokas turintis pakankamai kantrybės galėtų drąsiai ryžtis gvildenti tokį uždavinį. Žinoma, tokio pobūdžio uždaviniuose dažnai per skubėjimą ir nekantrumą vienas iš sprendinių kažkur yra pametamas, bet vis tiek tai nesumažina to džiugaus pasididžiavimo jausmo, kad pats gali įveikti tokio rango uždavinį.

Uždavinys Nr. 2

Tegul *S* yra baigtinė aibė taškų. Aibę *S* sudaro bent du taškai ir jokie trys aibės *S* taškai nepriklauso vienai tiesei. *Vėjo malūnu* vadinamas toks procesas. Pradedame nuo kurio nors aibės *S* taško *P* ir kurios nors tiesės *l*, kuri eina per šį tašką *P* ir neina per jokį kitą aibės *S* tašką. Šią tiesę *l* sukame pagal laikrodžio rodyklę per *sukimosi tašką P* iki tol, kol tiesė *l* pasieks sekantį aibės *S* tašką, kuris vėl tampa naujuoju *sukimosi tašku* ir t.t. Šį procesą tęsiame tokiu pat būdu be galo ilgai.

Įrodykite, kad visada taip galima parinkti pradinį aibės *S* tašką *P* ir pradinę tiesę *l*, jog kiekvienas aibės *S* taškas bus šio *vėjo malūno sukimosi tašku* be galo daug kartų.

Paprasta idėja – dalinti plokštumą į dvi dalis – padaro uždavinį visai paprastu. Tik va kaip apčiuopti tas genialias paprastas idėjas? Net ir patyrusiems olimpiadų dalyviams tai yra sudėtinga: šį uždavinį išsprendė tik 22 dalyviai.[12]

Sprendimas

Išskirkime du atvejus: 1) kai aibėje *S* yra nelyginis skaičius taškų ir 2) kai aibėje *S* yra lyginis skaičius taškų.

1) atveju paimkime bet kurį tašką *P* priklausantį aibei *S* ir tiesę *l* dalijančią plokštumą į dvi dalis (mėlyną ir raudoną), kuriose yra po lygiai aibės *S* taškų. Ir tai padaryti visada yra įmanoma.

Įrodymas. Tarkime tiesė *l* einanti per tašką *P* dalina plokštumą į mėlyną ir raudoną pusplokštumes, kur mėlynoje yra $n + k$ taškų, o raudonoje $n – k$ taškų. Sukant tiesę *l* mėlynos ir raudonos pusplokštumių taškų skaičius gali padidėti ar sumažėti tik per vieną tašką, t.y. ± 1 (nes jokie trys taškai nėra vienoje tiesėje). O apsukus tiesę *l* per tašką *P* 180° kampu gausime, jog mėlynoje pusplokštumėje liko $n – k$ taškų, o raudonoje $n + k$ taškų (tiesiog pusplokštumės apsikeitė vietomis). Taigi, buvo tokia tiesės *l*, einančios per tašką *P*, padėtis, kai taškų abiejose pusplokštumėse buvo po lygiai (po *n*).

Parinkome bet kurį pradinį tašką *P* ir pradinę tiesę *l*, kuri dalija plokštumą į dvi dalis su vienodu skaičiumi aibės *S* taškų. Parodysime, kad *vėjo malūno sukimosi tašku* taps visi taškai tiesei l apsisukus 180° kampu. Sukame tiesę *l* pagal laikrodžio rodyklę iki pirmojo „sutikto“ taško *T*. Taškas *T* tampa sukimosi tašku. Ir pastebėkime, kad visada, jei taškas *T* buvo tarp taškų esančių raudonoje pusplokštumėje, tai ir taškas *P* atsidurs tarp taškų esančių raudonoje pusplokštumėje, ir atvirkščiai, jei taškas *T* buvo tarp taškų esančių mėlynoje pusplokštumėje, tai ir taškas *P* atsidurs tarp taškų esančių mėlynoje pusplokštumėje. Todėl kiekvienu momentu, kai tiesė *l* neis per du aibės *S* taškus, abiejose pusplokštumėse aibės *S* taškų bus po *n*.

Tarkime, kad kažkuris aibės *S* taškas *M* nepabuvo *vėjo malūno sukimosi tašku* tiesei *l* apsisukus 180° kampu. Mes žinome, jog per kiekvieną aibės *S* tašką, taip pat ir tašką *M*, galime išvesti tiesę, kuri dalija plokštumą į dvi dalis, kuriose yra po lygiai aibės *S* taškų. Tuomet betkuri nesutampanti lygiagreti jai tiesė jau nebedalins plokštumos į dvi dalis su vienodu skaičiumi aibės *S* taškų. Taigi, jei taškas *M* nepabuvo *vėjo malūno sukimosi tašku*, tai reiškia, jog buvo tokia tiesės *l* padėtis, kai

[12] http://www.imo-official.org/year_statistics.aspx?year=2011 (žiūrėta 2012-05-29).

jinai dalijo plokštumą į dvi dalis su nelygiu aibės S taškų skaičiumi. O taip atsitikti negalėjo, nes kiekvienu momentu, kai tiesė l neina per du aibės S taškus, abiejose pusplokštumėse aibės S taškų yra po n.

2) atveju viskas yra analogiška, tik tiesė l plokštumą visada dalins į dvi dalis, kur vienoje iš jų bus n aibės S taškų, o kitoje - $n - 1$ aibės S taškų. Ir tiesei l apsisukus 360° kampu visi taškai bus pabuvę *vėjo malūno sukimosi taškais*.

Uždavinys Nr. 3

Funkcija f: R → R, kur R - realiųjų skaičių aibė, tenkina nelygybę:

$$f(x + y) \leq yf(x) + f(f(x))$$

su visais realiaisiais skaičiais x, y. Įrodykite, kad $f(x) = 0$, kai $x \leq 0$.

Jau iš sąlygos turėtų būti gana aišku, kad šio uždavinio sprendimas slypi tinkamai parinktuose keitiniuose. Toks keitinių parinkimas reikalauja tam tikrų gilių įžvalgų paremtų panašių uždavinių sprendimo praktika. Ir kaip paaiškės iš sprendimo, uždavinys tikrai vertas būti sunkių uždavinių grupėje.

Sprendimas

Iš pradžių norėtųsi išsivaduoti nuo $f(x + y)$ ir $f(f(x))$. Tad pabandykime padaryti tokį keitinį $y = t - x$. Tada gauname, kad su visais realiaisiais skaičiais x ir t galioja

$$f(t) \leq tf(x) - xf(x) + f(f(x)).$$

Galima būtų pastebėti, jog t pakeitę, pvz., $f(a)$, kairėje pusėje gautume $f(f(a)) - f(f(x))$, ir kitame žingsnyje apkeitę argumentus bei sudėję dvi nelygybes išsivaduotume nuo $f(f(x))$ ir $f(f(a))$. Taigi, darom tokius keitinius. Iš pradžių $t = f(a)$, $x = b$ gauname

$$f(f(a)) - f(f(b)) \leq f(a)f(b) - bf(b).$$

O tada $t = f(b)$, o $x = a$

$$f(f(b)) - f(f(a)) \leq f(a)f(b) - af(a).$$

Dabar sudėkime paskutiniąsias nelygybes

$$af(a) + bf(b) \leq 2 f(a)f(b) \text{ arba } af(a) \leq f(b)(2f(a) - b).$$

Ir jei dabar paimtume $b = 2f(a)$, gautume, jog $af(a) \leq 0$.

Akivaizdu, jog su visais $a < 0$, $f(a) \geq 0$.

Jei dabar pavyktų įrodyti, jog su visais $a < 0$, $f(a) \leq 0$, gautume, jog su visais $a < 0$, $f(a) = 0$.

Tam tikslui paimkime nelygybę $f(t) \leq tf(x) - xf(x) + f(f(x))$ ir pažiūrėkime su kokiais t dešinė jos pusė bus mažesnė už nulį. Aišku, jog $tf(x) - xf(x) + f(f(x)) < 0$ tada, kai $t < \frac{xf(x) - f(f(x))}{f(x)}$ su $f(x) > 0$. Taigi, paėmę tokį realųjį x, su kuriuo $f(x) > 0$, ir tokius $t < \frac{xf(x) - f(f(x))}{f(x)}$, gauname, jog $f(t) < 0$, t.y. visada rasime kažkokį **neigiamą** skaičių t, su kuriuo $f(t) < 0$. O pastaroji išvada prieštarauja tam, jog su visais realiaisiais $t < 0$, $f(t) \geq 0$. Todėl iš šios prieštaros seka, kad nėra tokio realaus x, su kuriuo $f(x) > 0$, t.y. su visais x, $f(x) \leq 0$. O taip pat turėdami, jog su visais $x < 0$, $f(x) \geq 0$, gauname, kad su visais $x < 0$, $f(x) = 0$.

Beliko tik $x = 0$ atvejis. Pasinaudokime $f(t) \leq tf(x) - xf(x) + f(f(x))$ nelygybe į ją įstatydami reikšmes $x = t < 0$. Gauname, jog $0 \leq 0 - 0 + f(0)$ arba $0 \leq f(0)$. Bet taip pat turime, jog su visais realiaisiais x, $f(x) \leq 0$. Todėl ir $f(0) = 0$.

Uždavinys Nr. 4

Tegul n yra natūralusis skaičius. Turime svarstykles, kurias sudaro dvi lėkštutės, kairioji ir dešinioji, ir n svarelių, kurių svoriai yra 2^0, 2^1, 2^2, ..., 2^{n-1}. Mums reikia kokiu nors būdu sudėti visus n svarelių ant svarstyklių vieną po kito taip, kad po kiekvieno ėjimo dešinioji svarstyklių lėkštutė niekada nebūtų sunkesnė už kairiąją. Kiekvienu ėjimu mes pasirenkame kurį nors ant svarstyklių dar nepadėtą svarelį ir padedame jį arba ant kairiosios, arba ant dešiniosios svarstyklių lėkštutės ir t.t. iki tol kol ant svarstyklių bus sudėti visi n svarelių. Nustatykite, keliais skirtingais būdais tai galima padaryti.

Turime kombinatorikos uždavinį, kurio skaičiavimo algoritmas yra nesudėtingas. Pasirinkus tinkamą strategiją, jis nėra neįveikiamas tiems, kurie nebijo tokio tipo uždavinių.

Sprendimas

Tarkime $f(n)$ yra funkcija, kuri nusako keliais skirtingais būdais galime išdėti n svarelių ant svarstyklių taip, kad dešinioji lėkštutė niekuomet nebūtų sunkesnė už kairiąją.

Paimkime svarelį $2^0 = 1$. Jei jį dėtume patį pirmąjį ant svarstyklių, tai būtinai turėtume padėti ant kairiosios lėkštelės. Kitais atvejais jį galėtume dėti arba ant kairės lėkštelės, arba ant dešinės, nes visuomet kairėje esančių svarelių bendras svoris bus bent 2 didesnis už dešinėje lėkštelėje esančių svarelių bendrą svorį. Taigi, viso yra $(2n - 1)$ skirtingų būdų padėti svarelį 2^0 ant svarstyklių.

Liko tokie svareliai: 2^1, 2^2, ..., 2^{n-1}. Paprastumo dėlei padalinkime visus svorius iš 2. Gausime, jog turime 2^0, 2^1, 2^2, ..., 2^{n-2} svarelius. Ši situacija yra visiškai analogiška pradinei situacijai tik svarelių yra ne n, o $(n - 1)$. Vėl imdami lengviausią, gausime, kad viso yra $(2\,(n-1) - 1)$ skirtingų būdų jam padėti ant svarstyklių.

Taip tęsdami gauname, jog $f(n) = (2n - 1)(2(n - 1) - 1)...(2 \cdot 2 - 1) \cdot 1$ arba $f(n) = (2n - 1)!!$, t.y. visų nelyginių skaičių iki $(2n - 1)$ sandaugai: $f(n) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n - 1)$.

Ats.: $f(n) = (2n - 1)!!$

Uždavinys Nr. 5

Duota funkcija f: $Z \to N$, kur Z – sveikųjų skaičių aibė, o N – natūraliųjų skaičių aibė. Skirtumas $f(m) - f(n)$ dalijasi iš $f(m - n)$ su visais sveikaisiais skaičiais m ir n. Įrodykite, kad jei m ir n yra tokie sveikieji skaičiai, kad $f(m) \leq f(n)$, tai $f(n)$ dalijasi iš $f(m)$.

Sprendimas

Su tokiais sveikaisiais skaičiais a ir b, kad $f(a) = f(b)$, turime $\frac{f(b)}{f(a)} = 1$, t.y. $f(a)$ dalo $f(b)$.

Paimkime tokius sveikuosius skaičius a ir b, kad $f(a) < f(b)$. Tada, pagal sąlygą, $f(a - b)$ dalo $f(a) - f(b)$, t.y. $\frac{|f(a) - f(b)|}{f(a-b)} = \frac{f(b) - f(a)}{f(a-b)} > 0$. Ir $f(b) > f(b) - f(a) \geq f(a\text{-}b)$ (primenu, jog $f(m) \in N$, su visais $m \in Z$).

Paimkime skirtumą *f(a) - f(a-b) < f(a) < f(b)*. Gavome, kad $\frac{f(a) - f(a-b)}{f(b)}$ < 1. Bet gi pagal sąlygą *f(b) = f(a – (a – b))* dalija *f(a) - f(a-b)*. Todėl *f(a) - f(a-b)* = 0, t.y. *f(a) = f(a-b)*. Tada $\frac{f(b) - f(a)}{f(a-b)} = \frac{f(b) - f(a)}{f(a)} = \frac{f(b)}{f(a)}$ - 1. Taigi, *f(a)* dalo *f(b)*.

Palyginus šio uždavinio sprendimą su uždaviniu nr.3, akivaizdu, kad pastarasis reikalauja paprastesnių įžvalgų, paprastesnių keitimo operacijų. Ir pats įrodinėjimo kelias yra gerokai trumpesnis.

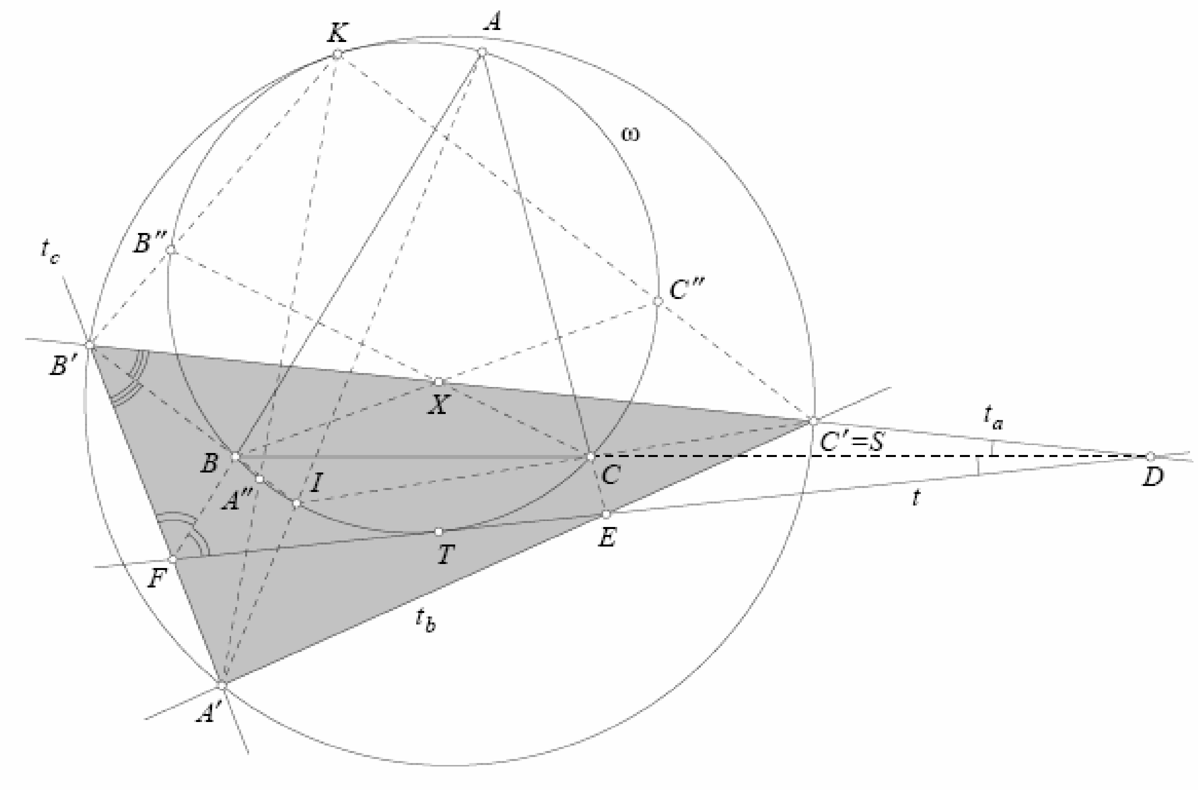
O dabar panagrinėkime vieną iš įspūdingiausių, kokių tik teko man matyti, geometrinių uždavinių.

Uždavinys Nr. 6

Duotas smailusis trikampis *ABC* ir apibrėžtas apie jį apskritimas ω. Tiesė *t* yra apskritimo ω liestinė, o t_a, t_b ir t_c - tiesės, simetriškos tiesei *t* atitinkamai tiesių *BC*, *CA* ir *AB* atžvilgiu. Įrodykite, kad per tris tiesių t_a, t_b ir t_c susikirtimo taškus einantis apskritimas liečia apskritimą ω.

Sprendimas

„



“[13]

Taškas T yra tiesės t ir apskritimo ω lietimosi taškas. Tiesių t_a, t_b ir t_c susikirtimo taškus pažymėkime A‘, B‘ ir C‘. Ant apskritimo ω pažymėkime taškus A“, B“ ir C“ taip, kad $TA = AA$“, $TB = BB$“, $TC = CC$“.

Dabar įrodysime, kad A“C“ || A‘C‘, A“B“ || A‘B‘ ir B“C“ || B‘C‘.

Paimkime kampą tarp tiesės t ir B“C“ ir palyginkime jį su kampu tarp tos pačios tiesės t ir B‘C‘. Kampas tarp t ir B“C“ yra lygus $\angle$ B“C“T - $\angle$$C$“$TD$ = 2$\angle$$BC$“$T$ (nes $TB = BB$“) - 2$\angle$$CTD$ (nes $\angle$$C$“$TD$ = $\angle$$C$“$TC$ + $\angle$$CTD$, o $\angle$$CTD$ = $\angle$$TC$“$C$ = $\angle$ C“TC) = 2($\angle$$BC$“$T$ - $\angle$$CTD$) = 2($\angle$$BCT$ - $\angle$$CTD$) = 2(($\angle$$CTD$ + $\angle$$TDC$) - $\angle$$CTD$) = 2$\angle$$TDC$.

Bet gi ir kampas tarp tiesės t ir B‘C‘ taip pat yra lygus 2$\angle$$TDC$! Todėl B“C“ || B‘C‘.

Analogiškai gausime ir kad A“C“ || A‘C‘ bei A“B“ || A‘B‘.

[13] http://www.math.leidenuniv.nl/~desmit/pop/2011_imo_final6.pdf (p. 14, žiūrėta 2012-04-21).

O dabar pabandysime įrodyti, kad trikampių $A'B'C'$ ir $A''B''C''$ ne tik atitinkamos kraštinės yra lygiagrečios, bet ir kad šie trikampiai yra homotetiniai (taip pat ir apie juos apibrėžti apskritimai) su homotetijos centru K, kuris priklauso apskritimui ω.

Pirma, parodysime, kad $B''C$ ir BC'' susikirtimo taškas X priklauso tiesei t_a. Ir iš tiesų $\angle XBC = \angle CBT$, o $\angle XCB = \angle BCT$ (abejais atvejais kampai remiasi į vienodo ilgio lankus). Todėl taškai X ir T yra simetriški BC atžvilgiu ir taškas X priklauso tiesei t_a.

Antra, parodysime, kad BB' ir CC' susikirtimo taškas I priklauso apskritimui ω. Šis įrodymas bus ilgesnis. Paimkime $\Delta B'DF$. Iš sąlygos seka, kad AB yra pusiaukampinė kampo $\angle B'FD$, o BC yra pusiaukampinė kampo $\angle B'DF$. Todėl taškas B yra $\Delta B'DF$ pusiaukampinių susikirtimo taškas ir $\angle BB'D + \angle BDF + \angle DFB = 90°$. Iš čia gauname, kad

$$\angle IB'D = \angle BB'D = 90° - (\angle BDF + \angle DFB) = 90° - \angle ABC.$$

Analogiškai, AC yra pusiaukampinė prieškampio $\angle C'ED$, o BC yra pusiaukampinė kampo $\angle C'DE$. Todėl CC' yra ir pusiaukampinė prieškampio $\angle EC'D$ (nes trikampio kampo pusiaukampinė ir kitų dviejų kampų išorinės pusiaukampinės kertasi viename taške). Taigi, gauname, kad $\angle CEF - \angle CDE + \angle CC'E = 90°$. O iš čia

$$\angle B'C'I = \angle CC'E = 90° - (\angle CEF - \angle CDE) = 90° - ((\angle ECD + \angle CDE) - \angle CDE) =$$
$$= 90° - \angle ECD = 90° - \angle BCA.$$

Ir galų gale gauname, kad

$$\angle BIC = \angle B'IC' = 180° - (\angle IB'C' + \angle B'C'I) = 180° - (\angle IB'D + \angle B'C'I) =$$
$$= 180° - ((90° - \angle ABC) + (90° - \angle BCA) = \angle ABC + \angle BCA = 180° - \angle BAC.$$

Todėl keturkampis $BACI$ yra įbrėžtinis ir taškas I priklauso apskritimui ω.

Pažymėkime atkarpos $B'B''$ kitą sankirtos tašką – ne tašką B'' – su apskritimu ω tašku K. Ir pritaikykime Paskalio teoremą įbrėžtiniam šešiakampiui $KB''\ CIBC''$. Ši teorema sako, jog esant įbrėžtam šešiakampiui, nebūtinai taisyklingam ir net iškylam, jo priešingų kraštinių susikirtimo taškai guli vienoje tiesėje. Mūsų atveju gauname, kad priešingų kraštinių susikirtimo taškai $KB'' \cap IB = B'$, $B''C \cap BC'' = X$, $CI \cap KC'' = S$ yra vienoje tiesėje. O iš čia $S = CI \cap B'X = C'$. Ir todėl taškai $C'KC''$ yra vienoje tiesėje.

Taigi, $B'B''$ ir $C'C''$ kertasi taške K, kuris yra homotetijos atvaizduojančios $\Delta A'B'C'$ į $\Delta A''B''C''$ centras. Todėl K taip pat yra ir homotetijos atvaizduojančios apskritimus apibrėžtus apie $\Delta A'B'C'$ ir $\Delta A''B''C''$ centras. O kadangi taškas K priklauso dar ir apskritimui ω, kuris yra apibrėžtas apie $\Delta A“B“C“$, tai jis taip pat priklauso ir apskritimui apibrėžtam apie $\Delta A‘B‘C‘$, ir jis yra šių apskritimų sąlyčio taškas.

Na, vėl gi, pamatai žmogus sąlygą, pamatai brėžinį ir kuriam laikui nuščiūvi. Kaip taikliai pastebi ir pataria USAMO autoriai, nereikia iškart išsigąsti, reikia skirti pakankamai laiko šiai akistatai su išties labai sudėtingu uždaviniu.[14]

Šiam uždaviniui išspręsti reikia, iš tiesų, daug. Be specifinių žinių reikalinga ir greita orientacija, nes laikas yra ribotas (olimpiados metu), panašios praktikos (būti gerai treniruotam), gilaus, „tolimo“ matymo ir, žinoma, sėkmės.

DAR KELETAS LENGVESNIŲ UŽDAVINIŲ

Pateiksiu dar du uždavinius, kurie, savo sudėtingumu arba greičiau jau savo įveikiamumu, galėtų prilygti Respublikinės olimpiados uždaviniams.

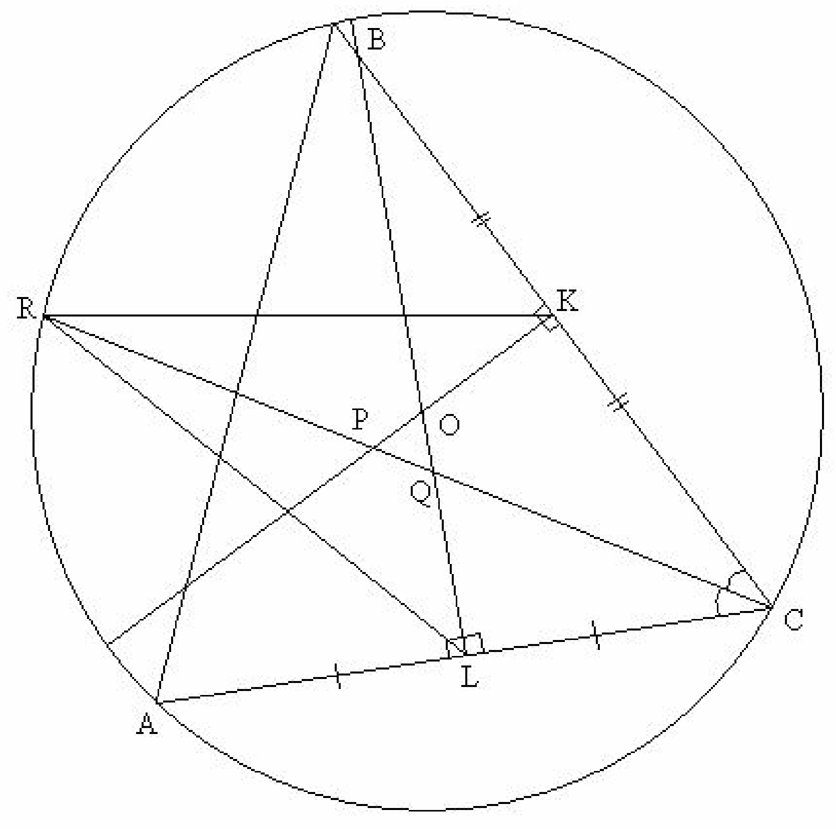
Pirmasis uždavinys iš 2007 metų olimpiados vykusios Vietname, kitas gi iš 2005 metų olimpiados vykusios Meksikoje.

2007 m. uždavinys Nr. 4[15]

Trikampio ABC kampo BCA pusiaukampinė kerta apibrėžtą apie trikampį ABC apskritimą taške R. Tarkime, kad K yra atkarpos BC vidurio taškas, o L atkarpos AC vidurio taškas. Tiesė, kuri eina per tašką K ir yra statmena atkarpai BC, kerta tiesę CR taške P, o tiesė, kuri eina per tašką L ir yra statmena atkarpai AC, kerta tiesę CR taške Q. Įrodykite, kad trikampių RPK ir RQL plotai yra lygūs.

[14] Romualdas Kašuba. Venid Y Ved, http://dg.icme11.org/document/get/101, (p. 4, žiūrėta 2012-05-29).
[15] http://www.olimpiados.lt/biblioteka/776/atsisiuntimas (žiūrėta 2012-04-26).

Sprendimas



Visų pirma, norisi išnaudoti kampo *BCA* pusiaukampinę. Ir iš karto nesunku pastebėti, kad trikampiai *PKC* ir *LQC*, be lygių kampų, $\angle QCL = \angle PCK$, turi ir stačiuosius kampus, tai $\angle PKC$ ir $\angle QLC$. Taigi, turime du panašius trikampius: ΔPKC ir ΔQLC; o iš jų panašumo ir tai, jog $\angle LQC = \angle KPC$. Tada ir kampas $\angle RPK$ lygus $\angle RQL$. Mes gavome, jog mūsų trikampiai, kurių plotų lygumą mums reikia įrodyti, t.y. ΔRPK ir ΔRQL, turi bent po vieną lygų kampą ($\angle RPK = \angle RQL$). Čia prašyte prašosi būti panaudota *Sinusų* teorema trikampių plotams skaičiuoti: $S_{\Delta RPK} = \frac{1}{2} RP \cdot PK \cdot \sin(\angle RPK)$, $S_{\Delta RQL} = \frac{1}{2} RQ \cdot QL \cdot \sin(\angle RQL = \angle RPK)$. Liko parodyti, kad $\boldsymbol{RP \cdot PK = RQ \cdot QL}$.

Nesunku pastebėti, kad kraštinės *PK* ir *QL* yra panašių trikampių ΔPKC ir ΔQLC kraštinės. O iš jų panašumo seka, kad $\frac{PK}{QL} = \frac{PC}{QC}$. Mums gi reikia įrodyti, kad $\frac{PK}{QL} = \frac{RQ}{RP}$ ($RP \cdot PK = RQ \cdot QL$).

Jei įrodytume, kad $\frac{PC}{QC} = \frac{RQ}{RP}$, būtume išsprendę ir visą uždavinį.

Taškas O yra statmenų išvestų iš trikampio ABC kraštinių vidurio taškų susikirtimo taškas, t.y. apibrėžto apie trikampį ABC apskritimo centras. Todėl OR ir OC yra šio apskritimo spinduliai, o ΔROC yra lygiašonis trikampis. Taip pat ir ΔPOQ yra lygiašonis ($OP = OQ$), nes $\angle OQP = \angle LQC = \angle KPC = \angle OPQ$. Ir jei iš viršūnės O nuleistume statmenį į PQ, tai tas statmuo būtų ΔROC ir ΔPOQ simetrijos ašis ir dalintų atkarpas PQ ir RC į atitinkamai lygias dalis. O iš čia gauname, kad $RP = QC$. Tada ir $PC = RQ$, ir $\frac{PC}{QC} = \frac{RQ}{RP}$. Ką ir reikėjo įrodyti.

Dar būtų atskiras atvejis, kai $AC = BC$. Bet tada taškai O, P ir Q sutaptų ir trikampiai RPK ir RQL būtų simetriški CR atžvilgiu, todėl ir jų plotai būtų lygūs.

Nors sprendimas gali atrodyti ir ilgokas, tačiau šis uždavinys galėtų pretenduoti į greičiausiai išsprendžiamo uždavinio titulą. Mat, pats nebūdamas genijus ir neturintis ypatingos Pasaulinių olimpiadų uždavinių sprendimo patirties, jį išsprendžiau per 15 minučių. Idėja yra gana aiški ir ėjimas „pagrindiniu“ keliu yra nuoseklus ir nesudėtingas, nereikalaujantis papildomų brėžinių ar kažkokių ypatingų teoremų žinojimo.

2005 m. uždavinys Nr. 4[16]

Raskite visus tokius natūraliuosius skaičius, kurie yra tarpusavy pirminiai su visais begalinės sekos

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1,\ n \geq 1$$

nariais.

Sprendimas

Šis uždavinys yra visai paprastas žinant mažąją Ferma teoremą. O ji sako, kad jei p – pirminis skaičius nedalo a, tai tada jis dalo $a^{p-1} - 1$.

Žvelgiant į duotą begalinę seką nesunku pastebėti, kad visi jos nariai yra lyginiai. Belieka tik nelyginiai skaičiai. Patikrinus pirmuosius narius $a_1 = 10 = 2\cdot 5$, $a_2 = 48 = 2^4 \cdot 3$ kyla įtarimas, kad

[16] Pagal http://www.olimpiados.lt/biblioteka/773/atsisiuntimas (žiūrėta 2012-04-26) (mano vertimas – N.K.)

galbūt šios sekos nariai „apima“ visus pirminius skaičius. Ir galbūt tai galima įrodyti. Taigi, labai paranki mažoji Ferma teorema, kuri ir nusako dalumo iš pirminio skaičiaus požymį.

Jau nustatėm, kad 2, 3 ir 5 nėra pirminiai su duotosios sekos nariais, todėl mums įdomūs tik $p > 5$. Pritaikę mažąją Ferma teoremą gauname, kad p dalo $(2^{p-1} - 1)$, $(3^{p-1} - 1)$ ir $(6^{p-1} - 1)$. Belieka tik sugalvoti kaip šiuos dėmenis privesti prie sekos nario formulės. Ir į akis krenta, jog 2+3+1=6. Tad padauginę sekos narį iš 6 mes gauname:

$$6a_n = 3\cdot 2^{n+1} + 2\cdot 3^{n+1} + 6^{n+1} - 6 = 3(2^{n+1} - 1) + 2(3^{n+1} - 1) + (6^{n+1} - 1).$$

Ir priskyrę $p - 1 = n + 1$, gausime, kad narį a_{p-2} dalo pirminis p, su visais $p > 5$.

Taigi, nėra tokių natūraliųjų skaičių.

UŽDAVINIAI, KURIŲ AUTORIAI YRA LIETUVIAI

Kol kas tik du uždaviniai, kurių autoriai yra lietuviai, yra patekę į pagrindinius olimpiadų uždavinių šešetus. Tai 1997 metais pateiktas Giedriaus Alkausko ir 2008 metais Kęstučio Česnavičiaus uždaviniai. Uždaviniai, be abejonės, priskirtini sudėtingų uždavinių grupei.

Jie iš tiesų yra sudėtingi. Ir ne tik jie patys, bet ir jų sprendimai yra sudėtingi ir ilgoki. Norint juos išspręsti visom prasmėm reikia įdėti daug darbo. Net jų sprendimus pateikiant reikia gerai paplušėti.

1997 m. uždavinys Nr. 6 (Giedriaus Alkausko)[17]

Tegul n yra natūralusis skaičius. Funkcija *f(n)* nusako keliais skirtingais būdais galima užrašyti skaičių n 2-to neneigiamų laipsnių sumomis. Sumos, kurios skiriasi tik dėmenų tvarka laikomos tapačiomis. Pavyzdžiui, $f(4) = 4$, nes skaičius 4 gali būti užrašytas šiomis sumomis:

4; 2+2; 2+1+1; 1+1+1+1.

Įrodykite, kad su visais $n \geq 3$, yra teisinga

$$2^{\frac{n^2}{4}} < f(2^n) < 2^{\frac{n^2}{2}}.$$

[17] *38th IMO Mar del Plata, Argentina, Language: English.* (mano vertimas – N.K.).

Sprendimas[18]

Paimkime dar vieną pavyzdį, kai n = 5. Tada $f(5)$ = 4, nes skaičius 5 gali būti užrašytas šiomis sumomis: 4+1; 2+2+1; 2+1+1+1; 1+1+1+1+1.

Pastebėkime tai, jog skaičių 5 ir 4 skirtingų užrašymų skaičius yra tas pats, o jie patys skiriasi tik tuo, jog prie skaičiaus 4 visų užrašymų yra pridedamas „1“, kurio jau nebegalima išskaidyti į jokią kitą sumą. Ir atvirkščiai, iš skaičiaus 5, kuris yra nelyginis ir visada sumose turės bent vieną „1“ (nes 2^n visada bus lyginis, išskyrus $2^0=1$), visų užrašymų atėmę po „1“ gausime skaičiaus 4 visus užrašymus. Ir tas galioja visiems nelyginiems $n = 2k+1$, kur k – sveikas teigiamas skaičius. Todėl galime užrašyti, jog $f(2k+1) = f(2k)$.

Sekantis pastebėjimas sudėtingesnis. Tarkime, jog turime kažkokį $n = 2k$. Tokio pavidalo skaičius n gali būti užrašytas sumomis, kuriose yra bent vienas dėmuo „1“, ir sumomis, kurių dėmenyse nėra „1“. Pirmuoju atveju, išbraukę po vieną „1“ iš sumų, gausime visas skaičiaus $2k$-1 užrašytas sumas. O antru atveju, padalinę dėmenis iš 2 gausime visas sumas, kuriomis yra užrašomas skaičius k.

Pavyzdžiui, skaičių 6 galime užrašyti šiomis sumomis:

1+1+1+1+1+1; 1+1+1+1+2; 1+1+2+2; 1+1+4; 2+2+2; 2+4.

Dabar paimkime sumas, kuriose yra „1“ ir išbraukime po vieną „1“. Gausime sumas, kuriomis užrašomas skaičius 5. O paėmę sumas, kuriose nėra „1“ ir padalinę jų dėmenis iš „2“ gausime sumas, kuriomis užrašomas skaičius 3.

Taigi, gauname tokią priklausomybę: $f(2k) = f(2k\text{-}1) + f(k)$. Bet gi taip pat iš anksčiau turime, jog $f(2k\text{-}1) = f(2k\text{-}2)$, todėl gauname, jog $f(k) = f(2k) - f(2k\text{-}2)$.

Žinome, jog $f(2) = 2$, $f(1) = 1$. Tarkime $f(0) = 1$, tada galime išrašyti:

$$f(1) = f(2) - f(0),$$

$$f(2) = f(4) - f(2),$$

$$\ldots$$

$$f(k) = f(2k) - f(2k\text{-}2).$$

Sudėję visas lygybes gausime, jog $f(2k) = f(0)+f(1)+\ldots+f(k)$.

Akivaizdu, jog $f(n)$ yra nemažėjanti funkcija, todėl $f(0) \le f(1) \le \ldots \le f(k)$. Tada

$$f(2k) = 1+1+f(2)+\ldots+f(k) \le 2+f(2)+\ldots+f(k) \le kf(k).$$

[18] Uždavinio sprendimas pagal Orlando Döhring, *38th International Mathematical Olympiad, Problems & Solutions, Shortlisted for consideration by the Jury,* Mar del Plata, 1997, 57-59.

Dabar įsistatykime $k = 2^{n-1}$, kad galėtume įvertinti $f(2^n)$:

$$f(2^n) \leq 2^{n-1} f(2^{n-1}) \leq 2^{n-1}\, 2^{n-2} f(2^{n-2}) \leq \ldots \leq 2^{n-1}\, 2^{n-2} \ldots 2^1 f(2) = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot 2.$$

Beliko parodyti, kad $2^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot 2 < 2^{\frac{n^2}{2}}$, su $n \geq 3$. Ir iš tikrųjų, kadangi $n > 2$, tai $n^2 - n + 2 < n^2$, o $\frac{n(n-1)}{2} + 1 < \frac{n^2}{2}$. Parodėme, kad $f(2^n) < 2^{\frac{n^2}{2}}$ su $n \geq 3$.

Žinodami, kad $f(2k+1) = f(2k)$ ir kad $f(n)$ yra nemažėjanti, galime drąsiai daryti išvada, kad yra teisinga nelygybė $f(a+1) - f(a) \geq f(b+1) - f(b)$, kur $a > b$ ir a, b yra to paties lyginumo, t.y. arba abu lyginiai, arba abu nelyginiai. Iš tikrųjų, jei a ir b yra lyginiai, tai $f(a+1) - f(a) = f(b+1) - f(b) = 0$; o jei a ir b nelyginiai, tada $f(a+1) - f(a) = f(\frac{a+1}{2})$ (nes $f(k) = f(2k) - f(2k-1)$) $\geq f(b+1) - f(b) = f(\frac{b+1}{2})$, nes $f(n)$ yra nemažėjanti.

Dabar pakeiskime a ir b atitinkamai $a = c + i$, $b = c - i$, kur c – lyginis skaičius $\geq d \geq 1$, o $i = 0, 1, 2, \ldots, d - 1$. Gausime d nelygybių:

$$f(c+1) - f(c) \geq f(c+1) - f(c)$$
$$f(c+2) - f(c+1) \geq f(c) - f(c-1)$$
$$\ldots$$
$$f(c+d-1) - f(c+d-2) \geq f(c-(d-2)+1) - f(c-(d-2))$$
$$f(c+d) - f(c+d-1) \geq f(c-(d-2)) - f(c-d+1).$$

Sudėję visas šias nelygybes gauname, jog $f(c+d) - f(c) \geq f(c+1) - f(c-d+1)$. Kadangi c yra lyginis skaičius, tai $f(c) = f(c+1)$. Įstatę gausime, kad $2f(c) \leq f(c+d) + f(c-d+1)$. Išrašykime visas nelygybes, kai $d = 1, 2, \ldots, c$:

$$2f(c) \leq f(c+1) + f(c)$$
$$2f(c) \leq f(c+2) + f(c-1)$$
$$\ldots$$
$$2f(c) \leq f(2c) + f(1).$$

Sudėję visas nelygybes gausime, jog $2cf(c) \leq f(1) + f(2) + \ldots + f(2c)$. Dešinėje nelygybės pusėje esančią eilutę jau sumavome, tad galime užrašyti, kad $2cf(c) \leq f(4c) - 1$ arba $2cf(c) < f(4c)$ su visais lyginiais c.

Mums reikia įrodyti, kad $2^{\frac{n^2}{4}} < f(2^n)$ su $n \geq 3$. O turime $2cf(c) < f(4c)$. Tad darome keitinį $4c = 2^n$, t.y. $c = 2^{n-2}$. Gauname, kad $2^{n-1} f(2^{n-2}) < f(2^n)$. Pritaikę pastarąją nelygybę galime tęsti:

$$f(2^n) > 2^{n-1} f(2^{n-2}) > 2^{n-1}\, 2^{n-3} f(2^{n-4}) > \ldots$$

Jei n yra lyginis, tai tada $f(2^n) > 2^{n-1}\, 2^{n-3} \ldots 2f(2^0) = 2^{(n-1)+(n-3)+\ldots+1} = 2^{\frac{n^2}{4}}$.

Jei n yra nelyginis, tai tada $f(2^n) > 2^{n-1}\, 2^{n-3} \ldots 2^2 f(2^1) = 2^{(n-1)+(n-3)+\ldots+2}\, 2 = 2^{\frac{n^2-1}{4}}\, 2 > 2^{\frac{n^2}{4}}$. Ką ir reikėjo įrodyti.

<u>2008 m. uždavinys Nr. 3 (Kęstutis Česnavičius)[19]</u>

Įrodykite, kad egzistuoja be galo daug natūraliųjų skaičių n, su kuriais $n^2 + 1$ turi pirminį daliklį, kuris yra didesnis už $2n + \sqrt{2n}$.

<u>Sprendimas[20]</u>

Šiame sprendime pasinaudosime tam tikromis žiniomis iš skaičių teorijos. Visų pirma, kad pirminių skaičių, kurių išraiška yra $8k$+1, čia k yra natūralusis skaičius, yra be galo daug. Antra, kad lygtis $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$, kur p – pirminis $4k$+1 išraiškos, turi dvi šaknis x_1 ir x_2 intervale $[1; p-1]$ ir $x_1 + x_2 = p$.

Paimkime $p = 8k+1$. Žinome, kad lygtis $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$ turi dvi šaknis intervale $[1; p-1]$. Tegul $x_2 \geq x_1 = n$. Tada p dalina $n^2 + 1$ ir $n \leq \frac{p-1}{2} < \frac{p}{2}$. O mums reikia įrodyti, kad $p > 2n + \sqrt{2n}$.

Paimkime $n = \frac{p-1}{2} - l$, kur $l \geq 0$. Įsistatę gauname, jog

$4(n^2 + 1) = 4((\frac{p-1}{2} - l)^2 + 1 = p^2 - p(2 + 2l) + 4l^2 + 4l + 5$ (iš 4 padauginome, kad neliktų trupmenų).

Jei p dalina $n^2 + 1$, tai p taip pat dalina ir $4l^2 + 4l + 5 = 4(l^2 + l) + 5$. Tada $4(l^2 + l) + 5 = p \cdot a$, kur a - natūralusis skaičius. Mūsų p yra išraiškos $8k$+1, todėl $p \cdot a = 8ka + a$. Pastebėkime, kad

[19] http://www.olimpiados.lt/biblioteka/777/atsisiuntimas (žiūrėta 2012-05-12).
[20] Pagal http://www.imo-official.org/problems/IMO2008SL.pdf (žiūrėta 2012-05-19).

$4(l^2 + l) + 5$ dalinant iš 8 visada gausime liekaną 5 (nes 8 visada dalins $4(l^2 + l)$), o $p \cdot a = 8ka + a$ dalinant iš 8 liekana bus a. Todėl $a \geq 5$. O iš čia $4(l^2 + l) + 5 \geq 5p$. Išsprendę nelygybę $l \geq 0$ atžvilgiu gauname:

$$4(l^2 + l) + 5 = (2l+1)^2 + 4 \geq 5p,\ (2l+1)^2 \geq 5p - 4,\ l \geq \frac{\sqrt{5p-4}-1}{2}.$$

Gavę šį rezultatą įvertinkime n: $n = \frac{p-1}{2} - l \leq \frac{p-1}{2} - \frac{\sqrt{5p-4}-1}{2}$. Pertvarkę gauname, kad $2n \leq p - \sqrt{5p-4}$. Išsireiškime p: $p \geq 2n + \sqrt{5p-4}$. Dabar norėtųsi kažkaip įvertinti $\sqrt{5p-4}$.

Jei pažymėtume $b = \sqrt{5p-4}$, tai tada gautume, jog $2n \leq \frac{b^2+4}{5} - b$ arba $b^2 - 5b + 4 - 10n \geq 0$. Išspręskime pastarąją nelygybę $b \geq 0$ atžvilgiu:

$$b^2 - 5b + 4 - 10n = (b - \frac{5}{2})^2 - \frac{9}{4} - 10n \geq 0,\ b \geq \frac{5}{2} + \sqrt{10n + \frac{9}{4}}.$$

Ir dabar vėl įvertinkime p: $p \geq 2n + \sqrt{5p-4} = 2n + b \geq 2n + \frac{5}{2} + \sqrt{10n + \frac{9}{4}} > 2n + \sqrt{2n}$.

Ir galų gale, iš to, jog tokių p – pirminių skaičių (išraiškos $8k+1$) yra be galo daug, mes gauname, kad ir tokių $n = x_1$, kur $x_2 \geq x_1$ yra lygties $x^2 \equiv -1 \pmod p$ sprendiniai intervale $[1; p-1]$, yra be galo daug.

IŠVADOS

Šiame darbe yra pristatyta šešiolika Tarptautinės moksleivių matematikos olimpiados uždavinių ir jų sprendimų. Darbo tikslas buvo kuo suprantamiau, aiškiau perteikti šiuos sprendimus, palyginti uždavinių sudėtingumą.

Dar kartą buvo įsitikinta, kad uždavinio sprendimas yra menas. Tad perteikti jo grožį yra ne taip paprasta, o „pilnu spektru“ – gal ir visai neįmanoma.

Uždaviniai, kurie yra pateikiami Pasaulinėje olimpiadoje, yra skirtingo grožio ir skirtingo sudėtingumo. Juos iš tiesų galima skirstyti į tris grupes: lengvi, sunkūs, vidutinio sunkumo. Sunkiems uždaviniams, pavyzdžiui, visų bendra nuomone, dauguma skaičių teorijos uždavinių yra „daktaro lygio“, gvildenti reikia ir papildomų žinių, ir turtingos uždavinių sprendimo patirties, ir talento, ir sėkmės. Jie tikrai yra sunkūs ir sudėtingi. Sunkūs yra visi Pasaulinių olimpiadų uždaviniai, bet su uždaviniais priskirtinais lengvų kategorijai tikrai drąsiai galima „susirungti“ ir smalsiam savarankiškai matematika besidominčiam entuziastui. Jų tarpe pasitaiko net tokių, kuriems išspręsti, reikia visai nedaug: kantrybės ir atidumo, pvz. uždavinys nr. 1 iš 2011 metų olimpiados.

Pasaulinių olimpiadų uždaviniai, kaip „absoliuti klasika“, yra kasmet nagrinėjami ir persprendžiami. Susidomėjimas jais tolydžio auga. Apie juos jau parašyta daug knygų.

Rašant šį darbą iškilo klausimas, pagal kokius kriterijus būtų galima lyginti uždavinius. Juk jie, kaip meno kūriniai, kuriuos lyginant atsiranda labai stiprus subjektyvumo faktorius.

Visų pirma, sprendžiant apie uždavinių sudėtingumą reikia nagrinėti jų sprendimus. Tiesa, niekada visi galimi sprendimai nebus užrašyti, niekada nebūsi tikras, ar nepraleistas genialiai paprastas sprendimas. Taigi, kalbama yra apie kuriamus ir dar nesukurtus dalykus. Tačiau palyginti reikia, ir vienas iš kriterijų, bet ne visada vienareikšmis, gali būti uždavinio sprendimo ilgumas, kitas - formulių, loginių sekų sudėtingumas, trečias - kiek papildomų brėžimų (geometrinių uždavinių atveju), lemų reikia įrodyti siekiant išspręsti uždavinį.

Visa tai puikiai iliustruoja statistika. Pasitaiko, kad uždavinius priskiriamus sunkių uždavinių kategorijai išsprendžia daugiau dalyvių nei tuos, kurie buvo priskirti lengvų ar vidutinio lengvumo uždavinių kategorijai.

SUMMARY

THE DIVERSITY OF PROBLEMS OF INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIADS (IMO)

The aim of this work was to see, if the problems of International Mathematical Olympiads, can be solved by ordinary pupil who is more interested in mathematics. This I saw to achieve by trying to solve problems by myself, by presenting solutions as clear as possible, and by comparing the difficulty of the problems.

In this work sixteen problems of International Mathematical Olympiads and their solutions were presented: six from 1994 Olympiad (the one the author himself participated), six from 2011 Olympiad (the last one), two easier problems and two problems, which were presented by Lithuanians Giedrius Alkauskas (IMO 1997) and Kęstutis Čekanavičius (IMO 2008).

Dealing with these problems brought to the conclusion that not all the problems of the Olympiads are of the same difficulty. They indeed can be classified into three categories: easy problems, harder problems and very hard problems.

Those that are easier can be solved by the person who still studies in the school and on his free time practices some interesting mathematics. These problems do not require any additional skills or extraordinary talent. But more problems are really difficult to deal with, even with their solutions. The hard ones, besides additional skills, talent, and creativity sometimes may require a lot of luck too.

LITERATŪROS SĄRAŠAS

1. M. Šileikis. IMO virtuvės paslaptys ir prieškambario kvapsniai Vietname ir anksčiau, http://www.olimpiados.lt/matematika/imo/imo-virtuves-paslaptys-ir-prieskambario-kvapsniai-vietname-ir-anksciau-0359, prisijungimo laikas: 2012-05-17.
2. Orlando Döhring, *38th International Mathematical Olympiad, Problems & Solutions, Shortlisted for consideration by the Jury*, Mar del Plata, 1997.
3. Romualdas Kašuba, "About the so-called democratic problems proposed at International Mathematical Olympiad (IMO)", *Teaching Mathematics: retrospective and perspectives 7th international conference. May 12-13, 2006 Proceedings*, Tartu, 2006.
4. Romualdas Kašuba. Venid Y Ved, http://dg.icme11.org/document/get/101, prisijungimo laikas: 2012-05-29.
5. *Short-Listed Problems for the 35th International Mathematical Olympiad*, Hong Kong: Golden Cup Printing Co. Ltd. 1994.
6. http://www.imo-official.org/country_team_r.aspx?code=LTU, prisijungimo laikas: 2012-05-12.
7. http://www.imo-official.org/results_year.aspx, prisijungimo laikas: 2012-05-12.
8. http://www.imo-official.org/problems/IMO2008SL.pdf, prisijungimo laikas: 2012-05-19.
9. IMO 2011 shortlist: the final 6, http://www.math.leidenuniv.nl/~desmit/pop/2011_imo_final6.pdf, prisijungimo laikas: 2012-04-21.
10. http://www.olimpiados.lt/biblioteka/776/atsisiuntimas, prisijungimo laikas: 2012-04-26.
11. http://www.olimpiados.lt/biblioteka/773/atsisiuntimas, prisijungimo laikas: 2012-04-26.
12. http://www.olimpiados.lt/biblioteka/777/atsisiuntimas, prisijungimo laikas: 2012-05-12.