VILNIAUS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

Magistro darbas

AR(1) PROCESŲ SU ATSITIKTINIU KOEFICIENTU IR BEGALINE DISPERSIJA AGREGAVIMAS

AGGREGATION OF RANDOM COEFFICIENT AR(1) PROCESS WITH INFINITE VARIANCE

Donata Puplinskaitė

Vilnius

2009

MATEMATINĖS ANALIZĖS KATEDRA

Darbo vadovas prof. habil. dr. D. Surgailis.......................

(parašas)

Darbo recenzentas ________________________

Darbas apgintas 2009 m. birželio mėn. 2 d.

Registravimo Nr. ________

2009.05.25________

Turinys

Santrauka

Viena iš svarbiausių finansinių laiko eilučių empirinių sąvybių yra ilgalaikė atmintis. Agreguojant duomenis, galima gauti ilgalaikę atmintį. Magistro darbo tikslas yra ištirti agregavimą begalinės dispersijos atveju, išplėsti Zaffaroni[13] straipsnio kai kuriuos rezultatus nuo baigtinės dispersijos atvejo iki begalinės dispersijos atvejo, ištirti agreguotų procesų ilgalaikę atmintį, esant begalinei dispersijai. Svarbūs klausimai: kada agreguojami procesai konverguoja, kas yra ribinis agreguotas procesas ir kokiomis sąvybėmis jis pasižymi. Darbe nagrinėjamas AR(1) procesų su atsitiktiniais koeficientais agregavimas:

$$X_{i,t} = a_i X_{i,t-1} + \varepsilon_t, \qquad i = 1{,}2, \cdots, \quad t \in \mathbb{Z}$$

kur $\{\varepsilon_t\}$ yra bendri nepriklausomi vienodai pasiskirstę (n.v.p.) triukšmai, $\mathrm{E}\,|\varepsilon_0|^p < \infty$ kažkokiam $0 < p \le 2$ ir $\mathrm{E}\,\varepsilon_0 = 0$, kai $1 \le p \le 2$; $\{a_i\}$ yra n.v.p. atsitiktiniai dydžiai, nepriklausantys nuo $\{\varepsilon_t\}$, ir jų pasiskirstymas yra toks kaip ir a.d. $a \in (-1; 1)$. Darbe įrodyta Teorema 1 duoda pakankamas sąlygas, kad agreguotas procesas $\bar{X}_{N,t} := N^{-1} \sum_{i=1}^{N} X_{i,t}$ konverguotų pagal tikimybę į stacionarų slenkančio vidurkio procesą (angl. moving average):

$$\bar{X}_t = \sum_{j=0}^{\infty} \bar{a}_j \varepsilon_{t-j}, \qquad \bar{a}_j = \mathrm{E}\, a^j. \tag{1}$$

Kai $1 \le p \le 2$, pakankama sąlyga tokiam konvergavimui yra

$$\mathrm{E}\left[\frac{1}{(1-|a|^p)^{1/p}}\right] \;<\; \infty. \tag{2}$$

Tolesnėje darbo dalyje nagrinėjamas atvejis, kai tiukšmai $\{\varepsilon_t\}$ priklauso α-stabiliai traukos sričiai, $0 < \alpha \le 2$, ir atsitiktinio dydžio $a \in (-1, 1)$ tikimybinis tankis ϕ yra toks:

$$\phi(x) \;=\; (1-x)^{-d_1}(1+x)^{-d_2}\psi(x) \qquad (-1 < x < 1) \tag{3}$$

kur parametrai d_1, d_2 tenkina $0 < d_1, d_2 < 1$ ir $\psi \ge 0$ yra integruojama funkcija intervale $(-1{,}1)$, turinti baigtines ribas $\psi_1 = \lim_{x\to 1}\psi(x), \psi_2 = \lim_{x\to -1}\psi(x)$. Teiginyje 2 parodyta ribinio agreguoto proceso koeficientų $\bar{a}_j := \mathrm{E}\, a^j = \mathrm{E}\, a_+^j + (-1)^j\, \mathrm{E}\, a_-^j$ asimptotika, kai $j \to \infty$. $\mathrm{E}\, a_+^j$ nyksta kaip j^{d_1-1}, o $\mathrm{E}\, a_-^j$ - kaip j^{d_2-1}.

Įdomiausias atvejis, vedantis prie ribinio proceso $\{\bar{X}_t\}$ ilgos atminties, yra kai $1 < \alpha \le 2$. Šiuo atveju sąlyga (2) maišanšiam tankiui (3) su $\psi_i > 0, i = 1{,}2$ yra

patenkinta tam tiktam p tada ir tik tada

$$d_i < 1 - (1/\alpha), \quad i = 1{,}2. \tag{4}$$

Kadangi nagrinėjamas begalinės dipersijos atvejis, tai standartinis ilgos atminties apibrėžimas (per absoliučiai nesumuojamas kovariacijas) čia netinkamas. Remiantis Išvada 1, jei teisinga (4) ir $1 < \alpha \leq 2$, $\psi_1 > 0$, tada $\{\bar{X}_t\}$ turi taip vadinamą *LRD* (angl. long-range dependence (sample Allen variance)) sąvybę, kuri nagrinėta straipsnyje Heyde and Yang[6], ir *skirstinių ilgąją atmintį* (angl. the distributional long memory), išnagrinėtą straipsnyje Cox[3]. Apibrėžimai ir tikslesni formulavimai pateikti žemiau.

Summary

A very important property of financial time series is long memory. Interest for aggregation is prompted by the possibility of obtaining long memory. The purpose of diploma paper is to explore the aggregation in case of infinite variance, extend some results of Zaffaroni[13] on aggregation of random coefficient AR(1) processes from finite variance case to infinite variance case. Important questions are: what are sufficient conditions for convergence of the aggregated process; what is limit aggregate process and what properties has limit aggregate process. In my diploma paper I explore the aggregation of random coefficient AR(1) processes: let

$$X_{i,t} = a_i X_{i,t-1} + \varepsilon_t, \qquad i = 1,2,\cdots, \quad t \in \mathbb{Z}$$

be stationary solutions of random coefficient AR(1) equation, where $\{\varepsilon_t\}$ are common i.i.d. innovations satisfying $\mathrm{E}\,|\varepsilon_0|^p < \infty$, for some $0 < p \le 2$ and $\mathrm{E}\,\varepsilon_0 = 0$ $(1 \le p \le 2)$, and where $\{a_i\}$ are i.i.d. r.v.'s independent of $\{\varepsilon_t\}$ and having a common distribution $a \in (-1,1)$. Theorem 1 obtains sufficient conditions for convergence in probability of the aggregated process $\bar{X}_{N,t} := N^{-1}\sum_{i=1}^N X_{i,t}$ to a stationary moving average

$$\bar{X}_t = \sum_{j=0}^{\infty} \bar{a}_j \varepsilon_{t-j}, \qquad \bar{a}_j = \mathrm{E}\, a^j. \tag{1}$$

In the case $1 \le p \le 2$, the sufficient condition for such convergence is

$$\mathrm{E}\left[\frac{1}{(1-|a|^p)^{1/p}}\right] \;<\; \infty. \tag{2}$$

In the rest of the diploma paper, I study the case when the innovations $\{\varepsilon_t\}$ belong to the domain of attraction of $\alpha-$stable law; $0 < \alpha \le 2$, and the probability density ϕ of r.v. $a \in (-1,1)$ takes the form

$$\phi(x) \;=\; (1-x)^{-d_1}(1+x)^{-d_2}\psi(x) \qquad (-1 < x < 1) \tag{3}$$

where parameters d_1, d_2 satisfy $0 < d_1, d_2 < 1$ and where $\psi \ge 0$ is an integrable function on the interval $(-1,1)$ having finite limits $\psi_1 = \lim_{x\to 1}\psi(x), \psi_2 = \lim_{x\to -1}\psi(x)$. Proposition 2 describes the asymptotics as $j \to \infty$ of the moving average coefficients $\bar{a}_j := \mathrm{E}\,a^j = \mathrm{E}\,a_+^j + (-1)^j\,\mathrm{E}\,a_-^j$ of the limiting aggregated process. $\mathrm{E}\,a_+^j$ decay as j^{d_1-1}, and $\mathrm{E}\,a_-^j$ - as j^{d_2-1}.

The most interesting case which can lead to long memory of the limit aggregate $\{\bar{X}_t\}$ in (1) is $1 < \alpha \le 2$. In this case, condition (2) (for some p) for mixing density

in (3) with $\psi_i > 0, i = 1,2$ is satisfied if and only if

$$d_i < 1 - (1/\alpha), \quad i = 1,2. \tag{4}$$

Since we are dealing with infinite variance processes, the usual definitions of long memory in terms of covariance/spectrum are not applicable. According to Corollary 1, if (4) holds (and $1 < \alpha \leq 2,\ \psi_1 > 0$), then $\{\bar{X}_t\}$ enjoys the so-called *long-range dependence (sample Allen variance)* property of Heyde and Yang[6], and the *distributional long memory* of Cox[3]. Definitions and precise formulations are below.

Įvadas

Vieni svarbiausių laiko eilučių teorijos tikslų ir uždavinių yra finansinių duomenų (pvz., vertybinių popierių kainų ir kt.) modeliavimas ir statistinė analizė. Sunkios uodegos, tolima atmintis - tai vienos iš svarbiausių finansinių laiko eilučių empirinių savybių. Vienas iš labiausiai paplitusių tolimos atminties modelių yra *agregavimas*. Agregavimas naudingas modeliuoti tolimos atminties procesus bei paaiškinti jos atsiradimą realiuose duomenyse. Reikia pastebėti, kad makroekonominiai duomenys dažnai yra agreguoti procesai, kai agreguojamas didelis skaičius heterogeninių vienetų tokių kaip namų ūkiai ar firmos. Pirmieji agregavimo idėją išvystė Robinson[11] ir Granger[5]. Jų darbuose buvo nagrinėjamas begalinio kiekio pirmos eilės autoregresijos AR(1) modelių agregavimas, kai parametrai yra atsitiktiniai ir pasiskirstę pagal Beta skirstinį. Agregavimą taip pat nagrinėjo [13], [9], [8], ir daug kt. Tačiau dauguma nagrinėjo baigtinės dispersijos atvejį. Pagrindinis straipsnis, kuriuo remtasi rašant magistrinį darbą yra Zaffaroni[13]. Magistro darbo tikslas yra ištirti agregavimą begalinės dispersijos atveju, išplėsti straipsnio [13] kai kuriuos rezultatus nuo baigtinės dispersijos atvejo iki begalinės dispersijos atvejo, ištirti agreguotų procesų ilgalaikę atmintį, esant begalinei dispersijai.

Trumpai apžvelkime pagrindinius P. Zaffaroni straipsnio [13] rezultatus, gautus baigtinės dispersijos atvejui. Savo straipsnyje P. Zaffaroni nagrinėjo tiesinį agregavimą, agreguojant ARMA procesus su atsitiktiniais koeficientais, bendrais (angl. common) ir individualiais (angl. idiosyncratic) triukšmais. Jis detaliai paaiškina ilgos atminties atsiradimą, skirtingą bendrų ir individualių triukšmų įtaką. Išskiria ir nagrinėja svarbų atvejį, kai agreguojami AR(1) procesai. Tarkime yra N mikroekonomimių kintamųjų, kurių elgesys nusakomas AR(1) lygtimi:

$$X_{i,t} = \alpha_i X_{i,t-1} + \rho_i u_t + \varepsilon_{i,t} \text{ , kur } i = 1, \dots, N$$

Čia atsitiktiniai vektoriai $\theta_i := (\alpha_i, \rho_i)$ yra n.v.p., įgyjantys reikšmes iš $\Theta = [0,1) \times \mathbb{R}$. $u = \{u_t, t \in \mathbb{Z}\}$ yra bendri triukšmai, $\varepsilon = \{\varepsilon_{\theta,t}, \theta \in \Theta, t \in \mathbb{Z}\}$ yra individualūs triukšmai. Tiek u, tiek ε_θ, $\forall\theta$, yra balti triukšmai. Tai yra dvi šeimos atsitiktinių dydžių su baigtine dispersija ir nuliniais vidurkiais. Be to, atsitiktiniai koeficientai α_i ir ρ_i yra nepriklausomi. $\mathrm{E}\,|\rho_i| \neq 0$ ir $\mathrm{E}\,\rho_i^2 < \infty$. α_i pasiskirstymas priklauso nuo parametro $b \in (-1, \infty)$ su tankiu

$$B(\alpha, b) \sim C(1-\alpha)^b \text{ , kai } \alpha \to 1^-$$

P. Zaffaroni agreguotą procesą išskaido į dvi dalis:

$$\bar{X}_{N,t} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_{i,t} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\rho_i}{1-\alpha_i L}u_t + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{1-\alpha_i L}\varepsilon_{i,t} =: U_{N,t} + E_{N,t}$$

kur $U_{N,t}$ yra bendra komponentė (common component) ir $E_{N,t}$ yra individuali komponentė (idiosyncratic component). L yra vėlavimo operatorius, t.y. $X_{i,t-1} = LX_{i,t}$.

Esant aukščiau apibrėžtoms sąlygoms, savo straipsnyje P. Zaffaroni išnagrinėjo $U_{N,t}$ ir $E_{N,t}$ asimptotinį elgesį, skirtumus tarp jų. Magistriniame darbe nagrinėsiu agregavimą begalinės dispersijos atveju su bendrais triukšmais. Agregavimo su individualiais triukšmais tyrimas paliekamas ateičiai. Todėl toliau trumpai P. Zaffaroni rezultatai, gauti bendrai komponentei $U_{N,t}$. Reikia pastebėti, kad straipsnyje [13] stacionarus stochastinis procesas $Y_t(d), t \in \mathbb{Z}$ turi atminties parametrą d, $(d < \frac{1}{2})$, kai $\operatorname{cov}(Y_t(d), Y_{t+u}(d)) \sim cu^{2d-1}$, $u \to \infty$. O kai $d > 0$, tada $Y_t(d)$ turi ilgą atmintį.

P. Zaffaroni gauti rezultatai bendrai komponentei:

- Stacionariu atveju $(b > -1/2)$,

  $$U_{N,t} \to_{L_2} U_t \qquad \text{, kai } N \to \infty.$$

  Kur $U_t = U_t(d^U) = \mathrm{E}\,\rho \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{E}\,\alpha^k u_{t-k}$, o atminties parametras yra $d^U := -b$. Aišku, kad kai $d^U > 0$, t.y. $b < 0$, ribinis agreguotas procesas turi ilgalaikę atmintį.

- Nestacionariu atveju $(b < -1/2)$, nagrinėjama nupjauta eilutė

  $$\widetilde{U}_{N,t} := \sum_{k=0}^{t-1}\Big(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\rho_i\alpha_i^k\Big)u_{t-k}$$

  ir jos dispersija $\widetilde{V}_{N,t}$. Šiuo atveju, kai $N \to \infty$ ir $t \to \infty$, normuotas procesas $\widetilde{U}_{N,[rt]}/\sqrt{\widetilde{V}_{N,t}}$ baigtiniamačių skirstinių prasme silpnai konverguoja į trupmeninį Brauno judesį $U(d^U; r)$, $r > 0$, $d^U := -b$, išreikštą integraline forma:

  $$\begin{aligned} &U(d^U; 0) = 0 \qquad \text{b.t.} \\ &U(d^U; r) = \int_0^r (r-s)^{(d^U-1)}\mathrm{d}B(s) \qquad , r > 0, \end{aligned}$$

  kur $B(s)$ yra standartinis Brauno judesys.

Magistriniame darbe nagrinėjamas AR(1) procesų su atsitiktiniu koeficientu agregavimas :

$$X_{i,t} = a_i X_{i,t-1} + \varepsilon_t, \qquad i = 1{,}2,\cdots, \quad t \in \mathbb{Z}$$

kur $\{\varepsilon_t\}$ yra bendri nepriklausomi vienodai pasiskirstę (n.v.p.) triukšmai, $\mathrm{E}\,|\varepsilon_0|^p < \infty$ kažkokiam $0 < p \leq 2$ ir $\mathrm{E}\,\varepsilon_0 = 0$, kai $1 \leq p \leq 2$; $\{a_i\}$ yra n.v.p. atsitiktiniai dydžiai, nepriklausantys nuo $\{\varepsilon_t\}$, ir jų pasiskirstymas yra toks kaip ir a.d. $a \in (-1;1)$, kurio tankis apibrėžtas formule (3). Darbe nagrinėjamas tik stacionarus atvejis. Tačiau paminėsiu, kad, tiriant agregavimą su begaline dispersija nestacionariu atveju, reikėtų nagrinėti nupjautus AR(1) procesus $Y_{i,t} = \sum_{j=0}^{t-1} a_i^j \varepsilon_{t-j},\ t = 1{,}2,\ldots,\ i = 1,\ldots,N$, su atsitiktiniais koeficientais (kaip ir P. Zaffaroni straipsnyje), nes šiuo atveju slenkančio vidurkio procesas yra neapibrėžtas. Galima įrodyti, kad prie tam tikrų sąlygų agreguotas procesas $\bar{Y}_{N,t} := N^{-1}\sum_{i=1}^{N} Y_{i,t}$, $t = 1, 2, \ldots$ turi ribą $\bar{Y}_t$, kai $N \to \infty$. Kur ribinis agreguotas procesas $\bar{Y}_t$ yra nestacionarus, o normuotas procesas $\frac{1}{n^{d_1+1/\alpha-1}}\bar{Y}_{[nr]}, r \in [0,\infty)$ konverguoja baigtiniamačių skirstinių prasme į $\alpha-$stabilų automodalų procesą, išreikštą stochastiniu integralu stabilaus judesio atžvilgiu:

$$\frac{1}{n^{d_1+1/\alpha-1}}\bar{Y}_{[nr]} \to_{fdd} C\int_0^r (r-s)^{(d_1-1)}\mathrm{d}Z_\alpha(s),$$

čia C yra konstanta, o Z_α yra Lévy procesas, kurio charakteristinė funkcija yra išreikšta formule (34). Plačiau apie agregavimą su begaline dispersija nestacionariu atveju žr. [10].

Darbas susideda iš dviejų skyrių. Pirmame skyriuje teoriškai išnagrinėtas agregavimas stacionariu atveju, įrodytos teoremos, teiginiai, kurie parodo kokiom sąlygom esant agreguotas procesas konverguoja, į ką konverguoja, kokia prasme konverguoja, kas yra ribinis procesas ir kokią ilgąją atmintį jis turi. Tokių procesų (tiek individualių, tiek agreguotų) realizacijų pateikta antrame skyriuje. Jos buvo sugeneruotos, naudojantis statistiniu paketu R.

1. AR(1) procesų su begaline dispersija agregavimas

1.1. Ribinis agreguotas AR(1) procesas

Tarkime turime atsitiktinių koeficientų AR(1) procesą

$$X_t = aX_{t-1} + \varepsilon_t, \qquad t \in \mathbb{Z}, \tag{5}$$

kur $\{\varepsilon, \varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai (n.v.p.a.d.), a yra atsitiktinis dydis (a.d.), nepriklausantis nuo $\{\varepsilon_t\}$, ir $|a| < 1$ beveik tikrai (b.t.).

Apibrėžimas 1. *Žymime $\varepsilon \in D(\alpha)$ $(0 < \alpha \le 2)$ jeigu*

(i) $\alpha = 2$ *ir* $\mathrm{E}\,\varepsilon = 0,\ \mathrm{E}\,\varepsilon^2 < \infty$.

(ii) $0 < \alpha < 2$ *ir egzistuoja konstantos* $c_1, c_2 \ge 0, c_1 + c_2 \ne 0$ *tokios, kad*

$$\lim_{x\to-\infty} |x|^\alpha \mathrm{P}(\varepsilon \le x) \ = \ c_1 \quad ir \quad \lim_{x\to\infty} x^\alpha \mathrm{P}(\varepsilon > x) \ = \ c_2.$$

<u>**Pastaba**</u> **1.** (i) Sąlyga $\varepsilon \in$D(α) reiškia, kad a.d. ε priklauso α-stabilaus dėsnio normaliajai traukos sričiai; kitais žodžiais,

$$n^{-1/\alpha} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i - \ell_n(\alpha) \ \to_{\mathrm{d}} \ Z, \tag{6}$$

kur Z yra $\alpha-$stabilus a.d., $\to_{\mathrm{d}}$ žymi konvergavimą pagal pasiskirstymą, ir $\ell_n(\alpha)$ yra centruojančios konstantos:

$$\ell_n(\alpha) := \begin{cases} n\,\mathrm{E}\sin(\varepsilon/n), & \alpha = 1, \\ 0, & \alpha \ne 1, \end{cases} \tag{7}$$

žr. [4]. A.d. Z charakteristinė funkcija yra apibrėžta taip

$$\mathrm{E}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta \mathrm{Z}} = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\sigma^2\theta^2/2}, & \text{if } \alpha = 2, \\ \mathrm{e}^{-|\theta|^\alpha \omega(\theta;\alpha,c_1,c_2)}, & \text{if } 0 < \alpha < 2, \end{cases} \tag{8}$$

Kur $\sigma^2 := \mathrm{E}\,\varepsilon^2$ ir

$$\omega(\theta;\alpha,c_1,c_2) \ := \ \begin{cases} \frac{\Gamma(2-\alpha)}{1-\alpha}\Big((c_1+c_2)\cos(\pi\alpha/2) - \mathrm{i}(c_1-c_2)\mathrm{sign}(\theta)\sin(\pi\alpha/2)\Big), & \alpha \ne 1, \\ (c_{\varepsilon 1}+c_2)(\pi/2) + \mathrm{i}(c_1-c_2)\mathrm{sign}(\theta)\log|\theta|, & \alpha = 1. \end{cases}$$

(ii) Iš sąlygos $\varepsilon \in$D(α) išplaukia, kad $E|\varepsilon|^p < \infty$ bet kokiam $0 < p < \alpha$.

Teiginys 1. *Tarkime* $\mathrm{E}\,|\varepsilon|^p < \infty$*, kažkokiam* $0 < p \le 2$ *ir* $\mathrm{E}\,\varepsilon = 0$ $(p \ge 1)$*. Tada egzistuoja vienintelis lygties (5) stacionarus sprendinys*

$$X_t \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} a^k \varepsilon_{t-k}. \tag{9}$$

Eilutė (9) konverguoja sąlygiškai beveik tikrai ir L^p *prasme, beveik visiems* $a \in (-1,1)$*. Be to, jeigu*

$$\mathrm{E}\Big[\frac{1}{1-|a|^p}\Big] \;<\; \infty, \tag{10}$$

tada eilutė (9) konverguoja besąlygiškai L^p *prasme.*

Proof. Pirmiausia įrodysiu, kad lygtis (5) turi vienintelį stacionarų sprendinį. Tegu $\{X_t\}$, $\{X'_t\}$ yra du tokie sprendiniai. Pagal iteraciją turime, kad bet kokiam $n > 0$

$$X_0 = \varepsilon_0 + a\varepsilon_{-1} + \cdots a^{n-1}\varepsilon_{-n+1} + a^n X_{-n}$$

Ir panaši lygtis teisinga X'_0. Taigi $X_0 - X'_0 = a^n(X_{-n} - X'_{-n})$, arba

$$|X_0 - X'_0| \le |a|^n(|X_{-n}| + |X'_{-n}|).$$

Bet kokiem $\epsilon, \delta, K > 0$ galime rašyti

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(|X_0 - X'_0| > \epsilon) \;&\le\; \mathrm{P}(|a| > 1-\delta) + \mathrm{P}(|X_{-n}| > K) + \mathrm{P}(|X'_{-n}| > K) \\ &+\; \mathrm{P}(2(1-\delta)^n K > \epsilon). \end{aligned}$$

Kadangi $|a| < 1$ b.t., tai $\mathrm{P}(|a| > 1-\delta)$ gali būti pakankamai maža, tinkamai parenkant δ. Be to, $\mathrm{P}(|X_{-n}| > K) = \mathrm{P}(|X_0| > K)$ ir $\mathrm{P}(|X'_{-n}| > K) = \mathrm{P}(|X'_0| > K)$ nepriklauso nuo n dėl stacionarumo ir yra kiek reikia mažos, parinkus pakankamai didelį K. Aišku, $\mathrm{P}(2(1-\delta)^n K > \epsilon) = 0$ pakankamai dideliems n. Tai įrodo $\mathrm{P}(|X_0 - X'_0| > 0) = 0$.

Tolesniam įrodymui naudojama sekanti nelygybė. Tegu $0 < p \le 2$ ir tegu $\xi_1, \xi_2, \ldots$ yra atsitiktiniai dydžiai su $\mathrm{E}|\xi_i|^p < \infty$. Be to, kai $1 < p \le 2$ laikykime, kad a.d. ξ_i yra martingalų skirtumų seka:

$$\mathrm{E}[\xi_{i+1}|\xi_i, \ldots, \xi_1] = 0, \quad i = 1,2,\ldots.$$

Tada egzistuoja konstanta $C_p < \infty$, kuri priklauso tik nuo p, tokia, kad

$$\mathrm{E}\Big|\sum_i \xi_i\Big|^p \;\le\; C_p \sum_i \mathrm{E}|\xi_i|^p. \tag{11}$$

Kai $0 < p \le 1$, nelygybė (11) teisinga su $C_p = 1$, ir kai $1 < p \le 2$, ji yra teisinga su

$C_p = 2$ (žr. [2]).

Iš (11) bet kokiam $a \in (-1{,}1)$ gauname

$$\mathrm{E}\Big[\Big|\sum_{k=0}^{\infty} a^k \varepsilon_{t-k}\Big|^p \Big| a\Big] \ \le\ C_p \,\mathrm{E}\,|\varepsilon|^p \sum_{k=0}^{\infty} |a|^{kp} \ =\ \frac{C_p \,\mathrm{E}\,|\varepsilon|^p}{1-|a|^p} \ <\ \infty. \tag{12}$$

Tai įrodo eilutės (9) sąlyginį konvergavimą L^p prasme. Eilutės (9) sąlyginis konvergavimas pagal tikimybę seka iš (12), o kadangi sumuojami nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, tai iš to išplaukia ir sąlyginis konvergavimas beveik tikrai (žr. [7]). Aišku, kad iš (12) ir (10) išplaukia (9) besąlyginis konvergavimas erdvėje L^p:

$$\mathrm{E}\Big|\sum_{k=0}^{\infty} a^k \varepsilon_{t-k}\Big|^p = \mathrm{E}\Big[\mathrm{E}\Big[\Big|\sum_{k=0}^{\infty} a^k \varepsilon_{t-k}\Big|^p \Big| a\Big]\Big] \le \mathrm{E}\Big[\frac{C_p \,\mathrm{E}\,|\varepsilon|^p}{1-|a|^p}\Big] < \infty.$$

Teiginys 1 įrodytas.

Tegu

$$X_{i,t} = a_i X_{i,t-1} + \varepsilon_t, \qquad i = 1{,}2,\cdots \tag{13}$$

yra lygties AR(1) su atsitiktiniais koeficientais stacionarus sprendinys, kur $\{\varepsilon_t\}$ yra n.v.p.a.d., tenkinantys tas pačias sąlygas kaip ir Teiginyje 1; $\{a_i\}$ yra n.v.p.a.d., nepriklausantys nuo $\{\varepsilon_t\}$ ir pasiskirstę taip pat kaip a.d. a. Apibrėžkime agreguotą procesą

$$\bar{X}_{N,t} \ :=\ N^{-1} \sum_{i=1}^{N} X_{i,t}, \qquad t \in \mathbb{Z}. \tag{14}$$

Silpną konvergavimą baigtiniamačių skirstinių prasme žymėsime $\to_{\mathrm{fdd}}$. Tegu $\mathcal{A} = \sigma\{a_1, a_2, \cdots\}$ žymi $\sigma-$algebra generuotą a.d. $a_1, a_2, \cdots$.

Atsitiktiniams dydžiams $\xi, \xi_1, \xi_2, \cdots$, žymime $\xi_n \to_{L^p(\mathcal{A})} \xi$ (atitinkamai, $\xi_n \to_{L^p} \xi$), jei $\mathrm{E}\big[|\xi_n - \xi|^p \big| \mathcal{A}\big] \to 0$ b.t. kai $n \to \infty$ (atitinkamai, $\mathrm{E}\,|\xi_n - \xi|^p \to 0$). Reikia pažymėti, kad iš konvergavimo $\xi_n \to_{L^p(\mathcal{A})} \xi$ išplaukia $\xi_n \to \xi$ konvergavimas pagal tikimybę. Realiems skaičiams a, p, apibrėžiame $a_+^p := (\max(0{,}a))^p$, $a_-^p := (-a)_+^p = (\max(0, -a))^p$.

Teorema 1. *Tegu* $\mathrm{E}\,|\varepsilon|^p < \infty$, *kažkokiam* $0 < p \le 2$, *ir* $\mathrm{E}\,\varepsilon = 0$ $(p \ge 1)$, *kaip ir Teiginyje 1.*

(i) Tegu $1 \le p \le 2$ *ir*

$$\mathrm{E}\Big[\frac{1}{(1-|a|^p)^{1/p}}\Big] \ <\ \infty. \tag{15}$$

Tada bet kokiam $t \in \mathbb{Z}$, *kai* $N \to \infty$,

$$\bar{X}_{N,t} \ \to_{L^p(\mathcal{A})}\ \bar{X}_t, \tag{16}$$

čia ribinis procesas yra

$$\bar{X}_t \;:=\; \sum_{j=0}^{\infty} \bar{a}_j \varepsilon_{t-j}, \qquad \bar{a}_j := \mathrm{E}[a^j]. \tag{17}$$

(ii) Tegu $0 < p < 1$ ir

$$\sum_{j=0}^{\infty} (\mathrm{E}\,|a^j|)^p \;<\; \infty. \tag{18}$$

Tada bet kokiems $t \in \mathbb{Z}$, kai $N \to \infty$,

$$\bar{X}_{N,t} \;\to_{L^p}\; \bar{X}_t, \tag{19}$$

kur ribinis procesas yra (17).

Abiem atvejais (i) ir (ii), ribinis procesas $\{\bar{X}_t\}$ yra stacionarus, ergodiškas ir eilutė (17) konverguoja b.t. ir erdvėje L^p.

<u>Pastaba</u> 2. Reikia pažymėti, kad kai $1 \le p \le 2$, iš sąlygos (15) išplaukia eilutės (18) konvergavimas, tuo tarpu kai $0 < p < 1$, iš sąlygos (18) išplaukia, kad vidurkis (10) yra bagtinis. Kad teisingas pirmas tvirtinimas išplaukia iš Minkowskio nelygybės: Tegu $f_j \in L^p(\mathcal{X}, \mu)$, $j = 0{,}1, \cdots$, kur $(\mathcal{X}, \mu)$ išmatuojama erdvė, $p \ge 1$. Tada

$$\sum_{j=0}^{\infty} \Big| \int_{\mathcal{X}} f_j(x) \mu(\mathrm{d}x) \Big|^p \le \Big(\int_{\mathcal{X}} \Big(\sum_{j=0}^{\infty} |f_j(x)|^p \Big)^{1/p} \mu(\mathrm{d}x) \Big)^p. \tag{20}$$

Taikydami (20) ir paėmę $(\mathcal{X}, \mu) = (\Omega, \mathrm{P})$, $f_j = a^j$, gauname

$$\sum_{j=0}^{\infty} (\mathrm{E}\,|a^j|)^p \;\le\; \Big(\mathrm{E} \Big(\sum_{j=0}^{\infty} |a|^{jp} \Big)^{1/p} \Big)^p \;=\; \Big(\mathrm{E} \frac{1}{(1 - |a|^p)^{1/p}} \Big)^p \;<\; \infty.$$

Antro tvirtinimo teisingumas seka iš Jenseno nelygybės: kai $(\mathrm{E}\,|a|^j)^p \ge \mathrm{E}\,|a|^{jp}$ ($0 < p < 1$), tai

$$\mathrm{E}\Big[\frac{1}{1 - |a|^p} \Big] \;=\; \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{E}\,|a|^{jp} \;\le\; \sum_{j=0}^{\infty} (\mathrm{E}\,|a|^j)^p \;<\; \infty.$$

Teoremos 1 įrodymas Reikia pažymėti, kad eilutė (17) konverguoja L^p prasme, remiantis (18) ir Pastaba 2, ir apibrėžia stacionarų, ergodinį procesą.

(i) Dabar įrodysime (16). Rašome

$$\bar{X}_{N,t} - \bar{X}_t \;=\; \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_{t-j} \sum_{i=1}^{N} N^{-1} (a_i^j - \mathrm{E}\, a_i^j) \;=\; \sum_{j=1}^{4} Y_{Nj}, \tag{21}$$

kur

$$
\begin{aligned}
Y_{N1} &:= N^{-1} \sum_{j=0}^{s} \varepsilon_{t-j} \sum_{i=1}^{N} (a_i^j - \mathrm{E}\, a_i^j), \\
Y_{N2} &:= N^{-1} \sum_{j=s+1}^{\infty} \varepsilon_{t-j} \sum_{i=1}^{N} a_i^j I(0 < a_i < 1), \\
Y_{N3} &:= N^{-1} \sum_{j=s+1}^{\infty} \varepsilon_{t-j} \sum_{i=1}^{N} a_i^j I(-1 < a_i < 0), \\
Y_{N4} &:= -N^{-1} \sum_{j=s+1}^{\infty} \varepsilon_{t-j} \sum_{i=1}^{N} \mathrm{E}\, a_i^j \;=\; - \sum_{j=s+1}^{\infty} \varepsilon_{t-j}\, \mathrm{E}\, a^j.
\end{aligned}
$$

kur $s \geq 1$ bus parinkti vėliau. Čia Y_{N4} nepriklauso nuo N ir

$$
\mathrm{E}\left[|Y_{N4}|^p \middle| \mathcal{A}\right] \;\leq\; 2\,\mathrm{E}\,|\varepsilon|^p \sum_{j=s+1}^{\infty} \left|\mathrm{E}\, a^j\right|^p \;<\; \epsilon \tag{22}
$$

yra kiek norima mažas dėl (18) ir Pastabos 2, parenkant pakankamai didelį s. Toliau, taikant (11), gauname

$$
\mathrm{E}\left[|Y_{N2}|^p \middle| \mathcal{A}\right] \;\leq\; 2N^{-p}\,\mathrm{E}\,|\varepsilon|^p \sum_{j=s+1}^{\infty} \Big| \sum_{i=1}^{N} a_i^j I(0 < a_i < 1) \Big|^p.
$$

Taikydami Minkowskio nelygybę (20), su $\mathcal{X} = \{1, \cdots, N\}$ ir $\mu =$ skaičiuojantis matas $\mathcal{X}$, gauname

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=s+1}^{\infty} \Big| \sum_{i=1}^{N} a_i^j I(0 < a_i < 1) \Big|^p &\leq \Big(\sum_{i=1}^{N} \Big(\sum_{j=s+1}^{\infty} a_i^{jp} I(0 < a_i < 1) \Big)^{1/p} \Big)^p \\
&= \Big(\sum_{i=1}^{N} \frac{a_i^{s+1}}{(1 - a_i^p)^{1/p}} I(0 < a_i < 1) \Big)^p
\end{aligned}
$$

ir todėl

$$
\mathrm{E}\left[|Y_{N2}|^p \middle| \mathcal{A}\right] \;\leq\; 2\,\mathrm{E}\,|\varepsilon|^p \Big(N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \frac{a_i^{s+1}}{(1 - a_i^p)^{1/p}} I(0 < a_i < 1) \Big)^p
$$

Reikia pažymėti, kad $\xi_i(s) := a_i^{s+1}(1 - a_i^p)^{-1/p} I(0 < a_i < 1), i = 1,2,\ldots$ yra n.v.p.a.d. kažkokiam fiksuotam $s \geq 1$, ir $\mathrm{E}\,\xi_1(s) = \mathrm{E}\, a^{s+1}(1 - a^p)^{-1/p} I(0 < a < 1) \leq \mathrm{E}(1 - |a|^p)^{-1/p} < \infty$, nes teisinga (15). Be to, $0 \leq \xi_i(s) \leq \xi_i(s')$ b.t. kažkokiam $s' \leq s$ ir todėl $\lim_{s\to\infty} \mathrm{E}\,\xi_i(s) = 0$. Iš šių faktų ir stipraus DSD išplaukia, kad bet kokiam

$\epsilon > 0$ egzistuoja sveikieji skaičiai $s_0 \geq 1$ ir $N_0(\omega) \geq 1$ tokie, kad

$$N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \frac{a_i^{s+1}}{(1-a_i^p)^{1/p}} I(0 < a_i < 1) \;<\; \epsilon \qquad \text{visiems} \;\; N > N_0(\omega) \;\;,\;\; s > s_0. \quad (23)$$

Analogiškai bus su $\mathrm{E}\left[|Y_{N3}|^p \big| \mathcal{A}\right]$ dėl simetrijos. Todėl mes gauname, kad bet kokiem $1 \leq p \leq 2$ ir bet kokiem $\epsilon > 0$ egzistuoja sveikieji skaičiai $s_0 \geq 1$ ir $N_0(\omega) \geq 1$ tokie, kad

$$\mathrm{E}\left[|Y_{Ni}|^p \big| \mathcal{A}\right] \;<\; \epsilon \qquad \text{visiems} \;\; N > N_0(\omega) \;\; \text{ir visiems} \;\; s > s_0, \qquad (24)$$

$i = 2{,}3$. Galiausiai, remiantis (11) ir stipriuoju DSD,

$$\mathrm{E}\left[|Y_{N1}|^p \big| \mathcal{A}\right] \;\leq\; 2\,\mathrm{E}\,|\varepsilon|^p \sum_{j=0}^{s} \Big| N^{-1} \sum_{i=1}^{N} (a_i^j - \mathrm{E}\,a_i^j) \Big|^p \;\to\; 0 \qquad \text{b.t.} \qquad (25)$$

visiems $s < \infty$. Aišku, kad iš (22), (24), ir (25) išplaukia $\mathrm{E}\left[\left|\bar{X}_{N,t} - \bar{X}_t\right|^p \big| \mathcal{A}\right] \to 0$ b.t., o tuo pačiu ir sąryšis (16). Tai įrodo dalį (i).

(ii) Įrodysime (19). Turime (21) išskaidymą. Pakanka parodyti, kad bet kokiems $s < \infty$, $\mathrm{E}\,|Y_{N1}|^p \to 0$ $(N \to \infty)$, ir kad $\mathrm{E}\,|Y_{Ni}|^p$, $i = 2{,}3{,}4$ yra kiek norima maži, tinkamai pasirinkus s. Pirmas faktas lengvai seka iš to, kad $N^{-1} \sum_{i=0}^{N} a_i^j \to_{L^p} \mathrm{E}\,a^j$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\,|Y_{N1}|^p &= \mathrm{E}\left[\mathrm{E}\left[|Y_{N1}|^p \big| \mathcal{A}\right]\right] \\
&\leq \mathrm{E}\,|\varepsilon|^p\, \mathrm{E}\Big[\sum_{j=0}^{s} \Big| N^{-1} \sum_{i=1}^{N} (a_i^j - \mathrm{E}\,a_i^j) \Big|^p\Big] \\
&= \mathrm{E}\,|\varepsilon|^p \sum_{j=0}^{s} \mathrm{E}\Big| N^{-1} \sum_{i=1}^{N} (a_i^j - \mathrm{E}\,a_i^j) \Big|^p \;\to\; 0
\end{aligned}$$

Sekančio fakto nariui Y_{N2} įrodymas seka iš Jenseno nelygybės, (11) nelygybės ir eilutės (18) konvergavimo:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\,|Y_{N2}|^p &\leq \mathrm{E}\,|\varepsilon|^p \sum_{j=s+1}^{\infty} \mathrm{E}\Big| N^{-1} \sum_{i=1}^{N} a_i^j I(0 < a_i < 1) \Big|^p \\
&\leq \mathrm{E}\,|\varepsilon|^p \sum_{j=s+1}^{\infty} \Big| \mathrm{E}\,N^{-1} \sum_{i=1}^{N} a_i^j I(0 < a_i < 1) \Big|^p \\
&= \mathrm{E}\,|\varepsilon|^p \sum_{j=s+1}^{\infty} \big(\mathrm{E}\,a^j I(0 < a < 1)\big)^p \\
&\leq \mathrm{E}\,|\varepsilon|^p \sum_{j=s+1}^{\infty} \big(\mathrm{E}\,|a|^j\big)^p
\end{aligned}$$

Dėl simetrijos analogiškai galima įvertinti ir $\mathrm{E}\,|Y_{N3}|^p$. O $\mathrm{E}\,|Y_{N4}|^p$ įvertis išplaukia iš nelygybės (11) ir (18). Visa tai įrodo dalį (ii), o taip pat ir Teoremą 1.

<u>Pastaba</u> 3. *(i) Jeigu Teoremos 1 (i) sąlyga (15) yra pakeičiama sąlyga (10), tada panašiai kaip viršuje, sąlyginis (16) konvergavimas gali būti pakeistas besąlyginiu konvergavimu (19). Tačiau, sąlyga (10) netenkinama agreguoto proceso su ilga atmintimi atveju, kuris nagrinėjamas žemiau.*

Labiausiai įdomus agregavimo atvejis yra, kai maišančiojo tankio taškai $+1$ ir/arba -1 yra ypatingi. Žemiau laikysime, kad a.d. a pasiskirstymas turi tankį ϕ:

$$\phi(x) \;=\; (1-x)^{-d_1}(1+x)^{-d_2}\psi(x) \qquad (-1<x<1) \tag{26}$$

kur parametrai d_1, d_2 tenkina $0 < d_1, d_2 < 1$ ir kur $\psi \geq 0$ yra integruojama funkcija intervale $(-1, 1)$ tokia, kad ribos

$$\lim_{x\to 1}\psi(x) =: \psi_1 \geq 0 \qquad \text{ir} \qquad \lim_{x\to -1}\psi(x) =: \psi_2 \geq 0 \tag{27}$$

egzistuoja.

Žemiau esantis Teiginys 2 parodo kokia yra ribinio agreguoto proceso (17) koeficientų $\bar{a}_j = \mathrm{E}\, a^j$ asimptotika, kai $j \to \infty$, esant prielaidai, kad maišantysis tankis yra (26). Aišku, kad $\mathrm{E}\, a^j = \mathrm{E}\, a^j I(0<a<1) + (-1)^j\, \mathrm{E}(-a)^j I(-1<a<0) = \mathrm{E}\, a_+^j + (-1)^j\, \mathrm{E}\, a_-^j$, taigi užtenka žinoti $\mathrm{E}\, a_+^j$ ir $\mathrm{E}\, a_-^j$ asimptotikas.

Teiginys 2. *Tegu a.d. a tikimybinis tankis ϕ tenkina prielaidas (26)-(27). Tada, kai $j \to \infty$,*

$$\mathrm{E}\, a_+^j \;=\; \frac{c(d_1,d_2)}{j^{1-d_1}}\Big(\psi_1 + o(1)\Big), \qquad \mathrm{E}\, a_-^j \;=\; \frac{c(d_2,d_1)}{j^{1-d_2}}\Big(\psi_2 + o(1)\Big), \tag{28}$$

kur $c(d_1,d_2) := 2^{-d_2}\Gamma(1-d_1)$.

Įr. Nagrinėsiu tik $\mathrm{E}\, a_+^j$ asimptotiką, nes su $\mathrm{E}\, a_-^j$ bus analogiškai. Užrašykime tokiu pavidalu $\mathrm{E}\, a_+^j = \sum_{i=1}^2 \ell_i(j)$, kur

$$\ell_1(j) := \int_{1-\epsilon}^{1} x^j\phi(x)\mathrm{d}x, \qquad \ell_2(j) := \int_0^{1-\epsilon} x^j\phi(x)\mathrm{d}x$$

ir kur $0 < \epsilon < 1$ yra mažas skaičius. Kadangi nelygybė $|\ell_2(j)| \leq (1-\epsilon)^j = o(j^{d-1})$ yra teisinga su bet kokiu $0 < d < 1$, pakanka įrodyti ribą

$$\lim_{j\to\infty} j^{1-d_1}\ell_1(j) = c(d_1,d_2)\psi_1 \tag{29}$$

Nagrinėju ribą. Įvedu keitinį $x = 1 - z/j$ ir perrašau

$$\begin{aligned} j^{1-d_1}\ell_1(j) &= \int_0^{\epsilon j}\Big(1-\frac{z}{j}\Big)^j\psi\Big(1-\frac{z}{j}\Big)\Big(2-\frac{z}{j}\Big)^{-d_2}z^{-d_1}\mathrm{d}z \\ &= \int_0^{\infty} I(0<z<\epsilon j)\Big(1-\frac{z}{j}\Big)^j\psi\Big(1-\frac{z}{j}\Big)\Big(2-\frac{z}{j}\Big)^{-d_2}z^{-d_1}\mathrm{d}z \\ &\to \psi_1 2^{-d_2}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-z}z^{-d_1}\mathrm{d}z = \psi_1 2^{-d_2}\Gamma(1-d_1) = \psi_1 c(d_1,d_2) \end{aligned}$$

kur I yra indikatorinė funkcija. Čia buvo pasinaudota Lebego teorema apie integruojamą mažorantę, kai pointegralinės funkcijos integruojama mažorantė yra funkcija $g(z) := C\mathrm{e}^{-z}z^{-d_1}$. Teiginys 2 įrodytas.

Pastaba 4. Reikia pažymėti, kad kai $1 \le p \le 2$ ir maišantysis tankis ϕ yra kaip (26),

$$\int_{-1}^{1}\frac{\phi(x)\mathrm{d}x}{(1-|x|^p)^{1/p}} \le 2\Big[\int_0^1\frac{\psi(x)\mathrm{d}x}{(1-x)^{d_1+1/p}} + \int_{-1}^0\frac{\psi(x)\mathrm{d}x}{(1+x)^{d_2+1/p}}\Big].$$

Todėl, kai $1 \le p \le 2$, sąlyga (15) yra patenkinta jei

$$d_i < 1 - \frac{1}{p}, \qquad i = 1,2. \tag{30}$$

Be to, jei $\psi_i > 0$ tada sąlyga (30) yra būtina tam kad būtų (15). Taip pat reikia pažymėti, kad kai $0 < p < 1$, sąlygos (15) ir (18) nėra patenkintos nebent $d_i < 0$ arba $\psi_i = 0$, $i = 1,2$.

1.2. Ribinio agreguoto proceso ilgos atminties savybės

Įprastai sakoma, kad stacionarus procesas $\{X_t\} = \{X_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ turi *ilgalaikę atmintį*, jeigu kovariacijų suma absoliučiai diverguoja. Aišku, šis apibrėžimas visai netinka begalinės dispersijos procesų atveju. Čia ilga atmintis bus suprantama dviem būdais, kurie nereikalauja baigtinės dispersijos. Pirma, tai *skirstinių ilgoji atmintis* (angl. *distributional long memory*) - ji buvo nagrinėta straipsnyje [3]. Antra, tai *LRD(SAV)* (anlg. *long-range dependence* (*sample Allen variance*)). Šis ilgos atminties suvokimas, o taip pat ir analogiškas trumpos atminties *SRD(SAV)* (angl. *short-range dependence* (*sample Allen variance*)) suvokimas buvo įvesti straipsnyje [6]. Atsitiktinių elementų silpną konvergavimą baigtiniamačių skirstinių prasme žymėsime $\to_{\mathrm{fdd}}$.

Apibrėžimas 2. *Griežtai stacionari laiko eilutė $\{X_t\}$ turi skirstinių ilgąją atmintį (angl. distributional long memory) (atitinkamai, skirstinių trumpąją atmintį (angl. distributional short memory)), jei egzistuoja konstantos $A_n \to \infty$ $(n \to \infty)$, B_n ir* *stochastinis procesas* $\{J(t), t \geq 0\} \not\equiv 0$ *su priklausomais prieaugliais (atitinkamai, su nepriklausomais prieaugliais), tokiais kad*

$$A_n^{-1} \sum_{s=1}^{[nt]} (X_s - B_n) \ \rightarrow_{\mathrm{fdd}} \ J(t), \tag{31}$$

Apibrėžimas 3. *Griežtai stacionari laiko eilutė* $\{X_t\}$ *turi LRD(SAV), jei*

$$\frac{\left(\sum_{t=1}^n X_t\right)^2}{\sum_{t=1}^n X_t^2} \ \rightarrow_P \ \infty; \tag{32}$$

kitu būdu $\{X_t\}$ *yra SRD(SAV).*

Kai $0 < \alpha \leq 2, -1/\alpha < d < 1 - 1/\alpha, d \neq 0$, įveskime *trupmeninį Lévy judesį* (angl. *fractional Lévy motion*), $L_{d,\alpha}$, išreikštą stochastiniu integralu

$$L_{d,\alpha}(t) \ := \ \int_{-\infty}^{t} \left((t-x)^d - (-x)_+^d\right) \mathrm{d}Z_\alpha(x), \quad t \geq 0, \tag{33}$$

kur $\{Z_\alpha(x), x \in \mathbb{R}\}$ yra Lévy $\alpha-$stabilus procesas, su charakteristine funkcija

$$\mathrm{E}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta Z_\alpha(x)} \ = \ \mathrm{e}^{-|\theta|^\alpha \omega(\theta;\alpha,c_1,c_2)|x|}, \qquad \theta, x \in \mathbb{R}, \tag{34}$$

kur $\omega(\theta; \alpha, c_1, c_2)$ yra apibrėžta (8). Reikia pažymėti, kad $L_{\alpha,d}$ turi stacionarius prieauglius, $\alpha-$stabilius baigtiniamačius pasiskirstymus ir yra automodelus (angl. self-similar) su parametru $H = d + 1/\alpha$. Be to, kai $1 < \alpha \leq 2$ ir $0 < d < 1 - 1/\alpha$, procesas $L_{d,\alpha}$ turi beveik tikrai tolydžias trajektorijas, tuo tarpu, kai $-1/\alpha < d < 0$, $L_{d,\alpha}$ trajektorijos yra beveik tikrai neaprėžtos bet kokiame baigtiniame intervale. Šias ir kitas trupmeninio Lévy judesio savybes žr. [12].

Teiginys 3. *Tegu* $\{\bar{X}_t\}$ *yra ribinis agreguotas procesas (17), su n.v.p. triukšmais* $\varepsilon_t \in D(\alpha)$, $0 < \alpha \leq 2$.

(i) Tegu $1 < \alpha \leq 2$ *ir a.d.* a *turi tikimybinį tankį kaip (26), tokį kad* $d_1 > 0, \psi_1 > 0$, *ir*

$$d_i < 1 - \frac{1}{\alpha} \qquad (i = 1{,}2). \tag{35}$$

Tada

$$\frac{1}{n^{d_1+1/\alpha}} \sum_{k=1}^{[nt]} \bar{X}_k \ \rightarrow_{\mathrm{fdd}} \ \kappa_1 L_{\alpha,d_1}(t), \tag{36}$$

kur $\kappa_1 := \psi_1 c(d_1,d_2)/d_1$.

(ii) Tegu $0 < \alpha < 2$ ir $\sum_{j=1}^{\infty}(\mathrm{E}\,|a|^j)^p < \infty$ kokiam nors $p < \alpha$. Tada

$$\frac{1}{n^{2/\alpha}} \sum_{k=1}^{[nt]} \bar{X}_k^2 \ \to_{\mathrm{fdd}} \ Z^+_{\alpha/2}(t), \tag{37}$$

kur $\{Z^+_{\alpha/2}(t), t \geq 0\}$ yra homogeniškas $\alpha/2-$stabilus Lévy procesas su teigiamais šuoliais ir charakteristine funkcija

$$\mathrm{E}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta Z^+_{\alpha/2}(1)} = \exp\Big\{ - |\theta|^{\alpha/2} A^{\alpha/2} \omega(\theta; \alpha/2, 0, c_1 + c_2)\Big\}, \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad A := \sum_{k=0}^{\infty}(\mathrm{E}\,a^k)^2.$$

Įr. (i) Pažymėkime

$$\begin{aligned} \bar{a}_{j1} &:= \mathrm{E}\,a^j I(0 < a < 1), \qquad \bar{a}_{j2} := \mathrm{E}\,a^j I(-1 < a < 0), \\ \bar{X}_{ti} &:= \sum_{j=0}^{\infty} \bar{a}_{ji}\varepsilon_{t-j}, \qquad i = 1{,}2. \end{aligned} \tag{38}$$

Kadangi $\bar{X}_t = \bar{X}_{t1} + \bar{X}_{t2}$, konvergavimui baigtiniamačių skirstinių prasme (36) pakanka parodyti, kad

$$\frac{1}{n^{d_1+1/\alpha}} \sum\nolimits_{k=1}^{[nt]} \bar{X}_{k1} \ \to_{\mathrm{fdd}} \ \kappa_1 L_{\alpha,d_1}(t), \tag{39}$$

ir kad kažkokiam p, $p < \alpha$, tenkinančiam $1/p < d_1 + 1/\alpha$ (pastaroji nelygybė bus teisinga, kai p ir α yra pakankamai artimi, o pagal teiginio sąlygas $d_1 > 0$), teisinga lygybė

$$\sum\nolimits_{k=1}^{n} \bar{X}_{k2} = O_p(n^{1/p}). \tag{40}$$

(O_p apibrėžimas Priede Nr. 2.).

Sąryšis (39) seka iš A. Astrausko straipsnyje [1] esančios Teoremos 1 dalies (ii) (pritaikymas parodytas Priede Nr. 3.) ir $\bar{a}_{j1}$ asimptotikos, kuri parodyta šio darbo Teiginyje 2. Toliau pakanka parodyti (40) kažkokiam $1 < p < \alpha$, pakankamai artimam α. (40) įrodymui užtenka parodyti $\mathrm{E}\,|\sum_{k=1}^{n} \bar{X}_{k2}|^p = O(n)$. Taikydami nelygybę (11), gauname

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\,|\sum_{k=1}^n \bar X_{k2}|^p &= \mathrm{E}\Big|\sum_{k=1}^n\sum_{j=0}^\infty \mathrm{E}\,a^j I(-1<a<0)\varepsilon_{k-j}\Big|^p \\
&= \mathrm{E}\Big|\sum_{s\le n}\sum_{t=\max(1,s)}^n \mathrm{E}\,a^{t-s} I(-1<a<0)\varepsilon_s\Big|^p \\
&\le 2\,\mathrm{E}\,|\varepsilon_0|^p\sum_{s\le n}\Big|\sum_{t=\max(1,s)}^n \mathrm{E}\,a^{t-s} I(-1<a<0)\Big|^p \\
&= 2\,\mathrm{E}\,|\varepsilon_0|^p\Big(\sum_{s=0}^\infty|\sum_{t=1}^n \mathrm{E}\,a^{t+s}I(-1<a<0)|^p + \sum_{s=1}^n|\sum_{i=0}^{n-s}\mathrm{E}\,a^i I(-1<a<0)|^p\Big),
\end{aligned}
$$

kur

$$
\begin{aligned}
\sum_{s=0}^\infty\Big|\mathrm{E}\sum_{t=1}^n a^{t+s}I(-1<a<0)\Big|^p &= \sum_{s=0}^\infty\Big|\mathrm{E}\,\frac{a^{1+s}(1-a^{n-1})}{1-a}I(-1<a<0)\Big|^p \\
&\le 2^p\sum_{s=0}^\infty(\mathrm{E}\,|a|^s)^p<\infty
\end{aligned}
$$

ir paskutinė eilutė konverguoja remiantis Teiginiu 2 ir kai p yra parinktas taip kad $d_i<1-1/p,\ i=1{,}2$. Panašiai,

$$
\begin{aligned}
\sum_{s=1}^n\Big|\sum_{i=0}^{n-s}\mathrm{E}\,a^iI(-1<a<0)\Big|^p &= \sum_{t=0}^{n-1}\Big|\mathrm{E}\sum_{i=0}^t a^iI(-1<a<0)\Big|^p \\
&= \sum_{t=0}^{n-1}\Big|\mathrm{E}\,\frac{1-a^{t+1}}{1-a}I(-1<a<0)\Big|^p \\
&\le n,
\end{aligned}
$$

įrodo (40), o kartu ir (36) konvergavimą baigtiniamačių skirstinių prasme. Tai įrodo dalį (i).

(ii) Perrašykime $\sum_{k=1}^{[nt]}\bar X_k^2 = I_1(t)+2I_2(t)$, kur

$$
I_1(t):=\sum_{k=1}^{[nt]}\sum_{j=-\infty}^k(\mathrm{E}\,a^{k-j})^2\varepsilon_j^2,\qquad I_2(t):=\sum_{k=1}^{[nt]}\sum_{-\infty<j<i\le k}\mathrm{E}\,a^{k-j}\,\mathrm{E}\,a^{k-i}\varepsilon_j\varepsilon_i.
$$

Reikia pastebėti, kad $\varepsilon^2\in D(\alpha/2)$ ir $\sum_{j=-\infty}^k(\mathrm{E}\,a^{k-j})^2=A<\infty$. Konvergavimas $n^{-2/\alpha}I_1(t)\to_{\mathrm{fdd}}\ Z^+_{\alpha/2}(t)$ seka iš straipsnyje [1] esančios Teoremos 1 (i) (pritaikymas parodytas Priede Nr. 3.). Tokiu būdu pakanka parodyti, kad

$$
\mathrm{E}\,|I_2(1)|^p=o(n^{2p/\alpha}). \tag{41}
$$

Naudojant Bahr and Esséen (11) ir Minkowski'o (20) nelygybes, bet kokiam $1 \leq p < \alpha$ gauname:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\,|I_2(1)|^p &= \mathrm{E}\Big|\sum_{i=-\infty}^{n}\sum_{k=max(1,i)}^{n}\sum_{j=-\infty}^{i-1}\mathrm{E}\,a^{k-j}\,\mathrm{E}\,a^{k-i}\varepsilon_j\varepsilon_i\Big|^p \\
&\leq 2\,\mathrm{E}\,|\varepsilon|^p\sum_{i=-\infty}^{n}\mathrm{E}\Big|\sum_{k=max(1,i)}^{n}\sum_{j=-\infty}^{i-1}\mathrm{E}\,a^{k-j}\,\mathrm{E}\,a^{k-i}\varepsilon_j\Big|^p \\
&\leq (2\,\mathrm{E}\,|\varepsilon|^p)^2\sum_{i=-\infty}^{n}\sum_{j=-\infty}^{i-1}\Big|\sum_{k=max(1,i)}^{n}\mathrm{E}\,a^{k-j}\,\mathrm{E}\,a^{k-i}\Big|^p \\
&\leq (2\,\mathrm{E}\,|\varepsilon|^p)^2\Big(\sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{i=-\infty}^{k}\sum_{j=-\infty}^{i-1}|\,\mathrm{E}\,a^{k-j}\,\mathrm{E}\,a^{k-i}|^p\Big)^{1/p}\Big)^p \\
&\leq (2\,\mathrm{E}\,|\varepsilon|^p)^2A_p^2n^p \;=\; O(n^p),
\end{aligned}
$$

kur $A_p := \sum_{i=0}^{\infty}|\,\mathrm{E}\,a^i|^p < \infty$. Iš kur, ir seka (41) kai $1 < \alpha < 2$. Kai $0 < \alpha \leq 1$, sąryšis (41) išsiveda panašiai.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\,|I_2(1)|^p &\leq (\mathrm{E}\,|\varepsilon|^p)^2\sum_{i=-\infty}^{n}\sum_{j=-\infty}^{i-1}\Big|\sum_{k=max(1,i)}^{n}\mathrm{E}\,a^{k-j}\,\mathrm{E}\,a^{k-i}\Big|^p \\
&\leq (\mathrm{E}\,|\varepsilon|^p)^2\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=-\infty}^{k}\sum_{j=-\infty}^{i-1}|\,\mathrm{E}\,a^{k-j}|^p|\,\mathrm{E}\,a^{k-i}|^p \\
&\leq (\mathrm{E}\,|\varepsilon|^p)^2A_p^2n \\
&= O(n)
\end{aligned}
$$

Iš čia seka, kad sąryšis (41) teisingas, kai $\alpha/2 < p < \alpha$. Teiginys 3 įrodytas.

Išvada 1. *Tegu $\{\bar{X}_t\}$ yra ribinis agreguotas AR(1) procesas ir tenkinamos Teiginio 3(i) sąlygos. Tada*

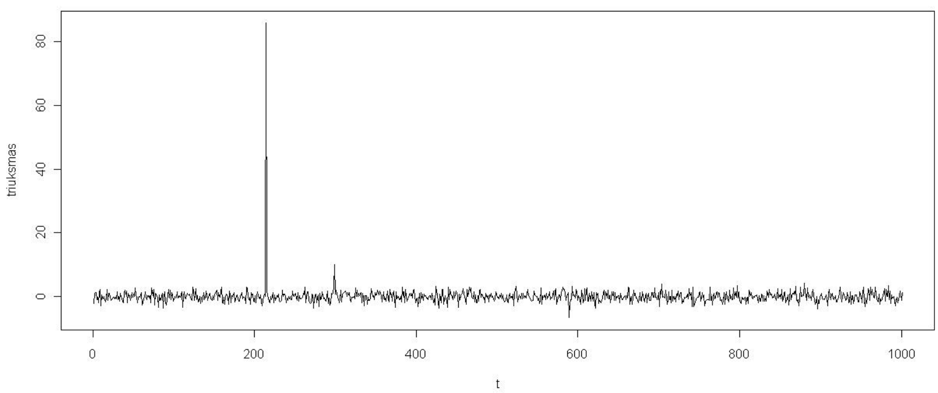
(i) $\{\bar{X}_t\}$ turi skirstinių ilgąją atmintį (angl. distributional long memory).

(ii) $\{\bar{X}_t\}$ yra LRD(SAV).

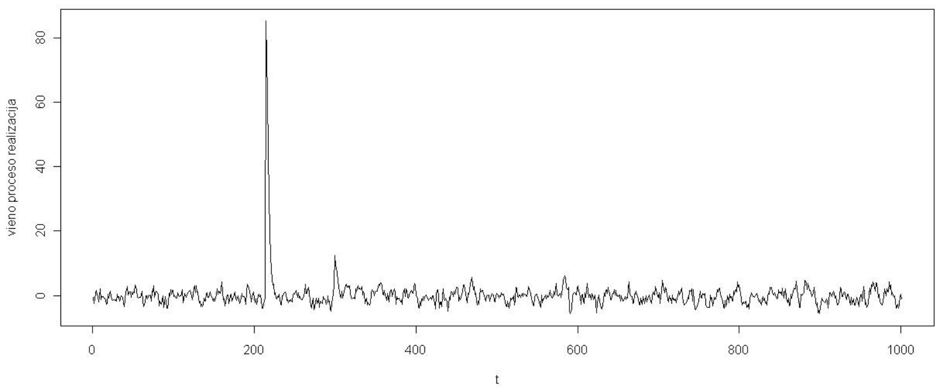
Proof. Dalis (i) seka iš (36) ir fakto, kad ribinis procesas, L_{α,d_1}, turi priklausomus prieauglius. Dalis (ii) seka iš (36), (37) ir fakto, kad $2/\alpha < 2(d_1 + 1/\alpha)$.

2. Generuoti procesai grafiškai

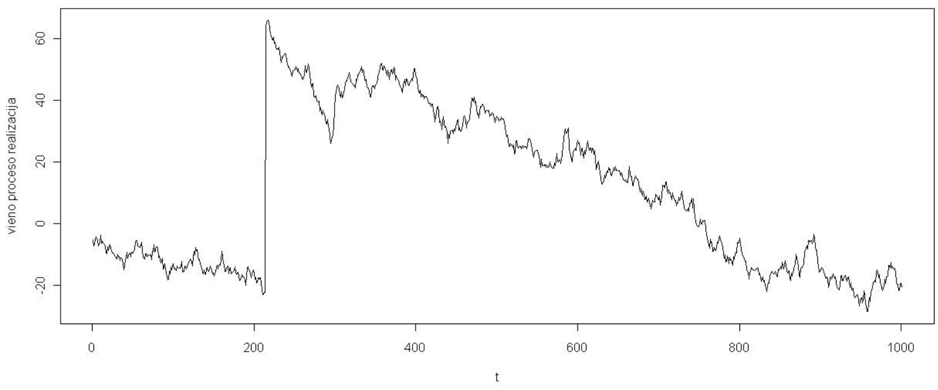
Iliustruosiu grafiškai kaip atrodo procesai, atitinkantys aukščiau aprašytą teoriją. Pav. 2 - 4 pavaizduota vieno proceso, apibrėžto lygtimi (13), realizacijos, kai koeficientas a yra atsitiktinai sugeneruotas, laikant, kad a.d. a tankis apibrėžtas formule (26), kur $d_1 = 0.49$, $d_2 = 0$, $\psi(x) \equiv 0.51$, t.y. $\phi(x) = 0.51(1-x)^{-0.49}$, kai $0 < x < 1$. o triukšmai yra bendri visiems procesams ir $\varepsilon_t \in D(\alpha)$ su $\alpha = 1.98$. Jų realizacija pavaizduota Pav. 1. Pav. 5 parodo kaip kinta agreguotas procesas, kuris aprašomas formule (14) su $N = 1000$, agreguojant procesus $X_{i,t}$, apibrėžtus (13) su bendrais triukšmais ε_t. Iš pateiktų grafikų matosi, kad kai AR(1) koeficiento reikšmė yra labai artima 1, tada trajektorijų svyravimo amplitudė yra didelė, tuo tarpu agreguoto proceso atveju po didelio šuolio (dėl didelio triukšmo šuolio) svyravimo amplitudė vėl greitai atsistato ir beveik nekinta.



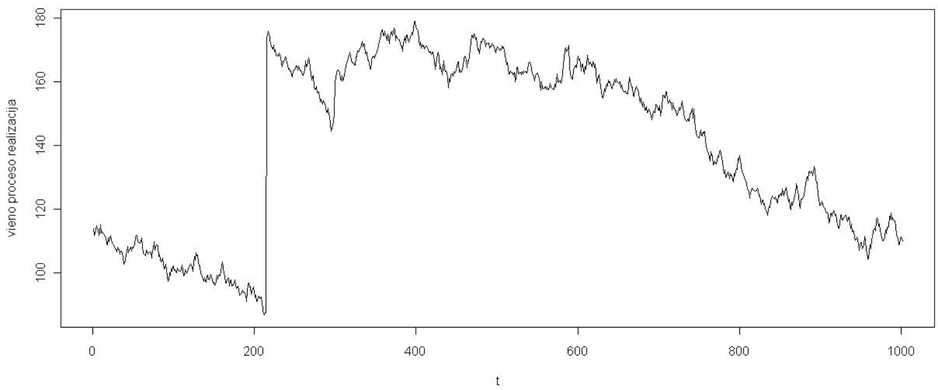
1 pav. Bendras triukšmas



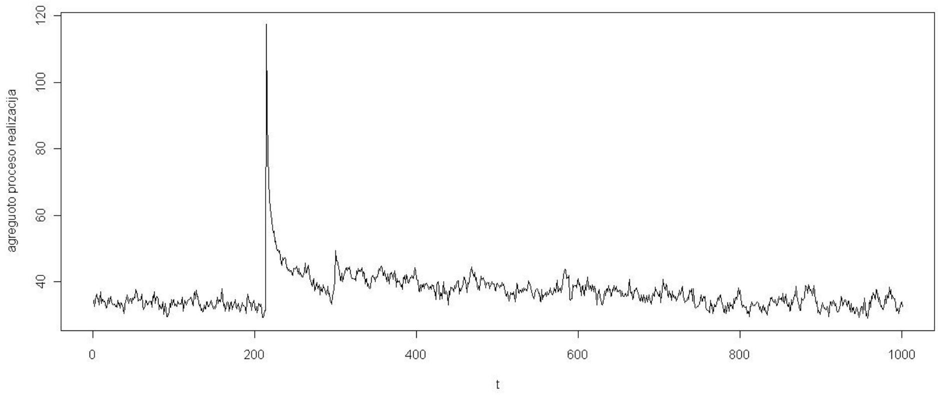
2 pav. Vieno proceso realizacija, kai $a = 0.7042655$



3 pav. Vieno proceso realizacija, kai $a = 0.9973936$



4 pav. Vieno proceso realizacija, kai $a = 0.9998903$



5 pav. Agreguoto proceso realizacija

Išvados

Turime atsitiktinių koeficientų AR(1) procesą, apibrėžtą formule (5). Išnagrinėjus tokių procesų agregavimą, gautos šios išvados:

1. Stacionarus sprendinys. Tarkime $\mathrm{E}\,|\varepsilon|^p < \infty$, kažkokiam $0 < p \leq 2$ ir $\mathrm{E}\,\varepsilon = 0$ $(p \geq 1)$. Tada egzistuoja vienintelis lygties (5) stacionarus sprendinys

$$X_t \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} a^k \varepsilon_{t-k}.$$

   Ši eilutė konverguoja sąlygiškai beveik tikrai ir sąlygiškai L^p prasme, beveik visiems $a \in (-1,1)$. Be to, jeigu teisinga (10), tada ši eilutė konverguoja ir besąlygiškai L^p prasme.

2. Agreguoto proceso $\bar{X}_{N,t}$ konvergavimas į ribinį agreguotą procesą $\bar{X}_t$. Tegu $\mathrm{E}\,|\varepsilon|^p < \infty$, kažkokiam $0 < p \leq 2$, ir $\mathrm{E}\,\varepsilon = 0$ $(p \geq 1)$.

   - Jeigu $1 \leq p \leq 2$ ir tenkinama sąlyga (15), tada bet kokiam $t \in \mathbb{Z}$, kai $N \to \infty$,

$$\bar{X}_{N,t} \;\to_{L^p(\mathcal{A})}\; \bar{X}_t.$$

   - Jeigu $0 < p < 1$ ir teisinga sąlyga (18), tada bet kokiems $t \in \mathbb{Z}$, kai $N \to \infty$,

$$\bar{X}_{N,t} \;\to_{L^p}\; \bar{X}_t.$$

   Be to, kai $1 \leq p \leq 2$, jeigu sąlyga (15) yra pakeičiama sąlyga (10), tada sąlyginis konvergavilas $\to_{L^p(\mathcal{A})}$ gali būti pakeistas besąlyginiu konvergavimu $\to_{L^p}$.

3. Ribinis procesas $\bar{X}_t$. Ribinis procesas $\bar{X}_t = \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{E}[a^j]\varepsilon_{t-j}$ yra stacionarus, ergodiškas ir ši eilutė konverguoja beveik tikrai ir erdvėje L^p.

   Be to, laikant, kad a.d. a tikimybinis tankis ϕ tenkina prielaidas (26),(27), ribinio agreguoto proceso koeficientų asimptotika, kai $j \to \infty$, yra tokia:

$$\mathrm{E}\,a^j = \frac{c(d_1,d_2)}{j^{1-d_1}}\Big(\psi_1 + o(1)\Big) + (-1)^j \frac{c(d_2,d_1)}{j^{1-d_2}}\Big(\psi_2 + o(1)\Big)$$

   kur $c(d_1,d_2) := 2^{-d_2}\Gamma(1-d_1)$.

4. Ribinio agreguoto proceso $\bar{X}_t$ ryšys su Lévy stabiliu procesu. Tegu $\{\bar{X}_t\}$ yra ribinis agreguotas procesas, su n.v.p. triukšmais $\varepsilon_t \in D(\alpha)$, $0 < \alpha \leq 2$.

- Jeigu $1 < \alpha \le 2$ ir a.d. a turi tikimybinį tankį kaip (26), tokį kad $d_1 > 0, \psi_1 > 0$, ir $d_i < 1 - 1/\alpha$, $i = 1{,}2$, tada

$$\frac{1}{n^{d_1+1/\alpha}} \sum_{k=1}^{[nt]} \bar{X}_k \ \to_{\mathrm{fdd}} \ \kappa_1 \int_{-\infty}^{t} \left((t-x)^{d_1} - (-x)_+^{d_1}\right) \mathrm{d}Z_\alpha(x), \quad t \ge 0,$$

kur $\kappa_1 := \psi_1 c(d_1{,}d_2)/d_1$, o Z_α yra α-stabilus Lévy procesas.

- Jeigu $0 < \alpha < 2$ ir $\sum_{j=1}^{\infty} (\mathrm{E}\,|a|^j)^p < \infty$ kokiam nors $p < \alpha$, tada

$$\frac{1}{n^{2/\alpha}} \sum_{k=1}^{[nt]} \bar{X}_k^2 \ \to_{\mathrm{fdd}} \ Z_{\alpha/2}^{+}(t),$$

kur $\{Z_{\alpha/2}^{+}(t), t \ge 0\}$ yra homogeniškas $\alpha/2-$stabilus Lévy procesas su teigiamais šuoliais.

5. Ribinio agreguoto proceso ilgalaikė atmintis. Tegu $\{\bar{X}_t\}$ yra ribinis agreguotas AR(1) procesas, su n.v.p. triukšmais $\varepsilon_t \in D(\alpha)$, $1 < \alpha \le 2$ ir a.d. a turi tikimybinį tankį kaip (26), tokį kad $d_1 > 0, \psi_1 > 0$, ir $d_i < 1 - 1/\alpha$, kai $i = 1{,}2$, tada

   - $\{\bar{X}_t\}$ turi skirstinių ilgąją atmintį (angl. distributional long memory).
   - $\{\bar{X}_t\}$ yra LRD(SAV).

Literatūros sąrašas

[1] A. Astrauskas. Limit theorems for sums of linearly generated random variables. *Lithuanian Math. J.*, 23:127–134, 1983.

[2] B. von Bahr and C.-G. Esséen. Inequalities for the rth absolute moment of a sum of random variables, $1 \leq r \leq 2$. *Ann. Math. Statist.*, 36:299–303, 1965.

[3] D.R. Cox. Long-range dependence: A review, in: H.A. David and H.T. David (Eds.). *Statistics: An Appraisal*, pages 55–74, 1984. Iowa State Univ. Press, Iowa.

[4] W. Feller. An Introduction to Probability Theory and its Applications. volume 2., Wiley, New York, 1971.

[5] C.W.J. Granger. Long memory relationship and the aggregation of dynamic models. *J. Econometrics*, 14:227–238, 1980.

[6] C.C. Heyde and Y. Yang. On defining long-range dependence. *J. Appl. Probab.*, 34:939–944, 1997.

[7] Oliver Knill. Probability and Stochastic Processes with Applications. Harvard University, Cambridge, USA, 1994.

[8] R. Leipus and M.-C. Viano. Aggregation in ARCH models. *Lithuanian Math. J.*, 42:54–70, 2002.

[9] G. Oppenheim and M.-C. Viano. Aggregation of random parameters Ornstein-Uhlenbeck or AR processes: some convergence results. *J. Time Ser. Anal.*, 25:335–350, 2004.

[10] D. Puplinskaitė and D. Surgailis. Aggregation of random coefficient AR(1) process with infinite variance and common innovations. *Lithuanian Math. J.* Įteikta spaudai.

[11] P.M. Robinson. Statistical inference for a random coefficient autoregressive model. *Scandinavian Journal of Statistics*, 5:163–168, 1978.

[12] G. Samorodnitsky and M.S. Taqqu. Stable Non-Gaussian Random Processes. Chapman and Hall, New York, 1994.

[13] P. Zaffaroni. Contemporaneous aggregation of linear dynamic models in large economies. *J. Econometrics*, 120:75–102, 2004.

Priedas Nr. 1.

Apibrėžimai ir matematinė teorija

α-stabilus atsitiktinis dydis

Tegu $X_1, \ldots, X_n$ yra n.v.p.a.d. ir jie visi yra atsitiktinio dydžio X kopijos. A.d. X yra *α-stabilus* (turi α-stabilų pasiskirstymą), $0 < \alpha \leq 2$, jei egzistuoja realus skaičius d_n, kad

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n =_d n^{1/\alpha} X + d_n$$

Atsitiktiniai procesai

Atsitiktiniu procesu vadinama atsitiktinių dydžių, apibrėžtų vienoje tikimybinėje erdvėje, šeima $\{r_t, t \in T\}$.

Standartiniu *Brauno judesiu* (arba *Vinerio procesu*) vadinamas procesas $\{W_t, t > 0\}$, tenkinantis sąlygas:

- $W_0 = 0$,
- su visais $n = 3, 4, \ldots$ ir su visais rinkiniais $0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ pokyčiai $W_{t_2} - W_{t_1}, W_{t_3} - W_{t_2}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ yra nepriklausomi,
- $W_t - W_s \sim N(0, t-s)$, kai $t \geqslant s$.

Trupmeninis Brauno judesys $B_H(t)$ intervale $[0, t]$, $t \in \mathbb{R}$, yra prasidedantis nulyje tolydaus laiko Gauso procesas su nuliniu vidurkiu. Jo koreliacijos funkcija yra tokio pavidalo:

$$\mathrm{E}[B_H(t) B_H(s)] = \frac{1}{2}(|t^{2H}| + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}),$$

čia H yra Hurst parametras. Jis yra realus skaičius iš intervalo $[0, 1]$.

- jei $H = \frac{1}{2}$, tai procesas $B_H(t)$ yra standartinis Brauno judesys.
- jei $H > \frac{1}{2}$, tai proceso $B_H(t)$ prieaugliai yra teigiamai koreliuoti.
- jei $H < \frac{1}{2}$, tai proceso $B_H(t)$ prieaugliai yra neigiamai koreliuoti.

Be to, jis yra automodelus (angl. *self similar*), turi stacionarius prieauglius ($B_H(t) - B_H(s) \sim B_H(t-s)$). Ir kai $H > 1/2$, $B_H(t)$ yra LRD (long-range dependens) ta prasme, kad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}[B_H(1)(B_H(n+1) - B_H(n))] = \infty$$

Lévy procesas

Stochastinis procesas $L = \{L_t, t \geq 0\}$ vadinamas *Lévy procesu*, jei

- $L_0 = 0$ b.t.,

- bet kokiems $0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \infty$ pokyčiai $L_{t_2} - L_{t_1}, L_{t_3} - L_{t_2}, \ldots, L_{t_n} - L_{t_{n-1}}$ yra nepriklausomi,
- bet kokiam s, $s < t$, $L_t - L_s$ yra lygus L_{t-s} pagal pasiskirstymą,
- ir trajektorijos yra beveik tikrai tolydžios iš dešinės ir turi ribą iš kairės.

Vienas iš Lévy proceso pavyzdžių yra standartinis Brauno judesys.

Lévy procesas $L = \{L_t, t \geq 0\}$ yra *Lévy α-stabilus procesas*, jeigu L baigtiniamatis pasiskirstymas yra α-stabilus.

Automodelumas (angl. *self similar*)

Tolydaus laiko procesas $Y = \{Y_t, t \geq 0\}$ yra *automodelus*, su automodelumo parametru $H \geq 0$, jei (baigtiniamačių pasiskirstymų prasme)

$$Y(t) =_d c^{-H} Y(ct), \, \forall t \geq 0, \, \forall c \geq 0.$$

Kitaip tariant, bet kokiam $m \geq 1$, bet kokiem laiko momentam $t_1, \ldots, t_m$ ir bet kokiai konstantai c, $(Y_{t_1}, Y_{t_2}, \ldots, Y_{t_m})$ ir $c^{-H}(Y_{ct_1}, Y_{ct_2}, \ldots, Y_{ct_m})$ turi tą patį pasiskirstymą.

Baltas triukšmas

Laiko eilutė ε_t vadinama baltu triukšmu, jei (ε_t) yra seka nepriklausomų ir vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių su baigtiniu vidurkiu ir dispersija. Jei $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$, seka (ε_t) vadinama Gauso baltu triukšmu. Baltam triukšmui visos ACF yra lygios 0. Iš tikrųjų, jei tiriant empirinius duomenis, ACF yra arti 0, tuomet seka yra *balto triušmo seka.*

Ergodiškumas

Stochastinis procesas yra vadinamas *ergodiniu*, jeigu jo statistines sąvybes (pvz. vidurkį kiekvienu laiko momentu) galima nustatyti iš vienos, pakankamai ilgos realizacijos.

Kiekvienas ergodinis procesas yra stacionarus, tačiau ne kiekvienas stacionarus procesas yra ergodinis.

Laiko eilutė

Laiko eilute vadinama kokio nors dydžio, tarkime, r stebėjimų laike seka $r_1, r_2, \ldots, r_t, \ t \in \mathbb{Z}$.

Stacionarumas

Atsitiktinio proceso $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$, su visais $t \in \mathbb{Z}$ tenkinančio sąlygą $\mathrm{D}\, X_t < \infty$, *kovariacinė funkcija* apibrėžiama lygybe

$$r(s,t) = \mathrm{cov}(X_s, X_t) = E(X_s - EX_s)(X_t - EX_t), \quad s, t \in \mathbb{Z} :$$

$r(s, 0)$ paprastumo dėlei žymėsime $r(s)$

Seka $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ vadinama *stacionariaja silpnąją prasme*, jeigu:

- $\forall t \in \mathbb{Z} \quad \mathrm{E}\, |X_t|^2 < \infty$,

- $\forall t \in \mathbb{Z} \quad \mathrm{E}\, X_t = \mathrm{E}\, X_0$,
- $r(s,t) = r(s+h, t+h)$ su visais s, t, h iš $\mathbb{Z}$.

Seka $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ vadinama *stacionariąja griežtąja (striąja) prasme*, jeigu su visais $k \in \mathbb{N}$, $t_1, t_2, \ldots, t_k$ ir $h \in \mathbb{Z}$, vektorių $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k})$ ir $(X_{t_1+h}, \ldots, X_{t_k+h})$ pasiskirstymai sutampa.

Jeigu procesas yra griežtai stacionarus, tai jis yra ir silpnai stacionarus. Aišku, pastarasis teiginys teisingas, kai egzistuoja vidurkis ir dispersija!

Uodegos indeksas

Jeigu a.d. X pasiskirstimo funkcija $F_X(u) \approx u^{-\alpha}$, kai $u \to \infty$, tai a.d. X pasiskirstymo *uodegos indeksas* yra α.

Priedas Nr. 2.

O_p ir o_p apibrėžimai; O ir o apibrėžimai

Tegu X_n yra atsitiktinių dydžių seka, o a_n yra konstantų seka. Tada

- $X_n = O_p(a_n)$ reiškia: $\forall\delta > 0$, $\exists K > 0$ ir $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tokie, kad $\mathrm{P}\Big(\Big|\frac{X_n}{a_n}\Big| > K\Big) < \delta$, $\forall n > n_0$.
- $X_n = o_p(a_n)$ reiškia: $\forall\delta > 0$ ir $\forall K > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ toks, kad $\mathrm{P}\Big(\Big|\frac{X_n}{a_n}\Big| > K\Big) < \delta$, $\forall n > n_0$. Kitaip tariant, tai reiškia, kad X_n/a_n konverguoja į nulį pagal tikimybę.

Tegu $f(x)$ ir $g(x)$ yra dvi funkcijos, apibrėžtos realiųjų skaičių tiesėje (ar jos poaibyje).

- $f(x) = O(g(x))$, kai $x \to \infty$ reiškia: $\exists M > 0$ ir $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ tokie, kad $|f(x)| \leq M|g(x)|$, $\forall x > x_0$.
- $f(x) = o(g(x))$, kai $x \to \infty$ reiškia: $f(x)/g(x)$ konverguoja į nulį kai $x \to \infty$.

Priedas Nr. 3.

A. Astrausko straipsnio [1] pritaikymas Teiginio 3 įrodymui

Žymėjimai ir Teorema 1 iš [1]:

Tegu $\{\varepsilon_j, j \in \mathbb{Z}\}$ yra n.v.p.a.d., priklausantys α-stabiliai traukos sričiai $D(\alpha)$, $0 < \alpha \leq 2$, t.y.

$$\mathrm{P}(\varepsilon_0 < -t) = (c_1 + o(1))t^{-\alpha}h(t), \qquad \mathrm{P}(\varepsilon_0 > t) = (c_2 + o(1))t^{-\alpha}h(t) \tag{42}$$

kai $t \to \infty$, $c_i \geq 0$, $c_1 + c_2 > 0$, h - lėtai kintanti funkcija.

Ir tegu

$$Y^{(\beta)} = \int_{-\infty}^{t} [(t-s)^{1-\beta} - (-s)_+^{1-\beta}]\mathrm{d}Z(s), \qquad t \geq 0.$$

Čia Z yra α-stabilus procesas su nepriklausomais prieaugliais ir charakteristine funkcija:

$$\mathrm{E}\,\mathrm{e}^{\mathrm{iaZ(t)}} = \exp\{-\mathrm{t}|\mathrm{a}|^{\alpha}(1 - \mathrm{iDsign(a)})\}$$

$D = ((c_1 - c_2)/(c_1 + c_2))\tan(\alpha\pi/2)$, kai $\alpha \neq 1$ (šio atvejo užtenka Teiginio 3 įrodymui).

Teorema 1 (iš A. Astrausko straipsnio): *Tegu procesas* $(X_k, k \in \mathbb{N})$ *apibrėžtas taip:*

$$X_k = \sum_j a(k-j)\varepsilon_j \qquad k \in \mathbb{N}$$

kur ε_j apibrėžti kaip (42).

(i) *Tegu eilutė* $\sum_j a(j)$ *konverguoja absoliučiai ir* $A \equiv \left|\sum_j a(j)\right| > 0$. *Tada*

$$Y_n = \frac{1}{A_n}\sum_{k=1}^{[nt]} X_k \to_{fdd} Y^{(1)} \equiv Z$$

kur $A_n = C^{1/\alpha}An^{1/\alpha}H_\alpha^{1/\alpha}(n)$, $C = (c_1 + c_2)\Gamma(|1-\alpha|)\cos(\alpha\pi/2)$, H_α *- lėtai kintanti funkcija.*

(ii) *Tegu* $\alpha > 1$, $1/\alpha < \beta < 1$, $a(k) = 0$, *kai* $k = 0, -1, -2, \ldots$ *ir* $a(k) = k^{-\beta}L(k)$, *kai* $k > 0$, *kur* L *- lėtai kintanti funkcija. Tada*

$$Y_n = \frac{1}{A_n}\sum_{k=1}^{[nt]} X_k \to_{fdd} Y^{(\beta)}$$

čia $A_n = |1-\beta|^{-1}C^{1/\alpha}n^{1/\alpha+1-\beta}L(n)H_\alpha^{1/\alpha}(n)$, $C = (c_1 + c_2)\Gamma(|1-\alpha|)\cos(\alpha\pi/2)$, H_α *- lėtai kintanti funkcija.*

Pritaikymas Teiginio 3 dalies (i) įrodymui:

Reikia pasinaudoti A. Astrausko teoremos dalimi (ii) ir pastebėti, kad mūsų atveju $H_\alpha = 1$, $\beta = 1 - d_1$, $L(k) = c(d_1, d_2)(\psi_1 + o(1))$. Ir per elementarius charakteristinės funkcijos pertvarkymus, galima parodyti (žr. žemiau), kad $L_{\alpha,d_1} =_{fdd} C^{1/\alpha} Y^{(\beta)}$, čia $L_{\alpha,d}(t)$ apibrėžtas (33). Taigi iš čia ir išplaukia sąryšis (39).

Pritaikymas Teiginio 3 dalies (ii) įrodymui:

Reikia pasinaudoti A. Astrausko teoremos dalimi (i), imant $\alpha := \alpha/2$, nes $\varepsilon^2 \in D(\alpha/2)$. Be to,

$$\lim_{x\to\infty} x^{\alpha/2}\mathrm{P}(\varepsilon^2 > x) \ = \ c_1 + c_2 \quad \text{ir} \quad \lim_{x\to-\infty} |x|^{\alpha/2}\mathrm{P}(\varepsilon^2 \le x) \ = 0.$$

O $Z^+_{\alpha/2} =_{fdd} AC^{2/\alpha}Z =_{fdd} AZ_{\alpha/2}$, nes $Z_\alpha =_{fdd} C^{1/\alpha}Z$ (žr. žemiau). O $Z^+_{\alpha/2}$ charakteristinė funkcija bus

$$\mathrm{E}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta Z^+_{\alpha/2}(1)} \ = \ \exp\Big\{ - |\theta|^{\alpha/2} A^{\alpha/2}\omega(\theta;\alpha/2, 0, c_1 + c_2)\Big\}, \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad A := \sum_{k=0}^{\infty} (\mathrm{E}\, a^k)^2.$$

Iš tikrųjų $L_{\alpha,d_1} =_{fdd} C^{1/\alpha} Y^{(\beta)}$

Įsitikinkime, kad iš tikrųjų $L_{\alpha,d_1} =_{fdd} C^{1/\alpha} Y^{(\beta)}$. Tai ekvivalentu tam, kad $Z_\alpha =_{fdd} C^{1/\alpha} Z$. A. Astrausko straipsnyje α-stabilaus proceso Z su nepriklausomais prieaugliais charakteristinė funkcija yra tokio pavidalo:

$$E\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta \mathrm{Z(t)}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{t}|\theta|^\alpha(1 - \mathrm{iDsign}(\theta))} = \mathrm{e}^{-\mathrm{t}|\theta|^\alpha \omega'(\theta;\alpha,\mathrm{c}_1,\mathrm{c}_2)}$$

čia $t \ge 0$, $D = (c_1 - c_2)/(c_1 + c_2)\tan(\pi\alpha/2)$, kai $\alpha \ne 1$.

Tai tada bus:

$$\omega'(\theta;\alpha, c_1, c_2) \ = \ 1 - \mathrm{i}D\mathrm{sign}(\theta) = 1 - \mathrm{i}\frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2}\tan(\pi\alpha/2)\mathrm{sign}(\theta) \qquad \text{, kai } \alpha \ne 1$$

O mūsų $\{Z_\alpha(x), x \in \mathbb{R}\}$ yra Lévy $\alpha-$stabilus procesas, su charakteristine funkcija

$$\mathrm{E}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta Z_\alpha(x)} \ = \ \mathrm{e}^{-|\theta|^\alpha \omega(\theta;\alpha,c_1,c_2)|x|}, \qquad \theta, x \in \mathbb{R},$$

Ir kai $\alpha \ne 1$

$$\begin{aligned}
\omega(\theta;\alpha, c_1, c_2) \ &:= \ \frac{\Gamma(2-\alpha)}{1-\alpha}\Big((c_1 + c_2)\cos(\pi\alpha/2) - \mathrm{i}(c_1 - c_2)\mathrm{sign}(\theta)\sin(\pi\alpha/2)\Big) \\
&= \ \frac{\Gamma(2-\alpha)(c_1 + c_2)\cos(\pi\alpha/2)}{1-\alpha}\Big(1 - \mathrm{i}\frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2}\tan(\pi\alpha/2)\mathrm{sign}(\theta)\Big) \\
&= \ \Gamma(|1-\alpha|)(c_1 + c_2)\cos(\pi\alpha/2)\Big(1 - \mathrm{i}\frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2}\tan(\pi\alpha/2)\mathrm{sign}(\theta)\Big) \\
&= \ C\omega'(\theta;\alpha, c_1, c_2)
\end{aligned}$$

Iš čia išplaukia, kad $Z_\alpha =_{fdd} C^{1/\alpha} Z$, o tuo pačiu ir lygybė $L_{\alpha,d_1} =_{fdd} C^{1/\alpha} Y^{(\beta)}$.