VILNIAUS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

Jūratė Bagackaitė

Ilgaamžiškumas Baltijos valstybėse: tendencijos ir pokyčiai

Magistro darbas

VILNIUS 2006

Matematinės analizės katedra

Darbo vadovas **doc. dr. G. Bakštys** __________________

Darbas apgintas _____*2006 m. birželio mėn. 1 d.*_____
Gynimo posėdžio protokolo Nr. __________________

Registravimo Nr. ___________________
2006 - 05 - 20 ____________________

Turinys

1 Abstract

In recent years the population ageing and the longevity tendencies are observed in almost all countries. This problem is significant for the state pension system as well as for the private insurance companies, paying life annuities. The aim of this paper is to evaluate the ageing tendencies in Baltic States, perform the sensitivity for mortality and interest rate changes analysis, predict the mortality in Baltic States in the future.

The mortality was modeled and forecasted by using R. D. Lee and L. R. Carter model. The mortality table is designed after analyzing data and making necessary calculations. Produced table is applied to solve the prediction problem and to calculate the longevity factors - life expectancy and annuities.

Conclusions obtained:

- Longevity problem exists;
- Decreasing mortality probabilities are observed;
- The annuity is more sensitive to mortality fluctuation than to interest rate fluctuations.

The overall conclusion is obtained that population ageing problem exists, but it is not very threatening. However, the size of annuity payments should be evaluated paying careful attention to longevity tendencies. Moreover, they should also be prudent in respect of interest rates, not only the mortality.

2 Reziumė

Pastaraisiais metais beveik visose valstybėse stebimos visuomenės senėjimo bei ilgaamžiškumo tendencijos. Ši problema yra aktuali ne tik valstybinei pensijų sistemai, bet ir gyvybės draudimo įmonėms, mokančioms ar ateityje mokėsiančioms anuitetus. Šio darbo tikslas yra modeliuoti bei prognozuoti Latvijos, Lietuvos ir Estijos mirtingumą, įvertinti Baltijos valstybių visuomenės senėjimo tendenciją, atlikti anuitetų jautrumo analizę palūkanų normos bei mirtingumo tikimybių kitimui.

Mirtingumo modeliavimui ir prognozavimui buvo naudojamas R. D. Lee ir L. R. Carter modelis. Atlikus duomenų analizę ir reikalingus tarpinius

skaičiavimus yra sukonstruojamos prognozuojamos mirtingumo tikimybių lentelės. Sukonstruotos lentelės naudojamos nagrinėjant aukščiau aprašytus tikslus, t.y. skaičiuojant ilgaamžiškumo faktorius: gyvenimo trukmę bei anuitetus.

Gaunamos išvados:

- Ilgaamžiškumo problema egzistuoja;
- Stebimos mažėjančios mirtingumo tikimybės;
- Anuitetai yra jautresni mirtingumo tikimybių kitimui nei palūkanų normos svyravimams.

Atlikus gautų rezultatų analizę galima daryti išvadą, kad visuomenės senėjimo problema egzistuoja, bet nėra labai grėsminga. Tačiau anuitetinių išmokų mokėtojai turėtų įvertinti ilgaamžiškumo tendenciją ir konstruoti atsargius anuitetus, atsižvelgiant ne tik į mirtingumą, bet ir į palūkanų normą.

3 Įvadas

Pastaraisiais metais daugumos valstybių visuomenė senėja, yra pastebima ilgaamžiškumo tendencija. Visuomenės senėjimas yra viena iš svarbiausių naujausiųjų laikų biologinių, socialinių bei ekonominių problemų. Išsivysčiusiose šalyse senyvo amžiaus žmonių yra $12-23$ proc., besivystančiose - $4-7$ proc. Senyvi žmonės - tai asmenys nuo 75 m. amžiaus. $60-69$ m. amžiaus gyventojų grupėje 100 moterų tenka 74 vyrai, o tarp vyresnių kaip 80 m. amžiaus asmenų - $48-53$ vyrai. Numatoma, kad tokia tendencija tarp skirtingų vyresnio amžiaus žmonių lyčių išliks ir ateityje. Pagal demografinius rodiklius Lietuvą galima priskirti prie "senstančių" valstybių, kadangi čia nepalankiai derinasi greiti senėjimo procesai, praktiškai nulinė reprodukcija ir jaunų žmonių emigracija.

Visuomenės socialinė ekonominė ir demografinė raida yra glaudžiai susijusios. Demografinių pokyčių raida labai priklauso nuo šalies socialinio bei ekonominio lygio, plėtros tempų, tolygumo. Savo ruožtu demografinių procesų pokyčiai daro įtaką šalies socialinei ekonominei raidai.

Gimstamumas mažėja labai sparčiai ir ženkliai bei pasiekė lygį, esantį gerokai žemiau ribos, galinčios užtikrinti kartų kaitą. Optimistiškai žvelgiant į ateitį, reikėtų tikėtis, kad gimstamumas pamažu pradės augti. Pastaraisiais metais Baltijos valstybių ekonomika augo. Augimas prognozuojamas ir toliau. Kartu su ekonomikos augimu auga ir žmonių pragyvenimo lygis. Finansinės padėties stabilumas arba gerėjimas verčia individą arba šeimą jaustis labiau užtikrintais dėl savo ateities. Tai yra labai svari priežastis gimstamumo lygio augimui.

Ilgesnis gyvenimas - tai vienas svarbiausių žmonijos laimėjimų. Gyvenimo trukmės ilgėjimą galima būtų susieti su šiuolaikinės medicinos laimėjimais. Visuomenė pastaraisiais metais labiau rūpinasi savo sveikata. Nors tai galima būtų pasakyti tik apie didesnes pajamas gaunančią visuomenės dalį. Šis rūpestis iš dalies yra švietėjiškų ir prevencinių akcijų apie gresiančius bei jau esančius sveikatos sutrikimus įtaka. Natūralu būtų tikėtis, kad ateityje gyvenimo trukmė tik augs.

Kodėl ilgaamžiškumas yra problema? Juk atrodo kiekvienas iš mūsų norėtų gyventi kuo ilgiau, aišku su sąlyga, kad gyvenimas būtų tiek fiziškai tiek finansiškai visavertis. Taip atrodo žiūrint iš individo pozicijos. Tačiau problema sukuriama visų pirma valstybei, o antra privačioms gyvybės draudimo įmonėms. Juk valstybė, tiksliau sakant - dirbantieji, išlaiko senatvės pensijos amžiaus sulaukusius piliečius. Ir jei visuomenė senėja, tai atsiranda grėsmė, kad valstybė nepajėgs pasirūpinti pensininkų gerove.

Siekiant nors iš dalies sušvelninti situaciją buvo sukurti pensiniai fondai, kuriuose individai patys galėtų kaupti lėšas savo senatvei. Sulaukę pensinio amžiaus už sukauptas lėšas jie privalės įsigyti anuitetą (yra išimčių). Mirtingumo kitimas yra rizika gyvybės draudimo įmonėms, kurios prisiims įsipareigojimus mokėti klientams anuitetus iki mirties.

Šio darbo tikslas - pažiūrėti kaip kinta mirtingumo lygis, atlikti ateities mirtingumo prognozę į ateitį bei įvertinti ilgaamžiškumo tendencijas trijose Baltijos valstybėse: Lietuvoje, Latvijoje ir Estijoje. Tai yra rizikos valdymo priemonė, kurią naudoja gyvybės draudimo įmonės.

Šiam tikslui įgyvendinti naudojamas Lee - Carter (1992) modelį, kuris yra skirtas mirtingumo modeliavimui bei prognozavimui. Šis modelis yra ganėtinai populiarus, dažnai taikomas, yra keletas jo modifikacijų (šiame darbe jų nenagrinėsime).

Tyrimas atliekamas analizuojant Baltijos valstybių populiacijos duomenis. Pirmiausiai yra įvertinami modelio parametrai taikant mažiausių kvadratų ir didžiausio tikėtinumo metodus. Tarpiniuose skaičiavimuose naudojami skaitiniai metodai (Gradiento metodas netiesinių lygčių sistemų sprendimui). Įvertinus modelio parametrus, laiko eilučių modelio ARIMA(p,d,q) pagalba atliekamas mirtingumo prognozavimas. Atlikus visus šiuos trumpai aprašytus skaičiavimus, atliekama mirtingumo lentelių pronozė, kurios pagalba galime atlikti labai daug naudingų analizių, pavyzdžiui gyvenimo trukmės, anuitetų ir kt.

Šiame darbe yra atliktas gautų rezultatų palyginimas tarp valstybių, nagrinėjamas anuitetų jautrumas mirtingumui bei palūkanų normai. Šis tyrimas yra įdomus ne tik matematine prasme, bet ir naudingas gyvybės draudimo bendrovėms ir juo labiau turėtų būti įdomus kiekvienam žmogui - juk smalsu pažvelgti, kokia demografinė situacija galėtų būti po $40-50$ metų.

4 Duomenys

Norint analizuoti ilgaamžiškumo, mirtingumo normų bei anuitetų tendencijas, reikalingi šie populiacijos duomenys: gyventojų skaičius ir mirusiųjų žmonių skaičius pagal amžiaus grupes bei lytį tam tikrais metais. Šiame darbe bus nagrinėjami trijų Baltijos valstybių: Lietuvos, Latvijos bei Estijos duomenys. Duomenys yra gauti iš Eurostato duomenų bazės. Tai gyventojų bei mirusiųjų skaičiai nuo 1994 iki 2004 metų (Estijos duomenys iki 2003 metų). Duomenys išskaidyti pagal amžiaus grupes po 5 metus. Lietuvos ir Latvijos duomenys yra išskaidyti į 20 grupių (t.y. 0-4, .., 90-94, 95+), tuo tarpu Estijos duomenys turi truputį kitokią duomenų grupavimo struktūrą: jie grupuojami į grupes po 5 tik iki 84 metų amžiaus (t.y. 0-4, .., 80-84, 85+).

Nagrinėjame tik vyrų populiaciją. Nagrinėjami duomenys bei jų grafinis atvaizdavimas yra pateikti 11.1. priede.

5 Pagrindinės sąvokos

Šiame skyrelyje apibrėšime pagrindines darbe naudojamas sąvokas.

$l_{x,t}$ – t - aisiais metais iki amžiaus x išgyvenusiųjų gyventojų skaičius (kiekvienų metų sausio 1 dienai);

$d_{x,t}$ – t - aisiais metais x amžiaus mirusiųjų skaičius.

Šis dydis yra lygus:

$$d_{x,t} = l_{x,t} - l_{x+1,t+1}.$$

Simbolis $L_{x,t}$ žymi bendrą metų skaičių, kurį išgyveno pradinė grupė $l_{0,t}$ t - aisiais metais tarp amžiaus x ir $x+1$. Sakykime, kad amžiaus x asmenų grupė išgyveno u laiko ir mirė intervale Δu. Tuomet kartu jie nugyveno:

$$u \cdot (l_{x+u,t} - l_{x+u+\Delta u,t}) \approx -l'_{x+u,t} \cdot u \cdot \Delta u.$$

Taigi asmenys mirę t - aisiais metais tarp amžiaus x ir $x+1$, bendrai nugyvens:

$$L_{x,t} = -\int_0^1 l'_{x+u,t} u du + l_{x+1,t} = -l_{x+u,t} u|_0^1 - \int_0^1 l_{x+u,t} du + l_{x+1,t} =$$

$$= \int_0^1 l_{x+u,t} du \cong \frac{l_{x+1,t} + l_{x,t}}{2}.$$

Aukščiau matomas suapvalinimas gaunamas aproksimuojant integralą trapecijų taisykle.

Ką tik apibrėžtas dydis yra naudojamas apibrėžiant amžiaus grupės x vidutinį mirtingumą t - ųjų metų bėgyje (angl. central-death-rate at age x):

$$m_{x,t} = \frac{d_{x,t}}{L_{x,t}}.$$

Šis dydis parodo, kiek nugyventiems metams tenka mirčių, kai nagrinėjame amžiaus intervalą tarp x ir $x+1$, t - aisiais metais. Kartais šis dydis vadinamas mirtingumo norma.

Empiriniam $m_{x,t}$ vertinimui vietoje $L_{x,t}$ naudojamas dydis $E_{x,t}$ - amžiaus x žmonių rizikos grupė t - ųjų metų viduryje (angl. central exposed-to-risk):

$$E_{x,t} = \int_0^1 P_{x+u,t} du,$$

kur $P_{x,t}$ - metų pradžioje žinomas x amžiaus t - aisiais metais gyventojų skaičius.

Taigi empyriškai dydis $m_{x,t}$ randamas pagal šią formulę:

$$m_{x,t} = \frac{\theta_{x,t}}{E_{x,t}},$$

kur $\theta_{x,t}$ - žinomas amžiaus x mirusiųjų skaičius t - aisiais metais.

6 Lee - Carter modelis

Lee - Carter (toliau LC) metodas skirtas mirtingumo modeliavimui bei prognozavimui. Šis metodas paprastas skaičiavimų atžvilgiu, todėl pastaraisiais metais jis yra ganėtinai dažnai naudojamas kaip pavyzdinis modelis modeliuojant ir prognozuojant mirtingumą.

Apibrėšime šį modelį, bei interpretuosime jo parametrus. Tariame, kad kiekvieno amžiaus mirtingumo norma galima apskaičiuoti pritaikius LC modelį:

$$\ln(m_{x,t}) = a_x + b_x k_t + \varepsilon_{x,t}. \tag{1}$$

Čia $exp\ \{a_x\}$ - bendras amžiaus grupės x nuokrypis nuo mirtingumo.

k_t yra mirtingumo lygis (angl. level of mortality). Jei k_t kinta tiesiškai laiko atžvilgiu, tai kiekvieno amžiaus mirtingumas kinta eksponentiškai. Kai k_t artėja į $-\infty$, tai visose amžiaus grupėse mirtingumo norma artėja į 0.

b_x - dydis, taip pat priklausantis nuo amžiaus x. Jis parodo kaip kinta mirtingumas skirtingose amžiaus grupėse, kai kinta bendras mirtingumo lygis k_t, kuris priklauso nuo laiko t:

$$\frac{dln(m_{x,t})}{dt} = \frac{b_x dk_t}{dt} + \frac{d\varepsilon_{x,t}}{dt}.$$

Jeigu tam tikriems x - ams b_x yra didelis, tuomet amžiaus x mirtingumas smarkiai kinta, kai kinta bendras mirtingumo lygis (pavyzdžiui, kūdikių mirtingumas). Jei b_x yra mažas, tai mirtingumo norma kinta mažai, kai kinta bendras to amžiaus mirtingumo lygis (dažnas atvejis vyresnio amžiaus grupėse). b_x tam tikroje amžiaus grupėje gali būti neigiamas. Tai reikštų, kad to amžiaus mirtingumas linkęs išaugti, kai krenta kitose amžiaus grupėse. Esant ilgam laikotarpiui, visi b_x turi tą patį ženklą.

$\varepsilon_{x,t}$ - triukšmas su vidurkiu 0 ir dispersija σ_ε^2, kuris aprašo amžiui būdingą bei istorinę įtaką, neitrauktą į modelį.

Šiuo modeliu nusakomas mirtingumas negali įgyti neigiamų reikšmių. Tai yra šio modelio pranašumas prognozuojant.

Taigi įvertinus dydžius a_x, b_x ir k_t, kai yra žinomi populiacijos duomenys, gausime mirtingumo normas. Turint mirtingumo normas nagrinėjamiems periodams galime atlikti jų prognozes bei sudaryti prognozines mirtingumo lenteles. Šios lentelės yra aktuarinio prognozavimo apie ateinančių kartų ilgaamiškumą pagrindas.

7 Modelio vertinimas

Šiame skyriuje aprašysime LC modelio parametrų vertinimo metodus (5.1 - 5.2 skyreliai), modelio parametrų įverčių radimo būdus (5.3 skyrelis) bei apžvelgsime gautus rezultatus (5.3.1 - 5.3.2 skyreliai).

Modelis negali būti vertinamas įprastais regresiniais metodais, nes nėra regresoriaus: dešinėje lygties pusėje turime tik parametrus, kurie turi būti įvertinti. Tačiau gali būti naudojami šie vertinimo metodai: mažiausių kvadratų metodas (angl. least square method) arba didžiausio tikėtinumo metodas (angl. maximum likelihood method).

7.1 Mažiausių kvadratų metodas

Mažiausių kvadratų metodas yra vienas iš populiariausių ir dažniausiai naudojamų nežinomų lygties parametrų vertinimo metodų. Šiuo metodu įvertinsime LC modelį:

$$ln(m_{x,t}) = a_x + b_x k_t + \varepsilon_{x,t}.$$

Pirmiausiai pastebėkime, kad šio modelio parametrus galima užrašyti nevienareikšmiškai, t.y. nėra vienaties. Sakykime, vektoriai **a**, **b**, **k** tenkina LC modelį. Tuomet bet kuriam skaliarui c vektoriai $\mathbf{a} - \mathbf{b}c$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{k} + c$ taip pat tenkins (1) lygtį. Taip pat, jei **a**, **b**, **k** tenkina LC modelį, tai ir **a** , $\mathbf{b}c$, $\mathbf{k}/c$ jį tenkins.

Taigi **k** apibrėžiamas kaip tiesinė transformacija, **b** kaip multiplikatyvi konstanta, o **a** kaip adityvi konstanta. Norėdami gauti vienintelį vektorių tenkinantį (1) lygtį, darome šias prielaidas:

$$\sum_t k_t = 0, \ \sum_x b_x = 1. \tag{2}$$

Iš šių prielaidų seka, kad a_x yra $ln(m_{x,t})$ vidurkis pagal t. Tai gauname susumavę (1) lygtį pagal t:

$$\sum_t ln(m_{x,t}) = \sum_t a_x + b_x \sum_t k_t + \sum_t \varepsilon_{x,t}, \tag{3}$$

Kaip jau buvo minėta anksčiau, $\varepsilon_{x,t}$ yra triukšmas su vidurkiu 0 ir dispersija σ_ε^2. Vadinasi, suvidurkinę (3) lygtį pagal triukšmą, eliminuojame jį:

$$E_{\varepsilon_{x,t}} a_x = E_{\varepsilon_{x,t}} \frac{\sum_t ln(m_{x,t})}{\#t} - E_{\varepsilon_{x,t}} \frac{\sum_t \varepsilon_{x,t}}{\#t}.$$

Vadinasi a_x galime išskaičiuoti tiesiogiai iš turimų duomenų:

$$a_x = \frac{\sum_t ln(m_{x,t})}{\#t}. \tag{4}$$

Mažiausių kvadratų metodu yra minimizuojama nuokrypio kvadratų suma, remiantis turimais duomenimis. Jei turime realius mirtingumo duomenis pagal laiką ir pagal amžiaus grupes (pažymėkime $\hat{m}_{x,t}$), tuomet sudarome lygtį:

$$\Pi = \sum_{x,t} \left(ln(\hat{m}_{x,t}) - a_x - b_x k_t\right)^2, \tag{5}$$

kurią reikia minimizuoti pagal parametrus, kuriuos turime įvertinti.

Ieškodami dydžio Π minimumo taško, diferencijuojame jį pagal vertinamus parametrus:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial a_x} &= 2\sum_t \left(ln(\hat{m}_{x,t}) - a_x - b_x k_t\right) = 0, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial b_x} &= 2\sum_t \left(ln(\hat{m}_{x,t}) - a_x - b_x k_t\right) k_t = 0, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial k_t} &= 2\sum_x \left(ln(\hat{m}_{x,t}) - a_x - b_x k_t\right) b_x = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

kur x - amžiaus grupių skaičius, o t - nagrinėjamų laiko periodų skaičius.

Gauname netiesinių $(2{\cdot}(\#x)+(\#t))$ lygčių sistemą su tiek pat nežinomųjų. Išsprendę šią lygčių sistemą gausime parametrų a_x, b_x ir k_t įverčius.

7.2 Didžiausio tikėtinumo metodas

Didžiausio tikėtinumo metodas - tai procedūra, kurią naudojant galima įvertinti nežinomus modelio parametrus, kai yra žinomas tikėtinas duomenų pasiskirstymas. Ši procedūra yra įvairiapusė ir gali būti pritaikoma daugeliui modelių bei įvairiems duomenų tipams.

Vertinant LC modelio parametrus didžiausio tikėtinumo metodu, pirmiausiai yra daroma prielaida apie triukšmo $\varepsilon_{x,t}$ prigimtį ir pasiskirstymą. Tariama, kad triukšmą sudaro nepriklausomi, vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai. Be to triukšmas yra homoskedastinis. Jo pasiskirstymas yra normalusis - $N(0,\sigma^2)$.

Toliau yra tariama, kad atsitiktiniai dydžiai $D_{x,t}$ (mirčių skaičius) yra pasiskirstę pagal Puasono skirstinį su parametru $\lambda = (E_{x,t} \cdot m_{x,t})$:

$$D_{x,t} \sim P(E_{x,t} \cdot m_{x,t}).$$

Užrašome tikėtinumo funkciją:

$$lnL(a_x, b_x, k_t) = ln \prod_{x,t} exp\left\{-E_{x,t} m_{x,t}\right\} \frac{(E_{x,t} m_{x,t})^{D_{x,t}}}{D_{x,t}!}.$$

Logaritmuodami ją gauname:

$$lnL(a_x, b_x, k_t) = \sum_{x,t} \left(-E_{x,t}m_{x,t} + D_{x,t}ln(E_{x,t}m_{x,t}) - ln(D_{x,t}!)\right).$$

Dešinėje lygties pusėje yra ne tik žinomi dydžiai, bet ir atsitiktinis dydis $m_{x,t}$ (dėl $\varepsilon_{x,t}$). Remiantis apie triukšmą padarytomis prielaidomis, vertėtų pabandyti suvidurkinti šią lygtį pagal normaliai pasiskirsčiusį $\varepsilon_{x,t}$. Galbūt atlikus šiuos veiksmus pavyks eliminuoti triukšmo komponentę.

Triukšmas įeina tik į dydį $m_{x,t}$, kiti logaritmuotos lygties dydžiai yra žinomi. Pagal LC modelį $m_{x,t} = exp\{a_x + b_x k_t + \varepsilon_{x,t}\}$. Apskaičiuokime šio dydžio vidurkį pagal $\varepsilon_{x,t}$:

$$E_{\varepsilon_{x,t}}(m_{x,t}) = e^{a_x + b_x k_t} \cdot E_{\varepsilon_{x,t}} e^{\varepsilon_{x,t}}, \tag{7}$$

kur

$$E_{\varepsilon_{x,t}} e^{\varepsilon_{x,t}} = \int_{\infty}^{-\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\varepsilon^2}} e^{-\frac{\varepsilon_{x,t}^2}{2\sigma_\varepsilon^2}} e^{\varepsilon_{x,t}} \, d\varepsilon_{x,t} =$$

$$= \int_{\infty}^{-\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\varepsilon^2}} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_{x,t}}{\sigma_\varepsilon} - \sigma_\varepsilon\right)^2} e^{\frac{1}{2}\sigma_\varepsilon^2} \, d\varepsilon_{x,t} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\varepsilon^2}} e^{\frac{1}{2}\sigma_\varepsilon^2} \int_{\infty}^{-\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2} \sigma_\varepsilon \, du = e^{\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2}}.$$

Taigi įstatę gautąją išraišką į (7) reiškinį gauname:

$$E_{\varepsilon_{x,t}}(m_{x,t}) = e^{(a_x + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2}) + b_x k_t}.$$

Vadinasi, nagrinėdami vidurkį pagal $\varepsilon_{x,t}$ gauname, kad triukšmas yra įtrauktas į parametrą a_x ir bus įvertintas kartu su šiuo parametru. Taigi nagrinėsime šį reiškinį:

$$E_{\varepsilon_{x,t}}(lnL(a_x, b_x, k_t)) =$$

$$= \sum_{x,t} \left(-E_{x,t} exp\left\{a_x + b_x k_t\right\} + D_{x,t} ln\left(E_{x,t} \cdot exp\left\{a_x + b_x k_t\right\}\right) - ln(D_{x,t}!)\right) =$$

$$= \sum_{x,t} \left(-E_{x,t} exp\left\{a_x + b_x k_t\right\} + D_{x,t}(a_x + b_x k_t)\right) + const, \tag{8}$$

kur $const = \sum_{x,t}(D_{x,t}ln(E_{x,t}) - ln(D_{x,t}!))$ - dydžiai, nepriklausantys nuo a_x, b_x bei k_t.

Didžiausio tikėtinumo įvertis randamas optimizavus (8) funkciją. Diferencijuodami pagal visus vertinamus parametrus gauname šią lygčių sistemą:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_x} = \sum_t \left(D_{x,t} - E_{x,t}exp\left\{a_x + b_x k_t\right\}\right) = 0,$$
$$\frac{\partial \Pi}{\partial b_x} = \sum_t \left(D_{x,t} - E_{x,t}exp\left\{a_x + b_x k_t\right\}\right) k_t = 0, \qquad (9)$$
$$\frac{\partial \Pi}{\partial k_t} = \sum_x \left(D_{x,t} - E_{x,t}exp\left\{a_x + b_x k_t\right\}\right) b_x = 0,$$

kur x - amžiaus grupių skaičius ir t - nagrinėjamų laiko periodų skaičius.

Analogiškai kaip ir mažiausių kvadratų metodu gauname $(2 \cdot (\#x) + (\#t))$ netiesinių lygčių sistemą su tiek pat nežinomųjų.

7.3 Įverčių radimas (Gradiento metodas)

Abiem minėtais nežinomų parametrų vertinimo metodais vertinant LC modelio parametrus gauname netiesinių lygčių sistemas. Jas galima spręsti įvairiais netiesinių lygčių sistemų sprendimo būdais. Pastebėsime, kad (6)-(9) lygčių sistemos lygtys yra (5) bei (8) funkcijų gradientų komponentės. Taigi būtų protinga taikyti greičiausio nusileidimo (gradiento) metodą. Šio metodo esmė yra tokia, kad turėdami pradinį artinį (kad ir kaip nutolusį nuo sprendinio) galime priartėti prie sprendinio, jei teisingai pasirenkame žingsnį ir artėjimo kryptį. Maksimizuojant judama pagal gradiento kryptį, o minimizuojant - prieš gradiento kryptį.

Sakykime turime funkciją $F(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$, $x_1, x_2, ..., x_n$ - ieškomi sprendiniai. Funkcijos gradientu yra vadinamas vektorius, sudarytas iš dalinių funkcijos išvestinių:

$$gradF = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial F}{\partial x_n}\right).$$

Tarkime, kad norime minimizuoti nagrinėjamą reiškinį. Tuomet iteracinė seka apskaičiuojama pagal (10) formulę:

$$x^{\mu+1} = x^{\mu} - h \cdot grad(F(x^{\mu})), \mu = 0, 1, 2, ... \; . \qquad (10)$$

Jei reiškinį norime maksimizuoti, tuomet iteracinė seka užrašoma taip:

$$x^{\mu+1} = x^{\mu} + h \cdot grad(F(x^{\mu})), \mu = 0, 1, 2, \dots .$$

Čia μ+1 - iteracijų skaičius, h yra žingsnis, kuriuo slinkdami artėjame prie sprendinio. Jį galime parinkti kaip mažėjančią skaičių seką. Tačiau žingsnį galime ir apskaičiuoti. Šie du žingsnio parinkimo variantai bus aptarti 7.3.1 ir 7.3.2 skyreliuose.

7.3.1 Mažiausių kvadratų metodo įvertis

Nagrinėkime mažiausių kvadratų metodu sukonstruotą reiškinį:

$$\Pi = \sum_{x,t} \left(ln(\hat{m}_{x,t}) - a_x - b_x k_t\right)^2 .$$

Tam, kad rastume nežinomus parametrus a_x, b_x, k_t, turime minimizuoti šį reiškinį. Naudodami gradiento metodą, gauname tokią iteracinę seką:

$$\left(a_x^{\mu+1}, b_x^{\mu+1}, k_t^{\mu+1}\right) = (a_x^{\mu}, b_x^{\mu}, k_t^{\mu}) - h^{(\mu)} \cdot grad(\Pi\,(a_x^{\mu}, b_x^{\mu}, k_t^{\mu})). \qquad (11)$$

$\mu + 1$ - iteracijų skaičius. Pradiniai artiniai natūraliai siejasi su (2) bei (4) prielaidomis: $a_x^{(0)} = \frac{\sum_t ln(m_{x,t})}{\#t}$, $b_x^{(0)} = \frac{1}{\#x}$ bei $k_t^{(0)} = 0$.

Žingsnis h yra parenkamas tokiu būdu. Statome (11) vektoriaus komponentes į (5) funkciją ir minimizuojame ją pagal h. Kiekvienai iteracijai yra skaičiuojamas naujas h.

Skaičiavimai yra stabdomi, kai funkcijos (5) reikšmės dviejuose gretimuose iteraciniuose sprendiniuose tampa pakankamai artimos. Mūsų nagrinėjamų duomenų atveju yra reikalaujama, kad funkcijų skirtumas neviršytų 10^{-5}. Taip pat yra reikalavimai sprendiniams. Reikalaujama, kad atstumas tarp dviejų gretimų sprendinių neviršytų 10^{-6}.

Skaičiavimai yra atliekami su Maple programiniu paketu (programų kodai pateikiami elektroniniu formatu). Gauti skaitiniai Lietuvos bei grafiniai kiekvienos valstybės rezultatai yra pateikti 11.2. priede (kartu su didžiausio tikėtinumo metodo įverčiais).

Parametrai a_x įgyja tik neigiamas reikšmes, nes skaičiuojami pagal (4) formulę. Parametrai b_x daugumai amžiaus grupių yra teigiami, tačiau 80 - 89 metų amžiaus grupėse įgyja ir neigiamas reikšmes, kas turint mažai duomenų ir vyresniame amžiuje yra tikėtina, nes mirtingumo lygio kitimas turi mažesnę įtaką mirtingumo normoms. Iš k_t brėžinio matome, kad mirtingumo lygis krenta visose trijose Baltijos valstybėse, todėl galime tikėtis laike mažėjančių mirtingumo normų ir tikimybių.

7.3.2 Didžiausio tikėtinumo metodo įvertis

Nagrinėkime didžiausio tikėtinumo metodu gautąjį reiškinį:

$$\Pi(a_x, b_x, k_t) =$$

$$= \sum_{x,t} \left(-E_{x,t} exp\left\{a_x + b_x k_t\right\} + D_{x,t} ln\left(E_{x,t} \cdot exp\left\{a_x + b_x k_t\right\}\right) - ln(D_{x,t}!)\right).$$

Norėdami rasti parametrus a_x, b_x, k_t turime maksimizuoti šią funkciją. Kaip ir mažiausių kvadratų metodo atveju naudosime gradiento metodą. Maksimizavimo atveju iteracinė seka, kaip jau minėjome, skiriasi nuo iteracinės sekos, naudojamos minimizuojant reiškinį:

$$\left(a_x^{\mu+1}, b_x^{\mu+1}, k_t^{\mu+1}\right) = (a_x^{\mu}, b_x^{\mu}, k_t^{\mu}) + h^{\mu} \cdot grad(\Pi\left(a_x^{\mu}, b_x^{\mu}, k_t^{\mu}\right)).$$

$\mu + 1$ - iteracijų skaičius. Pradiniai artiniai parenkami taip, kad būtų kuo labiau sumažinamas iteracijų skaičius. Taigi kaip pradinius artinius naudojame mažiausių kvadratų metodu gautus sprendinius.

Žingsnio h aukščiau aprašytu būdu negalime parinkti, nes yra gaunama labai sudėtinga lygtis , kurios Maple negali maksimizuoti. Taigi h parenkame kaip mažėjančią seką:

$$h^{\mu+1} = 2^{-(\mu+1)}.$$

Tada atliekamas tikrinimas, ar parinkus tokį žingsniuką $\Pi(a_x^{\mu}, b_x^{\mu}, k_t^{\mu}) < \Pi(a_x^{\mu+1}, b_x^{\mu+1}, k_t^{\mu+1})$. Jei ši nelygybė tenkinama, tai naudojame šį žingsniuką. Priešingu atveju žingsniukas mažinamas per pusę ir vėl tikrinama nelygybė.

Skaičiavimai taip pat atliekami su Maple. Kaip ir mažiausių kvadratų metodo įverčiams taikomi tokie pat apribojimai skaičiavimų skaičiui.

Gauti rezultatai pateikti 11.2. priede. LC modelio parametrų, įvertintų didžiausio tikėtinumo metodu, tendencijos panašios parametrų, įvertintų mažiausių kvadratų metodu, tendencijoms.

7.4 Įverčių tinkamumas

Patikrinsime, ar pasirinktieji modelio vertinimo būdai yra pakankamai geri.

Vienas svarbiausių įvertinto modelio parametrų yra paklaidų dispersija σ_{ε}^2. Šis parametras nėra žinomas. Jį reikia įvertinti. Tam panaudosime modelio liekanas:

$$\hat{\varepsilon}_{x,t} = ln(\hat{m}_{x,t}) - ln(\hat{\hat{m}}_{x,t}) =$$

$$= \frac{D_{x,t}}{E_{x,t}} - exp\{a_x + b_x k_t\}.$$

Tuomet:

$$\hat{\sigma}^2_{\varepsilon} = \frac{1}{(\#t \cdot \#x - (\#t + 2 \cdot \#x))} \sum_{x,t} \hat{\varepsilon}^2_{x,t} =$$

$$= \frac{1}{(\#t \cdot \#x - (\#t + (2 \cdot \#x)))} \left(\sum_{x,t} \frac{D_{x,t}}{E_{x,t}} - \sum_{x,t} exp\{a_x + b_x k_t\} \right).$$

Šis dispersijos įvertinimas yra nepaslinktas.

Kuo didesnė paklaidų dispersija, tuo didesnės įverčių variacijos apie vidurkį. Tai reiškia, kad modelis parinktas nepakankamai optimalus, arba modelio vertinimo metodas yra neadekvatus. Mūsų atveju yra labai mažai duomenų, taigi dispersija automatiškai gaunama didesnė.

1 lentelėje yra pateiktas ne tik modelio paklaidų dispersijos įvertinimas, bet ir modelio paklaidų bei modelio paklaidų kvadratų sumos:

	Latvija		Lietuva		Estija	
	MKM	DTM	MKM	DTM	MKM	DTM
$\sum_{x,t} \hat{\varepsilon}_{x,t}$	0.06526	0.04101	0.02098	0.01920	0.00878	0.00680
$\hat{\sigma}^2_{\varepsilon}$	0.00021	0.00016	0.00007	0.00007	0.00002	0.00001
$\sum_{x,t} \hat{\varepsilon}^2_{x,t}$	0.03378	0.02522	0.01075	0.01085	0.00192	0.00121

1 lentelė: Modelio paklaidos

Čia MKM - mažiausių kvadratų metodas, DTM - didžiausio tikėtinumo metodas.

Tiek mažiausių kvadratų metodu įvertinto modelio paklaidos, tiek didžiausio tikėtinumo metodu yra pakankamai mažos.

Dar vienas dydis, parodantis modelio adekvatumą, yra determinacijos koeficientas:

$$R^2 = \frac{RSS}{TSS} = \frac{\sum_{x,t}(\hat{\hat{m}}_{x,t} - \bar{m}_{x,t})^2}{\sum_{x,t}(\hat{m}_{x,t} - \bar{m}_{x,t})^2},$$

čia $\bar{m}_{x,t} = \frac{1}{\#t \cdot \#x} \sum_{x,t} \hat{m}_{x,t}$, RSS - įverčio $\hat{\hat{m}}_{x,t}$ pilnoji variacija, TSS - stebimo dydžio $\hat{m}_{x,t}$ pilnoji variacija.

Jei modelis parinktas teisingai ir įvertinimo metodas geras, tai $TSS \approx RSS$ arba $RSS/TSS \approx 1$. Nagrinėjamų modelių bei jų vertinimo metodų determinacijos koeficientai pateikti 2 lentelėje.

	Latvija		Lietuva		Estija	
	MKM	DTM	MKM	DTM	MKM	DTM
R^2	0.98503	0.99056	0.99340	0.99370	0.99887	0.99823

2 lentelė: Determinacijos koeficientai

Čia MKM - mažiausių kvadratų metodas, DTM - didžiausio tikėtinumo metodas.

Matome, kad determinacijos koeficientai yra labai artimi vienetui. Vadinasi, galime daryti išvadą, kad įverčiai yra pakankamai geri ir galime juos naudoti mirtingumo normų apskaičiavimui.

8 Prognozavimas

Mūsų tikslas yra ilgaamžiškumo modeliavimas. Tam turime atlikti mirtingumo normų, aprašytų pagal LC modelį prognozę. Kadangi parametrai a_x bei b_x nepriklauso nuo laiko t, todėl jų prognozuoti nereikia. Tačiau parametras k_t kinta laike, vadinasi reikia atlikti jo prognozavimą, t.y. pažiūrėti kaip kinta mirtingumas bėgant laikui.

8.1 ARIMA modelis

Kaip siūloma Lee - Carter (1992 m.) straipsnyje, prognozavimui naudosime vieną iš daugelio laiko eilučių modelių - ARIMA(p,d,q).

Apibrėžkime ARIMA(p,d,q) - autoregresijos integruotą slenkamojo vidurkio modelį (angl. Autoregressive Integrated Moving Average of order p, d, q):

$$\Phi_p(B)\Delta^d K_t = \Theta_q(B) Z_t,$$

čia:

$$\Phi(z) = 1 - \Phi_1 z - ... - \Phi_p z^p,$$

$$\Theta(z) = 1 + \Theta_1 z + ... + \Theta_q z^q$$

ir B - postūmio operatorius, t.y. $B^j K_t = K_{t-j}$. Z_t - baltas triukšmas (angl. White Noise), o Φ ir Θ - atitinkamai autoregresijos bei slenkamojo vidurkio daugianariai. Atitinkamai p ir q - autoregresijos bei slenkamojo vidurkio eilė, d - atliktų diferencijavimų skaičius, kad duomenys taptų stacionarūs.

Pirmiausia reikia nustatyti, koks modelis geriausiai atitinka turimus k_t duomenis.

ARIMA modelio parametrų p, d ir q eilę parenka dauguma statistinių paketų. Šių parametrų nustatymui naudosime paketą R. Panaudojus R procedūrą *best.arima* yra parenkamas labiausiai duomenis k_t atitinkantis modelis (t.y. parametrai p, d, q). Vienas iš modelio parinkimo kriterijų yra AIC (angl. Akaike criterion).

Nagrinėjame trijų valstybių mirtingumo lygius įvertintus dviem skirtingais metodais. Lietuvos ir Latvijos k_t eilutes statistinis paketas R siūlo prognozuoti ARIMA(0,1,0) su poslinkiu modeliu, o Estijos - ARIMA(0,1,1) su poslinkiu modeliu.

3 lentelėje pateikiami R paketo pagalba apskaičiuoti AIC ir modelio liekanų dispersija:

	Latvija		Lietuva		Estija	
	LSM	MLM	LSM	MLM	LSM	MLM
AIC	24.65	24.63	25.43	26.56	27.21	26.66
σ^2	0.4618	0.4608	0.4993	0.5588	0.4783	0.4503

3 lentelė: AIC ir σ^2

Čia MKM - mažiausių kvadratų metodas, DTM - didžiausio tikėtinumo metodas.

Modelis geriausiai atitinka nagrinėjamus duomenis, kai AIC ir modelio paklaidų dispersija yra mažiausi.

8.2 Atsitiktinis klaidžiojimas su poslinkiu

Modelis ARIMA(0,1,0) vadinamas atsitiktiniu klaidžiojimu (angl. Random walk). ARIMA(0,1,0) su poslinkiu (angl. Random walk with drift) aprašomas šia lygtimi:

$$K_t = K_{t-1} + c + Z_t,$$

kur Z_t - baltas triukšmas, c - poslinkis. Poslinkį taip pat kaip ir modelį pasiūlo paketas R. Poslinkiai pateikti 4 lentelėje:

	Latvija		Lietuva		Estija	
	LSM	MLM	LSM	MLM	LSM	MLM
c	-0.6645	-0.6570	-0.5270	-0.4826	-0.5505	-0.5457

4 lentelė: Poslinkiai c

Čia MKM - mažiausių kvadratų metodas, DTM - didžiausio tikėtinumo metodas.

Visi poslinkiai yra neigiami. Taip yra todėl, kad mirtingumo lygis krenta.

Prieš atliekant prognozavimą, reikia patikrinti, ar parinktieji modeliai pakankamai gerai atitinka duomenis. Tam yra naudojama Box-Ljung statistika, kurią generuoja visi pagrindiniai statistiniai paketai. Nė viename lage liekanų ACF neviršija kritinės srities ribų. 11.3. priede pateiktos su R pagalba nubraižytos liekanų analizės diagramos. Kaip matome, "p values for Ljung - Box statistic" nenukrenta žemiau kritinės ribos ir tam tikrais atvejais yra ganėtinai artimos 1. Tai patvirtina, kad liekanos yra baltas triukšmas ir modeliai yra adekvatūs.

Parinkus optimalius modelius, galime atlikti k_t prognozavimą. Tam naudosime statistinį paketą SAS. Panaudojus SAS procedūrą *arima*, atliekame Lietuvos, Latvijos ir Estijos k_t prognozavimą.

Prognoziniai Lietuvos skaičiai bei visų valstybių mirtingumo lygio grafinis atvaizdavimas pateikti 11.4. priede. Matome, kad mirtingumo lygis bėgant metams krenta tiesiškai.

Turint prognozinius mirtingumo lygius k_t, galime apskaičiuoti prognozines mirtingumo normas $m_{x,t}$. Kadangi tai yra tarpiniai rezultatai, tai 11.5. priede pateikiamos tik Lietuvos prognozuojamos mirtingumo normos. Kadangi visų Baltijos valstybių mirtingumo lygis krenta, tai natūralu buvo tikėtis, kad gausime kasmet mažėjančias mirtingumo normas.

8.3 Prognozinės mirtingumo lentelės

Norint sudaryti mirtingumo lenteles yra reikalingos ne mirtingumo normos, bet mirtingumo tikimybės. Išvesime mirtingumo tikimybių apskaičiavimo formulę, kai yra žinomos mirtingumo normos.

Sakykime, $s(x)$ - išgyvenamumo funkcija (angl. survival function):

$$s(x) = P\{X > x\} =_x p_0.$$

Darome prielaidą, kad $s(x)$ kinta tiesiškai intervale $[x, x+1]$. Tuomet:

$$s(x+u) = (1-u) \cdot s(x) + u \cdot s(x+1), t \in [0,1],\ x \in Z.$$

Apibrėžkime mirties intensyvumą (angl. force of mortality):

$$\mu_{x+u} = -\frac{s^{'}(x+u)}{s(x+u)}, t \in [0,1],\ x \in Z.$$

Remdamiesi prielaida apie išgyvenamumo funkciją gauname μ_{x+u} išraišką:

$$\mu_{x+u} = -\frac{s^{'}(x+u)}{s(x+u)} = \frac{s(x) - s(x+1)}{(1-u) \cdot s(x) + u \cdot s(x+1)} = \frac{q_x}{1 - u \cdot q_x},$$

nes

$$_u q_x = \frac{s(x) - s(x+u)}{s(x)} = \frac{s(x) - (1-u) \cdot s(x) + t \cdot s(x+1)}{s(x)} =$$

$$= \frac{u \cdot (s(x) - s(x+1))}{s(x)} = u \cdot q_x.$$

Mus domina m_x, taigi išreiškiame jį:

$$m_x = \frac{s(x) - s(x+1)}{\frac{1}{2}(s(x) + s(x+1))} = \frac{q_x}{1 - \frac{1}{2} q_x}.$$

Iš ką tik gautos formulės išreiškiame mirtingumo tikimybes:

$$q_x = \frac{m_x}{1 + \frac{1}{2} m_x}.$$

Mes nagrinėjame ne vienerių metų mirtingumą, taigi įvedus laiko komponentę gauname, kad:

$$q_{x,t} = \frac{m_{x,t}}{1 + \frac{1}{2} m_{x,t}},$$

kur t - nagrinėjami metai, x - nagrinėjama amžiaus grupė.

9.6. priede pateikiamos prognozinės Lietuvos vyrų mirtingumo tikimybės.

8.4 Tikėtina likusio gyvenimo trukmė

Turėdami mirtingumo lenteles, galime apskaičiuoti įvairius su populiacija susijusius dydžius. Šiame darbe mus domina ilgaamžiškumo problema, t.y. ar stebima visuomemenės senėjimo tendencija. Vienas iš rodiklių, geriausiai atsakančių į šį klausimą, yra amžiaus x grupės tikėtina gyvenimo trukmė (angl. life expectancy). Apskaičiuosime šį dydį. Jis apibrėžia metų skaičių, likusį gyventi amžiaus x grupei t - aisiais metais:

$$e_{x,t} = \frac{T_{x,t}}{l_{x,t}},$$

kur $l_{x,t}$ - amžiaus x gyventojų skaičius t - aisiais metais.

$T_{x,t}$ parodo bendrą metų skaičių, kuris tikėtina liko gyventi individams, išgyvenusiems iki amžiaus x:

$$T_{0,t} = \sum_{i=0}^{k} L_{i,t},\ T_{x,t} = T_{x-1,t} - L_{x-1,t}.$$

$L_{x,t}$ - pradinės grupės $l_{0,t}$ bendras išgyventų metų skaičius intervale $[x, x+1]$.

11.7. priede pateiktas prognozuojamas Lietuvos vyrų skaičius. Jis randamas tarus, kad mirtingumas iki 1995 metų buvo pastovus. Darome prielaidą, kad kiekvienais metais pradinė vyrų populiacija yra 1000. $l_{x,t}$ randamas pagal šią formulę:

$$l_{x,t} = l_{x-1,t-5} \cdot (1 - q_{x-1,t-5})^5,\ t = 2000,\ ,2005,\ ...\ ,x > 1$$

čia $l_{x,t}$ - amžiaus grupės x gyventojų (vyrų) skaičius t - aisiais metais,
$q_{x-1,t-5}$ - amžiaus grupės $x-1$ mirties tikimybė $t-5$ - ais metais (vienoda visiems amžiams, esantiems toje amžiaus grupėje),
$l_{1,t} = 1000$.

Šiuo metu senatvės pensijos amžius moterims yra 60 metų, o vyrams - 62 metai ir 6 mėnesiai. Pastaraisiais metais pasigirsta vis daugiau diskusijų apie pensinio amžiaus didinimą. Taigi mus labiausiai domina 60 - 65 metų vyrų tikėtina likusio gyvenimo trukmė. Šio amžiaus vyrų prognozuojamos tikėtinos gyvenimo trukmės grafinis atvaizdavimas yra pateiktas 11.8. priede. Kartu pateikta Lietuvos vyrų tikėtinos likusio gyvenimo trukmės lentelė.

LC modelio parametrai buvo vertinami dviem skirtingais skaitiniais metodais. Pastebėsime, kad mažiausių kvadratų metodo įverčiai lyginant su didžiausio tikėtinumo metodu, generuoja didesnes prognozines mirties tikimybes, kartu mažesnes likusio gyvenimo trukmes. Lietuvai šis skirtumas nėra labai didelis, tačiau Latvijos ir Estijos atveju nagrinėjamų amžiaus grupių likusio gyvenimo trukmės skiriasi beveik dvigubai.

Kodėl taip yra? Visų pirma nagrinėjami skirtingi duomenys, antra - iš LC modelio vertinant parametrus didžiausio tikėtinumo metodu, eliminavome triukšmo komponentę, tardami, kad triukšmo įtaka yra įskaičiuota į parametrą a_x. Vertinant mažiausių kvadratų metodu triukšmo įtaka buvo minimizuota. Taigi galime daryti išvadą, kad visi šie skirtumai ir generuoja skirtingus rezultatus.

Visose amžiaus grupėse ir visose valstybėse tikėtina likusio gyvenimo trukmė bėgant metams ilgėja. Nuo 2005 iki 2055 metų Lietuvos 60 - mečių vyrų tikėtina likusio gyvenimo trukmė pailgėja daugiau negu dviem metais, o 65 - erių metų vyrų - maždaug vieneriais metais. Įdomu tai, kad Lietuvos vyrai dabar gyvena vidutiniškai 1.5 metais ilgiau nei Latvijos ar Estijos vyrai.

8.5 Anuitetai

Visuomenės senėjimo problema yra labai svarbi, kai kalbame apie anuitetus (angl. annuity). Anuitetų mokėtojai susiduria su dviejų rūšių mirtingumo rizikomis: individualia, kai pavienis anuitetinių išmokų gavėjas gyvena ilgiau nei buvo tikėtasi, ir akumuliuota, kai grupė anuitetinių išmokų gavėjų vidutiniškai gyvena ilgiau nei buvo numatyta. Pirmoji rizika nėra labai grėsminga, nes galima natūrali šios rizikos diversifikacija. Antroji rizika nėra diversifikuojama, nebent riziką galima išskaidyti prisiimant kitas verslo rūšis, pavyzdžiui gyvybės draudimą, kurio rizika yra priešinga anuitetų rizikai.

Kas yra anuitetas? Anuitetas - tai pensijų gavėjui iki gyvos galvos mokama periodinė išmoka. Praktine prasme jis nesiskiria nuo Sodros mokamos pensijos.

Anuitetų yra įvairių rūšių, tačiau du populiariausi yra bazinis anuitetas ir garantuotas anuitetas.

- Bazinis anuitetas - tai anuitetas, kuris bus mokamas anuiteto naudos gavėjui iki jo mirties, nepriklausomai nuo to, kiek laiko jis dar gyvens. Bazinio anuiteto atveju sukauptos lėšos nėra paveldimos.

- Garantuotas anuitetas - tai anuitetas, kuris bus mokamas anuiteto naudos gavėjui iki jo mirties, tačiau ne trumpiau nei sutartas garantuotas periodas. Jei anuiteto naudos gavėjas miršta per garantuotą periodą, tai iki sutarto laikotarpio pabaigos anuitetines išmokas gauna mirusiojo paveldėtojai.

Natūralu, kad bazinis anuitetas yra didesnis negu anuitetas su garantuotu periodu. Kitaip sakant, garantuotas anuitetas yra brangesnis už bazinį anuitetą.

8.5.1 Pensijų fondai

Anuitetai yra glaudžiai susiję su pensiniais fondais. Trumpai aptarsime pensijų fondų istoriją Lietuvoje bei ateities vizijas, kartu pateiksime keletą skaičių apie Latvijos ir Estijos pensijų fondus.

2003 07 04 Lietuvos Respublikos seimas priėmė pensijų sistemos reformos įstatymą, kuris įsigaliojo 2003 07 30 . Šiuo įstatymu numatoma, kad asmenys, privalomai draudžiami valstybiniu socialiniu pensijų draudimu pagrindinei ir papildomai pensijos daliai gauti, išskyrus asmenis, kurie yra sulaukę senatvės pensijos amžiaus, turi teisę jų pačių pasirinkimu tapti pensijų fondo dalyviais ir kaupti šio Įstatymo nustatytą pensijų įmoką pensijų kaupimo bendrovėse. Šie pensijų fondai vadinami II pakopos pensiniais fondais. Šiuose fonduose kaupiama iš Sodros pervesta mokesčio dalis. Tai yra II pensijų kaupimo pakopos esmė.

2005 m. gruodžio 31 dieną Lietuvoje veikė 17 II pakopos pensijų fondų, kuriuos valdė 6 valdymo įmonės. Valdymo įmonių valdomų 17 II pakopos pensijų fondų bendra investicinių portfelių vertė 2005 metų pabaigoje siekė 337,42 mln. Lt, t.y. 23,37 mln. Lt daugiau negu pervesta iš Sodros.

Įsibėgėjant pensijų reformai, dauguma Lietuvos žmonių susimąstė apie tai, kokios bus jų pajamos išėjus į pensiją. Dabartiniais skaičiavimais, gaunama pensija neviršija 25 - 40% šiandien gaunamų pajamų. Tai labai maža dalis, kuri sunkiai gali garantuoti būtiniausių poreikių patenkinimą. Taigi atsirado natūralus poreikis didesniam kaupimui.

2004 startavo III pensijų fondų pakopa. Ši pakopa - tai papildomas ilgalaikis kaupimas pensijai. Dalyvauti gali visi to norintys asmenys, įskaitant ir tuos, kurie nemoka mokesčių Sodrai ir nedalyvauja I ir II pakopose. Įmokas į naujuosius papildomo savanoriško pensijų kaupimo fondus asmuo (dalyvis) moka savarankiškai pagal su valdymo įmone pasirašytą sutartį - tai reiškia, kad įmokos nėra automatiškai pervedamos. Be to, įmokas dalyvio vardu gali mokėti ir kiti asmenys, pavyzdžiui, sutuoktinis arba darbdavys.

2005 m. gruodžio mėnesį III pakopos pensijų fondų skaičius buvo 6 fondai. Juos valdė 4 valdymo įmonės. Valdomo turto vertė 2005 metų pabaigoje buvo 36,47 mln. Lt.

5 lentelėje pateikiama trumpa informacija apie Latvijos ir Estijos pensijų fondus:

Valstybė	Pakopa	Pradžia	Sukaupta vertė (mln. Lt)
Latvija	II	2001 liepos 1 d.	411,75
	III	1998 liepos 1 d.	183,21
Estija	II	2002 liepos 1 d.	1.026,52
	III	1998 lapkričio 1 d.	ND

5 lentelė: Informacija apie Latvijos ir Estijos PF. ND - nėra duomenų

Praėjo daugiau kaip 2 metai nuo papildomos pensijos kaupimo pradžios. Jau atsiranda pensinių fondų dalyvių, kuriems sukanka senatvės pensijos amžius. Taigi pamažu įsibėgės ir išmokos. Pensijų fondų dalyvis įgyja teisę gauti pensijų išmoką, kai sulaukia senatvės pensijos amžiaus. Pensijų išmoka pagal Lietuvos Respublikos pensijų kaupimo įstatymo Nr. IX - 1691 22 straipsnį apibrėžiama taip:

Pensijų išmokos gali būti mokamos šiais būdais:
1) Įstatymo nustatyta tvarka nuperkant pensijų anuitetą draudimo įmonėje, vykdančioje gyvybės draudimo veiklą;
2) išmokant vienu kartu (vienkartinę pensijų išmoką) ar dalimis (periodinę pensijų išmoką).

Pensijų anuitetas yra privalomas, jei dalyviui apskaičiuoto bazinio pensijų anuiteto dydis yra ne mažesnis kaip pusė valstybinės socialinio draudimo bazinės pensijos dydžio (šiuo metu Sodros bazinė pensija yra 200 Lt).

Šiandien pensijų fonduose dalyvių sukauptos sumos yra nedidelės, tačiau bėgant laikui šios sumos augs ir anuitetinės išmokos taps neišvengiamos.

8.5.2 Bazinis anuitetas

Panagrinėkime kaip apskaičiuojamas bazinis pensijų anuiteto dydis. Šio dydžio apskaičiavimo metodiką[1] yra patvirtinusi Lietuvos Respublikos draudimo priežiūros komisija. Remiantis šia metodika bazinis anuitetas išreiškiamas tokia formule:

$$\frac{PT}{12\left(\alpha\sum_{k=0}^{101-x-1} {}_kp_x\nu^k-\beta(1-{}_{101-x}p_x\nu^{101-x})\right)(1+\delta)}, \tag{12}$$

[1] Nutarimas Nr. N-16 "Bazinio pensijų anuiteto skaičiavimo metodika"

kur PT - pensijų fondo dalyvio vardu pensijų fonde sukaupto pensijų turto vertė,

$\nu = \dfrac{1}{1+i}$ - diskontavimo daugiklis,

$d = \dfrac{i}{1+i}$ - metinė diskontavimo norma,

i - palūkanų norma, lygi maksimaliai techninei palūkanų normai, galiojančiai anuiteto apskaičiavimo metu,

$i^{(12)} = 12\left((1+i)^{1/12} - 1\right)$ - nominali metinė palūkanų norma, palūkanas priskaitant kas mėnesį,

$d^{(12)} = 12\left(1 - \nu^{1/12}\right)$ - nominali metinė diskontavimo norma, diskontuojant kas mėnesį,

$\alpha = \dfrac{id}{i^{(12)}d^{(12)}}$, $\beta = \dfrac{i - i^{(12)}}{i^{(12)}d^{(12)}}$,

δ - atskaitymai, skirti padengti anuiteto įsigijimo ir administravimo kaštus,

${}_kp_x = \prod_{i=0}^{k-1} {}_1p_{x+i}^{M+i}$ - tikimybė amžiaus x sulaukusiam žmogui numirti per k metų,

${}_1p_{x+i}^{M+i}$ - tikimybė M -taisiais metais amžiaus x sulaukusiam žmogui išgyventi vienerius, $M+k$ - tuosius metus.

Remiantis prognozinėmis mirtingumo tikimybėmis, apskaičiuojame prognozuojamus bazinius anuitetus iki 2055 metų, taikydami šiuo metu galiojančią maksimalią techninę palūkanų normą - 2.26%. Bazinį anuitetą, kaip ir tikėtiną likusio gyvenimo trukmę skaičiuojame 60 - ies bei 65 - erių metų vyrams. 11.9. priede pateikiami visų valstybių vyrų prognozuojamų bazinių anuitetų grafinis atvaizdavimas. Jų elgesio analizė pateikiama žemiau.

Bazinis anuitetas, kaip matome iš (12) formulės, priklauso ne tik nuo mirtingumo tikimybių, bet ir nuo maksimalios techninės palūkanų normos (toliau palūkanų norma). Įdomu, kokią įtaką baziniam anuitetui daro mirtingumo bei palūkanų normos kitimas.

Šis dydis turi tiesioginę priklausomybę palūkanų normai, t.y. mažėjant palūkanų normai mažėja ir bazinis anuitetas. Taip yra todėl, kad krentant palūkanų normai krenta ir investicinė grąža. Tuo tarpu palūkanų normos augimas generuoja didesnes investicines pajamas, vadinasi didėja bazinis anuitetas. 11.9. priedo 28 brėžinyje matome kaip kinta bazinis anuitetas kintant palūkanų normai.

Bazinio anuiteto ir mirtingumo priklausomybė yra taip pat tiesioginė. Augant mirtingumui didėja mirties tikimybės, todėl laukiama, kad anuitetą reiks mokėti trumpesnį laiką, t.y. bazinio anuiteto dydis gali augti. Atvirkščiai yra kai mirtingumo tikimybės mažėja, pastebima ilgaamžiškumo tendencija. Tuomet reikia atsargiai vertinti ateities finansines galimybes ir mažinti bazinio anuiteto dydį. Mažėjančių mirtingumo tikimybių įtaką baziniam anuitetui matome 11.9. priedo 25 - 27 brėžiniuose.

Abu aprašyti (12) lygties kintamieji, tiek palūkanų norma, tiek mirtingumo tikimybės yra nuolat kintantys dydžiai. Jie kinta nepriklausomai vienas nuo kito ir gali judėti vienoda arba priešinga kryptimi. Įdomu paanalizuoti, kaip vieno kintamojo pokytį kompensuoja kito parametro pokytis. Analizuokime 65 - erių metų Lietuvos vyrų bazinius anuitetus (anuitetai apskaičiuoti LC modelį įvertinus mažiausių kvadratų metodu).

- Sakykime palūkanų norma krenta 20 b.p., t.y. 8.8% (nuo 2.26% iki 2.06%). Tuo tarpu mirtingumo tikimybes reikėtų sumažinti 4.7% (palūkanų norma nekinta), kad gautume tą patį bazinio anuiteto dydį.
- Kitas atvejis, kai palūkanų norma kyla 20 b.p., t.y. 8.8% (nuo 2.26% iki 2.46%), tuomet norint gauti tą patį bazinio anuiteto dydį, mirtingumo tikimybės turėtų padidėti apie 4.96%.

Iš šių paskaičiavimų matome, kad bazinis anuitetas yra jautresnis mirtingumo tikimybių kitimui, nei palūkanų normos svyravimams.

9 Išvados

Šio darbo tikslas - ilgaamžiškumo Baltijos valstybėse analizė. Šiam tikslui pasiekti buvo naudojamas LC moodelis. Atlikus aprašytus tarpinius skaičiavimus buvo sudarytos prognozuojamos mirtingumo lentelės 2005 - 2055 metams ir apskaičiuoti prognoziniai populiacijos dydžiai, kurie parodo ar Lietuvos, Latvijos ir Estijos populiacija senėja. Darbe gautos išvados pateikiamos žemiau.

Atlikus prognozavimą 50 - čiai metų į priekį gavome, kad mirtingumo tikimybės kasmet turėtų mažėti. Kadangi nagrinėjame tik vyrų populiacijas, tai galime teigti, kad Baltijos šalių vyrai turėtų gyventi vis ilgiau ir ilgiau. Tai turėtų džiuginti kiekvieną individą, tačiau tai kartu yra ir grėsmė.

Kadangi prognozuojamos mirtingumo tikimybės mažėja, galime daryti išvadą, kad ilgaamžiškumo problema egzistuoja. Tai patvirtina ne tik mažėjančios mirtingumo tikimybės, bet ir ilgėjanti tikėtina likusio gyvenimo trukmė.

Lyginant 1994 ir 2003 - 2004 metus, pastebime, kad kūdikių ir vaikų iki penkerių metų skaičius mažėja (Lietuvoje beveik 3 kartus). Taip pat aktualus emigracijos klausimas. Dėl šių priežasčių kinta proporcija tarp dirbančiųjų ir senatvės pensijos amžiaus sulaukusių žmonių. Kitimo tendencija yra grėsminga valstybei, kuri šiuo metu užtikrina socialinę apsaugą senatvėje, t.y. moka pensiją, bei gyvybės draudimo įmonėms, mokančioms ar ateityje įsipareigojusioms mokėti anuitetus. Beje valstybei mirtingumo lygio kritimas yra pavojingesnis, negu draudimo įmonėms.

Įvertinus ilgaamžiškumą, buvo nagrinėjama jo įtaka anuitetiniams mokėjimams. Nagrinėjant 50 metų prognozuojamą periodą grėsmė tapti nemokiems arba patirti nuostolį dėl pernelyg didelių anuitetų nėra labai didelė. Juk tikėtina likusio 65 - erių metų vyro gyvenimo trukmė pailgėja apie 2 - 3 metus. Tačiau nereikia pamiršti, kad bazinį anuitetą įtakoja ne tik mirtingumo lygis. Šis tyrimas parodė, kad bazinį anuitetą labiau įtakoja ne palūkanų norma, naudojama anuiteto skaičiavimui, bet mirtingumo kitimas. Vadinasi, galime teigti, kad gyvybės draudimo įmonės (kartu valstybė) būtinai turėtų atsižvelgti į šias dvi rizikas: mirtingumą ir palūkanų normą ir formuoti atsargius anuitetų dydžius.

Tačiau tai tik prognozės. Juk niekas nežino, kokia bus medicinos įtaka po 10 metų. Galbūt įvyks medicinos mokslo revoliucija, kuri stipriai prailgins žmonių gyvenimo trukmę. O galbūt bus priešingai, pavyzdžiui, išsivystys kokia nors nauja grėsminga liga arba įvyks kokia nors stichinė nelaimė ir nusineš daugybę gyvybių. Ateitis - tai nežinomybė, neapibrėžtumas, tačiau mes galime pabandyti prognozuoti ateitį.

Apibendrinkime šio darbo išvadas: stebima ilgaamžiškumo tendencija visose Baltijos valstybėse; mažėja mirtingumo tikimybės; anuitetai turi būti formuojami atsargūs, atsižvelgiant ne tik į mirtingumo lygį, bet ir į palūkanų normų tendencijas.

10 Literatūros sąrašas

1. Harry Gershenson, Measurement of Mortality, Society of Actuaries, Chicago, Illinois (1972).
2. B. Kvedaras, M. Sapagovas, Skaičiavimo metodai, Vilnius, Mintis (1974).
3. G. Misevičius, A. Pincevičius, R. J. Rakauskas, R. Eidukevičius, Aukštoji matematika, Vilnius, TEV (1999).
4. Newton L. Bowers, Jr., Hans U. Gerber, James C. Hickman, Donald A. Jones, Cecil J. Nesbitt, Actuarial Mathematics, Society of Actuaries, Chicago, Illinois (1986).
5. Remigijus Leipus, Finansinės laiko eilutės, Vilnius (2003).
6. Ronald D. Lee, Lawrence R. Carter, Modeling and Forecasting U.S. Mortality, Journal of the American Statistical Association 419(87) (1992).
7. Ronald Lee, Timothy Miller, Evaluating the Performance of Lee - Carter Mortality Forecasts, University of California, Berkeley (2000).
8. Leora Friedberg, Anthony Webb, Life is cheap: using mortality bonds to hedge aggregate mortality risk, Center for Retirement Research at Boston College (2005).
9. Antoni Vidiella-i-Anguera, Montserrat Guillen, Forecasting Spanish natural Life Expectancy, Universitat de Barcelona, Barcelona.
10. Bazinio pensijų anuiteto skaičiavimo metodika, Lietuvos Respublikos draudimo priežiūros komisija, Vilnius (N-16), (2004 m. vasario 24d.).
11. http://epp.eurostat.cec.eu.int/
12. http://www.wikipedia.org/
13. http://mathworld.wolfram.com/
14. http://www.sodra.lt/lt.php
15. http://www.pensijusistema.lt/
16. http://www.vpk.lt/lt/index.php
17. http://www.dpk.lt/
18. http://www.manapensija.lv

19. http://www.pensionikeskus.ee

20. http://www.medicine.lt/straipsnis.asp

11 Priedas

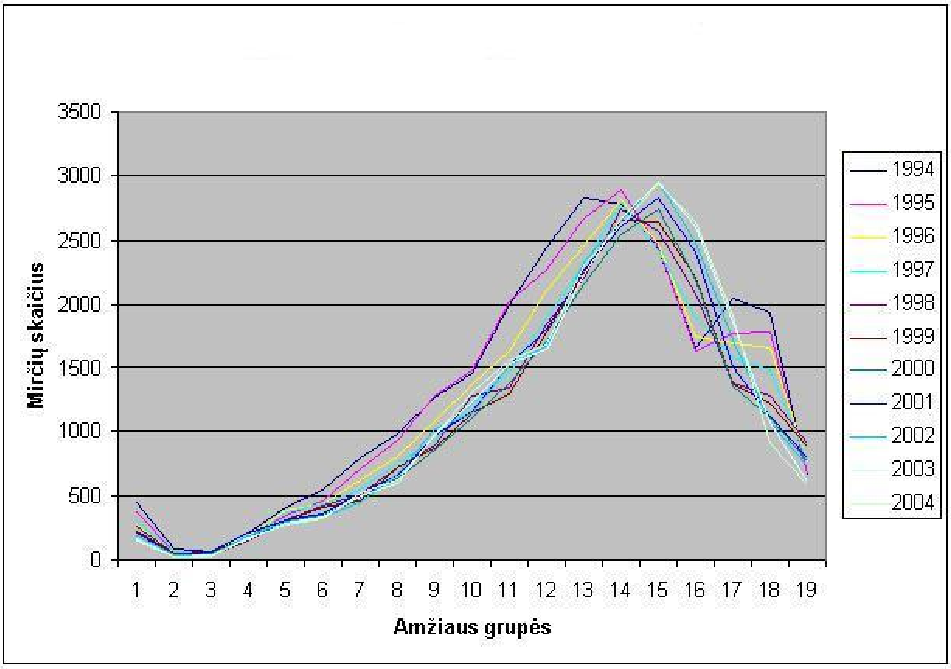
11.1. Populiacijos duomenys
Lietuva

Amžius	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
0-4	451	372	269	296	260	223	210	213	180	154	164
5-9	85	60	50	61	54	46	42	43	38	24	30
10-14	58	58	59	52	42	63	44	56	43	34	31
15-19	209	186	182	149	144	172	175	209	183	162	169
20-24	409	352	381	372	311	306	302	306	300	287	272
25-29	549	462	429	430	424	407	349	362	339	335	324
30-34	794	710	617	540	507	463	488	527	442	498	517
35-39	976	936	804	755	723	715	636	662	673	594	618
40-44	1263	1276	1080	935	898	865	858	969	1014	985	973
45-49	1448	1479	1363	1216	1273	1139	1109	1154	1145	1224	1302
50-54	1999	2025	1635	1456	1338	1296	1374	1510	1520	1529	1552
55-59	2450	2269	2108	1896	1845	1784	1712	1811	1676	1655	1686
60-64	2835	2670	2463	2313	2207	2251	2165	2276	2331	2240	2306
65-69	2779	2890	2814	2796	2737	2652	2547	2603	2657	2667	2624
70-74	2437	2443	2471	2418	2571	2643	2741	2831	2956	2952	2942
75-79	1658	1636	1750	1901	2084	2215	2192	2404	2480	2612	2644
80-84	2043	1772	1704	1573	1380	1370	1352	1497	1725	1856	1908
85-89	1942	1787	1667	1483	1278	1214	1108	1111	1066	1063	906
90-94	652	674	758	767	903	886	770	790	737	608	585
95+	283	217	237	189	207	253	229	234	309	378	313

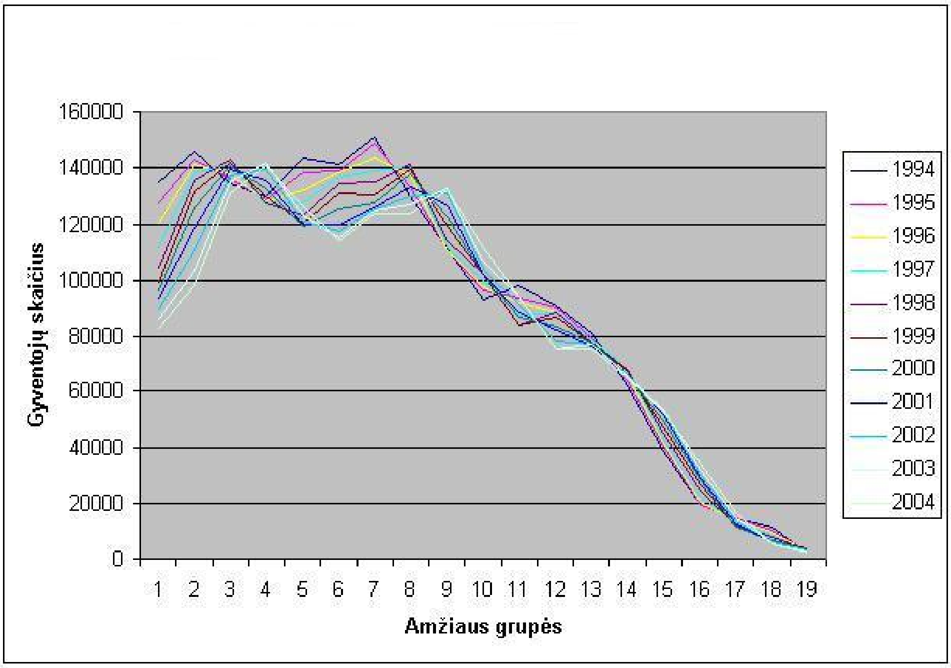
6 lentelė: Mirusių vyrų skaičius 1994-2004 m., Lietuva

Amžius	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
0-4	134845	127701	120033	111826	104175	99348	96699	93427	89812	86072	82867
5-9	145569	143129	141301	138265	135836	131807	125674	118685	110787	103307	98435
10-14	134517	136206	137883	141197	143146	142025	140714	139689	137251	135133	131090
15-19	129826	128542	128079	127145	127491	130080	132781	135353	139497	141877	140901
20-24	143642	138577	132385	127740	123260	120542	119383	119574	120744	122983	126700
25-29	141023	138731	138489	136483	134216	131123	125562	119490	117320	115097	114202
30-34	150725	148538	143757	138967	134916	130351	127451	126162	125269	124589	123466
35-39	129807	133359	137300	140927	141406	139519	137654	133119	129876	127106	123936
40-44	111324	110886	110743	111632	114182	119125	122545	126539	130969	132838	132193
45-49	93266	96694	97755	99864	102062	101870	102059	102287	103835	106716	111899
50-54	98142	93812	92059	87257	83760	83723	87031	88620	91310	93934	94134
55-59	90701	90327	88468	88337	88525	86610	83126	82246	78123	75281	75506
60-64	80952	79606	78715	78901	77986	77634	77947	76547	76913	77156	75678
65-69	61707	63501	65929	67325	67544	66737	65921	65611	65943	65259	64937
70-74	38615	40355	41489	42520	44825	47370	49110	51435	52863	53194	52591
75-79	19257	19017	20394	22043	24304	26806	28133	29151	30129	31979	34105
80-84	14945	14487	13748	13052	12015	11336	11389	12340	13507	15016	16681
85-89	11247	10404	9645	8770	7839	6910	6767	6494	6277	5757	5471
90-94	2517	2702	2748	2984	3497	3940	3619	3395	3156	2818	2512
95+	745	634	645	606	669	705	736	766	897	1192	1383

7 lentelė: Gyventojų (vyrų) skaičius 1994-2004 m., Lietuva



1 brėžinys: Mirusių vyrų skaičius 1994-2004 m., Lietuva



2 brėžinys: Gyventojų (vyrų) skaičius 1994-2004 m., Lietuva

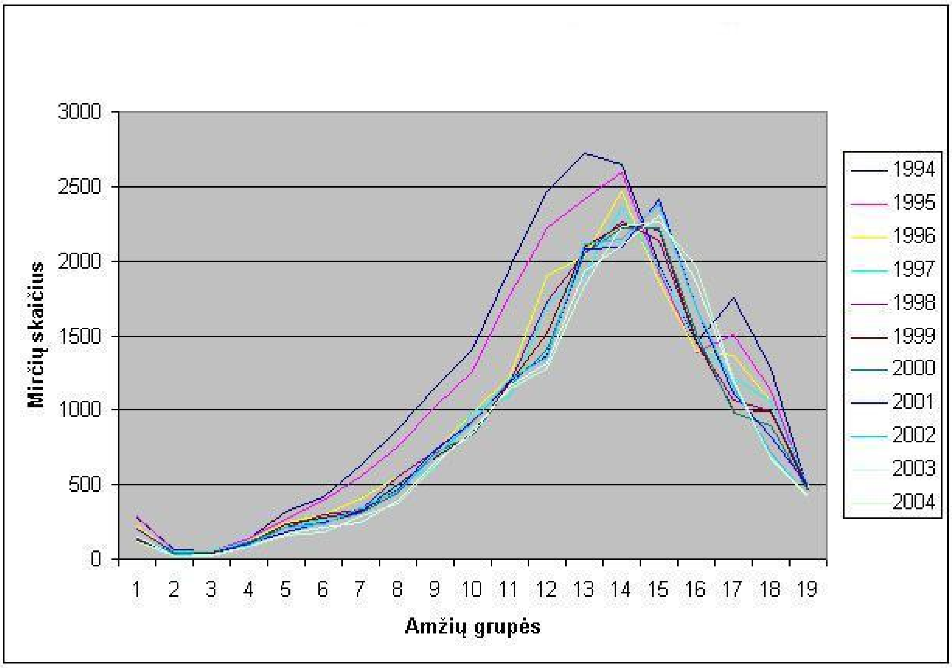
Latvija

Amžius	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
0-4	272	286	226	198	207	131	143	146	148	149	121
5-9	65	53	44	57	45	39	40	31	29	21	25
10-14	52	55	32	54	32	40	34	30	24	29	26
15-19	137	143	116	118	109	107	112	104	99	82	86
20-24	319	268	247	215	218	232	210	184	211	171	156
25-29	412	392	301	265	297	278	241	240	238	213	178
30-34	630	552	400	330	333	321	308	322	342	249	289
35-39	871	752	556	515	552	501	442	469	462	398	370
40-44	1154	1021	728	620	725	676	718	734	689	654	623
45-49	1416	1256	976	987	923	843	833	910	915	844	877
50-54	1953	1780	1220	1083	1177	1184	1163	1193	1203	1155	1135
55-59	2468	2219	1902	1718	1736	1526	1416	1363	1346	1307	1281
60-64	2723	2412	2030	1900	2057	2099	2054	2088	2116	1934	1845
65-69	2649	2597	2468	2358	2266	2243	2222	2097	2146	2103	2233
70-74	1980	1941	1861	1962	2138	2208	2228	2412	2384	2304	2262
75-79	1457	1397	1400	1477	1469	1471	1521	1688	1691	1857	1971
80-84	1758	1515	1360	1210	1061	999	977	1106	1148	1188	1202
85-89	1272	1123	1056	1049	994	990	891	815	715	677	665
90-94	461	462	483	492	494	459	461	490	415	417	427
95+	117	97	89	98	98	98	136	108	96	132	114

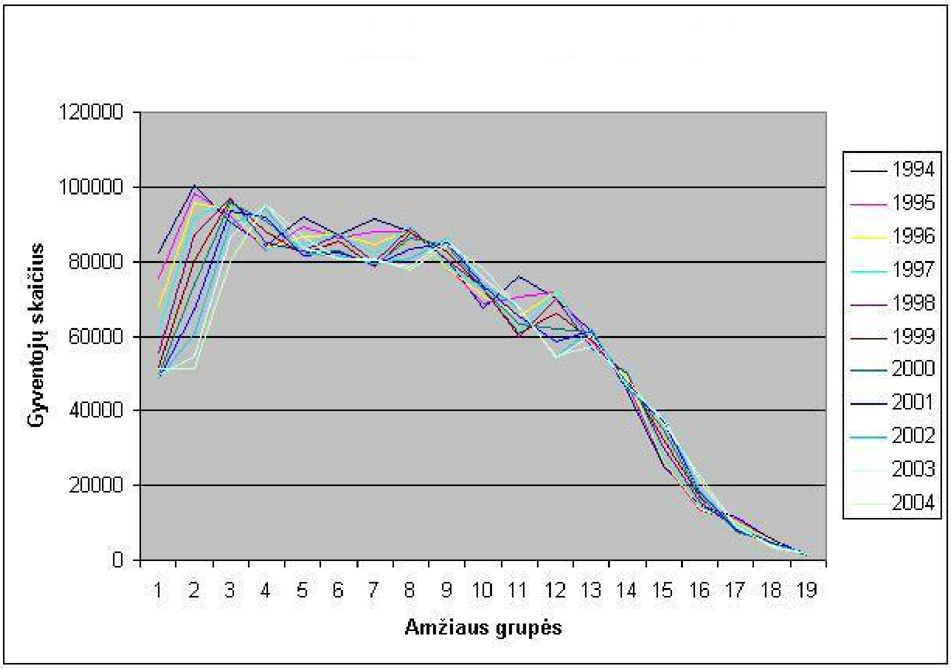
8 lentelė: Mirusių vyrų skaičius 1994-2004 m., Latvija

Amžius	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
0-4	82602	75587	68271	61632	55682	51677	49350	48638	48606	49306	50872
5-9	100221	98190	95816	91937	87072	80498	74042	67307	60851	54880	51256
10-14	90658	92389	94121	96180	97221	96734	95590	93508	90219	86394	80179
15-19	84202	83175	83248	83398	85006	88179	90857	92084	93837	95334	95138
20-24	91994	89469	86893	84472	82936	82319	81952	81874	82272	83793	86835
25-29	87110	86501	87112	87864	87109	85609	83182	82618	81844	80838	80640
30-34	91569	88188	84851	82038	79942	78857	78995	79135	79746	80491	80832
35-39	88166	88062	88643	89670	89143	87849	86212	83430	80828	78640	77685
40-44	80314	78562	78420	78731	80461	82696	84366	85090	86355	86102	84812
45-49	67833	69075	71023	72897	73362	72854	72816	73484	73935	75694	78408
50-54	76176	70690	65603	61186	60029	61004	63443	65506	67530	67978	67540
55-59	70371	72080	72063	72185	70013	66410	62255	58712	54816	53839	54574
60-64	61466	58890	57100	56633	57118	59070	61252	61892	62143	60243	57515
65-69	44904	46731	48752	50317	49787	48233	46718	46039	45716	46335	47998
70-74	25071	25785	26459	27264	30165	32546	34941	37143	38326	37898	36802
75-79	14432	13354	13660	14468	15451	16455	16876	17983	18507	20663	22336
80-84	11465	11151	10324	9476	8432	7954	7568	7993	8591	9022	9454
85-89	5383	4983	4929	4830	4846	4793	4747	4563	4110	3738	3596
90-94	1347	1316	1354	1425	1505	1461	1470	1588	1587	1548	1542
95+	218	143	155	198	203	240	256	266	297	321	322

9 lentelė: Gyventojų (vyrų) skaičius 1994-2004 m., Latvija



3 brėžinys: Mirusių vyrų skaičius 1994-2004 m., Latvija



4 brėžinys: Gyventojų (vyrų) skaičius 1994-2004 m., Latvija

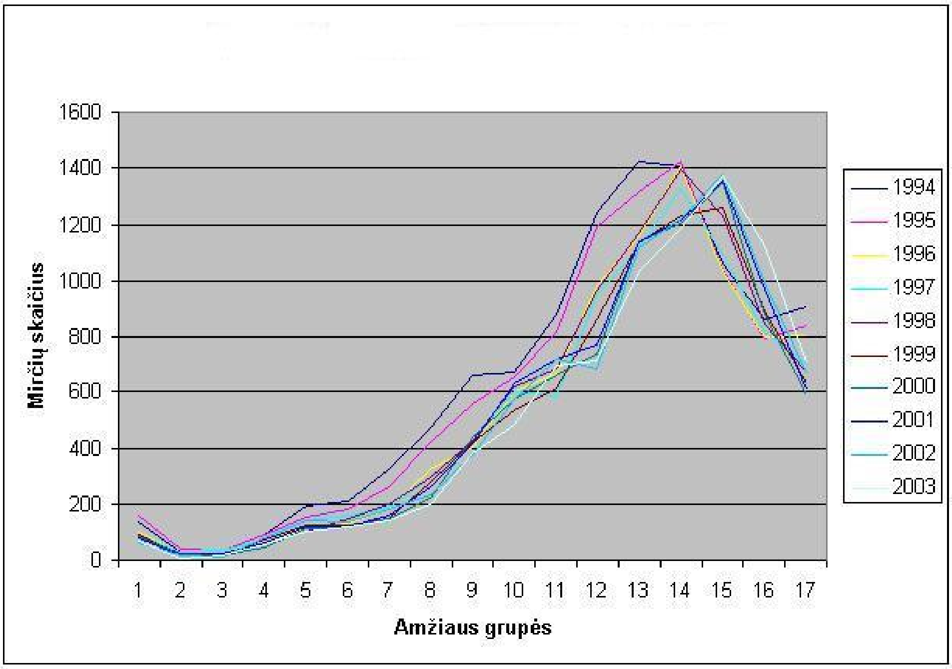
Estija

Amžius	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
0-4	138	159	100	88	83	89	83	77	64	70
5-9	26	38	25	29	21	16	17	15	15	7
10-14	35	35	25	32	22	15	19	23	13	17
15-19	90	90	57	74	59	74	48	62	78	54
20-24	191	156	113	142	103	123	114	120	143	101
25-29	210	181	132	157	149	125	119	118	139	120
30-34	321	259	179	188	198	150	147	157	179	143
35-39	469	419	324	297	297	277	224	261	235	198
40-44	656	557	403	419	424	419	435	413	377	380
45-49	670	655	599	604	621	536	573	628	575	484
50-54	880	815	666	583	683	612	657	717	716	692
55-59	1245	1194	979	948	963	862	736	771	679	710
60-64	1426	1318	1159	1116	1171	1137	1141	1139	1117	1033
65-69	1409	1425	1405	1329	1396	1233	1202	1217	1220	1184
70-74	1063	1040	1034	1096	1232	1257	1348	1354	1376	1372
75-79	862	797	800	817	847	891	881	973	994	1126
80-84	910	838	808	696	668	627	589	608	665	706
85+	781	769	759	745	809	814	769	759	712	763

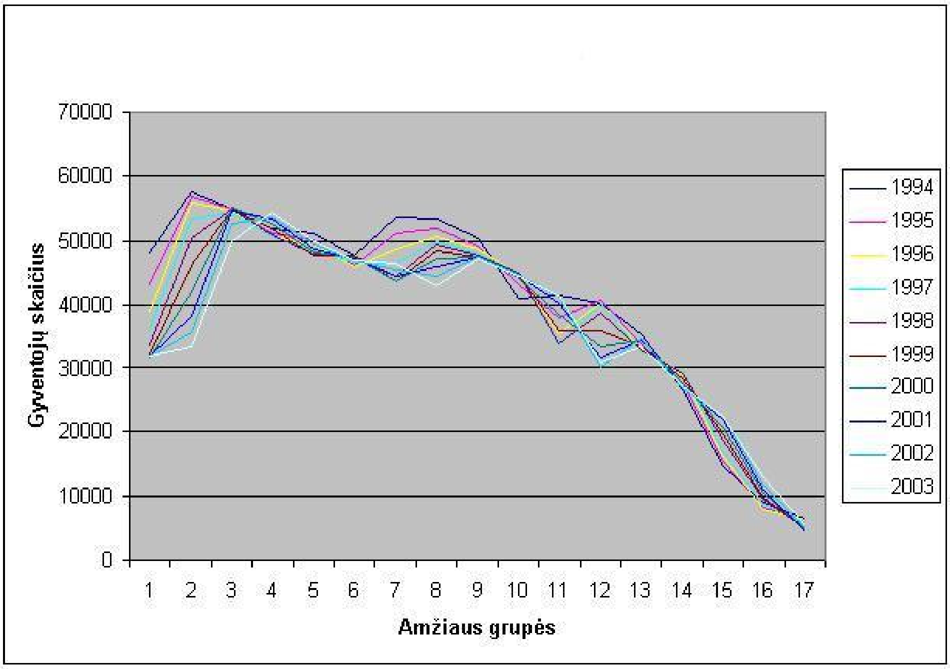
10 lentelė: Mirusių vyrų skaičius 1994-2004 m., Estija

Amžius	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
0-4	48173	43139	38989	36288	33830	32352	31587	31775	31731	32012
5-9	57511	56881	55749	53247	50266	46270	41918	38177	35728	33436
10-14	54758	54759	54681	54327	54882	54895	55006	54607	52725	49985
15-19	51869	51026	50609	50716	50911	51850	52677	53332	53608	54436
20-24	51082	50231	49383	48373	47941	47776	48130	48576	49447	50013
25-29	47723	46085	45953	46653	47512	47555	47326	47180	46843	46842
30-34	53590	51191	48676	46449	44476	43799	43647	44340	45390	46481
35-39	53312	51933	50755	49885	49412	48365	47206	45808	44451	43018
40-44	50322	49147	48749	48025	47540	47481	47468	47310	47328	47275
45-49	40888	43102	44557	44906	44957	44613	44276	44783	44638	44554
50-54	41472	38081	35554	33683	34112	35890	38384	40229	41192	41446
55-59	40172	40765	40130	40275	38675	35908	33414	31584	30158	30717
60-64	35408	34125	33165	32762	32917	33515	34487	34402	34767	33478
65-69	26564	27528	28737	29246	29084	28280	27514	26986	26781	27144
70-74	14678	15396	16143	16972	18533	19572	20717	21834	22390	22274
75-79	8874	8264	8043	8610	9355	9764	10361	11019	11687	12846
80-84	6408	6315	6155	5621	4965	4859	4666	4584	4975	5454
85+	3196	3296	3327	3452	3631	3515	3660	3658	3487	3285

11 lentelė: Gyventojų (vyrų) skaičius 1994-2004 m., Estija



5 brėžinys: Mirusių vyrų skaičius 1994-2004 m., Estija



6 brėžinys: Gyventojų (vyrų) skaičius 1994-2004 m., Estija

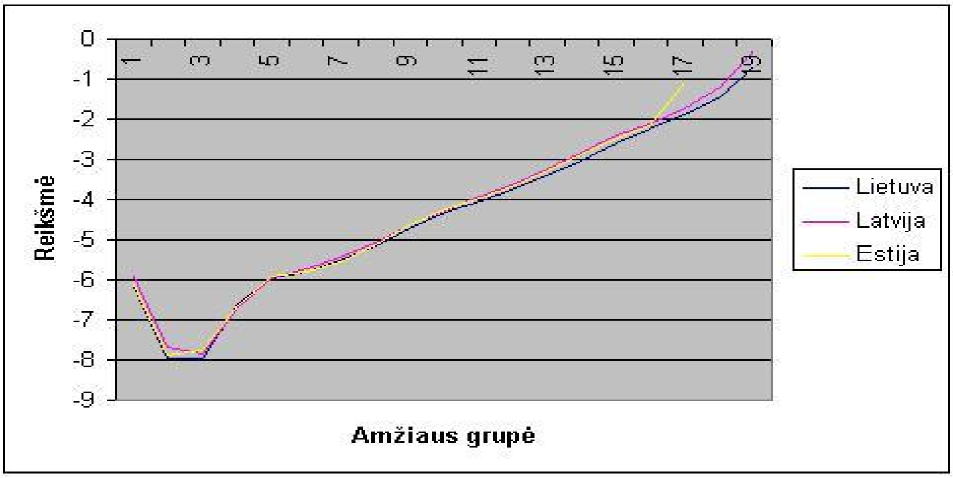
11.2. LC modelio parametrų įverčiai

	MKM		DTM			MKM	DTM
Amžius	a_x	b_x	a_x	b_x	Metai	k_t	k_t
0-4	-6,16319	0,10893	-6,16319	0,11199	1994	3,44318	3,41447
5-9	-7,96422	0,15118	-7,96422	0,13067	1995	2,31746	2,34903
10-14	-7,94717	0,10737	-7,94717	0,0786	1996	0,99634	0,99899
15-19	-6,60774	0,02065	-6,60774	0,01686	1997	0,67928	0,59332
20-24	-5,9724	0,03142	-5,9724	0,02931	1998	-0,2197	-0,28447
25-29	-5,80033	0,0472	-5,80033	0,04755	1999	-0,38938	-0,49801
30-34	-5,50164	0,06665	-5,50164	0,07621	2000	-1,21069	-1,28713
35-39	-5,16424	0,10422	-5,16424	0,10708	2001	-0,33452	-0,42621
40-44	-4,70562	0,08734	-4,70562	0,09277	2002	-1,11458	-1,15368
45-49	-4,33786	0,04796	-4,33786	0,05082	2003	-2,34103	-2,29521
50-54	-4,02992	0,03703	-4,02992	0,04436	2004	-1,82637	-1,41109
55-59	-3,76211	0,04971	-3,76211	0,05426			
60-64	-3,41399	0,03874	-3,41399	0,04336			
65-69	-3,03138	0,04631	-3,03138	0,05002			
70-74	-2,60298	0,03826	-2,60298	0,0402			
75-79	-2,22413	-0,02796	-2,22413	-0,02677			
80-84	-1,86455	-0,02982	-1,86455	-0,02794			
85-89	-1,42214	0,04116	-1,42214	0,04646			
90-94	-0,66566	0,03365	-0,66566	0,03419			

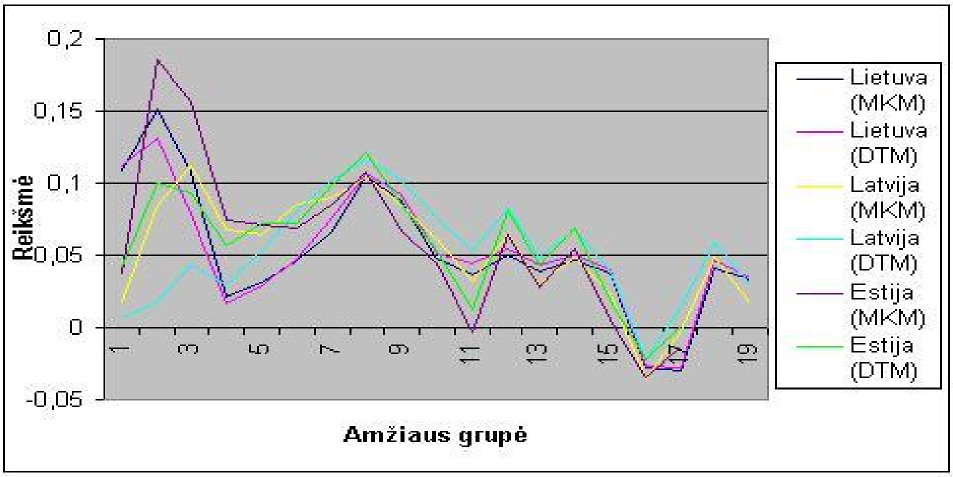
12 lentelė: Parametrų a_x, b_x ir k_t įverčiai, Lietuva

Čia MKM - mažiausių kvadratų metodas,
DTM - didžiausio tikėtinumo metodas.

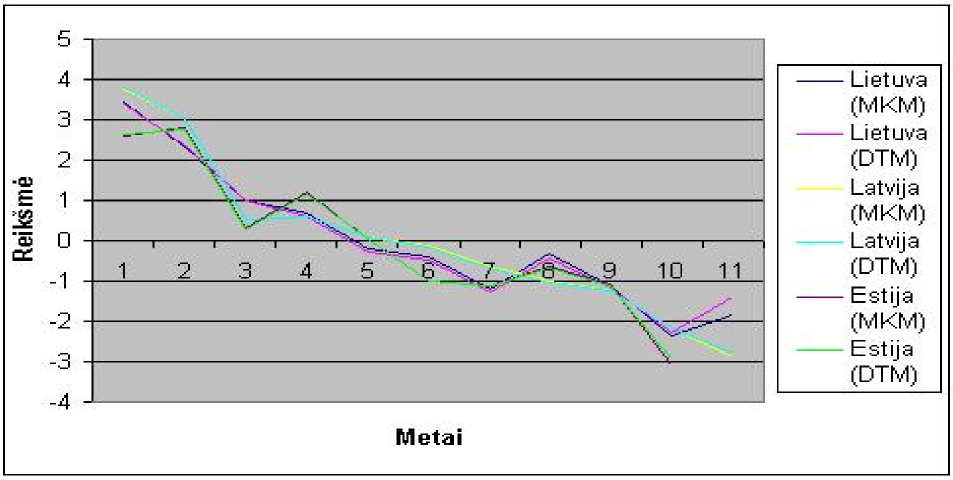
Grafinis atvaizdavimas



7 brėžinys: Parametro a_x įverčiai



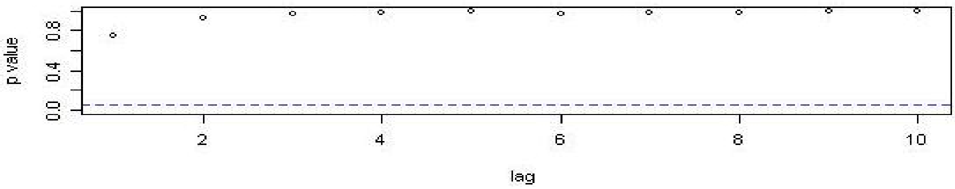
8 brėžinys: Parametro b_x įverčiai



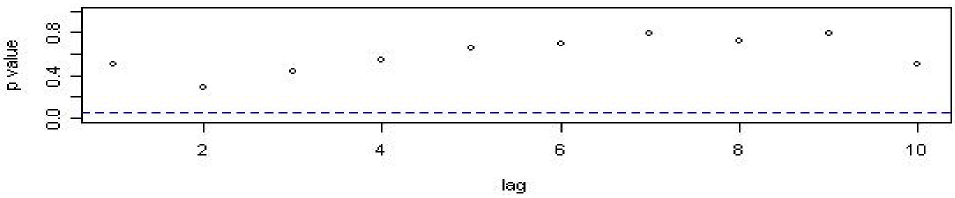
9 brėžinys: Parametro k_t įverčiai

Čia MKM - mažiausių kvadratų metodas,
DTM - didžiausio tikėtinumo metodas.

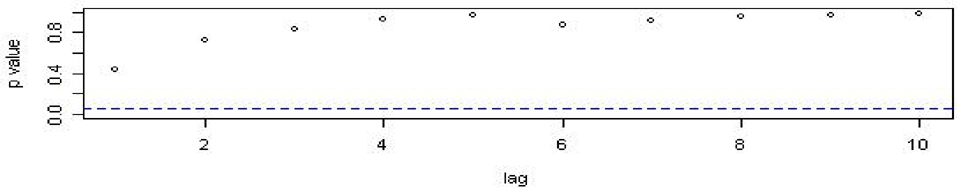
11.3. Box-Ljung statistika



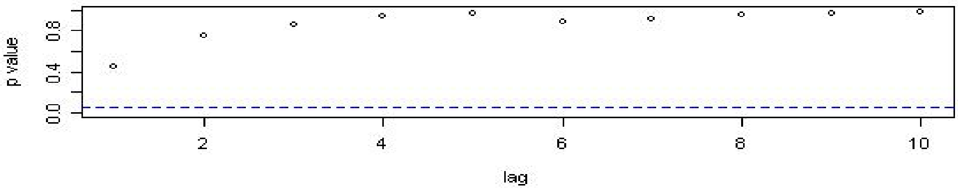
10 brėžinys: p values for Ljung-Box statistic, Lietuva (MKM)



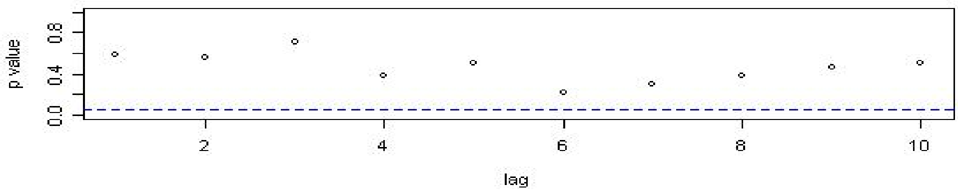
11 brėžinys: p values for Ljung-Box statistic, Lietuva (DTM)



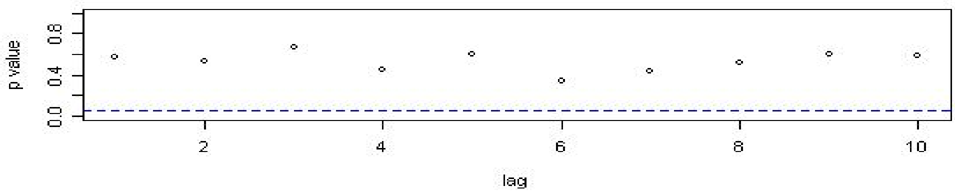
12 brėžinys: p values for Ljung-Box statistic, Latvija (MKM)



13 brėžinys: p values for Ljung-Box statistic, Latvija (DTM)



14 brėžinys: p values for Ljung-Box statistic, Estija (MKM)



15 brėžinys: p values for Ljung-Box statistic, Estija (DTM)

Čia MKM - mažiausių kvadratų metodas,
DTM - didžiausio tikėtinumo metodas.

11.4. Parametro k_t prognozė

Metai[2]	k_t	Metai	k_t	Metai	k_t
1994	3,4432	2028	-14,4744	2062	-32,3924
1995	2,3175	2029	-15,0014	2063	-32,9194
1996	0,9963	2030	-15,5284	2064	-33,4464
1997	0,6793	2031	-16,0554	2065	-33,9734
1998	-0,2197	2032	-16,5824	2066	-34,5004
1999	-0,3894	2033	-17,1094	2067	-35,0274
2000	-1,2107	2034	-17,6364	2068	-35,5544
2001	-0,3345	2035	-18,1634	2069	-36,0814
2002	-1,1146	2036	-18,6904	2070	-36,6084
2003	-2,341	2037	-19,2174	2071	-37,1354
2004	-1,8264	2038	-19,7444	2072	-37,6624
2005	-2,3534	2039	-20,2714	2073	-38,1894
2006	-2,8804	2040	-20,7984	2074	-38,7164
2007	-3,4074	2041	-21,3254	2075	-39,2434
2008	-3,9344	2042	-21,8524	2076	-39,7704
2009	-4,4614	2043	-22,3794	2077	-40,2974
2010	-4,9884	2044	-22,9064	2078	-40,8244
2011	-5,5154	2045	-23,4334	2079	-41,3514
2012	-6,0424	2046	-23,9604	2080	-41,8784
2013	-6,5694	2047	-24,4874	2081	-42,4054
2014	-7,0964	2048	-25,0144	2082	-42,9324
2015	-7,6234	2049	-25,5414	2083	-43,4594
2016	-8,1504	2050	-26,0684	2084	-43,9864
2017	-8,6774	2051	-26,5954	2085	-44,5134
2018	-9,2044	2052	-27,1224	2086	-45,0404
2019	-9,7314	2053	-27,6494	2087	-45,5674
2020	-10,2584	2054	-28,1764	2088	-46,0944
2021	-10,7854	2055	-28,7034	2089	-46,6214
2022	-11,3124	2056	-29,2304	2090	-47,1484
2023	-11,8394	2057	-29,7574	2091	-47,6754
2024	-12,3664	2058	-30,2844	2092	-48,2024
2025	-12,8934	2059	-30,8114	2093	-48,7294
2026	-13,4204	2060	-31,3384		
2027	-13,9474	2061	-31,8654		

13 lentelė: Parametro k_t, įvertinto mažiausių kvadratų metodu, prognozė, Lietuva

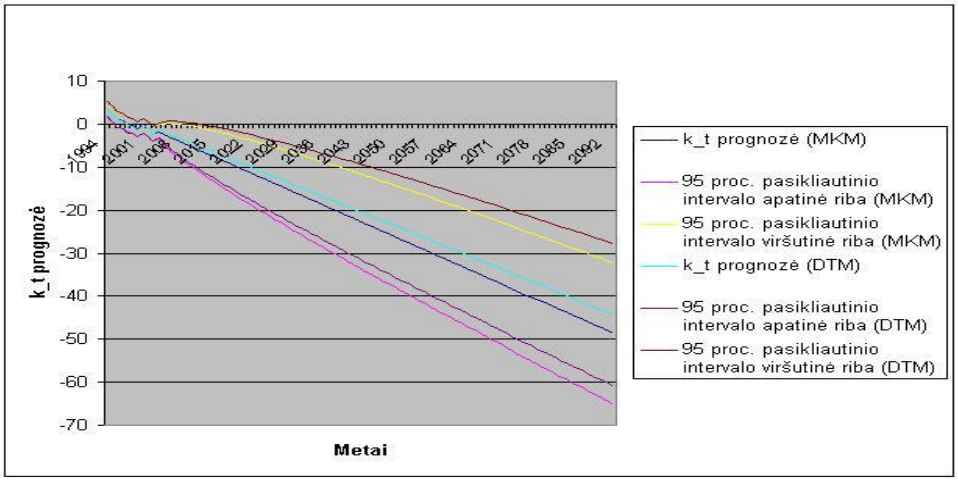
[2]Prognozuojami skaičiai nuo 2005 metų

Metai[3]	k_t	Metai	k_t	Metai	k_t
1994	3,4145	2028	-12,9935	2062	-29,4019
1995	2,349	2029	-13,4761	2063	-29,8845
1996	0,999	2030	-13,9587	2064	-30,3671
1997	0,5933	2031	-14,4413	2065	-30,8497
1998	-0,2845	2032	-14,9239	2066	-31,3323
1999	-0,498	2033	-15,4065	2067	-31,8149
2000	-1,2871	2034	-15,8891	2068	-32,2975
2001	-0,4262	2035	-16,3717	2069	-32,7801
2002	-1,1537	2036	-16,8543	2070	-33,2627
2003	-2,2952	2037	-17,3369	2071	-33,7453
2004	-1,4111	2038	-17,8195	2072	-34,2279
2005	-1,8937	2039	-18,3021	2073	-34,7105
2006	-2,3763	2040	-18,7847	2074	-35,1931
2007	-2,8589	2041	-19,2673	2075	-35,6757
2008	-3,3415	2042	-19,7499	2076	-36,1583
2009	-3,8241	2043	-20,2325	2077	-36,6409
2010	-4,3067	2044	-20,7151	2078	-37,1235
2011	-4,7893	2045	-21,1977	2079	-37,6061
2012	-5,2719	2046	-21,6803	2080	-38,0887
2013	-5,7545	2047	-22,1629	2081	-38,5713
2014	-6,2371	2048	-22,6455	2082	-39,0539
2015	-6,7197	2049	-23,1281	2083	-39,5365
2016	-7,2023	2050	-23,6107	2084	-40,0191
2017	-7,6849	2051	-24,0933	2085	-40,5017
2018	-8,1675	2052	-24,5759	2086	-40,9843
2019	-8,6501	2053	-25,0585	2087	-41,4669
2020	-9,1327	2054	-25,5411	2088	-41,9495
2021	-9,6153	2055	-26,0237	2089	-42,4321
2022	-10,0979	2056	-26,5063	2090	-42,9147
2023	-10,5805	2057	-26,9889	2091	-43,3973
2024	-11,0631	2058	-27,4715	2092	-43,8799
2025	-11,5457	2059	-27,9541	2093	-44,3625
2026	-12,0283	2060	-28,4367		
2027	-12,5109	2061	-28,9193		

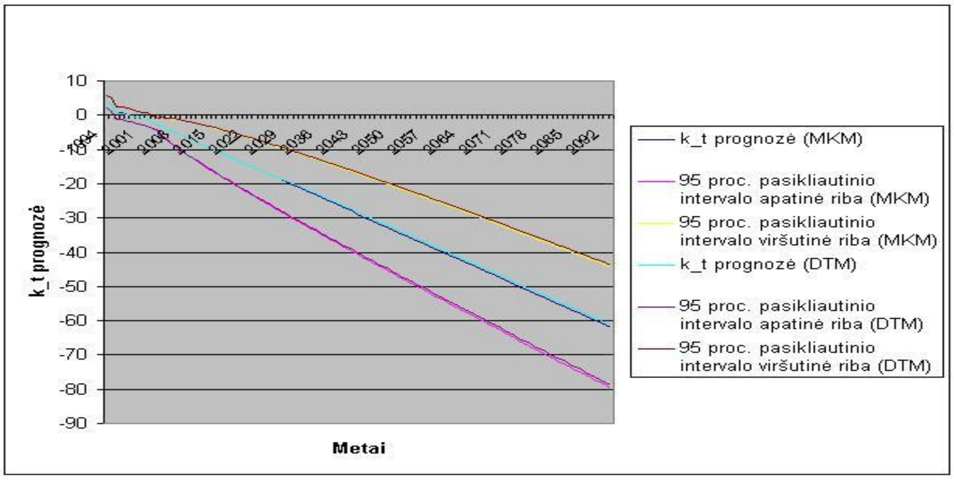
14 lentelė: Parametro k_t, įvertinto didžiausio tikėtinumo metodu, prognozė, Lietuva

[3]Prognozuojami skaičiai nuo 2005 metų

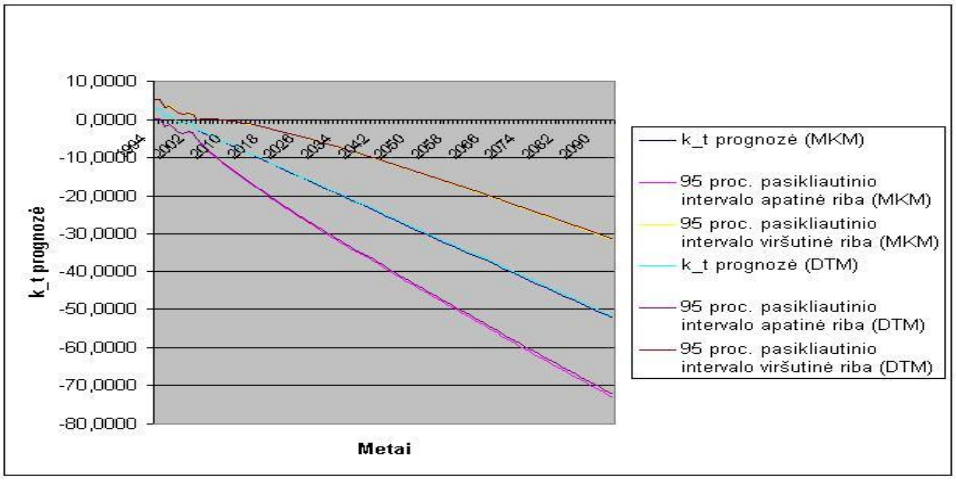
Grafinis atvaizdavimas



16 brėžinys: Parametro k_t prognozė, Lietuva



17 brėžinys: Parametro k_t prognozė, Latvija



18 brėžinys: Parametro k_t prognozė, Estija

Čia MKM - mažiausių kvadratų metodas,
DTM - didžiausio tikėtinumo metodas.
Prognozuojami skaičiai nuo 2005 metų (Estijai nuo 2004 metų).

11.5. Prognozuojamos mirtingumo normos

Amžius	Metai[4]					
	2000	2010	2020	2030	2040	2050
0-4	1,85	1,22	0,69	0,39	0,22	0,12
5-9	0,29	0,16	0,07	0,03	0,01	0,01
10-14	0,31	0,21	0,12	0,07	0,04	0,02
15-19	1,32	1,22	1,09	0,98	0,88	0,79
20-24	2,45	2,18	1,85	1,56	1,33	1,12
25-29	2,86	2,39	1,86	1,45	1,13	0,88
30-34	3,76	2,93	2,06	1,45	1,02	0,72
35-39	5,04	3,4	1,96	1,13	0,65	0,38
40-44	8,14	5,85	3,69	2,33	1,47	0,93
45-49	12,33	10,28	7,99	6,2	4,82	3,74
50-54	17	14,78	12,16	10	8,23	6,77
55-59	21,88	18,13	13,95	10,74	8,26	6,36
60-64	31,4	27,13	22,12	18,03	14,7	11,99
65-69	45,62	38,3	30	23,51	18,42	14,43
70-74	70,7	61,19	50,02	40,88	33,42	27,32
75-79	111,89	124,35	144,1	166,98	193,49	224,21
80-84	160,66	179,82	210,43	246,24	288,15	337,19
85-89	229,47	196,42	158,12	127,28	102,46	82,48
90-94	493,42	434,51	363,89	304,75	255,22	213,75

15 lentelė: Prognozuojama mirtingumo norma 1000 - čiui vyrų, LC modelio parametrus įvertinus mažiausių kvadratų metodu, Lietuva

Amžius	Metai[4]					
	2000	2010	2020	2030	2040	2050
0-4	1,82	1,3	0,76	0,44	0,26	0,15
5-9	0,29	0,2	0,11	0,06	0,03	0,02
10-14	0,32	0,25	0,17	0,12	0,08	0,06
15-19	1,32	1,26	1,16	1,07	0,98	0,91
20-24	2,45	2,25	1,95	1,69	1,47	1,28
25-29	2,85	2,47	1,96	1,56	1,24	0,98
30-34	3,7	2,94	2,03	1,41	0,97	0,67
35-39	4,98	3,61	2,15	1,28	0,76	0,46
40-44	8,03	6,07	3,88	2,48	1,58	1,01
45-49	12,24	10,5	8,21	6,43	5,03	3,94
50-54	16,79	14,68	11,85	9,57	7,73	6,24
55-59	21,67	18,39	14,15	10,89	8,38	6,45
60-64	31,12	27,3	22,15	17,97	14,57	11,82
65-69	45,24	38,9	30,56	24	18,86	14,81
70-74	70,32	62,28	51,3	42,25	34,8	28,67
75-79	111,95	121,38	138,12	157,17	178,85	203,52
80-84	160,64	174,78	200,01	228,88	261,92	299,72
85-89	227,2	197,46	157,79	126,1	100,77	80,53
90-94	491,81	443,56	376,09	318,88	270,37	229,24

16 lentelė: Prognozuojama mirtingumo norma 1000 - čiui vyrų, LC modelio parametrus įvertinus didžiausio tikėtinumo metodu, Lietuva

[4] Prognozuojami skaičiai nuo 2005 metų

11.6. Prognozuojamos mirtingumo tikimybės

Amžius	Metai[5]					
	2000	2010	2020	2030	2040	2050
0-4	1,84	1,22	0,69	0,39	0,22	0,12
5-9	0,29	0,16	0,07	0,03	0,01	0,01
10-14	0,31	0,21	0,12	0,07	0,04	0,02
15-19	1,32	1,22	1,09	0,98	0,88	0,79
20-24	2,45	2,18	1,84	1,56	1,32	1,12
25-29	2,85	2,39	1,86	1,45	1,13	0,88
30-34	3,76	2,92	2,06	1,45	1,02	0,72
35-39	5,03	3,39	1,96	1,13	0,65	0,38
40-44	8,1	5,83	3,69	2,33	1,47	0,93
45-49	12,25	10,23	7,96	6,18	4,81	3,73
50-54	16,85	14,67	12,08	9,95	8,2	6,75
55-59	21,64	17,97	13,86	10,68	8,23	6,34
60-64	30,92	26,76	21,87	17,87	14,59	11,92
65-69	44,6	37,58	29,56	23,23	18,25	14,33
70-74	68,29	59,37	48,8	40,06	32,87	26,95
75-79	105,96	117,07	134,41	154,11	176,42	201,61
80-84	148,72	164,99	190,4	219,25	251,86	288,55
85-89	205,85	178,86	146,53	119,67	97,47	79,21
90-94	395,77	356,96	307,88	264,46	226,34	193,11

17 lentelė: Prognozuojamos mirtingumo tikimybės 1000 - čiui vyrų, LC modelio parametrus įvertinus mažiausių kvadratų metodu, Lietuva

Amžius	Metai[5]					
	2000	2010	2020	2030	2040	2050
0-4	1,82	1,3	0,76	0,44	0,26	0,15
5-9	0,29	0,2	0,11	0,06	0,03	0,02
10-14	0,32	0,25	0,17	0,12	0,08	0,06
15-19	1,32	1,25	1,16	1,07	0,98	0,91
20-24	2,45	2,24	1,95	1,69	1,47	1,27
25-29	2,84	2,46	1,96	1,56	1,24	0,98
30-34	3,69	2,93	2,03	1,41	0,97	0,67
35-39	4,97	3,6	2,15	1,28	0,76	0,46
40-44	7,99	6,05	3,87	2,47	1,58	1,01
45-49	12,16	10,44	8,18	6,41	5,02	3,93
50-54	16,65	14,58	11,78	9,52	7,7	6,22
55-59	21,44	18,22	14,06	10,83	8,35	6,43
60-64	30,65	26,94	21,91	17,81	14,47	11,75
65-69	44,24	38,16	30,1	23,72	18,68	14,7
70-74	67,93	60,4	50,02	41,38	34,21	28,26
75-79	106,02	114,44	129,2	145,72	164,17	184,72
80-84	148,7	160,73	181,83	205,38	231,59	260,66
85-89	204,02	179,71	146,25	118,62	95,94	77,41
90-94	394,74	363,05	316,56	275,03	238,17	205,67

18 lentelė: Prognozuojamos mirtingumo tikimybės 1000 - čiui vyrų, LC modelio parametrus įvertinus didžiausio tikėtinumo metodu, Lietuva

[5] Prognozuojami skaičiai nuo 2005 metų

11.7. Prognozuojamas gyventojų (vyrų) skaičius

Amžius	Metai[6]					
	2000	2010	2020	2030	2040	2050
0-4	1000	1000	1000	1000	1000	1000
5-9	987	992	995	997	999	999
10-14	984	990	993	996	998	999
15-19	982	984	990	995	997	998
20-24	975	976	983	988	991	994
25-29	962	964	968	977	983	987
30-34	946	950	956	966	974	980
35-39	923	932	941	951	964	973
40-44	890	907	924	939	955	966
45-49	842	868	895	918	937	955
50-54	783	806	842	876	903	928
55-59	711	730	771	814	851	881
60-64	624	649	692	745	795	836
65-69	521	548	590	651	711	764
70-74	398	430	478	542	614	681
75-79	266	296	343	405	481	557
80-84	160	157	162	171	179	183
85-89	78	66	60	53	46	38
90-94	20	24	26	28	28	27

19 lentelė: Prognozuojamas gyventojų (vyrų) skaičius, LC modelio parametrus įvertinus mažiausių kvadratų metodu, Lietuva

Amžius	Metai[6]					
	2000	2010	2020	2030	2040	2050
0-4	1000	1000	1000	1000	1000	1000
5-9	986	992	995	997	998	999
10-14	984	990	993	996	998	999
15-19	982	983	990	994	996	998
20-24	975	976	982	986	990	992
25-29	962	964	967	975	981	985
30-34	946	950	955	964	971	978
35-39	923	932	940	950	962	971
40-44	890	907	923	937	953	964
45-49	841	867	893	916	934	952
50-54	781	805	840	873	900	925
55-59	708	729	770	813	850	880
60-64	620	647	690	744	794	834
65-69	517	546	588	649	710	763
70-74	394	426	475	540	611	679
75-79	262	293	339	400	475	552
80-84	158	157	163	176	189	197
85-89	76	66	62	58	53	47
90-94	20	23	27	30	32	32

20 lentelė: Prognozuojamas gyventojų (vyrų) skaičius, LC modelio parametrus įvertinus didžiausio tikėtinumo metodu, Lietuva

[6] Prognozuojami skaičiai nuo 2005 metų

11.8. Prognozuojama tikėtina likusio gyvenimo trukmė

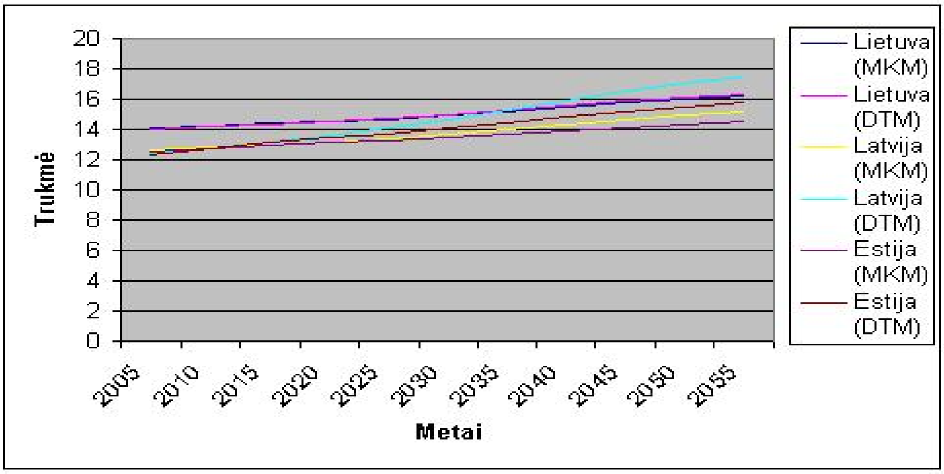
Amžius	Metai[7]					
	2000	2010	2020	2030	2040	2050
0-4	62,76	63,84	65,56	67,57	69,54	71,24
5-9	58,58	59,35	60,85	62,74	64,63	66,3
10-14	53,72	54,48	55,97	57,8	59,67	61,32
15-19	48,84	49,79	51,13	52,9	54,73	56,35
20-24	44,17	45,15	46,5	48,25	50,02	51,61
25-29	39,74	40,69	42,17	43,77	45,44	46,95
30-34	35,38	36,25	37,69	39,23	40,84	42,26
35-39	31,17	31,92	33,24	34,81	36,24	37,54
40-44	27,23	27,7	28,79	30,23	31,55	32,78
45-49	23,64	23,85	24,66	25,85	27,11	28,15
50-54	20,24	20,48	21,04	21,97	23,04	23,89
55-59	17,05	17,36	17,76	18,46	19,3	20,03
60-64	14,07	14,23	14,51	14,92	15,47	15,98
65-69	11,35	11,37	11,58	11,74	12,01	12,25
70-74	9,08	8,83	8,7	8,58	8,51	8,44
75-79	7,36	6,69	6,13	5,64	5,17	4,75
80-84	5,58	5,4	5,21	4,94	4,66	4,38
85-89	3,85	4,39	4,84	5,34	5,93	6,57
90-94	2,64	2,73	2,81	2,96	3,12	3,3

21 lentelė: Prognozuojama tikėtina likusio vyrų gyvenimo trukmė, LC modelio parametrus įvertinus mažiausių kvadratų metodu, Lietuva

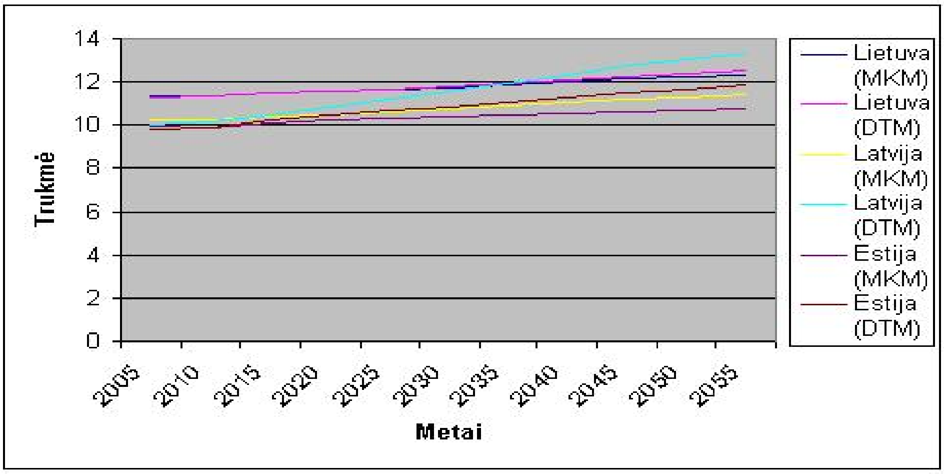
Amžius	Metai[7]					
	2000	2010	2020	2030	2040	2050
0-4	62,63	63,77	65,47	67,5	69,5	71,25
5-9	58,46	59,29	60,79	62,69	64,61	66,32
10-14	53,59	54,4	55,92	57,76	59,66	61,35
15-19	48,7	49,73	51,1	52,88	54,73	56,39
20-24	44,03	45,08	46,45	48,25	50,06	51,68
25-29	39,6	40,62	42,14	43,79	45,51	47,07
30-34	35,23	36,18	37,66	39,24	40,93	42,4
35-39	31,04	31,84	33,19	34,82	36,31	37,68
40-44	27,11	27,64	28,76	30,25	31,63	32,93
45-49	23,53	23,81	24,65	25,88	27,21	28,31
50-54	20,14	20,43	21,05	22,03	23,16	24,07
55-59	16,97	17,31	17,74	18,49	19,37	20,17
60-64	14,01	14,19	14,49	14,96	15,57	16,13
65-69	11,31	11,35	11,58	11,78	12,11	12,4
70-74	9,05	8,83	8,74	8,66	8,65	8,64
75-79	7,35	6,73	6,25	5,82	5,41	5,05
80-84	5,56	5,38	5,28	5,06	4,84	4,63
85-89	3,83	4,34	4,78	5,26	5,81	6,39
90-94	2,64	2,72	2,79	2,92	3,05	3,21

22 lentelė: Prognozuojama tikėtina likusio vyrų gyvenimo trukmė, LC modelio parametrus įvertinus didžiausio tikėtinumo metodu, Lietuva

[7] Prognozuojami skaičiai nuo 2005 metų



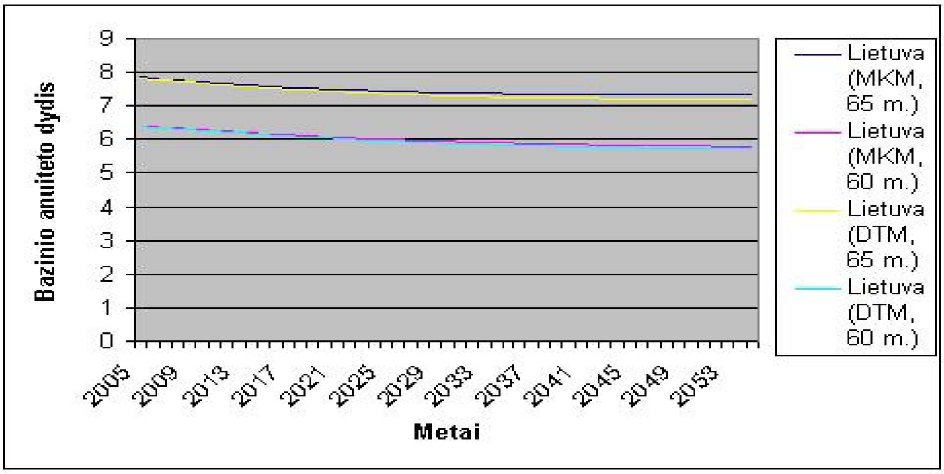
19 brėžinys: 60 - mečių vyrų tikėtina likusio gyvenimo trukmė



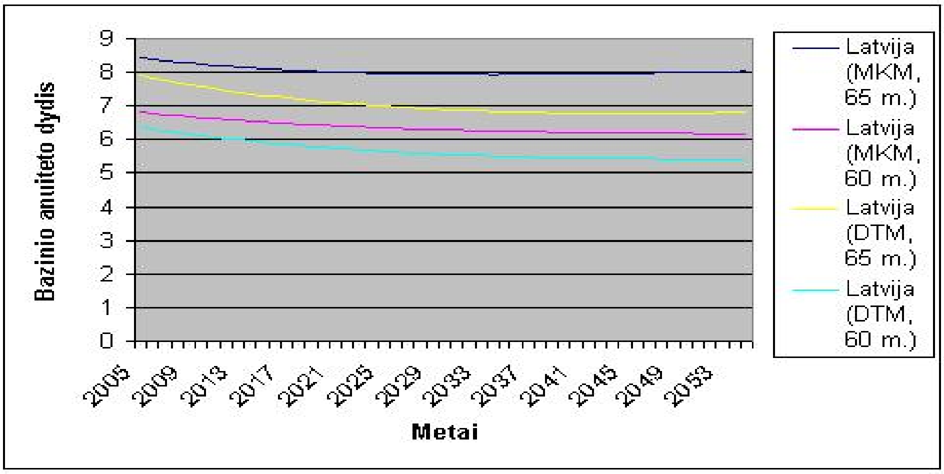
20 brėžinys: 65 - erių metų vyrų tikėtina likusio gyvenimo trukmė

Čia MKM - mažiausių kvadratų metodas,
DTM - didžiausio tikėtinumo metodas.

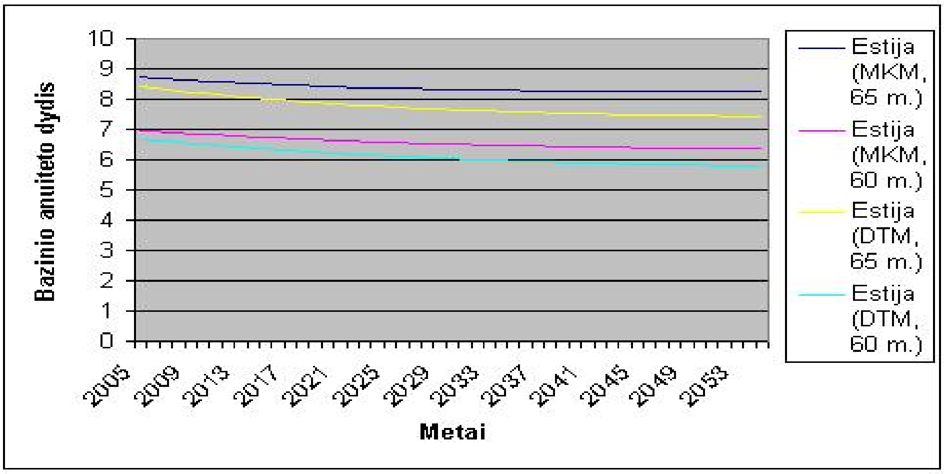
11.9. Prognozuojamas bazinis anuitetas



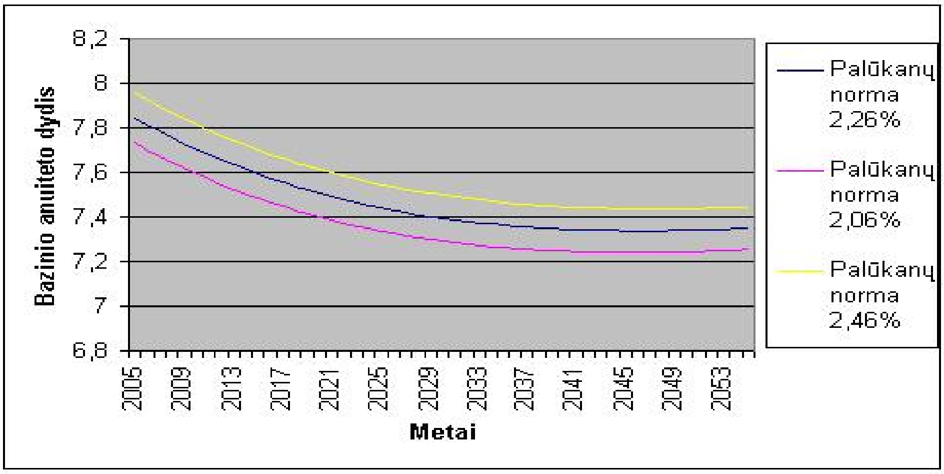
21 brėžinys: Lietuvos vyrų prognozuojamas bazinis anuitetas



22 brėžinys: Latvijos vyrų prognozuojamas bazinis anuitetas



23 brėžinys: Estijos metų vyrų prognozuojamas bazinis anuitetas



24 brėžinys: Palūkanų normos įtaka 65-ies metų Lietuvos vyrų prognozuojo bazinio anuiteto (MKM) dydžiui

Čia MKM - mažiausių kvadratų metodas,
DTM - didžiausio tikėtinumo metodas.