VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
TIKIMYBIŲ TEORIJOS IR SKAIČIŲ TEORIJOS KATEDRA

Zigmas Pacevičius

RIBINĖ TEOREMA SU SVORIU ANALIZINIŲ FUNKCIJŲ ERDVĖJE BENDROSIOMS DIRICHLĖ EILUTĖMS

Magistro baigiamasis darbas

Leidžiu ginti ....
Darbo vadovas **prof. habil. dr. A. Laurinčikas**

Vilnius 2011

Turinys

1. Įvadas

Tarkime, $\{a_m : m \in \mathbb{N}\}$ yra kompleksinių skaičių seka, $\{\lambda_m : m \in \mathbb{N}\}$ yra didėjanti realiųjų skaičių seka, $\lim_{m\to\infty} \lambda_m = +\infty$, o $s = \sigma + it$ yra kompleksinis kintamasis. Funkcinė eilutė, turinti pavidalą

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-\lambda_m s}, \tag{1.1}$$

yra vadinama bendrąja Dirichlė eilute su koeficientais a_m ir rodikliais λ_m. Kai $\lambda_m = \log m$, tai gauname eilutę

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s},$$

kuri yra vadinama paprastąja Dirichlė eilute.

Paprastąja Dirichlė eilute yra apibrėžiamos daugelis klasikinių dzeta funkcijų. Pavyzdžiui, Rymano dzeta funkcija $\zeta(s)$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama eilute

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}.$$

Tuo tarpu, bendrosios Dirichlė eilutės pavyzdys yra eilutė

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} e^{-s\sqrt{\log m}},$$

kuri konverguoja absoliučiai pusplokštumėje $\sigma > 0$.

Apskritai, kiekvienos Dirichlė eilutės, tiek konvergavimo, tiek absoliutaus konvergavimo sritys yra pusplokštumės.

Tegul (1.1) eilutė konverguoja absoliučiai pusplokštumėje $\sigma > \sigma_0$ ir $f(s)$ yra jos suma. Tuomet funkcija $f(s)$ yra analizinė srityje $\sigma > \sigma_0$. Dažnai funkciją $f(s)$ galime analiziškai arba meromorfiškai pratęsti į kairę pusę nuo tiesės $\sigma = \sigma_0$. Šiuos ir kitus tvirtinimus apie Dirichlė eilutes galime rasti [11] knygelėje.

Nuo H. Boro (Bohr) ir B. Jeseno (Jessen) laikų yra žinoma, kad Dirichlė eilučių tyrimui gali būti panaudoti tikimybiniai metodai. Darbuose [2] ir [3] jie įrodė teoremas Rymano dzeta funkcijai, primenančias šiuolaikines ribines teoremas silpnojo tikimybinių matų konvergavimo prasme. Šiuolaikinė Rymano dzeta funkcijos ir kitų dzeta funkcijų, apibrėžiamų kurioje nors pusplokštumėje Dirichlė eilutėmis, tikimybinė teorija yra pateikta [5], [6], [10] ir [14] monografijose.

Pirmosios ribinės teoremos bendrosioms Dirichlė eilutėms buvo gautos [7] ir [8] darbuose. Rezultatų formulavimui mums yra reikalingi kai kurie žymenys ir apibrėžimai. Tarkime, kad G yra sritis kompleksinėje plokštumoje, o $H(G)$ yra analizinių srityje G funkcijų erdvė su tolygaus konvergavimo ant kompaktų tapologija. Simboliu $\mathcal{B}(\mathcal{S})$ žymėsime erdvės $\mathcal{S}$ Borelio aibių klasę. Be to, tegul $meas\{A\}$ yra mačios aibės $A \subset \mathbb{R}$ Lebego matas, o

$$\nu_T(...) = \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0, T] : ...\},$$

čia vietoje daugtaškio yra rašoma sąlyga, kurią tenkina τ. Tegul $P_n, n \in \mathbb{N}$, ir P yra tikimybiniai matai erdvėje $(\mathcal{S}, \mathcal{B}(\mathcal{S}))$. Primename, kad P_n, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į P, jei su kiekviena realia, aprėžta ir tolydžia funkcija g erdvėje $\mathcal{S}$ yra teisinga lygybė

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathcal{S}} g dP_n = \int\limits_{\mathcal{S}} g dP.$$

Tegul $D_0 = \{s \in \mathbb{C} : \sigma > \sigma_1\}$. Tuomet [7] straipsnio pirmoje teoremoje yra toks tvirtinimas.

1.1 teorema. Erdvėje $(H(D_0), \mathcal{B}(H(D_0)))$ egzistuoja toks tikimybinis matas P, į kurį, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja tikimybinis matas

$$\nu_T(f(s + i\tau \in A), \quad A \in \mathcal{B}(H(D_0)).$$

Antroje [7] darbo teoremoje yra gautas išreikštinis ribinio mato P 1.1 teoremoje pavidalas. Šiam tikslui yra reikalaujama, kad (1.1) eilutės rodiklių sistema $\{\lambda_m\}$ būtų tiesiškai nepriklausoma virš realiųjų skaičių kūno $\mathbb{Q}$.

Straipsnyje [8] buvo reikalaujama, kad funkcija $f(s)$ būtų meromorfiškai pratęsta į sritį $\sigma > \sigma_1$, $\sigma_1 < \sigma_0$, ir esant kai kurioms papildomoms $f(s)$ augimo sąlygoms, įrodytos analogiškos ribinės teoremos meromorfinių funkcijų erdvėje. Straipsnis [9] yra skirtas funkcijos $f(s)$ ribinėms teoremoms kompleksinėje plokštumoje $\mathbb{C}$, o [12] darbe buvo gauta jungtinė ribinė teorema bendrosioms Dirichlė eilutėms.

Straipsnyje [4] buvo pradėtos nagrinėti ribinės teoremos su svoriu funkcijai $f(s)$. Tarkime, $w(t)$ yra teigiama aprėžtos variacijos funkcija intervale $[T_0, \infty)$, o $T_0 > 0$ yra fiksuotas skaičius. Tegul

$$U = U(T, w) = \int\limits_{T_0}^{T} w(t) dt,$$

ir

$$\lim_{T\to\infty} U(T, w) = +\infty.$$

Reikalaujame, kad funkcija $f(s)$ būtų meromorfiškai pratęsiama į sritį $\sigma > \sigma_1$, $\sigma_1 < \sigma_0$, visi poliai šioje srityje priklausytų kompaktinei aibei ir, kai $\sigma > \sigma_1$ nėra funkcijos $f(s)$ poliaus realioji dalis, būtų teisingi įverčiai

$$f(\sigma + it) = O(|t|^a), \quad a = a(\sigma) > 0, \quad |t| \geq t_0 > 0, \tag{1.2}$$

ir

$$\int\limits_{T_0+v}^{T+v} w(t - v) \left| f(\sigma + it) \right|^2 dt \ll U(1 + |v|) \tag{1.3}$$

su visais $v \in \mathbb{R}$. Čia $g(x) = O(h(x))$ ir $g(x) \ll h(x)$, $h(x) > 0$, $x \in \mathcal{X}$ reiškia, kad egzistuoja tokia konstanta, $c > 0$, kad su visais $x \in \mathcal{X}$ yra teisinga nelygybė

$$|g(x)| \leq ch(x).$$

Tegul I_A yra aibės A indikatorius. Apibrėžiame tikimybinį matą

$$P_{T,\sigma,w}(A) = \frac{1}{U} \int\limits_{T_0}^{T} w(t) I_{\{t: f(\sigma+it) \in A\}} dt, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}).$$

Tuomet pirmoji teorema iš [4] nagrinėja mato $P_{T,\sigma,w}$ silpnąjį konvergavimą, kai $T \to \infty$.

1.2 teorema. Tarkime, kad $\sigma > \sigma_1$, o funkcija $f(s)$ tenkina (1.2) ir (1.3) sąlygas. Tuomet erdvėje $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ egzistuoja toks tikimybinis matas P_σ, į kurį, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja matas $P_{T,\sigma,w}$.

Antroje [4] darbo teoremoje yra naudojami griežtesni reikalavimai funkcijai $f(s)$, tačiau yra gaunamas ribinio mato P_σ 1.2 teoremoje išreikštinis pavidalas.

Funkcija $w(t)$ yra vadinama svorio funkcija, o 1.2 teorema - ribinė teorema su svoriu funkcijai $f(s)$.

Magistro darbo tikslas yra įrodyti 1.2 teoremos analogą analizinių funkcijų erdvėje funkcijai $f(s)$. Tarkime, kad funkcija $f(s)$ yra analiziškai pratęsiama į sritį $\sigma > \sigma_1$, $\sigma_1 < \sigma_0$ ir yra analizinė juostoje $D_1 = \{s \in \mathbb{C} : \sigma_1 < \sigma < \sigma_0\}$. Pagrindinis darbo rezultatas yra tokia teorema.

1.3 teorema. Tarkime, kad funkcija $f(s)$ tenkina (1.2) ir (1.3) sąlygas. Tuomet erdvėje $(H(D_1), \mathcal{B}(H(D_1)))$ egzistuoja toks tikimybinis matas P_w į kurį, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja tikimybinis matas

$$P_{T,w}(A) = \frac{1}{U} \int\limits_{T_0}^{T} w(\tau) I_{\{\tau: f(s+i\tau) \in A\}} d\tau, \quad A \in \mathcal{B}(H(D_1)).$$

2. Ribinė teorema absoliučiai konverguojančiai eilutei

Tarkime, kad $\sigma_2 > \sigma_0 - \sigma_1$ yra fiksuotas skaičius, o

$$v(m,n) = exp\left\{-e^{(\lambda_m - \lambda_n)\sigma_2}\right\}.$$

Šiame skyrelyje nagrinėsime Dirichlė eilutę

$$f_n(s) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m v(m,n) e^{-\lambda_m s}.$$

2.1 lema. Eilutė, apibrėžianti funkcijų $f_n(s)$, konverguoja absoliučiai pusplokštumėje $\sigma > \sigma_1$.

Įrodymas. Iš σ_2 apibrėžimo turime, kad $\sigma + \sigma_2 > \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma > \sigma_0$, kai $\sigma > \sigma_1$. Todėl, kai $\operatorname{Re} z = \sigma_2$, funkcija $f(s+z)$ yra išreiškiama absoliučiai konverguojančia Dirichlė eilute

$$f(s+z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-\lambda_m (s+z)}. \tag{2.1}$$

Apibrėžiame funkciją

$$l_n(s) = \frac{s}{\sigma_2} \Gamma\left(\frac{s}{\sigma_2}\right) e^{\lambda_n s}.$$

Čia, kaip įprasta, $\Gamma(s)$ yra Oilerio gama funkcija pusplokštumėje $\sigma > 0$, apibrėžiama integralu

$$\Gamma(s) = \int\limits_0^\infty e^u u^{s-1} du.$$

Be to, ji yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus taškus $s = -m$, $s \in \mathbb{N} \cup 0$, kurie yra paprastieji poliai, ir

$$\operatorname*{Res}_{s=-m} = \frac{(-1)^m}{m!}.$$

Pusplokštumėje $\sigma > \sigma_1$ nagrinėjame funkciją

$$g_n(s) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma_2 - i\infty}^{\sigma_2 + i\infty} f(s+z) l_n(z) \frac{dz}{z}.$$

Tegul

$$a_n(m) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma_2 - i\infty}^{\sigma_2 + i\infty} l_n(s) e^{-\lambda_m s} \frac{ds}{s}.$$

Nagrinėjam eilutę

$$\sum_{m=1}^\infty a_m a_n(m) e^{-\lambda_m s}. \tag{2.2}$$

Iš koeficientų $a_n(m)$ apibrėžimo ir įverčio [10]

$$\Gamma(s) \ll e^{-c|t|}, \quad c > 0,$$

kuris yra teisingas kiekvienoje fiksuotoje juostoje $\tilde{\sigma} \leq \sigma \leq \hat{\sigma}$, gauname, kad

$$\begin{aligned} a_n(m) \quad &\ll \quad \left| \int\limits_{\sigma_2 - i\infty}^{\sigma_2 + i\infty} l_n(s) e^{-\lambda_m s} \frac{ds}{s} \right| \ll \\ &\left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} l_n(\sigma_2 + it) e^{-\lambda_m(\sigma_2 + it)} \frac{dt}{\sigma_2 + it} \right| \ll \\ &e^{-\lambda_m \sigma_2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| \Gamma\left(\frac{\sigma_2 + it}{\sigma_2}\right) \right| dt \ll_n e^{-\lambda_m \sigma_2}. \end{aligned}$$

Todėl (2.2) eilutė konverguoja absoliučiai, kai $\sigma + \sigma_2 > \sigma_0$ arba $\sigma > \sigma_0 - \sigma_2$, arba pagal σ_2 apibrėžimą, kai $\sigma > \sigma_1$. Todėl galime panaudoti (2.1) ir sukeisti sumavimo ir integravimo tvarką funkcijos $g_n(s)$ apibrėžime. Atlikę šią procedūrą, gauname

$$g_n(s) = \sum_{m=1}^\infty a_m e^{-\lambda_m s} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma_2 - i\infty}^{\sigma_2 + i\infty} l_n(z) e^{-\lambda_m z} \frac{dz}{z} = \sum_{m=1}^\infty a_m a_n(m) e^{-\lambda_m s}. \tag{2.3}$$

Dabar panaudosime Melino formulę [6]

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\Gamma(z)b^{-z}dz = e^{-b},$$

kuri yra teisinga su visais $b,\ c > 0$. Pritaikę šią formulę randame, kad

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_2-i\infty}^{\sigma_2+i\infty} l_n(s)e^{-\lambda_m s}\frac{ds}{s} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_2-i\infty}^{\sigma_2+i\infty}\frac{s}{\sigma_2}\Gamma\left(\frac{s}{\sigma_2}\right)\frac{e^{-(\lambda_m-\lambda_n)s}}{s}ds =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_2-i\infty}^{\sigma_2+i\infty}\Gamma(s)e^{(\lambda_m-\lambda_n)(-s)\sigma_2}ds = exp\left\{-e^{(\lambda_m-\lambda_n)\sigma_2}\right\}.$$

Taigi, gavome, kad

$$a_n(m) = v(m,n). \tag{2.4}$$

Kadangi (2.2) konverguoja absoliučiai, kai $\sigma > \sigma_1$, tai iš čia turime, kad ir lemos eilutė taip pat konverguoja pusplokštumėje $\sigma > \sigma_1$.

Pastaba. Iš (2.3) ir (2.4) lygybių gauname, kad $g_n(s) = f_n(s)$. Taigi, funkcija $f_n(s)$ turi šią integralinę išraišką

$$g_n(s) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_2-i\infty}^{\sigma_2+i\infty} f(s+z)l_n(z)\frac{dz}{z}. \tag{2.5}$$

Ribinės teoremos funkcijai $f_n(s)$ įrodyme yra reikalinga viena topologinė struktūra. Jos apibrėžimui priminsime sandaugos topologiją.

Tarkime, kad A yra netuščia aibė, o $\{(\mathbb{X}_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in A\}$ yra topologinių erdvių šeima. Aibę

$$\mathbb{X} = \prod_{\alpha\in A}\mathbb{X}_\alpha$$

sudaro visos tokios funkcijos

$$f : A \to \bigcup_{\alpha\in A}\mathbb{X}_\alpha,$$

čia $f(\alpha) \in \mathbb{X}_\alpha$ su kiekvienu $\alpha \in A$. Erdvėje $\mathbb{X}$ yra apibrėžiama sandaugos topologija. Kiekvienai funkcijai $f \in \mathbb{X}$ yra apibrėžiamos aibės

$$\prod_{\alpha\in A} U_\alpha,$$

čia U_α yra taško $f(\alpha) \in \mathbb{X}_\alpha$ aplinka, ir tik baigtiniam indeksų $\alpha \in A$ skaičiui $U_\alpha \neq \mathbb{X}_\alpha$. Tegul V_f yra visų tokių aibių rinkinys. Tuomet aibių šeima

$$V = \{V_f : f \in \mathbb{X}\}$$

yra vadinama sandaugos topologija ir žymima

$$\prod_{\alpha}\tau_\alpha.$$

Tegul $\gamma = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$ yra vienetinis apskritimas kompleksinėje plokštumoje. Apibrėžkime

$$\Omega = \prod_{m=1}^{\infty} \gamma_m,$$

čia $\gamma_m = \gamma$ su visais $m \in \mathbb{N}$. Tuomet toras Ω, remiantis Tihonovo teorema 5.7 [13], su sandaugos topologija ir pataškinės daugybos operacija yra kompaktinė topologinė Abelio grupė. Todėl erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ galime apibrėžti tikimybinį Haro matą m_H. Šis matas pasižymi invariantiškumo savybe, kuri reiškia, kad su visais $\omega \in \Omega$ ir visomis aibėmis $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ yra teisingos lygybės

$$m_H(A) = m_H(\omega A) = m_H(A\omega).$$

Gauname tikimybinę erdvę $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Tegul $\omega(m)$ yra elemento $\omega \in \Omega$ projekcija į koordinatinę erdvę $\gamma_m,\ m \in \mathbb{N}$.

Apibrėžiame

$$Q_{T,w}(A) = \frac{1}{U} \int_{T_0}^{T} w(\tau) I_{\{\tau : e^{-i\lambda_m \tau} : m \in \mathbb{N}\}} d\tau, \qquad A \in \mathcal{B}(\Omega).$$

2.2 lema. Erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ egzistuoja toks tikimybinis matas Q_w, į kurį, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja matas $Q_{T,w}$.

Lemos įrodymas yra pateiktas [4] straipsnyje.

Mums bus dar reikalinga viena silpnojo mato konvergavimo savybė. Tarkime, kad $(\mathbb{X}_1, \mathcal{B}(\mathbb{X}_1))$ ir $(\mathbb{X}_2, \mathcal{B}(\mathbb{X}_2))$ yra dvi mačios erdvės, o $h : \mathbb{X}_1 \to \mathbb{X}_2$ yra $(\mathcal{B}(\mathbb{X}_1), \mathcal{B}(\mathbb{X}_2))$ mati funkcija, tai yra,

$$h^{-1}\mathcal{B}(\mathbb{X}_2) \subset \mathcal{B}(\mathbb{X}_1).$$

Tuomet kiekvienas tikimybinis matas P erdvėje $(\mathbb{X}_1, \mathcal{B}(\mathbb{X}_1))$ indukuoja vienintelį tikimybinį matą Ph^{-1} erdvėje $(\mathbb{X}_2, \mathcal{B}(\mathbb{X}_2))$, apibrėžiamą formule

$$Ph^{-1}(A) = P(h^{-1}A), \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbb{X}_2).$$

Yra teisingas toks tvirtinimas.

2.3 lema. Tarkime, kad P_n, $n \in \mathbb{N}$, ir P yra tikimybiniai matai erdvėje $(\mathbb{X}_1, \mathcal{B}(\mathbb{X}_1))$, $h : \mathbb{X}_1 \to \mathbb{X}_2$ yra tolydi funkcija ir P_n, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į matą P. Tuomet ir matas $P_n h^{-1}$, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į matą Ph^{-1}.

Lema yra [1] monografijos 5.1 teoremos atskiras atvejis. Bendrasis atvejis yra formuluojamas taip.

Tegul D yra funkcijos h trūkio taškų aibė. Jeigu $P(D) = 0$, tai tuomet yra teisingas 2.3 lemos tvirtinimas. 2.3 lemos atveju turime, kad $D = \emptyset$.

Dabar jau galime įrodyti šio skyrelio teoremą. Apibrėžiame tikimybinį matą

$$P_{T,n,w}(A) = \frac{1}{U} \int_{T_0}^{T} w(\tau) I_{\{\tau : f_n(s+i\tau) \in A\}} d\tau, \qquad A \in \mathcal{B}(H(D_1)).$$

Primename, kad $D_1 = \{s \in \mathbb{C} : \sigma_1 < \sigma < \sigma_0\}$.

2.4 teorema. Erdvėje, $(H(D_1), \mathcal{B}(H(D_1)))$ egzistuoja toks tikimybinis matas $P_{n,w}$, į kurį, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja matas $P_{T,n,w}$.

Įrodymas. Apibrėžkime funkciją $h_n : \Omega \to H(D_1)$ formule

$$h_n(\omega) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m v(m,n)\omega(m)e^{-\lambda_m s}. \tag{2.6}$$

Įrodysime, kad ši funkcija yra tolydi. Tegul K yra bet kuri juostos D_1 kompaktinė aibė. Pagal 2.1 lemą, eilutė (2.6) lygybės dešinėje pusėje konverguoja absoliučiai, nes $|\omega(m)| = 1$. Todėl su kiekvienu $\varepsilon > 0$ egzistuoja toks numeris $n = n(\varepsilon)$, kad

$$\sup_{s\in K}\left|\sum_{m>n} a_m v(m,n)\omega(m)e^{-\lambda_m s}\right| < \varepsilon$$

su visais $\omega \in \Omega$. Todėl, jeigu G yra erdvės $H(D_1)$ elemento

$$\sum_{m\le n} a_m v(m,n)\omega(m)e^{-\lambda_m s} \tag{2.7}$$

atvira aplinka, tai ji bus elemento $h_n(\omega)$ aplinka, jei ε pakankamai mažas. Elemento $\omega \in \Omega$ aplinkas sandaugos topologijoje sudaro aibės

$$\prod_{m=1}^{\infty} G_m,$$

kuriose G_m yra $\omega(m)$ aplinka ir tik baigtiniam indeksų skaičiui $G_m \neq \gamma_m$. Kadangi į (2.7) įeina tik baigtinis skaičius $\omega(m)$, tai visada galime parinkti tokią $\omega(\Omega)$ aplinką V, kad galiotų sąryšis $V \subset h_n^{-1}(G)$. Pagal apibrėžimą tai reiškia, kad h_n yra tolydžioji funkcija.

Iš funkcijų h_n ir $f_n$apibrėžimų išplaukia, kad

$$\begin{aligned} h_n(e^{-i\lambda_m\tau} : m \in \mathbb{N}) &= \sum_{m=1}^{\infty} a_m v(m,n)e^{-i\lambda_m\tau}e^{-\lambda_m s} = \\ &\sum_{m=1}^{\infty} a_m v(m,n)e^{-\lambda_m(s+i\tau)} = f_n(s+i\tau). \end{aligned}$$

Vadinasi, pagal mato $Q_{T,w}$ apibrėžimą

$$\begin{aligned} P_{T,n,w}(A) &= \frac{1}{U}\int_{T_0}^{T} w(\tau)I_{\{\tau: f_n(s+i\tau)\in A\}}d\tau = \\ &\frac{1}{U}\int_{T_0}^{T} w(\tau)I_{\{\tau: h_n((e^{-i\lambda_m\tau}: m\in\mathbb{N}))\in A\}}d\tau = \\ &\frac{1}{U}\int_{T_0}^{T} w(\tau)I_{\{\tau: (e^{-i\lambda_m\tau}: m\in\mathbb{N})\in h_n^{-1}A\}}d\tau = Q_{T,w}(h_n^{-1}A). \end{aligned}$$

Taigi, $P_{T,n,w}(A) = Q_{T,w}(h_n^{-1}A)$. Iš čia, funkcijos h_n tolydumo ir 2.2 lemos gauname, kad matas $P_{T,n,w}(A)$, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į matą $Q_w h_n^{-1}$, čia Q_w yra ribinis matas 2.2 lemoje. Teorema įrodyta.

3. Funkcijos $f(s)$ aproksimavimas funkcija $f_n(s)$

2 skyrelyje įrodėme ribinę teoremą analizinių funkcijų erdvėje $H(D_1)$ funkcijai $f_n(s)$. Perėjimui nuo funkcijos $f_n(s)$ prie funkcijos $f(s)$ yra reikalinga vidurkinė funkcijos $f(s)$ aproksimacija funkcijai $f_n(s)$.

3.1 teorema. Tarkime, kad K yra kompaktinė juosta D_1 aibė. Tuomet

$$\lim_{n\to\infty}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{U}\int\limits_{T_0}^{T} w(\tau)\sup_{s\in K}|f(s+i\tau)-f_n(s+i\tau)|\,d\tau=0.$$

Įrodymas. Naudosimės funkcijos $f_n(s)$ (2.5) integraline išraiška

$$f_n(s)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_2-i\infty}^{\sigma_2+i\infty} f(s+z)l_n(z)\frac{dz}{z}.$$

Tegul $\sigma_3>\sigma_1$ir $\sigma_3<\sigma$. Funkcijos $f_n(s)$ integralinėje išraiškoje integravimo tiesę stumsime į kairę, kad praeitume tašką $z=0$. Integruojama funkcija

$$\frac{f(s+z)l_n(z)}{z}$$

taške $z=0$ turi paprastąjį polių, ir

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{f(s+z)l_n(z)}{z}=\lim_{z\to 0}f(s+z)\frac{z}{\sigma_2}\Gamma\left(\frac{z}{\sigma_2}\right)e^{\lambda_m z}=f(s),$$

nes

$$\lim_{z\to 0}\frac{z}{\sigma_2}\Gamma\left(\frac{z}{\sigma_2}\right)=1.$$

Todėl, prisiminę (1.2) įvertį, iš reziduumų teoremos gauname, kad

$$f_n(s)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_3-\sigma-i\infty}^{\sigma_3-\sigma+i\infty} f(s+z)l_n(z)\frac{dz}{z}+f(s). \tag{3.1}$$

Imame paprastą, uždarą kontūrą L, gulintį juostoje, D_1 ir apjuosiantį aibę K. Tegul δ yra kontūro L atstumas iki aibės K. Tada pagal Košį integralinę formulę galime parašyti, kad

$$f(s+i\tau)-f_n(s+i\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{f(z+i\tau)-f_n(z+i\tau)}{z-s}dz$$

su visais $s\in K$. Kadangi $|s-z|\geq\delta$, tai iš čia gauname įvertį

$$\begin{aligned}\sup_{s\in K}|f(s+i\tau)-f_n(s+i\tau)| &\leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{L}\frac{|f(z+i\tau)-f_n(z+i\tau)|}{|z-s|}|dz|\leq\\ &\frac{1}{2\pi\delta}\int\limits_{L}|f(z+i\tau)-f_n(z+i\tau)|\,|dz|.\end{aligned}$$

Iš čia randame, kad

$$\frac{1}{U}\int\limits_{T_0}^{T} w(\tau)\sup_{s\in K}|f(s+i\tau)-f_n(s+i\tau)|\,d\tau \ll$$

$$\frac{1}{U\delta}\int\limits_{T_0}^{T} w(\tau)\left(\int\limits_{L}|f(z+i\tau)-f_n(z+i\tau)|\,|dz|\right)d\tau =$$

$$\frac{1}{U\delta}\int\limits_{L}|dz|\int\limits_{T_0}^{T} w(\tau)\,|f(\operatorname{Re}z+\operatorname{Im}z+i\tau)-f_n(\operatorname{Re}z+\operatorname{Im}z+i\tau)|\,d\tau =$$

$$\frac{1}{U\delta}\int\limits_{L}|dz|\int\limits_{T_0+i\operatorname{Im}z}^{T+i\operatorname{Im}z} w(\tau-i\operatorname{Im}z)\,|f(\operatorname{Re}z+i\tau)-f_n(\operatorname{Re}z+i\tau)|\,d\tau \ll$$

$$\frac{|L|}{U\delta}\int\limits_{T_0+u}^{T+u} w(t-u)\,|f(\sigma+it)-f_n(\sigma+it)|\,dt, \tag{3.2}$$

čia $|L|$ reiškia kontūro L ilgį.

Tarkime, kad

$$\min\{\sigma : s\in K\}=\sigma_1+\varepsilon, \quad \varepsilon>0$$

ir

$$\max\{\sigma : s\in K\}=B.$$

Dabar imame $\sigma_3=\sigma+\frac{\varepsilon}{2}$, o kontūrą L parenkame taip, kad visiems $s\in L$ galiotų nelygybės $\sigma>\sigma_1+\frac{3\varepsilon}{4}$ ir $\delta>\frac{\varepsilon}{4}$. Iš (3.1) formuluotės turime, kad

$$f(s)-f_n(s)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_3-\sigma-i\infty}^{\sigma_3-\sigma+i\infty} f(s+z)l_n(z)\frac{dz}{z}.$$

Todėl

$$|f(\sigma+it)-f_n(\sigma+it)| \ll \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_3-\sigma-i\infty}^{\sigma_3-\sigma+i\infty}|f(\sigma+it+z)|\,|l_n(z)|\,\frac{|dz|}{|z|} \ll$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(\sigma_3+it+i\tau)|\,|l_n(\sigma_3-\sigma+i\tau)|\,d\tau.$$

Pasinaudoję (1.3) įverčiu ir Koši-Švarco nelygybe, iš čia randame, kad

$$\frac{1}{U}\int\limits_{T_0+u}^{T+u} w(t-u)\,|f(\sigma+it)-f_n(\sigma+it)|\,dt \ll$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |l_n(\sigma_3-\sigma+i\tau)|\,\frac{1}{U}\int\limits_{T_0+u+\tau}^{T+u+\tau} w(t-u-\tau)\,|f(\sigma_3+it)|\,dtd\tau \ll$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |l_n(\sigma_3-\sigma+i\tau)|\,\frac{1}{U}\left(\int\limits_{T_0+u+\tau}^{T+u+\tau} w(t-u-\tau)dt\int\limits_{T_0+u+\tau}^{T+u+\tau} w(t-u-\tau)\,|f(\sigma_3+it)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} d\tau =$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |l_n(\sigma_3-\sigma+i\tau)|\,\frac{1}{U}\left(\int\limits_{T_0}^{T} w(t)dt\int\limits_{T_0+u+\tau}^{T+u+\tau} w(t-u-\tau)\,|f(\sigma_3+it)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} d\tau \ll$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |l_n(\sigma_3-\sigma+i\tau)|\,\frac{1}{\sqrt{U}}\,(U\,(|u|+|\tau|))^{\frac{1}{2}}\,d\tau \ll$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |l_n(\sigma_3-\sigma+i\tau)|\,(1+|u|+|\tau|)^{\frac{1}{2}}\,d\tau \ll \int\limits_{-\infty}^{\infty} |l_n(\sigma_3-\sigma+i\tau)|\,(1+|\tau|)\,d\tau,$$

nes U yra kontūro L taškų menamoji dalis, todėl aprėžtas dydis. Įstatę šį įvertį į (3.2) gauname, kad

$$\frac{1}{U}\int\limits_{T_0}^{T} w(\tau)\sup_{s\in K}|f(s+i\tau)-f_n(s+i\tau)|\,d\tau \ll \sup_{\sigma\le-\frac{\varepsilon}{4}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|l_n(\sigma+it)|\,(1+|t|)\,dt. \tag{3.3}$$

Iš funkcijos l_n apibrėžimo matome, kad

$$|l_n(\sigma+i\tau)| = \frac{|s|}{\sigma_2}\left|\Gamma\left(\frac{s}{\sigma}\right)\right| e^{\lambda_n\sigma}.$$

Todėl, kai $\sigma_1 < 0$, turime, kad

$$\lim_{n\to\infty} l_n(\sigma+it) = 0.$$

Iš čia ir (3.3) gauname teoremos tvirtinimą.

4. Pagrindinė teorema

Tarkime, kad srityje $\sigma > \sigma_0$ bendrąja Dirichlė eilute yra apibrėžta funkcija

$$f(s) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-\lambda_m s}$$

ir kad ji yra analiziškai pratęsiama į sritį $\sigma > \sigma_1$ su $\sigma_1 < \sigma_0$. Be to, reikalaujame, kad juostoje $D_1 = \{s \in \mathbb{C} : \sigma_1 < \sigma < \sigma_0\}$ galiotų įverčiai

$$f(\sigma+it) = O(|t|^a), \qquad a = a(\sigma) > 0, \qquad |t| \ge t_0 > 0, \tag{4.1}$$

ir

$$\int\limits_{T_0+v}^{T+v} w(t-v)\,|f(\sigma+it)|^2\,dt \ll U(1+|v|) \tag{4.2}$$

su visais $v \in \mathbb{R}$. Čia $w(t)$ yra svorio funkcija. Ji yra teigiama aprėžtos variacijos funkcija intervale $[T_0, \infty)$ ir tenkina sąlygą

$$\lim_{T\to\infty} U = U(T,w) = \int\limits_{T_0}^{T} w(t)dt = +\infty.$$

Tegul $H(D_1)$ yra analizinių funkcijų srityje D_1 erdvė su tolygaus konvergavimo kompaktinėse aibėse topologija. Erdvėje $(H(D_1), \mathcal{B}(H(D_1)))$ apibrėžiame

$$P_{T,w}(A) = \frac{1}{U}\int\limits_{T_0}^{T} w(\tau) I_{\{\tau: f(s+i\tau)\in A\}} d\tau.$$

Šiame skyrelyje, remdamiesi ankstesnių skyrelių rezultatais, įrodysime pagrindinę magistro darbo teoremą apie tikimybinio mato $P_{T,w}$ silpnąjį konvergavimą, kai $T \to \infty$.

4.1 teorema. Tarkime, kad funkcija $f(s)$ tenkina (4.1) ir (4.2) sąlygas. Tuomet erdvėje $(H(D_1), \mathcal{B}(H(D_1)))$ egzistuoja toks tikimybinis matas P_w, į kurį, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja $P_{T,w}$.

4.1 teoremos įrodymui bus reikalingi kai kurie silpnojo tikimybinių matų konvergavimo teorijos elementai.

Tegul $\{P\}$ yra tikimybinių matų šeima erdvėje $(\mathcal{S}, \mathcal{B}(\mathcal{S}))$. Sakome, kad ši šeima yra suspausta, jeigu su kiekvienu $\varepsilon > 0$ egzistuoja tokia kompaktinė aibė $K = K(\varepsilon) \subset \mathcal{S}$, kad visiems matams $P \in \{P\}$ galioja nelygybė

$$P(K) > 1 - \varepsilon.$$

Šeima $\{P\}$ yra vadinama reliatyviai kompaktine, jeigu iš kiekvieno jos posekio galime išskirti silpnai konverguojantį posekį į kurį nors matą erdvėje $(\mathcal{S}, \mathcal{B}(\mathcal{S}))$.

4.2 lema. Jeigu tikimybinių matų šeima $\{P\}$ erdvėje $(\mathcal{S}, \mathcal{B}(\mathcal{S}))$ yra suspausta, tai ji yra reliatyviai kompaktinė.

Lema yra vadinama tiesiogine Prochorovo teorema, jos įrodymą galima rasti [1] monografijoje.

Tarkime, kad X yra $\mathcal{S}$ reikšmis atsitiktinis elementas, apibrėžtas tikimybinėje erdvėje $(\bar{\Omega}, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, tai yra X yra funkcija $X : \bar{\Omega} \to \mathcal{S}$, tenkinanti sąlygą: su kiekviena aibe $A \in \mathcal{B}(\mathcal{S})$

$$\{\bar{\omega} \in \bar{\Omega} : X(\bar{\omega}) \in A\} \in \mathcal{A}.$$

Kitais žodžiais tariant, X yra $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathcal{S}))$ mati funkcija.

Atsitiktinio elemento X pasiskirstymu vadiname tikimybinį matą

$$P_X(A) = \mathbb{P}(\bar{\omega} \in \bar{\Omega} : X(\bar{\omega}) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathcal{S}).$$

Tegul X_n, $n \in \mathbb{N}$, ir X yra $\mathcal{S}$ reikšmiai atsitiktiniai elementai, apibrėžti tikimybinėje erdvėje $(\bar{\Omega}, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, o P_{X_n} ir P_X yra jų pasiskirstymai. Sakome, kad X_n, kai $n \to \infty$, konverguoja į X pagal pasiskirstymą (žymime $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} X$) jeigu matas P_{X_n}, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į matą P_X.

Bus reikalingas toks tvirtinimas. Tegul Y_n, X_{1n}, X_{2n}, $\ldots$ yra $\mathcal{S}$ reikšmiai atsitiktiniai elementai, apibrėžti toje pačioje erdvėje $(\bar{\Omega}, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, o $(\mathcal{S},\ \rho)$ yra separabili metrinė erdvė.

4.3 lema. Tarkime, kad su kiekvienu k

$$X_{kn} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} X_k$$

ir kad

$$X_k \xrightarrow[k\to\infty]{\mathcal{D}} X.$$

Be to, tegul su kiekvienu $\varepsilon > 0$

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(\rho(X_{kn}, Y_n) \geq \varepsilon) = 0.$$

Tuomet

$$Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} X.$$

Lema yra 4.2 teorema iš [1], čia yra duotas jos įrodymas.

Mums dar bus reikalinga metrika erdvėje $H(D_1)$, kuri indukuoja tolygaus konvergavimo kompaktinėse aibėse topologiją. Yra žinoma [6], kad egzistuoja tokia juostos D_1 kompaktinių aibių seka $\{K_l : l \in \mathbb{N}\}$, kad yra išpildytos sąlygos:

1° $D_1 = \bigcup_{l=1}^{\infty} K_l$;

2° $K_l \subset K_{l+1}, \quad l \in \mathbb{N}$;

3° Jeigu K yra kompaktinė juostos D_1 aibė, tai visada egzistuoja toks numeris $l \in \mathbb{N}$, kad $K \subset K_l$.

Tegul $g_1, g_2 \in H(D_1)$. Apibrėžiame

$$\rho(g_1, g_2) = \sum_{l=1}^{\infty} 2^{-l} \frac{\sup\limits_{s\in K_l} |g_1(s) - g_2(s)|}{1 + \sup\limits_{s\in K_l} |g_1(s) - g_2(s)|}.$$

Tuomet turime, kad $\rho(g_1, g_2)$ yra metrika erdvėje jei $H(D_1)$, indukuojanti jos tolygaus konvergavimo kompaktinėse aibėse topologiją.

4.1 teoremos įrodymas. Tegul θ yra atsitiktinis dydis, apibrėžtas kurioje nors tikimybinėje erdvėje $(\hat{\Omega}, \mathcal{B}(\hat{\Omega}), \mathbb{P})$ ir turintis pasiskirstymą

$$\mathbb{P}(\theta_T \in A) = \frac{1}{U} \int\limits_{T_0}^{T} w(\tau) I_A d\tau, \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Apibrėžiame

$$X_{T,n,w}(s) = f_n(s + i\theta_T).$$

Čia $f_n(s)$ yra funkcija, kuri nagrinėta 2 ir 3 skyreliuose. Pagal 2.4 teoremą turime, kad matas $P_{T,n,w}$, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į matą $P_{n,w}$. Šis tvirtinimas yra ekvivalentus analogiškam tvirtinimui konvergavimo pagal pasiskirstymą terminais. Tegul $X_{n,w}$ yra $H(D_1)$ reikšmis atsitiktinis elementas, turintis pasiskirstymą $P_{n,w}$. Iš šių pastabų turime, kad

$$X_{T,n,w}(s) \xrightarrow[T\to\infty]{\mathcal{D}} X_{n,w}(s). \tag{4.3}$$

Dabar įrodysime, kad tikimybinių matų šeima $P_{n,w} : n \in \mathbb{N}$ yra suspausta. Imame teigiamą skaičių M_l, $l \in \mathbb{N}$. Tuomet iš Čebyšovo tipo nelygybės išplaukia

$$\frac{1}{U}\int\limits_{T_0}^{T} w(\tau) I_{\{\tau:\, \sup\limits_{s\in K_l} |f_n(s+i\tau)|>M_l\}} d\tau \le \frac{1}{M_l U}\int\limits_{T_0}^{T} w(\tau) \sup_{s\in K_l} |f_n(s+i\tau)|\, d\tau. \tag{4.4}$$

Be to, iš 3.1 teoremos gauname, kad

$$\begin{aligned}
&\sup_{n\in\mathbb{N}} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{U}\int\limits_{T_0}^{T} w(\tau) \sup_{s\in K_l} |f_n(s+i\tau)|\, d\tau \le \\
&\sup_{n\in\mathbb{N}} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{U}\int\limits_{T_0}^{T} w(\tau) \sup_{s\in K_l} |f(s+i\tau) - f_n(s+i\tau)|\, d\tau + \\
&\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{U}\int\limits_{T_0}^{T} w(\tau) \sup_{s\in K_l} |f(s+i\tau)|\, d\tau \ll \\
&1 + \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{U}\int\limits_{T_0}^{T} w(\tau) \sup_{s\in K_l} |f(s+i\tau)|\, d\tau.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Tegul L_l yra paprastas uždaras kontūras, gulintis juostoje D_1 ir apjuosiantis aibę K_l. Tuomet, remdamiesi Koši integraline teorema, galime parašyti, kad

$$f(s+i\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_l} \frac{f(z+i\tau)}{z-s} dz.$$

Jeigu δ yra kontūro L_l atstumas iki aibės K_l, o $|L_l|$ yra kontūro L ilgis, tai iš čia randame, kad

$$\sup_{s\in K_l} |f(s+i\tau)| \ll \int\limits_{L_l} \frac{|f(z+i\tau)|}{|z-s|} |dz| \ll |L_l|\, \delta^{-1} \sup_{z\in L_l} |f(z+i\tau)| \ll |f(\sigma_l + i\tau + iu_l)|,$$

čia $\sigma_l < \sigma_1 < \sigma < \sigma_0$, o u_l yra aprėžtas skaičius, nes kontūrą L_l galime parinkti taip, kad jis tilptų kurioje nors kompaktinėje aibėje. Iš šio įverčio ir (4.2), pritaikę Košį nelygybę randame, kad

$$\int\limits_{T_0}^{T} w(\tau) \sup_{s\in K_l} |f(s+i\tau)|\, d\tau \ll \int\limits_{T_0}^{T} w(\tau)\, |f(\sigma_l + i\tau + iu_l)|\, d\tau \ll$$

$$\int\limits_{T_0+u_l}^{T+u_l} w(\tau - u_l)\, |f(\sigma_l + i\tau)|\, d\tau \ll$$

$$\left(\int\limits_{T_0+u_l}^{T+u_l} w(\tau-u_l) d\tau \int\limits_{T_0+u_l}^{T+u_l} w(\tau-u_l)\, |f(\sigma_l+i\tau)|^2\, d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\left(\int\limits_{T_0}^{T} w(\tau) d\tau U(1+|u_l|) \right)^{\frac{1}{2}} = U(1+|u_l|)^{\frac{1}{2}}.$$

Sugrįžę prie (4.5) įverčio, matome, kad

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{U} \int\limits_{T_0}^{T} w(\tau) \sup_{s\in K_l} |f_n(s+i\tau)|\, d\tau \le R_l < \infty, \quad l \in \mathbb{N}. \tag{4.6}$$

Dabar patiksliname skaičiaus M_l parinkimą. Tegul $\varepsilon > 0$ yra bet koks skaičius. Imame

$$M_l = M_{l,\varepsilon} = R_l 2^l \varepsilon^{-1}.$$

Tuomet, iš (4.4) ir (4.6) nelygybių gauname, kad

$$\limsup_{T\to\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{s\in K_l} |X_{T,n,w}(s)| > M_l \right) =$$

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{U} \int\limits_{T_0}^{T} w(\tau) I_{\{\tau:\, \sup\limits_{s\in K_l} |f_n(s+i\tau)| > M_l\}} d\tau \le \frac{\varepsilon}{2^l}, \quad l,n \in \mathbb{N}. \tag{4.7}$$

Iš (4.3) turime

$$\sup_{s\in K_l} |X_{T,n,w}(s)| \xrightarrow[T\to\infty]{\mathcal{D}} \sup_{s\in K_l} |X_{n,w}(s)|, \quad l,n \in \mathbb{N}.$$

Iš čia ir (4.7) išplaukia, kad

$$\mathbb{P}\left(\sup_{s\in K_l} |X_{n,w}(s)| > M_l \right) \le \frac{\varepsilon}{2^l}, \quad l,n \in \mathbb{N}. \tag{4.8}$$

Apibrėžiame aibę

$$H_\varepsilon = \left\{ g \in H(D_1) : \sup_{s\in K_l} |g(s)| \le M_{l,\varepsilon},\ l \in \mathbb{N} \right\}.$$

Tuomet aibė H_ε yra tolygiai aprėžta kompaktinėse juostos D_1 aibėse, todėl ji yra kompaktinė $H(D_1)$ aibė. Be to, iš (4.8) išplaukia, kad

$$\mathbb{P}(X_{n,w}(s) \in H_\varepsilon) = 1 - \mathbb{P}(X_{n,w}(s) \notin H_\varepsilon) \ge 1 - \varepsilon \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^l} = 1 - \varepsilon \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \varepsilon,\ \ n \in \mathbb{N}.$$

Taigi gauname, kad tikimybinių matų šeima $\{P_{n,w} : n \in \mathbb{N}\}$ yra suspausta.

Remdamiesi 4.2 lema gauname, kad matų šeima $\{P_{n,w} : n \in \mathbb{N}\}$ yra reliatyviai kompaktinė. Todėl egzistuoja toks posekis $\{P_{n_k,w}\} \subset \{P_{n,w}\}$, kad matas $P_{n_k,w}$, kai $k \to \infty$, silpnai konverguoja į kurį nors tikimybinį matą P_w erdvėje $(H(D_1), \mathcal{B}(H(D_1)))$. Kitaip tariant, turime, kad

$$X_{n_k,w}(s) \xrightarrow[k\to\infty]{\mathcal{D}} P_w. \tag{4.9}$$

Apibrėžiame dar vieną $H(D_1)$ reikšmį atsitiktinį elementą $X_{T,w}$ formule

$$X_{T,w}(s) = f(\sigma + i\theta_T).$$

Tada, remdamiesi 3.1 teorema ir metrikos ρ apibrėžimu, randame, kad su kiekvienu $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \sup_{T\to\infty} \mathbb{P}\left(\rho(X_{T,w}(s), X_{T,n,w}(s)) \geq \varepsilon\right) = \\
&\lim_{n\to\infty} \sup_{T\to\infty} \frac{1}{U} \int\limits_{T_0}^{T} w(\tau) I_{\{\tau:\rho(f(s+i\tau), f_n(s+i\tau))\geq\varepsilon\}} d\tau \leq \\
&\lim_{n\to\infty} \sup_{T\to\infty} \frac{1}{U\varepsilon} \int\limits_{T_0}^{T} w(\tau)\rho(f(s+i\tau), f_n(s+i\tau)) d\tau = 0.
\end{aligned}$$

Pastaroji lygybė kartu su (4.3) ir (4.9) rodo, jog yra išpildytos visos 4.3 lemos sąlygos. Taigi, gauname, kad

$$X_{T,w}(s) \xrightarrow[T\to\infty]{\mathcal{D}} P_w,$$

kas, prisiminus atsitiktinio elemento $X_{T,w}$ apibrėžimą, yra ekvivalentu mato $P_{T,w}$, kai $T \to \infty$, silpnajam konvergavimui į matą P_w. Teorema įrodyta.

Summary

A weighted limit theorem in the space of analytic functions for general Dirichlet series

Zigmas Pacevičius

Suppose that, for $\sigma > \sigma_0$,

$$f(s) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-s\lambda_m}, \quad s = \sigma + it,$$

and that the function has meromorphic continuation to the region $\sigma > \sigma_1$ with $\sigma_1 < \sigma_0$, and is analytic in the strip $D_1 = \{s \in \mathbb{C} : \sigma_1 < \sigma < \sigma_0\}$. We require that in D_1 the estimate

$$f(\sigma + it) = O(|t|^a), \quad a = a(\sigma) > 0, \quad |t| \geq t_0 > 0,$$

should be satisfied.

Furthermore, let $w(t)$ be a positive function of bounded variation on $[T_0, \infty)$ such that

$$\lim_{T \to \infty} U = U(T, w) = \int_{T_0}^{T} w(t) dt = +\infty.$$

We also suppose that in the strip D_1 the estimate

$$\int_{T_0+v}^{T+v} w(t - v) \left| f(\sigma + it) \right|^2 dt = O(U(1 + |v|))$$

holds for all $v \in \mathbb{R}$.

Let I_A denote the indicator function of the set A, $H(D_1)$ be the space of analytic functions on D_1 equipped with the topology of uniform convergence on compacta, and let $\mathcal{B}(H(D_1))$ stand for the class of Borel sets of the space $H(D_1)$.

The main result of the master work is the following statement.

Suppose that the function $f(s)$ satisfies the above hypotheses. Then on $(H(D_1), \mathcal{B}(H(D_1)))$, there exists a probability measure P_w such that

$$\frac{1}{U} \int_{T_0}^{T} w(\tau) I_{\{\tau : f(s+i\tau) \in A\}} d\tau, \quad A \in \mathcal{B}(H(D_1))$$

converges weakly to P_w as $T \to \infty$.

Literatūra

[1] П. Биллингсли, Сходимость вероятностных мер, Наука, Москва, 1977.

[2] H. Bohr, *Über die Wertverteilung der Riemannschen Zetafunktion*, Erse Meittelung, Acta Math. 54 (1930), 1-35.

[3] H. Bohr, *Über die Wertverteilung der Riemannschen Zetafunktion*, Zweiter Meittelung, Acta Math. 58 (1932), 1-55.

[4] J. Genys, A. Laurinčikas, *Weighted limit theorems for general Dirichlet series*, Uniform Distribution Theory 2, 2002, 49-66.

[5] D. Joyner, *Distribution Theorems of L-functions*, Pitman Research Notes in Mathematics, 1986.

[6] A. Laurinčikas, *Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function*, Kluwer Academic Publishers, Dodrecht-Boston-London, 1996.

[7] A. Laurinčikas, *Value-distribution of general Dirichlet series*, in Proc. of Seven Vilnius Conference (1998), B. Grigelionis et al. (Eds.), VSP/Utrecht,TEV/Vilnius, 1999, 405-414.

[8] A. Laurinčikas, *Value-distribution of general Dirichlet series II*, Lith. Math. J. 41(4), 2001, 351-360.

[9] A. Laurinčikas, *Limit theorems for general Dirichlet series*, Theory of Stochastic Processes 8(24), 2004, 256-269.

[10] A. Laurinčikas, R. Garunkštis, *The Lerch Zeta-Function*, Kluwer Academic Publishers, Dodrecht-Boston-London, 2002.

[11] A. Laurinčikas, R. Macaitienė, *Įvadas į Dirichlė eilučių teoriją*, Šiaulių universiteto leidykla, Šiauliai, 2008.

[12] A. Laurinčikas, J. Steuding, *A joint limit theorem for general Dirichlet series*, Lith. Math. J. 42(2), 2002, 163-173.

[13] V. Paulauskas, A. Račkauskas, *Funkcinė analizė*. I knyga, Erdvės, Vaistų žinios, Vilnius, 2007.

[14] J. Steuding, *Value-Distribution Theorems of L-functions*, Lecture Notes in Math., V. 1877, Springer, Berlin, 2007.