VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

Povilas Banys

Difuzijų, turinčių stacionarųjį tankį, parametrų vertinimas

Magistro darbas

Vilnius
2006

Matematinės analizės katedra

Darbo vadovas **prof. habil. dr. Vigirdas Mackevičius** ___________
(parašas)

Darbas apgintas ________________________

Gynimo posėdžio protokolo Nr. __________

Registravimo Nr.__________

2006 05 22 _______________

Turinys

Abstract

We consider the estimation of unknown parameters in the drift and diffusion coefficients of a one-dimension diffusion X when the observation is a discrete sample. For the estimation we use stationary distribution function. Using numerical methods we approximate SDE and realize the algorithm with computer.

Santrauka

Darbe yra nagrinėjama vienmačių homogeninių difuzinių procesų parametrų, įeinančių į difuzijos ir poslinkio koeficientus, vertinimas. Vertinimui naudojama stacionariųjų tankių išraiškos. Panaudojant skaitinius metodus lygtys yra modeliuojamos kompiuteriu, skaičiavimams naudojant SAS statistikos paketą.

1. Įvadas

Norint paaiškinti nagrinėjamo reiškinio dinamiką dažnai yra patogu pasinaudoti stochastinių procesų teorija. Konstruojant statistinį proceso modelį, dažniausiai jis yra kuriamas tolydus, o duomenys kuriems bandoma pritaikyti yra diskretūs. Tačiau bet kokiu atveju, tam, kad modelis paaiškintų modeliuojamą reiškinį svarbiausias uždavinys yra įvertinti modelio parametrus.

Nors stochastinė analizė, kuri ir nagrinėja atsitiktiniais procesais paremtas diferencialines ir integralines lygtis, nėra sena tikimybių teorijos šaka, tačiau darbų kaip įvertinti proceso parametrus iš diskrečių duomenų yra gana daug. Vertinant parametrus dažniausiai yra daroma prielaida, jog reiškinį modeliuoja tam tikra stochastinė diferencialinė lygtis (SDL) ir didžiauso tikėtinumo metodu, modifikuotu didžiausio tikėtinumo metodu arba mažiausių kvadratų metodais kaip, pavyzdžiui, straipsniuose [5], [4] arba darbe [9] vertinami lygties parametrai.

Praktikoje nagrinėjant įvairius procesus modeliuotinus SDL pagalba, dažnai įdomi ne konkreti SDL, aprašanti vieną stebėjimų imtį, bet nagrinėjamos sistemos statistikinis elgesys. Todėl pravartu vietoje atskirų proceso trajektorijų elgsenos nagrinėti tankio funkcijas ir su tuo kartu kylantį parametrų vertinimo uždavinį.

Šiame darbe procesų aprašomų stochastinėmis diferencialinėmis lygtimis parametrų vertinimui bus naudojami stacionarieji tankiai. Aišku, ne visi procesai turi stacionąrųjį tankį, todėl čia apsiribojama homogeniniais, jį turinčiais, difuziniais procesais. Tačiau praktiškai tai nėra labai didelis apribojimas, nes dažniausiai taikymuose įdomūs būtent tokie procesai, kurių statistikinė elgsena ilgainiui stabilizuojasi, t.y. jų skirstiniai artėja prie ribinio – stacionaraus skirstinio. Stebėdami tokio proceso trajektoriją, mes galime visada nubraižyti jo reikšmių histogramą, kurią galima interpretuoti kaip proceso stacionaraus tankio aproksimaciją. Dažnai pagal nagrinėjamą reiškinį preliminariai žinome, kokio pavidalo SDL galima būtų jį modeliuoti. Todėl jos nežinomų parametrų vertinimo metodo idėja gana paprasta: padarius prielaidą apie SDL pavidalą, paskaičiuoti teorinio stacionariojo tankio išraišką ir rasti SDL parametrus minimizuojant skirtumą tarp reikšmių gautų iš histogramos ir teorinio stacionariojo tankio tuose pačiuose taškuose. Šis metodas išsiskiria tuo, kad parametrai vertinami ne tiesiogiai iš SDL, bet iš jos stacionariojo tankio išraiškos.

Darbe pačioje pradžioje yra pateikiamas teorinis įvadas, pagrindžiantis vertinimo metodą. Antroje dalyje aprašomas vertinimo metodas ir konkretiems pavyzdžiams pateikiamos stacionariųjų tankių išraiškos. Trečioje dalyje praktiškai nagrinėjamas pasiūlyto parametrų vertinimo metodo veikimas. Vertinimo algoritmams modeliuoti naudojamas SAS statistikos paketas.

Darbe nagrinėjamą vertinimo algoritmą savo magistriniame darbe nepriklausomai modeliavo ir J. Jusel [10]. Jis nagrinėjo kitokias SDL bei naudojo kitą programinę įrangą.

2. Teorinis įvadas

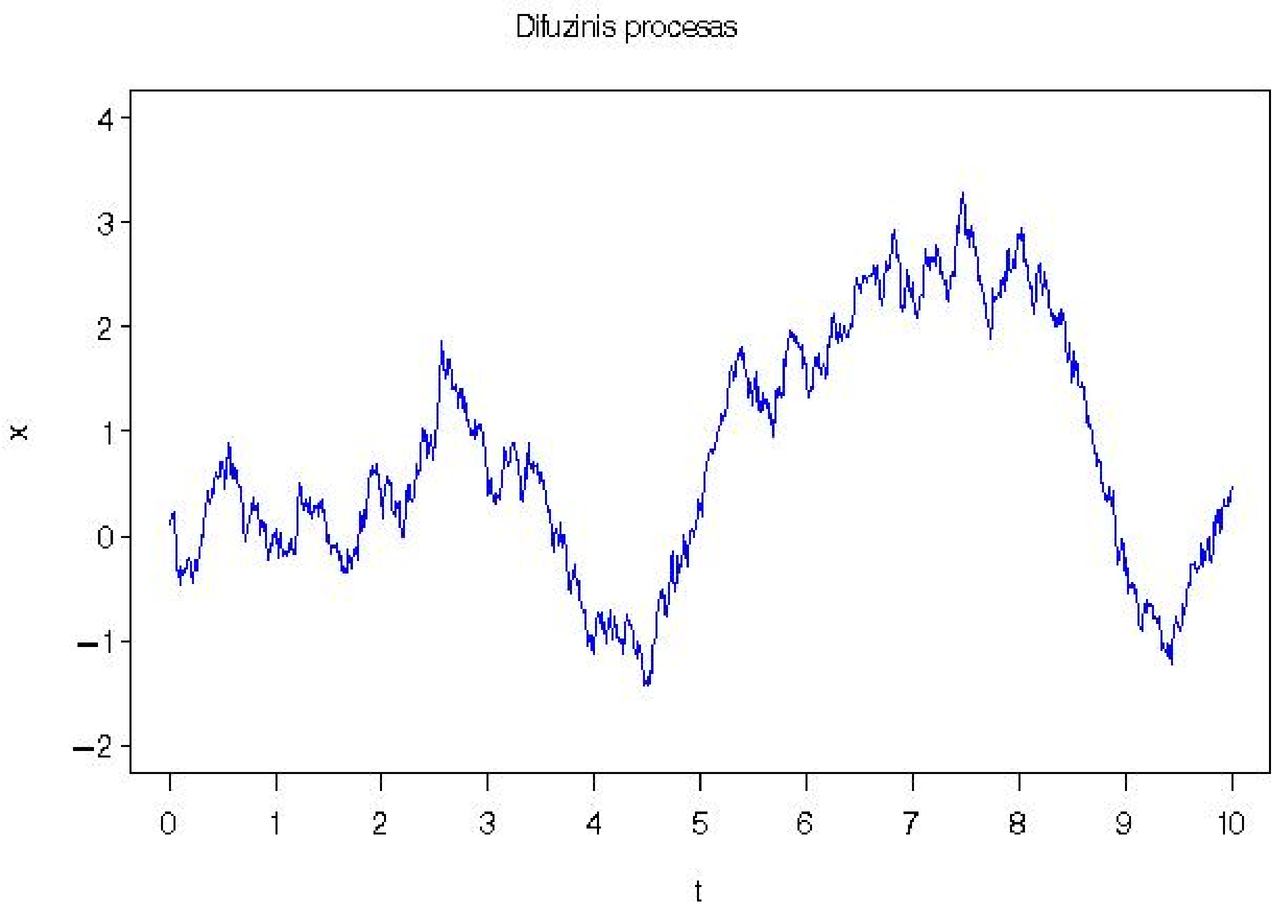
2.1. Homogeniniai difuziniai procesai

Darbe bus nagrinėjami difuziniai procesai.

1 apibrėžimas. Stochastinės diferencialinės lygties

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s, X_s)\,\mathrm{d}B_s, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

sprendinys X, kurio koeficientai σ ir b tenkina sprendinio egzistavimo ir vienaties sąlygas[1] (žr. [1]) vadinamas *difuziniu procesu*. Lygtyje naudojamas procesas $\{B_t,\ t \geqslant 0\}$ yra vadinamas Brauno arba Vynerio procesu. Koeficientai σ ir b yra vadinami atitinkamai difuzijos ir poslinkio koeficientais. Jei koeficientai σ ir b nepriklauso nuo t, tai procesas yra vadinamas homogeniniu (laike) difuziniu procesu. Difuzinio proceso pavyzdys pateiktas 1 paveiksle.



1 pav. Atsitiktinis procesas.

Žymėjimas X^x reiškia, kad procesas prasideda taške x. Pagal šį pažymėjimą visa sprendinių šeima užrašoma $\{X^x,\ x \in \mathbb{R}\}$.

[1] Lipšico (Rudolf Otto Sigismund Lipschitz) ir tiesinio augimo sąlygas.

Difuzinio proceso termino kilmė yra aiškinama tuo, kad šie procesais yra geri matematiniai modeliai aprašantys dalelės elgseną difuzijoje,[2] kai chaotiško judesio dėka patenka iš vienos aplinkos į kitą, bei daugelyje kitų su difuzija susijusių fizikinių procesų. Tie patys procesai yra nagrinėjami ir determinuotų diferencialinių lygčių dalinėmis išvestinėmis pagalba, kurios gana gerai modeliuoja kiekybinę jų elgseną.

Difuzinių procesų panaudojimą galima atrasti ir kitose srityse. Tam tikrais atvejais juos galima naudoti kaip ribinius atvejus arba tolydžius atitikmenis diskretiems modeliams. Kaip pavyzdys biologijoje tai gali būti individų, turinčių tam tikrą požymį skaičiaus kitimas laiko bėgyje arba geno koncentracijos populiacijoje kitimas. Paskutiniu metu ši teorija plačiai taikoma finansuose.

Difuzinių procesų teorija yra glaudžiai susijusi su diferencialinių lygčių dalinėmis išvestinėmis teorija ir tas ryšys yra abipusis [8]. Iš vienos pusės rezultatus gautus diferencialinių lygčių teorijoje galima pritaikyti difuziniams procesams iš kitos pusės difuzinių procesų pagalba galima gauti rezultatus pritaikomus diferencialinėms lygtims. Vienas iš difuzinių procesų pritaikymų diferencialinėms lygtims – artutinių sprendinių radimas Monte Karlo metodu. Procesas modeliuojamas tam tikros stochastinės procedūros pagalba ir funkcionalo reikšmė randama kaip vidurkis nuo daug kartų sugeneruotų trajektorijų.

Labai svarbi difuzinių procesų teorijoje yra generatoriaus arba infinitezimalinio operatoriaus sąvoka.

2 apibrėžimas. Homogeninio difuzinio proceso $X = \{X^x\}$ *generatoriumi* (*infinitezimaliniu operatoriumi*) vadinamas operatorius A funkcijų $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aibėje, apibrėžiamas lygybe

$$Af(x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\mathbf{E} f(X_t^x) - f(x)}{t}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Generatoriaus apibrėžimo sritis – aibė $\mathcal{D}_A$ visų funkcijų $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurioms tokia (baigtinė) riba egzistuoja visiems $x \in \mathbb{R}$.

Remiantis vien apibrėžimu surasti infinitezimalinį operatorių gana sunku. Daug lengvesnis būdas jam rasti yra pasiūlomas 1 teoremoje.

1 teorema. *Sakykime,* $X = \{X^x\}$ *– homogeninis difuzinis procesas, apibrėžtas lygtimi*

$$\mathrm{d}X_t = b(X_t)\,\mathrm{d}t + \sigma(X_t)\,\mathrm{d}B_t. \tag{2}$$

Jei funkcija $f \in C^2(\mathbb{R})$ *turi aprėžtas pirmąją ir antrąją išvestines, tai* $f \in \mathcal{D}_A$ *ir*

$$Af(x) = b(x)f'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)f''(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

Įrodymą galima rasti [1] šaltinyje.

[2]Difuzija - tai toks procesas, kai medžiagos molekulės skverbiasi iš didesnės koncentracijos vietų link mažesnės koncentracijos, pagal koncentracijos gradientą, kol pasikirsto vienodai.

2.2. Stacionarusis tankis

Prieš įvedant stacionariojo tankio sąvoką, dar reikalingos Markovo proceso bei perėjimo tankio sąvokos.

3 apibrėžimas. Atsitiktinis procesas X vadinamas (realiuoju) *Markovo procesu* su perėjimo tikimybe $P(s, x, t, B),\ 0 \leqslant s < t,\ x \in \mathbb{R},\ B \in \mathcal{R}$, jei beveik tikrai

$$P\{X_t \in B \mid X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_k}, X_s\} = P(s, X_s, t, B)$$

su visais $0 \leqslant s < t$ ir $B \in \mathcal{R}$.

Kitaip tariant tai tokie procesai, kuriems ateitis ir praeitis, fiksavus dabartį yra nepriklausomos, ar kitaip procesai, kurių ateitis priklauso nuo praeities tik per dabartį.

4 apibrėžimas. Markovo proceso X *perėjimo tankiu* yra vadinama funkcija $p(s, x, t, y)$, $0 < s < t$, $x, y \in \mathbb{R}$, jei sąlyginis tankis

$$p_{X_t|X_{t_1},X_{t_2},\ldots,X_{t_k},X_s}(y|x_1, x_2, \ldots, x_k, x) = p(s, x, t, y) := p_{X_t|X_s}(y|x) \tag{4}$$

su visais $0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_k < s < t,\ x_1, x_2, \ldots, x_k, x, y \in \mathbb{R}$.

1 pastaba. Tuo atveju, kai yra žinomas perėjimo tankis $p(s, x, t, y)$, ryšys su perėjimo tikimybe yra $P(s, X_s, t, B) = \int_B P(s, x, t, y)\,\mathrm{d}y$.

2 pastaba. Homogeninio difuzinio proceso atveju perėjimo tankis $p(s, x, t, y)$ priklauso tik nuo skirtumo $t - s$. Jis yra užrašomas kaip funkcija $p(t, x, y) := p(0, x, t, y) = p(s, x, s + t, y)$.

5 apibrėžimas. *Difuzinio proceso* su perėjimo tankiu $p(t, x, y)$, $t > 0$, $x, y \in \mathbb{R}$, *stacionariuoju tankiu* vadinama tankio funkcija $p_0(y)$, $y \in \mathbb{R}$

$$p_0(y) = \int_{\mathbb{R}} p(t, x, y)p_0(x)\,\mathrm{d}x, \quad t > 0, \quad y \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Jei atsitiktinis procesas yra apibrėžtas ne visoje realioje skaičių tiesėje, o baigtiniame intervale tuomet teisingas toks apibrėžimas.

6 apibrėžimas. Sakoma, kad difuzinis procesas X su perėjimo tankiu $p = p(t, x, y)$ turi *stacionarųjį tankį* p_0 *intervale* (a, b), jei

$$\int_a^b p(t, x, y\,\mathrm{d}y = 1, \quad x \in (a, b), \tag{6}$$

ir

$$p_0(y) = \int_{\mathbb{R}} p(t, x, y)p_0(x)\,\mathrm{d}x, \quad t > 0, \quad y \in (a, b).$$

Difuzinio proceso stacionariojo tankio prasmę galima būtų paaiškinti taip: jei pradiniu laiko momentu atsitiktinio proceso reikšmė X_0 yra atsitiktinis dydis turintis tankį p_0, tai bet kuriuo kitu laiko momentu $t \geqslant 0$ proceso reikšmė X_t yra atsitiktinis dydis turintis tą patį tankį p_0. Be to, paėmus baigtinį reikšmių rinkinį $(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_k})$ jis turės tą patį skirstinį kaip ir $(X_{t_1+t}, X_{t_2+t}, \ldots, X_{t_k+t})$ su visais $t > 0$. Procesai turintys pastarąją savybę yra vadinami stacionariaisiais.[3] Nagrinėjant difuzinius procesus matome, teisinga yra tai, kad jei difuzinio proceso pradinė reikšmė turi stacionarų tankį, tai procesas yra stacionarus.

Nors stacionarieji procesai praktikoje ir yra plačiai taikomi, tačiau sunku būtų tikėtis, jog jie visą laiką prasidėtų nuo atsitiktinio dydžio turinčio stacionarų tankį. Bet visgi jei nagrinėjamo proceso stacionarus tankis egzistuoja, tai jo tankis, laikui bėgant, priartėja prie stacionaraus tankio. Tai gali būti užrašyta taip:

$$p(t, x, y) \to p_0(y), \quad t \to \infty, \quad x, y \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

2.3. Ergodiškumas

Proceso turinčio stacionarų tankį p_0 polinkį priartėti prie stacionaraus tankio dideliuose laiko intervaluose paaiškina kita savybė – ergodiškumas. Tai yra grynai stochastinės sistemos savybė, priartėti prie ribinio pasiskirstymo, nepriklausomai nuo pradinės reikšmės. Matematiniais užrašais procesas yra ergodiškas, jei su bet kuria mačiąja aprėžta funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T f(X_t^x)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{\mathbb{R}} f(y) p_0(y)\,\mathrm{d}y, \quad T \to \infty.$$

Atkiru atveju, kuris yra naudojamas darbe

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T 1_{\{X_t^x \in A\}}\,\mathrm{d}t = \int\limits_{\mathbb{R}} p_0(y)\,\mathrm{d}y, \quad T \to \infty. \tag{8}$$

Pastarasis užrašas reiškia, kad vidutinė proceso X^x buvimo aibėje A trukmė artėja į tikimybę atsitiktiniam dydžiui turinčiam tankį p_0 patekti į aibę A. Ši savybė darbe panaudojama taip: vietoje to, kad generuoti keletą proceso trajektorijų ir žiūrėti jų suvidurkintą elgesį, yra generuojama viena trajektorija paėmus pakankamai ilgą laiko intervalą. Ilgo laiko intervalo parinkimas, bei pradinių generuojamo proceso reikšmių pašalinimas, su tikslu išvengti blogo pradinio taško parinkimo įtakos, pagal teoriją leidžia gauti stacionarų tankį.

2.4. Stacionaraus tankio radimas

2 teorema (Tiesioginė Kolmogorovo lygtis perėjimo tankiui)**.** *Tarkime, kad difuzinio proceso* $\{X^x\}$ *koeficientai* $b, \sigma \in C^2(\mathbb{R})$*, o jo perėjimo tankis* $p = p(t, x, y),\ t > 0,\ x, y \in$

[3] Šis stacionarumo apibrėžimas pateikiamas kaip stacionarumas griežtąja prasme.

$\mathbb{R}$, *yra tolydus srityje* $(0, +\infty) \times \mathbb{R}^2$ *kartu su savo dalinėmis išvestinėmis* $\partial p/\partial t$, $\partial p/\partial y$, $\partial^2 p/\partial^2 y$. *Tada tankis* p *šioje srityje tenkina lygtį*

$$\frac{\partial p(t,x,y)}{\partial t} = A_y^* p(t,x,y),$$

vadinamą tiesiogine Kolmogorovo arba Fokerio–Planko lygtimi.

Šios teoremos įrodymą galima surasti [1] šaltinyje. Plačiau Fokerio–Planko lygtis nagrinėjama šaltinyje [2].

Prieš pateikiant išraišką homogeninio difuzinio proceso stacionariam tankiui skaičiuoti, reikia suformuluoti dar vieną tvirtinimą.

3 teorema. *Sakykime, difuzinis procesas* X *su generatoriumi* A *ir perėjimo tankiu* $p(t,x,y)$ *turi stacionarųjį tankį* $p_0 = p_0(y)$ *intervale* (a,b). *Tarkime, kad* p *ir* p_0 *yra tolydžios funkcijos, turinčios tolydžiąsias dalines išvestines* $\partial p/\partial t$, $\partial p/\partial y$, $\partial^2 p/\partial^2 y$ $\partial p_0/\partial y$, $\partial^2 p_0/\partial^2 y$. *Tada* p_0 *intervale* (a,b) *tenkina tiesioginę Kolmogorovo* (*Fokerio–Planko*) *lygtį.*

$$A^* p_0 = 0. \tag{9}$$

Įrodymas. Kadangi teisinga lygybė $\partial \mathbf{E} f(X_t^x)/\partial t = \mathbf{E} A f(X_t^x)$, tai perėjimo tankiui galime užrašyti:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_a^b p(t,x,y) f(y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b p(t,x,y) A f(y)\,\mathrm{d}y, \quad x \in (a,b).$$

Lygybė teisinga su visomis $f \in C_0^2(a,b)$. Padauginame abi lygybės puses iš $p_0(x)$ ir suintegruojame pagal $x \in (a,b)$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_a^b \left(\int_a^b p(t,x,y) p_0(x)\,\mathrm{d}x\right) f(y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_a^b p(t,x,y) p_0(x)\,\mathrm{d}x\right) A f(y)\,\mathrm{d}y,$$

arba

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_a^b p_0(y) f(y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b p_0(y) A f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Kairė pusė lygi nuliui, o dešinėje gauname $\int_a^b A^* p_0(y) f(y)\,\mathrm{d}y$,

$$\int_a^b A^* p_0(y) f(y)\,\mathrm{d}y = 0$$

su visomis $f \in C_0^2(a,b)$. Todėl $A^* p_0 \equiv 0$ intervale (a,b).

4 teorema. *Jei* 3 *teoremos sąlygomis* $\sigma(x) > 0$, $x \in (a,b)$, *tai difuzinio proceso* X *stacionarusis tankis* p_0 *turi pavidalą*

$$p_0(y) = \frac{N}{\sigma^2(y)} \exp\left\{ 2 \int_c^y \frac{b(u)}{\sigma^2(u)}\,\mathrm{d}u \right\}, \quad y \in (a,b); \tag{10}$$

čia c – bet koks taškas iš intervalo (a,b), o

$$N := \left[\int\limits_a^b \frac{1}{\sigma^2(y)} \exp\left\{ 2 \int\limits_c^y \frac{b(u)}{\sigma^2(u)} \,\mathrm{d}u \right\} \mathrm{d}y \right]^{(-1)} \tag{11}$$

yra normuojanti konstanta, su kuria $\int_a^b p_0(y)\,\mathrm{d}y = 1$.

Įrodymas. Suintegravę Kolmogorovo lygtį stacionariajam tankiui gauname

$$-b(y)p_0(y) + \frac{1}{2}\big(\sigma^2(y)p_0(y)\big)' = const.$$

Paaiškinimą kodėl natūraliųjų kraštų a ir b atveju dešinėje esanti konstanta turi būti lygi nuliui galima rasti [2] šaltinyje. Pažymėkime $q(y) := \sigma^2(y)p_0(y)$. Tada lygtis virsta paprastai sprendžiama lygtimi

$$q'(y) = \frac{2b(y)}{\sigma^2(y)} q(y)$$

su atsiskiriančiais kintamaisiais. Jos bendrasis sprendinys yra

$$q(y) = N \exp\left\{ 2 \int\limits_c^y \frac{b(u)}{\sigma^2(u)} \,\mathrm{d}u \right\}, \quad y \in (a,b);$$

čia c bet koks fiksuotas intervalo (a,b) taškas. Iš čia įsistatę q gauname reikalingą stacionariojo tankio p_0 išraišką.

3 pastaba. Kartais teoremoje gauta formulė yra vadinama Wright'o, nes būtent jis 1938 metais ją pateikė.

4 pastaba. Kaip atrodo stacionarus tankis išreikštiniu pavidalu yra gauta 4 teoremoje, bet gali kilti klausimas, kada galima būti tikriems, jog toks tankis egzistuoja. Stacionariojo tankio egzistavimui pakanka tokių sąlygų:

- (2) lygties koeficientas $\sigma(X_t) > 0$;
- (10) tankio išraiškos reikšmės apibrėžimo srities galuose turi būti lygios nuliui (begalinio intervalo atveju artėti prie nulio);
- (10) tankio išraiškoje integralas esantis po eksponente turi būti baigtinis.

2.5. Stochastinių diferencialinių lygčių skaitinis sprendimas

Stochastinėje analizėje, kaip ir daugelyje kitų matematikos šakų, lygčių skaitinio sprendinio poreikis atsiranda, nes žingsnis po žingsnio visus skaičiavimus stengiamės kompiuterizuoti. Bet tai yra ne vienintelė priežastis – kita daug svaresnė priežastis yra tai, jog išreikštiniu pavidalu galime išspręsti tik labai nedidelę stochastinių diferencialinių lygčių dalį. Stochastinę lygtį galima užrašyti dviem išraiškom (2), (1). Mes nagrinėsime integralinę jos išraišką. Integralams taikysime paprastų integralų skaitiniam sprendimui tinkančią teoriją tik su tam tikromis išlygomis. Čia mes negalime nekreipti dėmesio į integralą nuo Brauno judesio.

Taigi, pirmiausia pasirenkame baigtinį laiko intervalą $[0, T]$ ir jį suskaidome į diskrečius laiko momentus

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N = T$$

su žingsniu $h = T/N$. Toliau konstruojame diskretaus laiko atsitiktinį procesą X^h_{kh}, $k = 0, 1, 2, \ldots, N$, kuris priklauso tik nuo Brauno judesio B_{kh}, $k = 0, 1, 2, \ldots, N$, reikšmių. Čia kaip ir aproksimuojant nestochastinių lygčių sprendinius, jų artiniais, norime gauti kuo artimesnį sprendinį tikrajam, kai $h = T/N \to 0$. Sprendinio artumui įvertinti naudosime *stipriąsias* aproksimacijas.

7 apibrėžimas. Sakoma, kad $\{X^h\}$ yra sprendinio X *n-tos eilės stiprioji aproksimacija*, jei su visais $t \in [0, T]$

$$\mathbf{E}|X^h_t - X_t| = \mathrm{O}(h^n), \quad h \to 0,$$

t.y. egzistuoja tokia konstanta C su kuria $\mathbf{E}|X^h_t - X_t| \leqslant Ch^n$.

Toliau svarbu panagrinėti $\{X^h\}$ brėžimą. Diskretaus proceso trajektorijos modeliuojamos kompiuterio pagalba. Šio proceso, skirtingai nuo tikrojo X, trajektorijai didžiausią įtaką daro Brauno procesas. Mums reikia turėti reikšmes B_{kh} diskrečiais laiko momentais kh, $k = 1, 2, \ldots, N$. Jį sugeneruoti galime keletu būdų. Iš Brauno judesio apibrėžimo žinoma, kad $\Delta B_i = B_{t_{(i+1)h}} - B_{t_{ih}} \sim N(0, h)$. Kompiuterio pagalba reikia sugeneruoti nepriklausomus atsitiktinius dydžius $\xi_i \sim N(0, 1)$, $i \in \mathbb{N}$, o po to paimti $\Delta B_i = \xi_i \sqrt{h}$. Bet čia vėl iškyla klausimas, kaip sugeneruoti ξ_i? Tai padaryti galime keletu būdų. Matematiniai paketai tokie kaip Maple, Mathematica, Matlab ir kt. leidžia iš karto sugeneruoti normalųjį, kaip ir daugelį kitų, atsitiktinių dydžių. Pavyzdžiui Maple pakete normalusis atsitiktinis dydis yra generuojamas komanda `stat[random,normald[0,1]][1]`. Darbe pagrinde naudojamas SAS statistinis paketas, čia normalus atsitiktinis dydis generuojamas komandos `ranuni(seed)` pagalba.

Kitas žingsnis yra integralo diskretizavimas. Čia pasinaudosime skaitinių metodų teorija, skirta spręsti nestochastinėms lygtims, o jei tiksliau Eulerio aproksimacijomis.

Taigi turime paprastą diferencialinę lygtį

$$X'_t = b(t, X_t), \quad X_0 = x, \quad \text{arba} \quad X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)\,\mathrm{d}s, \quad t \in [0, T].$$

Suskaidę intervalą $[0, T]$ į N dalių gauname taškus $t_k = kT/N$. Tuomet skaičiuojame ne X_t visame intervale $[0, T]$, o X_{t_k} intervalo skaidiniuose $[t_k, t_{k+1}]$, kai $k = 0, 1 \ldots, N-1$,

$$X_{t_{k+1}} \approx X_{t_k} + \int_{t_k}^{t_{k+1}} b(s, X_s)\,\mathrm{d}s = X_{t_k} + b(t_k, X_{t_k})h,$$

čia $h = (t_{k+1} - t_k)$. Atmetus paklaidas, kurios atsiranda taikant stačiakampių metodą, gauname paprasčiausią Eulerio aproksimaciją. Paprastosioms diferencialinėms lygtims ji yra pirmos eilės.

$$\sup_{t\leqslant T}|X_t^h - X_t| = \mathrm{O}(h), \quad h \to 0.$$

2.5.1. Eulerio aproksimacija

Eulerio aproksimacijos analogas stochastinei diferencialinei lygčiai yra vadinamas Eulerio–Murajamos. Naudosime (2) stochastinės lygties išraišką . Aproksimaciją galima apibrėžti lygybėmis

$$X_{t_{k+1}}^h = X_{t_k}^h + b(t_k, X_{t_k}^h)h + \sigma(t_k, X_{t_k}^h)\Delta B_k, \quad X_0^h = x,\ \Delta B_k = \Delta B_k^h = B_{t_{k+1}} - B_{t_k},\ t_k = kh.$$

Jei aproksimaciją pratęsime į visą intervalą $[0, T]$ gausime tokias išraiškas

$$X_t^h = X_{t_k}^h + b(t_k, X_{t_k}^h)(t - t_k) + \sigma(t_k, X_{t_k}^h)(B_t - B_{t_k}), \quad X_0^h = x,\ t \in [t_k, t_{k+1}]. \tag{12}$$

Pritaikius Eulerio aproksimaciją stochastinei lygčiai, jei lygties koeficientai tenkina Lipšico sąlygą

$$\big|b(t,x) - b(s,y)\big|^2 + \big|\sigma(t,x) - \sigma(s,y)\big|^2 \leqslant C\big(|t-s| + |x-y|^2\big),$$

tai Eulerio aproksimacija yra $1/2$ eilės. Darbe daugiausia ir bus naudojama būtent ši aproksimacija, nes norint ją pritaikyti funkcijoms nereikia tenkinti aukštos eilės glodumo reikalavimų. Be to, ji gana lengvai modeliuojasi kompiuteriu.

2.5.2. Milsteino aproksimacija

Pritaikius Ito–Teiloro formulę SDE, ir į aproksimuotą lygtį paėmus dagiau narių galima gauti aukštesnės eilės aproksimaciją, dar vadinama Milšteino aproksimaciją. Milsteino aproksimacija bendras atvejis:

$$X_{t_{k+1}}^h = X_{t_k}^h + \left(b - \frac{1}{2}\sigma\sigma'\right)(X_{t_k}^h)h + \sigma(X_{t_k}^h)\Delta B_k + \frac{1}{2}\sigma\sigma'(X_{t_k}^h)\Delta B_k^2. \tag{13}$$

Ši aproksimacija geresnė už Eulerio, nes jos eilė yra 1. Į išraišką įeinantis narys ΔB_k^2 apsaugo nuo labai didelių Brauno judesio šuolių, kurie gali labai iškreipti aproksimaciją.

2.5.3. Stiprioji Teiloro $3/2$ aproksimacija

Ito–Teiloro procedūroje paėmus dar daugiau narių (žr. [1]) galima gauti dar tikslesnę $3/2$ aproksimaciją. Bendru atveju ji užsirašo taip:

$$\begin{aligned} X_{t_{k+1}}^h = X_{t_k}^h &+ \left(b - \frac{1}{2}\sigma\sigma'\right)(X_{t_k}^h)h + \sigma(X_{t_k}^h)\Delta B_k + \frac{1}{2}\sigma\sigma'(X_{t_k}^h)\Delta B_k^2 + \left(A\sigma - \frac{1}{2}S^2\sigma\right)\Delta B_k h \\ &+ (Sb - A\sigma)(X_{t_k}^h)\Delta Z_k + \frac{1}{6}S^2\sigma(X_{t_k}^h)\Delta B_k^3 + AbX_{t_k}^h\frac{\Delta h^2}{2}. \end{aligned} \tag{14}$$

Čia $Af = bf' + \frac{1}{2}\sigma^2 f''$, o $Sf = \sigma f'$. Reikia atkreipti dėmesį, kad šioje aproksimacijoje atsiranda papildomas narys $\Delta Z_t = \int_{t_k}^{t_{k+1}}(B_s - B_{t_k})\,\mathrm{d}s$. Jo negalime išreikšti Brauno judesio

B reikšmėmis diskretizacijos taškuose. Tai naujas atsitiktinis dydis pasiskirstęs pagal normalųjį dėsnį $\Delta Z_t \sim N(0, \frac{1}{3}h^3)$. Norint naudoti (14) aproksimaciją reikia generuoti jau nebe vieną atsitiktinį dydį, bet porą $(\Delta B_t, \Delta Z_t)$, kurie nėra nepriklausomi. Bet pasirodo išeitis yra paprasta – galima generuoti du nepriklausomus atsitiktinius dydžius $U_1, U_2 \sim N(0,1)$ ir pritaikius transformaciją

$$\Delta B_k = U_1\sqrt{h}, \qquad \Delta Z_k = \frac{1}{2}\left(U_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}U_2\right)h^{3/2}. \tag{15}$$

gauti du koreliuotus atsitiktinius dydžius, kurie yra tinkami taikyti.

Jei šią aproksimaciją taikyti vienai iš nagrinėjamų CIR lygčių gausime tokią išraišką:

$$\begin{aligned} X^h_{t_{k+1}} &= X^h_{t_k} + \left(k(\theta - X^h_{t_k}) - \frac{\sigma^2}{4}\right)h + \frac{1}{2}\sigma(X^h_{t_k})^{1/2}\Delta B_k + \frac{\sigma^2}{2}(\Delta B_k)^2 \\ &+ \left(k\frac{\sigma}{2}(\theta - X^h_{t_k}) - \frac{\sigma^3}{8}\right)(X^h_{t_k})^{-1/2}\Delta B_k h \\ &+ \left(k\sigma(X^h_{t_k})^{1/2} - \left(k\frac{\sigma}{2}(\theta - X^h_{t_k}) - \frac{\sigma^3}{8}\right)(X^h_{t_k})^{-1/2}\right)\Delta Z_t - \frac{1}{2}k(\theta - X^h_{t_k})\frac{h^2}{2}. \end{aligned} \tag{16}$$

3. Nagrinėjamas uždavinys

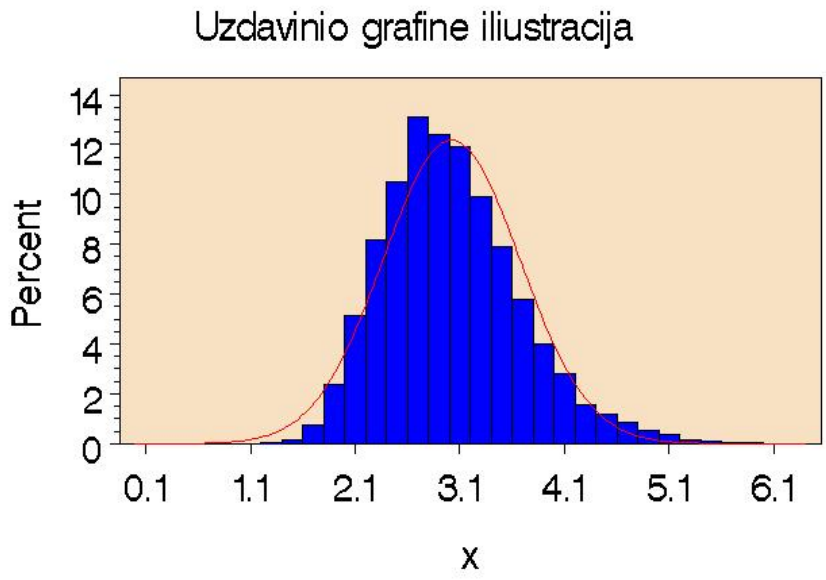
Šiame darbe siekiama pasinaudoti stacionariųjų tankių teorija vertinant SDL parametrus. Tais gana dažnais atvejais, kai atsitiktinis procesas turi stacionarų tankį, iš jo galima gauti gana daug informacijos apie proceso tikimybinę elgseną. Visų pirma galima daryti prielaidas apie proceso vidurkį ir dispersiją. Tačiau pagrindinis tikslas yra identifikuoti procesą ir įvertinti proceso parametrus. Žinant šią informaciją apie reiškinio modeliuojamo procesu elgesį galima pasakyti beveik viską. Preliminariai identifikuoti procesą galima bandant parinkti vieną iš difuzinio proceso tankių gautų (10) formulės pagalba. Be to, dažnai nagrinėjant procesą iš anksto yra žinoma kokio tipo lygtimis jį geriau modeliuoti. Pagrindinė problema yra pačių lygties parametrų suradimas.

Darbe nagrinėjama parametrų vertinimo idėja gana paprasta: pasiėmus vieną iš nagrinėjamo proceso X trajektorijų sukonstruoti proceso histogramą, po to žinant stacionaraus tankio teorinę išraišką minimizuoti pagal teorinio stacionaraus tankio parametrus atstumą tarp histograma aprašomo tankio ir teorinio. Grafiškai uždavinys pavaizduotas 2 paveiksle.

Užduotį galima būtų suskirstyti į tokius žingsnius:

- Gauti duomenis. Jie darbe gaunami pasirinkus difuzinį procesą, lygtis diskretizuojama ir aproksimuojama panaudojus vieną iš formulių – (12), (13) arba (14). Remiantis terorija išdėstyta (2.3) skyrelyje generuojama tik viena trajektorija ir su ja dirbama

- Pasirenkama funkcija aprašanti atstumą tarp tankių. Darbe siekiam minimizuoti



2 pav. Uždavinys.

tokią funkciją:

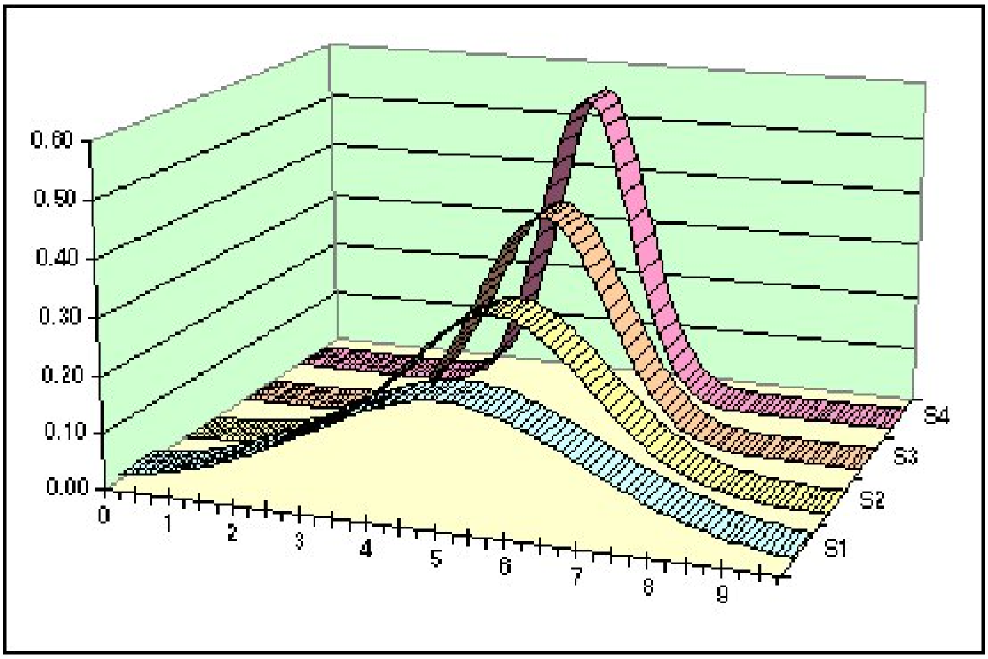
$$\sum_{i=1}^{n}\big(H(x_i) - p_0(x_i)\big)^2 \to \min, \tag{17}$$

čia n – histogramos stulpelių skaičius, $H(x_i)$ it $p_0(x_i)$ yra atitinkamai histogramos ir teorinio stacionariojo tankio reikšmės. Ši funkcija yra panaši į naudojamą mažiausių kvadratų metode. Gal būt galima surasti ir geresnę tikslo funkciją.

- Panaudojus Lude [4] arba Contingent Gradient (CG) [6] metodą randamas tikslo funkcijos minimumas pagal stacionariojo tankio p_0 parametrus.

3.1. Lygtys su tiesiniu poslinkio koeficientu

Čia bus nagrinėjamos lygtys su tiesiniu difuzijos poslinkio koeficientu $b(x)$ ir skirtingais difuzijos koeficientais $\sigma(x)$. Praktikoje $\sigma(x)$ dažnai galima nustatyti žinant nagrinėjamo proceso X_t kitimo rėžius bei elgesį. Tarkime jei žinoma, jog proceso svyravimai nepriklauso nuo X_t, tuomet $\sigma(x)$ turi būti konstanta. Taigi $\sigma(x) = \sigma$, kur σ maža teigiama konstanta, apibrėžianti vieną iš SDE tipų. Tačiau yra ir tokių lygčių, kur difuzijos koeficientas priklauso nuo atsitiktinio proceso X_t reikšmių. Kaip pavyzdžiui proceso, modeliuojančio akcijų kainas kintančias diena iš dienos ,dispersija priklauso nuo proceso reikšmių: kuo didesnės kainos tuo didesni svyravimai. Tokiems procesams difuzijos koeficientas yra $\sigma^2(x) = \sigma^2 x$. Taip gauname dar vieną SDE tipą. Dar vieną difuzijos koeficiento tipą galima surasti lygtyse, kuriomis yra aprašoma viešosios nuomonės tyrimai. Kaip pavyzdys dispersija dydžio aprašančio asmenų proporciją palaikančių šalies prezidentą yra proporcinga $x(1-x)$. Svyravimai yra patys didžiausi kai x yra artimas 50%. Tokiems dydžiams difuzijos koeficientas yra atitinkamai $\sigma(x) = \sigma^2 x(1-x)$. Šie trys skirtingi atvejai yra įdomūs tuo kad skirtingai įtakoja stacionariojo tankio elgesį.



3 pav. N tipo tankio pavyzdys su skirtingais parametrais

3.1.1. N tipo lygtys

Pirmas iš paminėtų atvejų yra procesas su difuzijos koeficientu konstanta. Šis atvejis aprašomas tokia lygtimi:

$$\mathrm{d}X_t = k(\theta - X_t)\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}B_t. \tag{18}$$

Lygtyje $\sigma > 0$, $k > 0$, $\theta > 0$. Pasinaudoję (10) formule paskaičiuojame stacionarų tankį

$$p_0(y) = N\exp\left\{2\int_\theta^y \frac{k(\theta - x)}{\sigma^2}\,\mathrm{d}x\right\} = N\exp\left\{\frac{k(\theta - y)^2}{\sigma^2}\right\}, \tag{19}$$

konstanta čia randama taip

$$N = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{\frac{k(\theta - y)^2}{\sigma^2}\right\}\mathrm{d}y\right)^{-1} = \left(\sqrt{\frac{\pi\sigma^2}{k}}\right)^{-1}. \tag{20}$$

Stacionarus tankis šiuo atveju egzistuoja, nes $\sigma(x) = \sigma > 0$ stacionarus tankis yra normaliojo atsitiktinio dydžio tankis $x \sim N(\theta, \sigma^2/2k)$. Tokios lygtys darbe bus vadinamos N tipo. Kaip elgiasi stacionarieji tankiai imant skirtingus parametrus pavaizduota 3 paveiksle. (18) lygtyje aprašomas procesas dar vadinamas su adityviuoju triukšmu. Adityvusis triukšmas pasižymi tuo, kad nekeičia stacionariojo proceso kokybinės elgsenos: jis gali pakeisti ekstremumo dydį, bet ne jo vietą ar ekstremumų skaičių.

3.1.2. G tipo lygtys

Antrasis iš atvejų yra lygtis, kurios difuzijos koeficientas priklauso nuo proceso reikšmių

$$\mathrm{d}X_t = k(\theta - X_t)\,\mathrm{d}t + \sqrt{\sigma^2 X_t}\,\mathrm{d}B_t. \tag{21}$$

Lygtyje $\sigma > 0$, $k > 0$, $\theta > 0$. Ši lygtis labiau žinoma kaip Cox–Ingersoll–Ross[4] (CIR) lygtis, daugiausiai taikoma finansų teorijoje palūkanų normoms modeliuoti. Taip pat šią lygtį galima sutikti nagrinėjant duomenų perdavimo internete TCP protokolu laiką (žr. [3]). Metodus kaip vertinti šios lygties parametrus mažiausių kvadratų metodais bei asimptotines savybes galima rasti [4] straipsnyje, didžiausio tikėtinumo įvertiniai pateikiami [5]. Šiame darbe parametrai vertinami iš stacionaraus tankio. Pasiremiant (10) paskaičiuojame stacionarų tankį

$$\begin{aligned} p_0(y) &= \frac{N}{\sigma^2 y}\exp\left\{2\int_1^y \frac{k(\theta - x)}{\sigma^2 x}\,\mathrm{d}x\right\} \\ &= \frac{N}{\sigma^2 y}\exp\left\{2\frac{k}{\sigma^2}(\theta\ln x - x)\Big|_1^y\right\} \\ &= \frac{N}{\sigma^2 y}\exp\left\{\frac{2k}{\sigma^2}(\theta\ln y - y + 1)\right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N &= \left(\int_0^\infty \frac{1}{\sigma^2 y}\exp\left\{\frac{2k}{\sigma^2}(\theta\ln y - y + 1)\right\}\mathrm{d}y\right)^{-1} \\ &= \left(\frac{\mathrm{e}^{2k/\sigma^2}}{\sigma^2}\int_0^\infty w^{2k/\sigma^2 - 1}\mathrm{e}^{-w}\,\mathrm{d}w\right)^{-1} \\ &= \left(\frac{\mathrm{e}^{2k/\sigma^2}}{\sigma^2}\Gamma\left(\frac{2k\theta}{\sigma^2}\right)\left(\frac{2k}{\sigma^2}\right)^{-2k\theta/\sigma^2}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Atkeitę kintamuosius ir įstatę konstantą gauname

$$p_0(y) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2k\theta}{\sigma^2}\right)}\left(\frac{2ky}{\sigma^2}\right)^{2k\theta/\sigma^2 - 1}\exp\left\{\frac{-2ky}{\sigma^2}\right\} \tag{22}$$

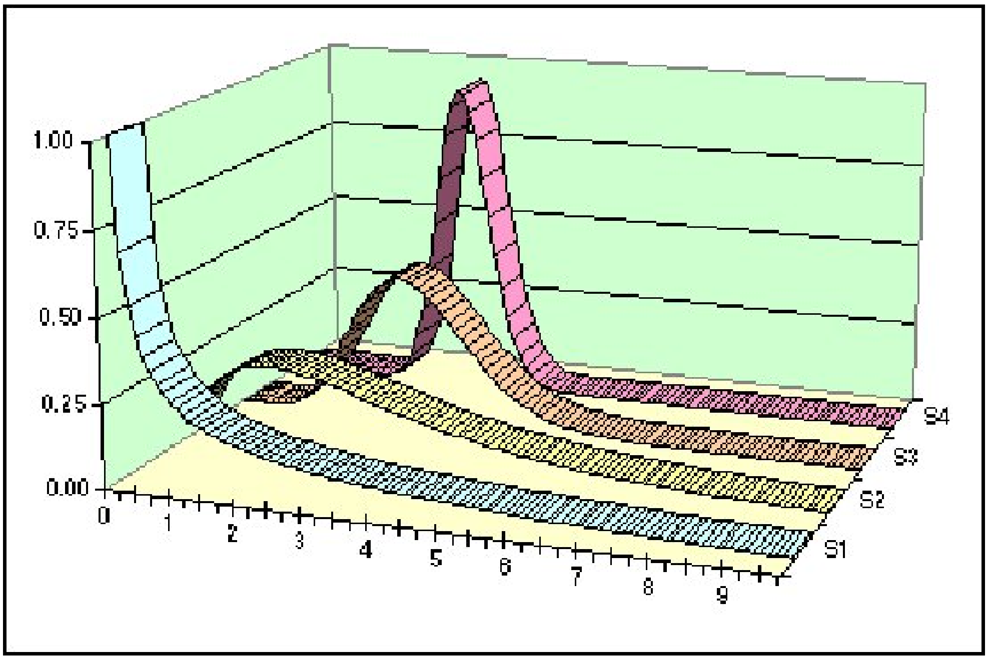
Gauname beveik atsitiktinio dydžio pasiskirsčiusio pagal Gamma dėsnį tankį. Šis tankis nuo Gamma skirstinio skiriasi tuo, kad yra padaugintas iš konstantos $\frac{2k}{\sigma^2}$. Stacionaraus tankio egzistavimo sąlygos suformuluotos 4 pastaboje yra išpildytos. Gali kilti klausimų dėl $\sigma(X_t) > 0$ sąlygos, tačiau pagal modelį nagrinėjame tik realiuosius procesus, o (22) pošaknyje $X = \max(X_t, 0)$. Darbe šį tankį vadinsime G tipo. Lygtimi (22) aprašomas procesas yra dar vadinamas procesu su multiplikatyviuoju triukšmu. Multiplikatyvusis triukšmas pasižymi tuo, kad gali iš esmės pakeisti stacionariojo tankio kokybinę elgseną: ekstremumų poziciją ir skaičių. Kaip kinta stacionariojo tankio forma keičiant parametrus galima pamatyti 4 paveiksle.

3.1.3. B tipo lygtys

Trečiojo pavidalo lygtis yra užrašoma:

$$\mathrm{d}X_t = k(\theta - X_t)\,\mathrm{d}t + \sqrt{\sigma^2 X_t(1 - X_t)}\,\mathrm{d}B_t. \tag{23}$$

[4]Pavadinimą sudaro trijų mokslininkų, 1985 metais pasiūliusių šį modelį aprašyti palūkanų normoms, pavardės.



4 pav. G tipo tankio pavyzdys su skirtingais parametrais

Šioje lygtyje $\sigma > 0$, $k > 0$, $\theta > 0$, $x \in [0,1]$. Vėl pasinaudojant (10) konstruojame stacionarų tankį.

$$\begin{aligned} p_0(y) &= \frac{N}{\sigma^2 y(1-y)} \exp\left\{ 2 \int\limits_{0.5}^{y} \frac{k(\theta - x)}{\sigma^2 x(1-x)}\,\mathrm{d}x \right\} \\ &= \frac{N}{\sigma^2 y(1-y)} \exp\left\{ \frac{2k}{\sigma^2} \left(\theta \ln\left(\frac{x}{1-y} \right) + \ln(1-y) \right) + k \ln 2 \right\} \\ &= \frac{N_1}{\sigma^2} y^{2k\theta/\sigma^2 - 1} (1-y)^{2k(1-\theta)/\sigma^2 - 1}, \qquad N_1 = N2^k. \end{aligned} \tag{24}$$

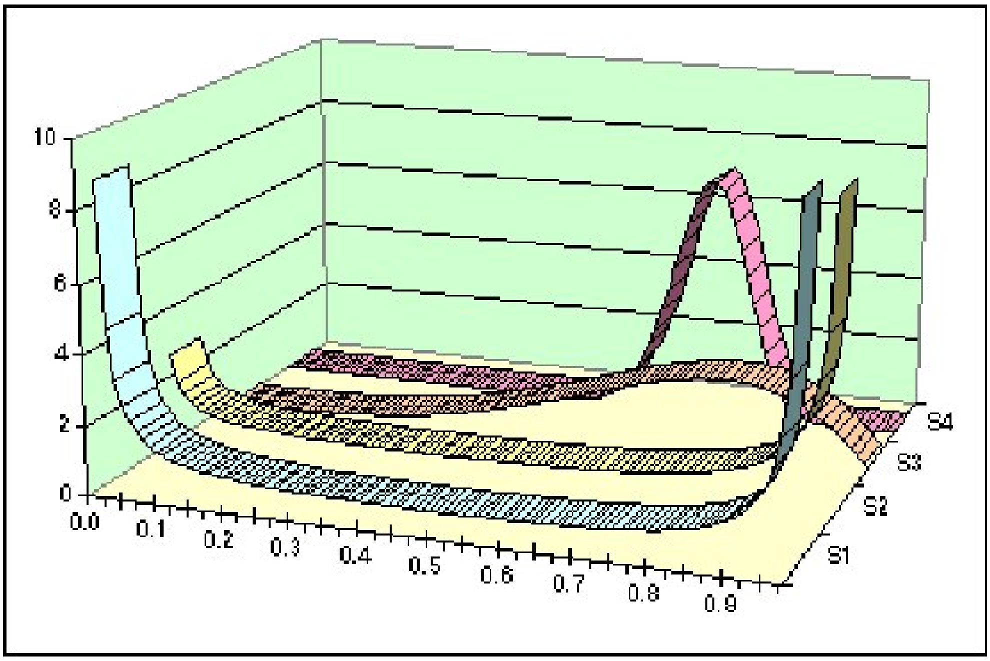
Rasime konstantą

$$\begin{aligned} N &= \left(\int\limits_0^1 \frac{1}{\sigma^2} y^{2k\theta/\sigma^2 - 1} (1-y)^{2k(1-\theta)/\sigma^2 - 1}\,\mathrm{d}y \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{1}{\sigma^2} \frac{\Gamma\left(\frac{2k\theta}{\sigma^2}\right)\Gamma\left(\frac{2k(1-\theta)}{\sigma^2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2k}{\sigma^2}\right)} \right)^{-1}. \end{aligned} \tag{25}$$

Galutinė tankio išraiška

$$p_0(y) = \frac{\Gamma\left(\frac{2k\theta}{\sigma^2}\right)\Gamma\left(\frac{2k(1-\theta)}{\sigma^2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2k}{\sigma^2}\right)} y^{2k\theta/\sigma^2 - 1} (1-y)^{2k(1-\theta)/\sigma^2 - 1}. \tag{26}$$

Šis tankis įdomus tuo, kad keičiant lygties parametrus gali įgyti nuo 1 iki 2 viršūnių. Pažvelgus į tankio išraišką matome kad gavome tiksliai Beta skirstinį, o parametrams uždėti apribojimai atitinka apribojimus keliamus Beta skirstiniui, todėl stacionarus tankis egzistuoja. Darbe šis tankis vadinamas B tipo. Kaip kinta stacionarusis tankis keičiant parametrus pavaizduota 5 paveiksle.



5 pav. B tipo tankio pavyzdys su skirtingais parametrais.

3.2. Ferhiulsto lygtis

Įvairiose mokslo šakose gana svarbi yra Ferhiulsto lygtis, kuri yra logistinės stochastinės diferencialinės lygties atskiras atvejis. Iš pradžių ji buvo naudojama biologinių populiacijų modeliavimui vėliau paplito ir kitose srityse. Ferhiulsto lygtis užsirašo tokiu pavidalu:

$$\mathrm{d}X = (\lambda X_t - X_t^2)\,\mathrm{d}t + \sigma X_t\,\mathrm{d}B_t,$$

kur B_t yra Brauno arba Vynerio procesas, o t interpretuojamas kaip laikas. Šios lygties sprendinį galima užrašyti išreikštiniu pavidalu:

$$X_t = \frac{1}{Y_t} = \frac{X_0 \mathrm{e}^{(\lambda-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma B_t}}{1 + X_0 \int_0^t \mathrm{e}^{(\lambda-\frac{1}{2}\sigma^2)s-\sigma B_s)}\,\mathrm{d}s}. \tag{27}$$

Iš sprendinio išraiškos matosi, kad jei $X_0 > 0$, tai $X_t > 0$ su visais. Nagrinėjant sprendinio elgesį yra įdomus trys atvejai: $\lambda < \sigma^2/2$, $\lambda = \sigma^2/2$, $\lambda > \sigma^2/2$. Pirmu atveju iš sprendinio išraiškos matosi, jei $t \to \infty$, tai $X_t \to 0$. Gausis, jog kraštas taške 0 yra pritraukiantysis ir procesas stacionariojo tankio neturi. Stacionariojo tankio galima tikėtis tuo atveju kai, $\lambda \geqslant \sigma^2/2$. Paskaičiuojame stacionariojo tankio išraišką:

$$\begin{aligned} p_0(x) &= \frac{N}{\sigma^2 x^2} \exp\left\{ 2 \int_1^x \frac{\lambda u - u^2}{\sigma^2 u^2}\,\mathrm{d}u \right\} \\ &= \frac{N}{\sigma^2 x^2} \exp\left\{ \frac{2\lambda}{\sigma^2} \ln u - \frac{2}{\sigma^2}(x-1) \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{N}{\sigma^2 x^2} x^{2\lambda/\sigma^2-2} \exp\{2/\sigma^2\} \exp\left\{-\frac{2}{\sigma^2}x\right\}$$
$$= \frac{N}{\sigma^2 x^2} x^{2\lambda/\sigma^2-2} \exp\left\{-\frac{2}{\sigma^2}x\right\}. \tag{28}$$

Funkcija p_0 yra integruojam intervale $(0, +\infty)$, kai $2\lambda/\sigma^2 - 2 > -1$ arba kitaip, kai $\sigma^2 < 2\lambda$. Tuo atveju, kai $\sigma^2 = 2\lambda$, turime triukšmo indukuotą virsmą ir procesas stacionariojo tankio neturi. Stacionarusis tankis egzistuoja kai $\sigma^2 < 2\lambda$ ir neturi, kai $\sigma^2 \geqslant 2\lambda$. Panagrinėjus pačio stacionariojo tankio elgesį arti 0 gauname tokius rezultatus:

$$\lim_{x\downarrow 0} p_0(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{kai } \sigma^2/2 < \lambda < \sigma^2, \\ N = 2/\lambda, & \text{kai } \lambda = \sigma^2, \\ 0, & \text{kai } \lambda > \sigma^2. \end{cases} \tag{29}$$

Matome, stacionariojo tankio išraiškos skiriasi priklausomai nuo to ar $\lambda < \sigma^2 < 2\lambda$ ir $\sigma^2 < \lambda$. Dar vieną ypatybę arba stacionariojo tankio virsmą galima įžvelgti $x = 0$ aplinkoje. Išskyrus du atvejus $\frac{2}{3}\lambda < \sigma^2 < \lambda$ ir $\sigma^2 < \frac{2}{3}\lambda$ gauname atitinkamai $\lim_{x\downarrow 0} p_0' x = +\infty$ ir $\lim_{x\downarrow 0} p_0' x = 0$

3.3. Lygtis su dviviršūniu tankiu

Nagrinėjant stacionariuosius tankius įdomu pažiūrėti kaip siūlomas parametrų vertinimo algoritmas elgiasi su dviviršūniu sudėtingesniu tankiu. Tam tikslui nagrinėsime tokią lygtį:

$$\mathrm{d}X_t = (\theta_1 - X_t)\big(1 - X_t(\theta_2 - X_t)\big)\,\mathrm{d}t + \sigma X_t(\theta_2 - X_t)\,\mathrm{d}B_t, \tag{30}$$

čia $\theta_1 > 0$, $\theta_2 > 0$, $\theta_1 < \theta_2$, $\sigma > 0$ Stacionarųjį tankį paskaičiuojame pagal (10) formulę.

$$p_0(y) = \frac{N}{\sigma^2 y^2 (\theta_2 - y)^2} \exp\left\{2 \int_c^y \frac{(\theta_1 - x)(1 - x(\theta_2 - x))}{\sigma^2 x^2 (\theta_2 - x)^2}\,\mathrm{d}x\right\} \tag{31}$$

Suintegruojame reiškinį po eksponente.

$$\frac{(\theta_1 - x)(1 - x(\theta_2 - x))}{\sigma^2 x^2 (\theta_2 - x)^2} = \frac{\theta_1 - x}{\sigma^2 x^2 (\theta_2 - x)^2} - \frac{\theta_1 - x}{\sigma^2 x (\theta_2 - x)},$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_c^y \frac{\theta_1}{x^2(\theta_2 - x)^2} - \frac{1}{x(\theta_2 - x)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2\theta_1}{\theta_2^3} \ln\left(\frac{x}{x - \theta_2}\right) - \frac{\theta_1}{\theta_2^2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x - \theta_2}\right) - \left(\frac{1}{\theta_2^2} \ln\left(\frac{x}{x - \theta_2}\right) - \frac{1}{\theta_2(x - \theta_2)}\right) + const_1 \\ &= \frac{1}{\theta_2^2} \ln\left(\frac{x}{x - \theta_2}\right)^{\frac{2\theta_1}{\theta_2} - 1} - \frac{\theta_1}{\theta_2^2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x - \theta_2}\right) + \frac{1}{\theta_2(x - \theta_2)} + const_1 \end{aligned}$$

$$I_2 = \int\limits_c^y \frac{(\theta_1 - x)}{x(\theta_2 - x)}\,\mathrm{d}x = \frac{\theta_1}{\theta_2}\ln\left(\frac{x}{x-\theta_2}\right) + \ln(x-\theta_2) + const_2$$

$$I_1 - I_2 = \ln\left(\frac{x}{x-\theta_2}\right)^{(\frac{2\theta_1}{\theta_2}-1)\frac{1}{\theta_2^2}-\frac{\theta_1}{\theta_2}} - \frac{\theta_1}{\theta_2^2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-\theta_2}\right) + \frac{1}{\theta_2(x-\theta_2)} - \ln(x-\theta_2) + const_3,$$

$const_3 = const_1 - const_2$.

Galiausiai gaunama stacionariojo tankio išraiška:

$$\begin{aligned} p_0(y) = {} & \frac{N}{\sigma^2 y^2 (\theta_2 - y)^2}\left(\frac{x}{x-\theta_2}\right)^{((2\theta_1/\theta_2-1)1/\theta_2^2-\theta_1/\theta_2)\frac{2}{\sigma^2}} (x-\theta_2)^{-2/\sigma^2} \\ & \times \exp\left\{\frac{2}{\sigma^2}\left(\frac{1}{\theta_2(x-\theta_2)} - \frac{\theta_1}{\theta_2^2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-\theta_2}\right)\right)\right\}. \end{aligned} \tag{32}$$

4. Praktinė dalis

Šioje dalyje praktiškai nagrinėjamas 3 skyriuje suformuluotas uždavinys. Praktiškai yra patikrinama ar veikia idėja, jog parametrus galime vertinti panaudojus teorinę stacionariojo tankio išraišką ir proceso reikšmių histogramą. Nagrinėjamuose pavyzdžiuose naudojamos 3.1–3.3 skyriuose nagrinėtos lygtys.

Iš pradžių lygtims yra pritaikomas vienas iš (13), (14), (12) aproksimacijos algoritmų. Diskretizuotos lygties pagalba sugeneruojama atsitiktinio proceso trajektorija ir iš jos yra sukonstruojama histograma. Toliau histograma aprašoma kreivė išvesta per stulpelių vidurio taškus, tuose pačiuose taškuose yra artinama prie teorinio stacionariojo tankio kreivės. Kreivių artumui vertinti naudojame (17) tikslo funkciją.

Minimizuojame 1 priede aprašytu LUDE ir CG metodais (Contingent gradient metodo aprašymą galima surasti [6]). Patikrinti ar metodas iš tikrųjų veikia panaudojame tokią funciją: $u = x + y^2/(4x) + z^2/y + 2/z$. Jos minimumas yra $u = 4$, kai $x = 0.5$, $y = z = 1$ pritaikius LUDE algoritmą $L = 40$ argumentai iš intervalo $(0, 100)$ po 100 iteracijų gauname tokius rezultatus $u = 4.000000012$, $x = 0.5000172$, $y = 1.00003470$, $z = 1.000002346$.

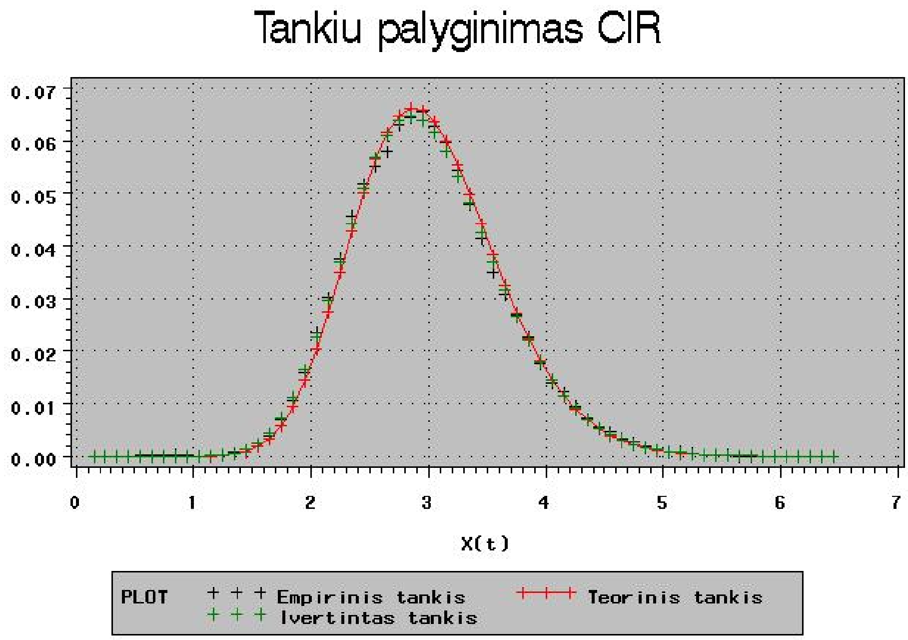
Taikant CG metodą gauname tokius rezultatus: $u = 4.00000001$, $x = 0.5000035$, $y = 0.9999973$, $z = 0.9999966$.

Suprogramuoti algoritmams bei atlikti skaičiavimus buvo naudojamas SAS statistikos paketas.

1 pavyzdys. Pirmiausia pradėsime nuo 3.1 skyrelyje aprašytos CIR lygties. Panaudoję (13) lygtimi aprašomą aproksimaciją ir paėmę $N = 100\,000$ reikšmių, o histogramoje $n = 64$ stulpelių, gauname rezultatus pateiktus 1 lentelėje. Tikrosios reikšmės $\sigma = 0.5$, $k = 1$, $\theta = 3$ (labai panašūs rezultatai gaunasi paėmus $N = 10\,000$ ir $n = 32$). Kaip matome tokiu būtu vertinant parametrus gaunasi visai neblogi rezultatai. Tačiau reiktų

1 lentelė. CIR parametrų vertinimas, gerai parinktas pradinis intervalas

Nr.	Param.	Tikrasis	Įvertis	Skirtumas	SAP	Metodas	Tiksl. f-ja m.
1	k	1	0.857428	0.142572	0.142572	CG	3.593E−05
	σ	0.5	0.476485	0.023515	0.04703		
	θ	3	2.9836703	0.0163297	0.0054432		
2	k	1	0.9416118	0.0583882	0.0583882	LUDE	3.59E−05
	σ	0.5	0.4992759	0.0007241	0.0014482		
	θ	3	2.9835777	0.0164223	0.0054741		

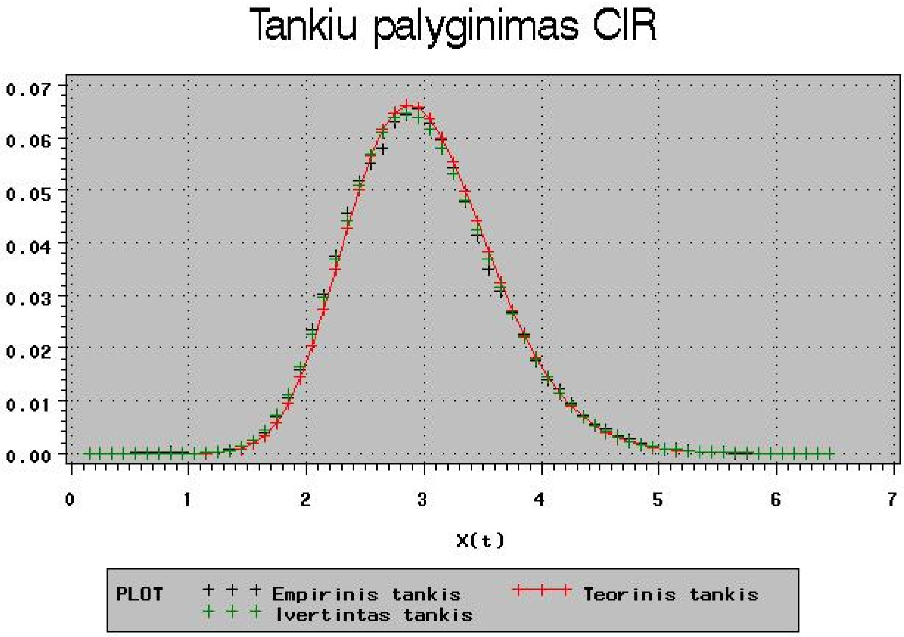


6 pav. Tankiai, $\hat{\sigma} = 0.476$, $\hat{k} = 0.942$, $\hat{\theta} = 2.984$, minimizuota CG metodu.

paminėti, jog šie rezultatai gaunasi fiksavus gana tiksliai intervalą (intervalo ilgis apie 2), kuriame ieškome parametrų.

Jei intervalas yra parenkamas ne taip tiksliai, galime gauti rezultatus pateiktus 2 lentelėje. Čia taip pat pastebime, jog yra pagaunamas parametrų k ir σ^2 santykis, bet ne patys parametrai, šią problemą galima buvo pastebėti ir iš (22) formulės. (22) formule aprašomai kreivei brėžti pakanka dviejų parametrų, o mes bandome įvertinti tris. Santykis yra pagaunamas ir LUDE ir CG algoritmais, absoliučios parametrų reikšmės yra skirtingos. 8, 10 grafikuose galima pastebėti, jog tankiai yra gana artimi, t.y. visai gerai aproksimuojama, tačiau gauti parametrai visai ne tie. Palyginimui 9 ir 11 paveiksluose pateikta kaip elgiasi lygtys su blogai įvertintais parametrais.

Jei vieną iš parametrų fiksuojame pavyzdžiui σ gauname gana gerus rezultatus, kurie pateikiami 3 lentelėje, o jų paieškai minimizavimo metoduose galima nurodyti gana platų parametro intervalą. Šiuo atveju gauname gerai įvertintus ne tik stacionariojo tankio, bet ir (13), (14), (12) lygties parametrus (žr. 12–14 paveikslus). Minimizavimo metodo pasirinkimas CIR lygčiai šiuo atveju labai didelės įtakos neturi. Fiksuotą para-



7 pav. Tankiai, $\hat{\sigma} = 0.499$, $\hat{k} = 0.857$, $\hat{\theta} = 2.984$, minimizuota LUDE metodu.

2 lentelė. CIR parametrų vertinimas, minimizavimas plačiame intervale

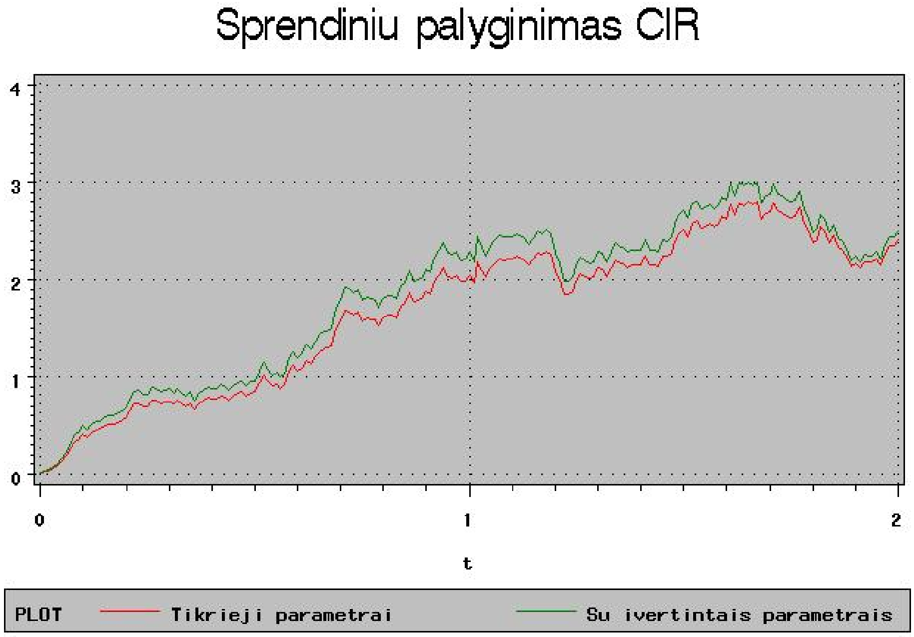
Nr.	Param.	Tikrasis	Įvertis	Skirtumas	SAP	Metodas	Tiksl. f-ja m.
1	k	1	1.2102512	0.2102512	0.2102512	CG	0.000036
	σ	0.5	0.5660938	0.0660938	0.1321876		
	θ	3	2.983671	0.01632899	0.005442		
2	k	1	6.3888252	5.3888252	5.3888252	LUDE	0.0000644
	σ	0.5	1.3095757	0.8095757	1.6191514		
	θ	3	3.0073266	0.00732659	0.00244219		

3 lentelė. CIR parametrų vertinimas, fiksavus vieną iš parametrų

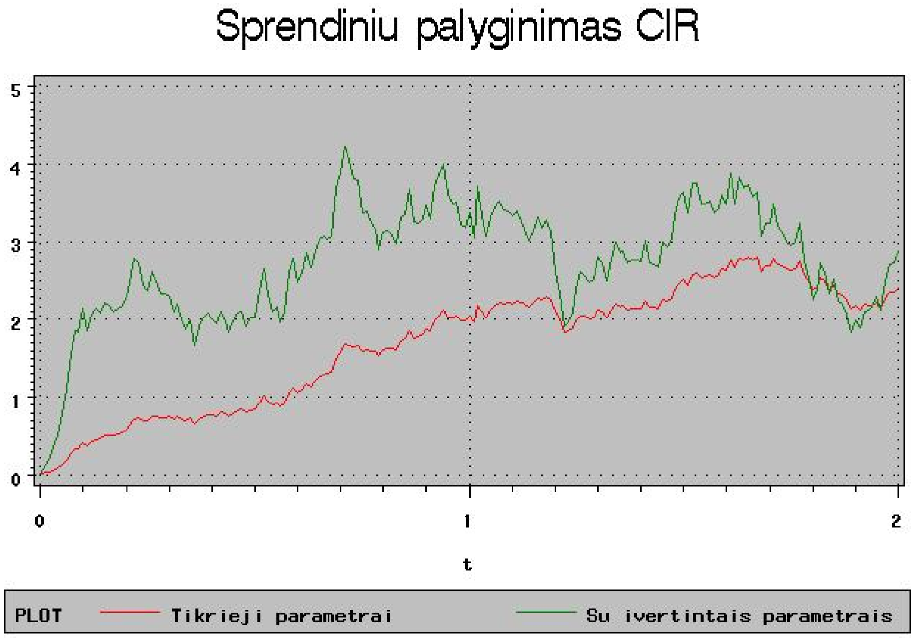
Nr.	Param.	Tikrasis	Įvertis	Skirtumas	SAP	Metodas	Tiksl. f-ja m.
1	k	1	0.9441436	0.0558564	0.0558564	CG	0.000036
	σ	0.5	fiksuota	0	0		
	θ	3	2.9836703	0.0163297	0.005443		
2	k	1	1	0	0	LUDE	0.0000644
	σ	0.5	fiksuota	0	0		
	θ	3	2.9790992	0.0209008	0.006966933		

metrą galime įvertinti kitais metodais, pavyzdžiui didžiausio tikėtinumo ar mažiausių kvadratų siūlomais [4], [5] šaltiniuose.

Prieš tai nagrinėtuose pavyzdžiuose buvo paimta gana daug proceso reikšmių ir histogramos stulpelių. Dabar palyginimui pateiksime rezultatus su mažesnėmis stebėjimų imtimis su lygties reikšmių $N = 100$, o histogramos $n = 8$. Vertiname visus tris parametrus nei vieno nefiksavus. Rezultatai 4 lentelėje ir 15, 16 grafikuose.



8 pav. Lygtys, $\hat{\sigma} = 0.566$, $\hat{k} = 1.210$, $\hat{\theta} = 2.984$, minimizuota CG metodu.

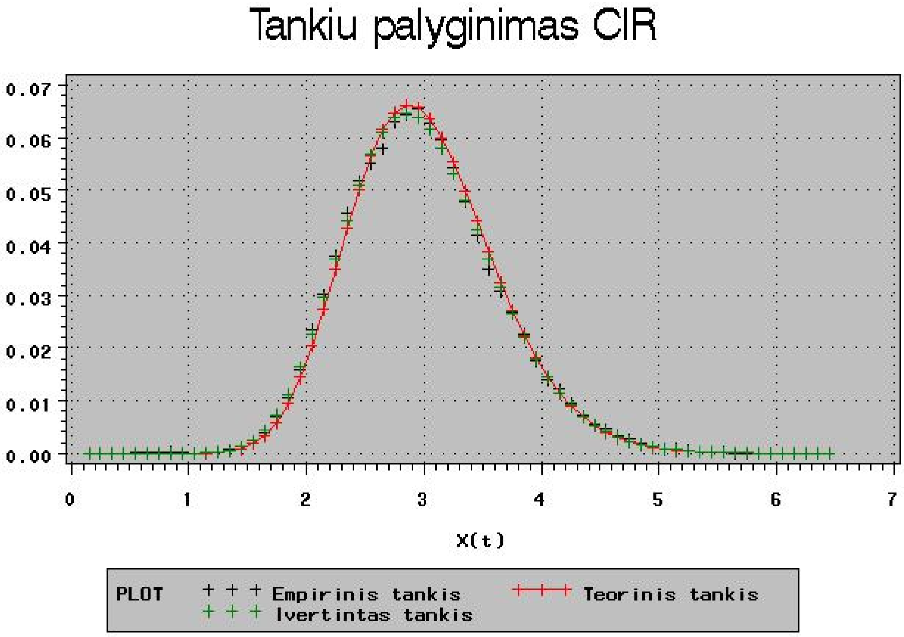


9 pav. Lygtys, $\hat{\sigma} = 1.31$, $\hat{k} = 6.389$, $\hat{\theta} = 3.00$, minimizuota LUDE metodu.

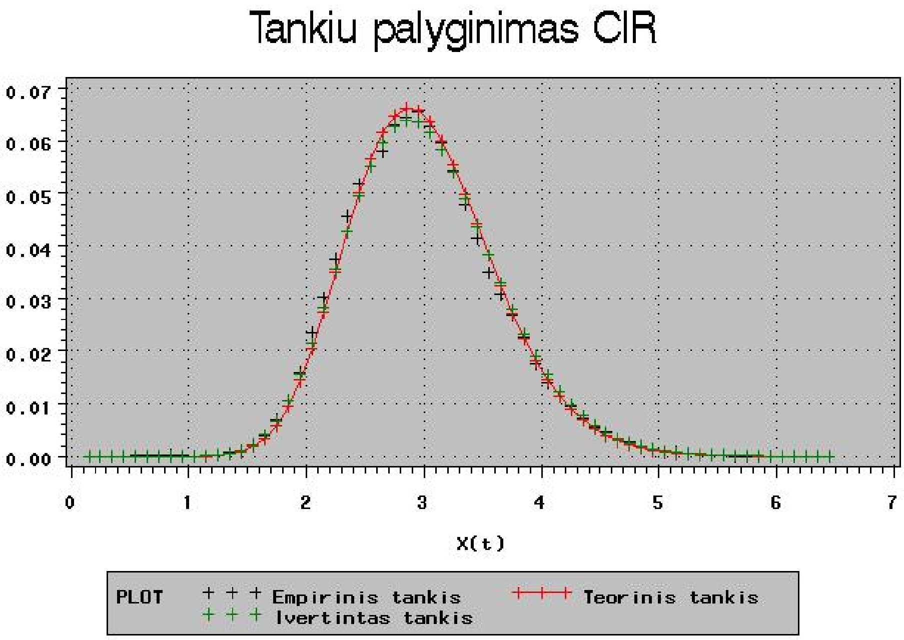
4 lentelė. CIR parametrų vertinimas, $N = 100$

Nr.	Param.	Tikrasis	Įvertis	Skirtumas	SAP	Metodas	Tiksl. f-ja m.
1	k	1	1.395783	0.395783	0.395783	CG	0.006477
	σ	0.5	0.7243144	0.2243144	0.4486288		
	θ	3	2.8809054	0.1190946	0.0396982		

Padidinus imtį $N = 1000$, o $n = 18$ rezultatai pagerėja. Rezultatai 5 lentelėje ir 17, 18 grafikuose.



10 pav. Tankiai, $\hat{\sigma} = 0.566$, $\hat{k} = 1.210$, $\hat{\theta} = 2.984$, minimizuota CG metodu.

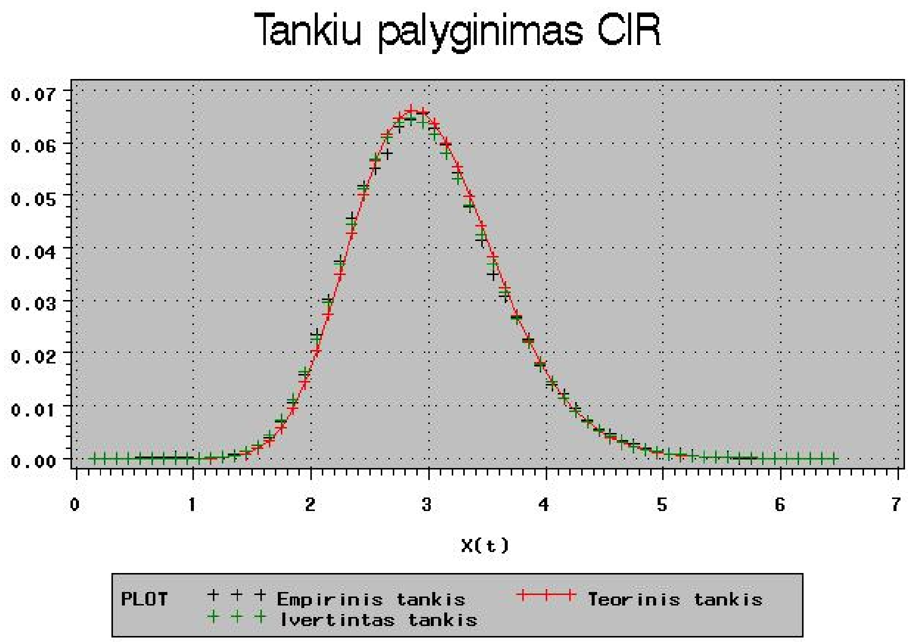


11 pav. Tankiai, $\hat{\sigma} = 1.31$, $\hat{k} = 6.389$, $\hat{\theta} = 3.00$, minimizuota LUDE metodu.

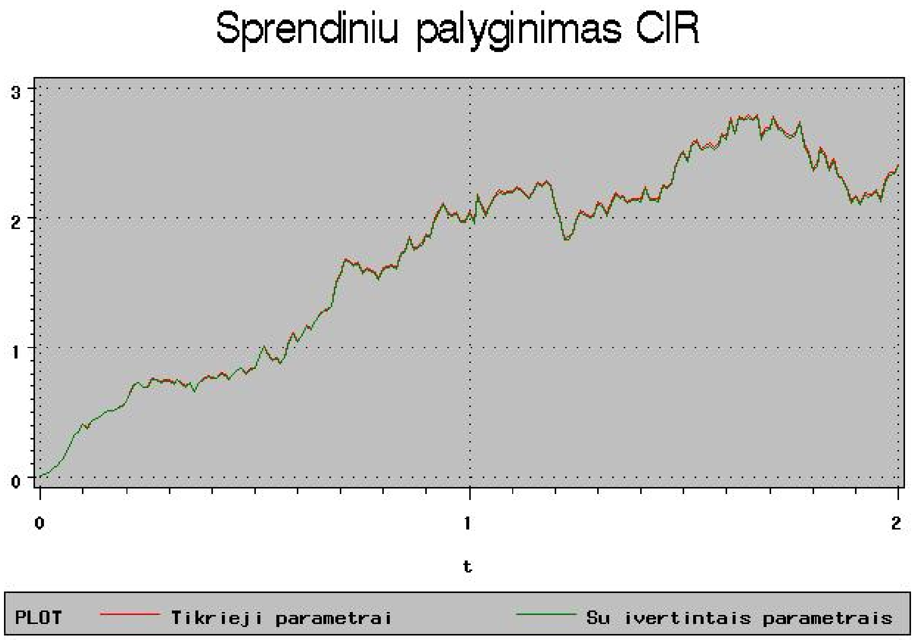
5 lentelė. CIR parametrų vertinimas, $N = 1000$

Nr.	Param.	Tikrasis	Įvertis	Skirtumas	SAP	Metodas	Tiksl. f-ja m.
1	k	1	0.9960298	0.00397	0.00397	CG	0.00104213
	σ	0.5	0.6134528	0.1134528	0.2269056		
	θ	3	3.029493	0.029493	0.009831		

2 pavyzdys. Kitas nagrinėjamas pavyzdys yra Ferhiulsto lygtis. Į ją įeina tik du parametrai, iš (28) stacionariojo tankio matosi, jog galime įvertinti abu parametrus. Lygčiai



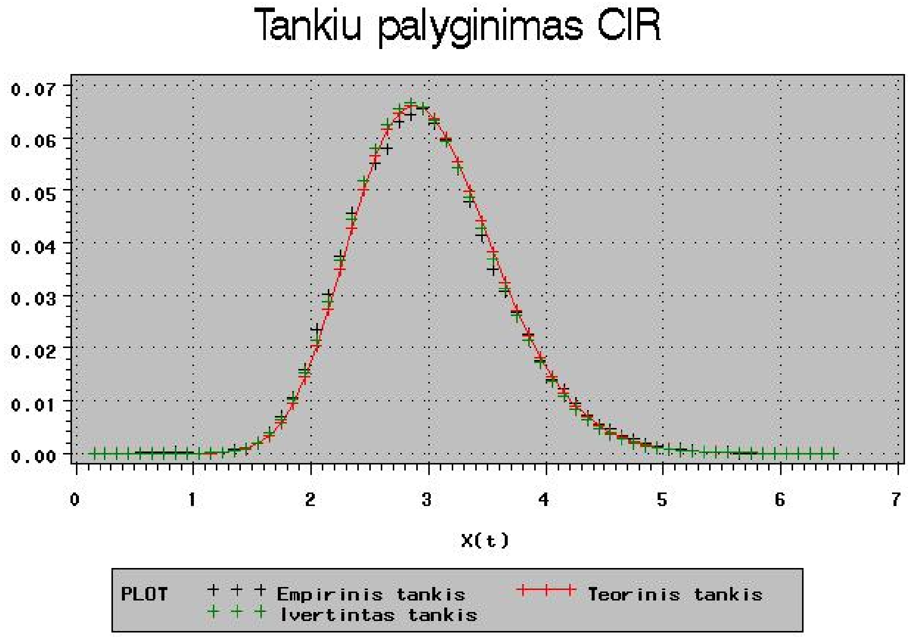
12 pav. Tankiai, $\hat{\sigma} = 0.5$, $\hat{k} = 0.944$, $\hat{\theta} = 2.984$, minimizuota CG metodu.



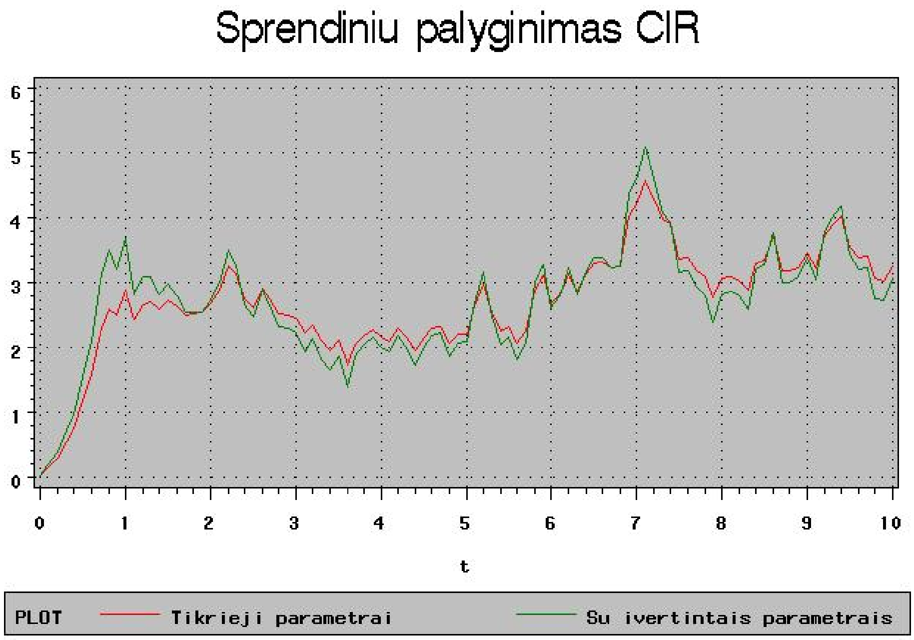
13 pav. Lygtys, $\hat{\sigma} = 0.5$, $\hat{k} = 1$, $\hat{\theta} = 2.979$, minimizuota LUDE metodu.

naudojame pačią paprasčiausią (12) Eulerio aproksimaciją. Lygtyje $\lambda = 1$, $\sigma = 0.333$. Iš lygties sugeneruojame $N = 100\,000$ reikšmių ir sukonstruojame histogramą iš $n = 64$. 6 lentelėje pirmas ir antras stebėjimai yra gauti minimizuojant siaurame intervale (intervalo ilgis 1), o 3 ir 4 platesniame intervale (intervalo ilgis 2). Grafiškai rezultatai pateikti 19–22 paveiksluose. Iš jų matosi, kad nagrinėjamu metodu galima gana gerai įvertinti parametrus.

3 pavyzdys. Aprašinėjant stacionariuosius tankius buvo gauta du dviviršūniai tankiai:

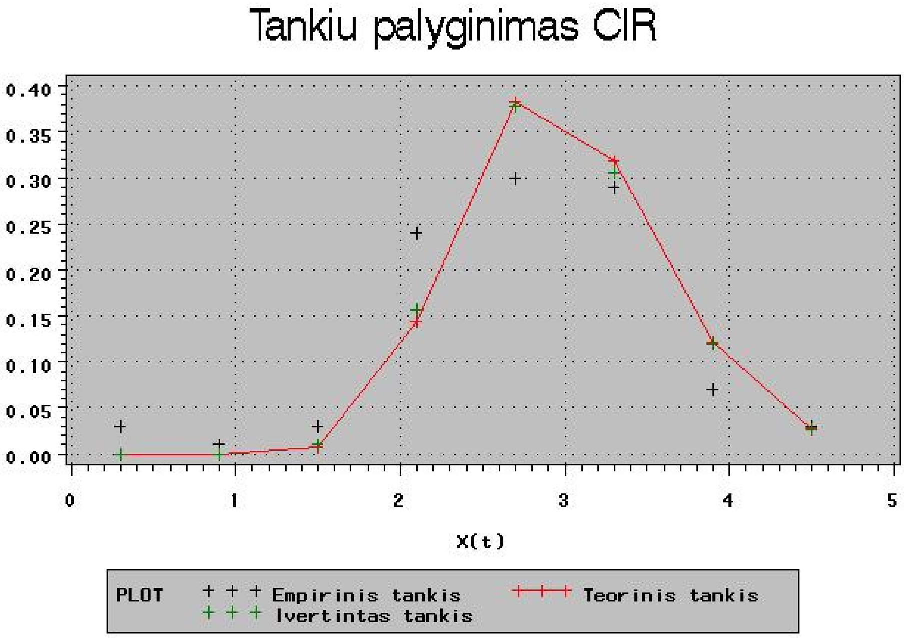


14 pav. Tankiai, $\hat{\sigma} = 0.5$, $\hat{k} = 1$, $\hat{\theta} = 2.979$, minimizuota LUDE metodu.

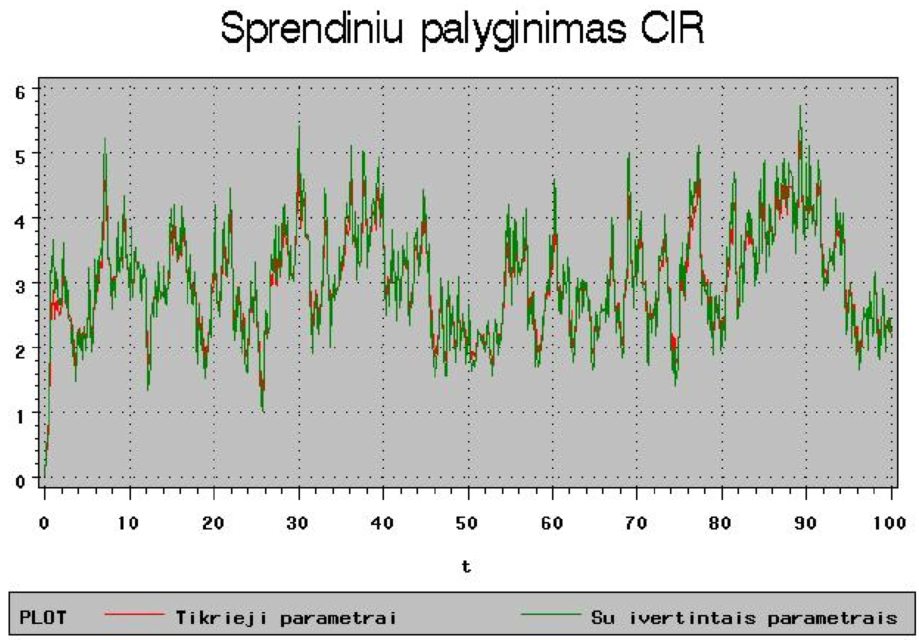


15 pav. Lygtys, $\hat{\sigma} = 0.724$, $\hat{k} = 1.396$, $\hat{\theta} = 2.88$, minimizuota CG metodu.

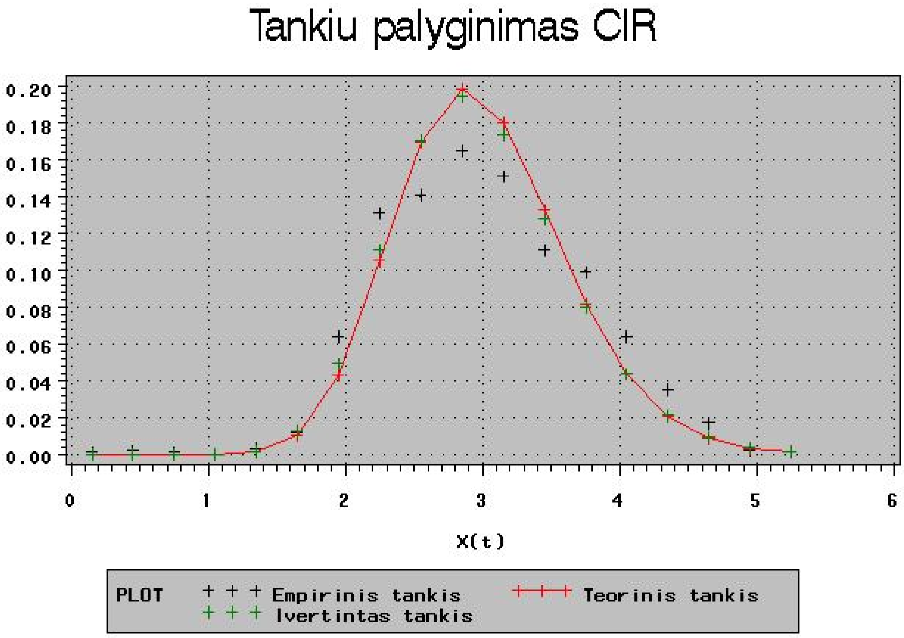
B tipo ir tankis skyriuje 3.3. Antrasis yra įdomesnis tuo, kad tiksliai nežinome kiek parametrų galima įvertinti (pirmu atveju gauname Beta tankį, kurio parametrų skaičius yra žinomas). Vertinant antrąjį tankį ir paėmus $N = 100\,000$ proceso reikšmių, ir $n = 64$ histogramos reikšmių (stulpelių) gauti rezultatai pateikti 7 lentelėje. Grafiškai tie patys rezultatai pateikti 23, 24 paveiksluose. Vertinant dviviršūnį tankį pasiūlytu metodu gauti parametrai gerai aproksimuoja tiek tankį, tiek lygtį.



16 pav. Tankiai, $\hat{\sigma} = 0.724$, $\hat{k} = 1.396$, $\hat{\theta} = 2.88$, minimizuota CG metodu.



17 pav. Lygtys, $\hat{\sigma} = 0.613$, $\hat{k} = 0.996$,$\hat{\theta} = 3.029$, minimizuota CG metodu.



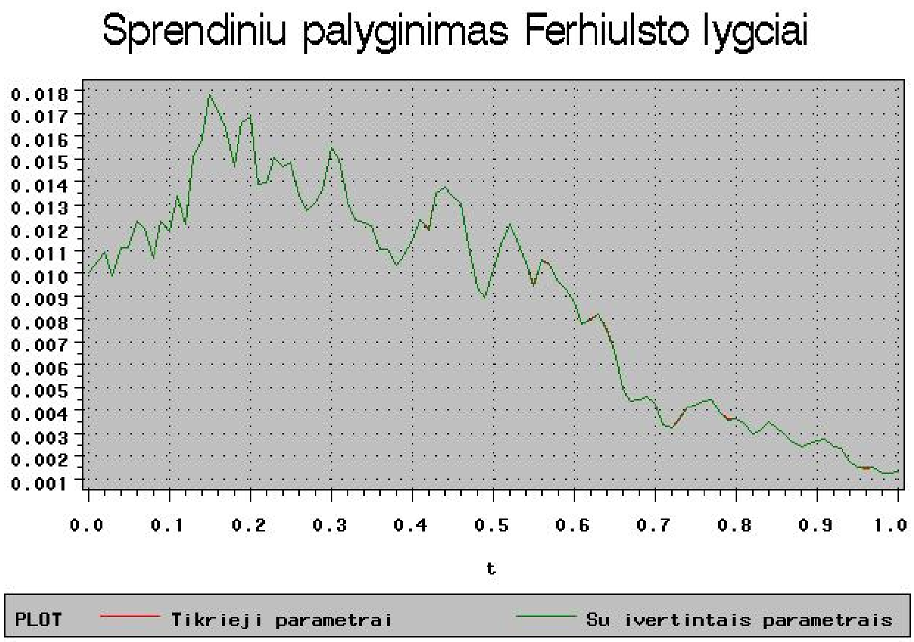
18 pav. Tankiai, $\hat{\sigma} = 0.613$, $\hat{k} = 0.996$, $\hat{\theta} = 3.029$, minimizuota CG metodu.

6 lentelė. Ferhiulst parametrų vertinimas, $N = 100000$

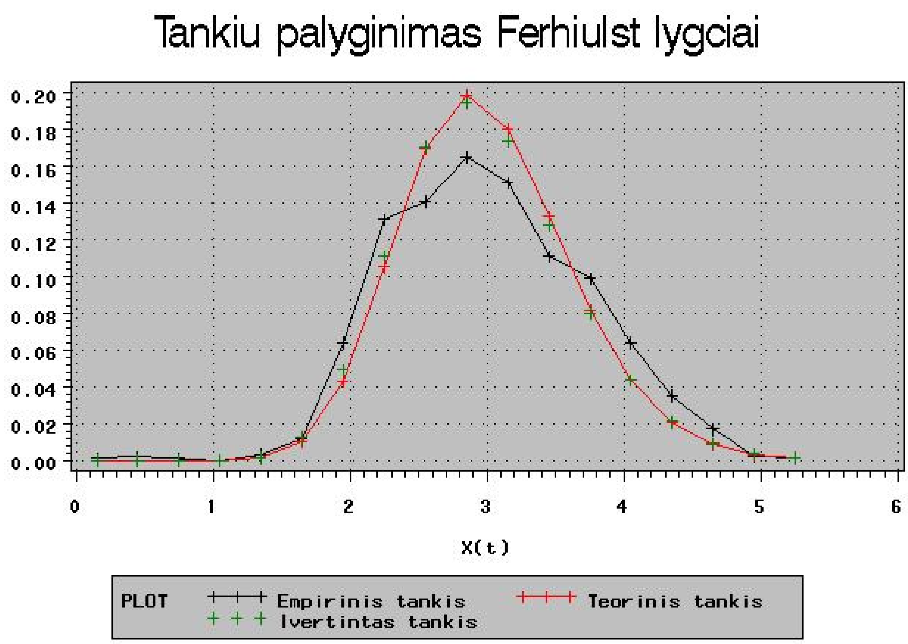
Nr.	Param.	Tikrasis	Įvertis	Skirtumas	SAP	Metodas	Tiksl. f-ja m.
1	λ	1	1.0036841	0.0036841	0.0036841	CG	0.0000546
	σ	0.33	0.331714	0.0017148	0.00519		
2	λ	1	1.0014804	0.001480	0.001480	LUDE	0.0000566
	σ	0.33	0.33187	0.0018724	0.0056741		
3	λ	1	1.0036813	0.0036813	0.0036813	CG	0.0000547
	σ	0.33	0.33172	0.00172	0.005212		
4	λ	1	1.035641	0.0356417	0.035641	LUDE	0.0014367
	σ	0.33	0.41612	0.08612	0.260970		

7 lentelė. CIR parametrų vertinimas, $N = 1000$

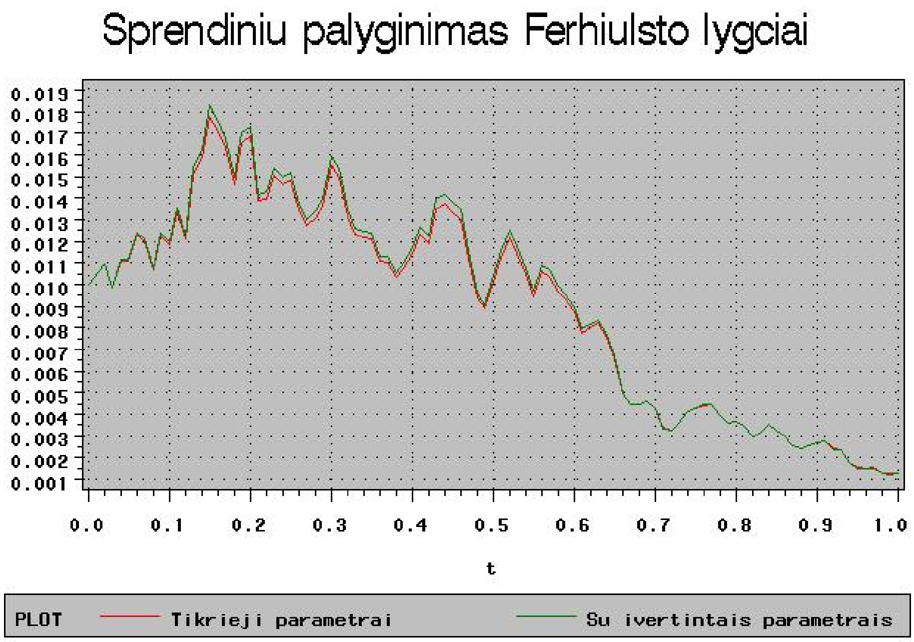
Nr.	Param.	Tikrasis	Įvertis	Skirtumas	SAP	Metodas	Tiksl. f-ja m.
1	σ	0.8	0.7597948	0.0402052	0.0502565	CG	0.00002518
	θ_1	1	0.9277887	0.0722113	0.0722113		
	θ_2	2	2.0293035	0.0293035	0.01465175		
2	σ	0.8	0.806572	0.00657256	0.0082157	LUDE	0.00006123
	θ_1	1	0.974030	0.025969	0.0259699		
	θ_2	2	2.009893	0.0098936	0.004946831		



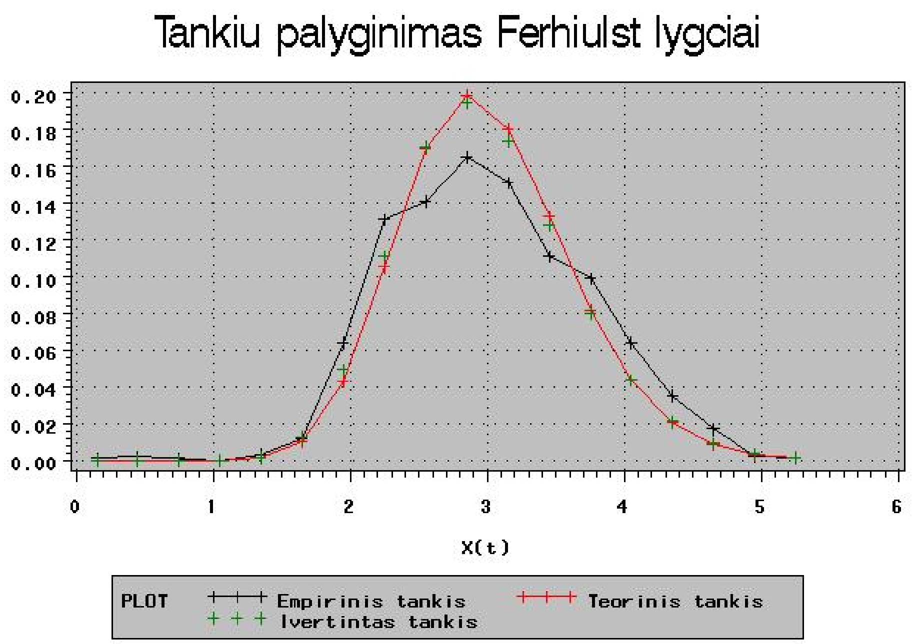
19 pav. Lygtys, $\hat{\sigma} = 0.3318$, $\hat{\lambda} = 1.0014$, minimizuota LUDE metodu



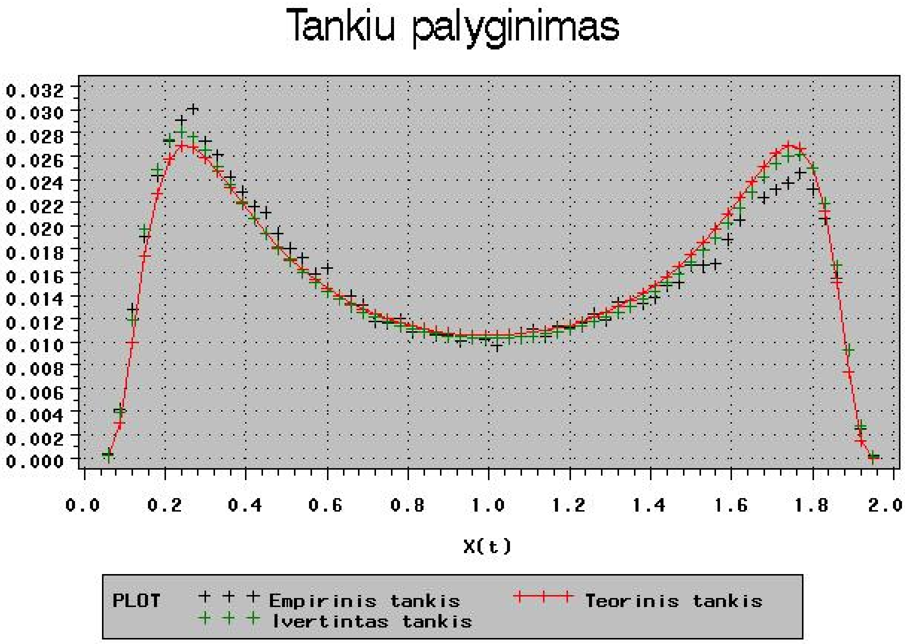
20 pav. Tankiai, $\hat{\sigma} = 0.3318$, $\hat{\lambda} = 1.0014$, minimizuota LUDE metodu



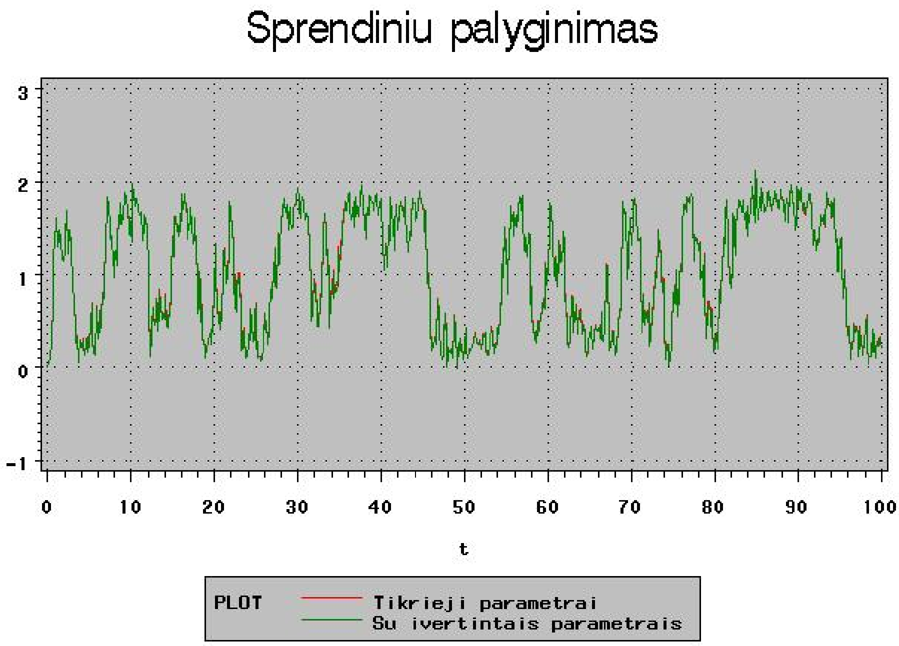
21 pav. Lygtys, $\hat{\sigma} = 0.41612$, $\hat{\lambda} = 1.035641$, minimizuota LUDE metodu



22 pav. Tankiai, $\hat{\sigma} = 0.41612$, $\hat{\lambda} = 1.0356$, minimizuota LUDE metodu



23 pav. Tankiai, $\hat{\sigma} = 0.8065$, $\hat{\theta}_1 = 0.974$, $\hat{\theta}_2 = 2.009$, minimizuota LUDE metodu.



24 pav. Lygtys, $\hat{\sigma} = 0.8065$, $\hat{\theta}_1 = 0.974$, $\hat{\theta}_2 = 2.009$, minimizuota LUDE metodu.

5. Išvados

Pabaigoje pateiksime keletą išvadų apie nagrinėtą metodą.

- Difuzinį procesą aprašančios lygties ir stacionariojo proceso kreivę apibūdinančių parametrų skaičius yra nevienodas. Vertinant lygties parametrus jų galime įvertinti ne daugiau, nei reikia tankio kreivei nustatyti.
- Dažnai sunku iš tankio nustatyti kiek parametrų galima vertinti. Tiksliai galima nustatyti turint vieno iš standartinių tankių išraišką.
- Darbe pasiūlytu būdu parametrams vertinti svarbu yra pasirinkti tinkamą minimizavimo algoritmą, bei tikslo funkciją.
- Patenkinamus rezultatus galima gauti ir ne su labai didelėmis imtimis.

Literatūra

[1] V. Mackevičius, Stochastinė analizė, VU leidykla, Vilnius, 2005.

[2] K.V. Gardinier, Stochasticieskie mietodi v estestvenach naukach, Moskva, Mir, 1986.

[3] S. Bohacek, Stochastic model of TCP and Fair video transmission, in: IEEE INFOCOM, USA, 2003.

[4] L. Overbeck, T. Ryden, Estimation in the Cox–Ingersoll–Ross model, Econometric Theory 13 (1997) 430–461.

[5] E.M. Cleur, Maximum likelihood estimates of a class of one-dimensional stochastic differential equation models from discrete data, Journal of Time Series Analysis 22 (1999).

[6] J.R. Shewchuk, An introduction to the Conjugate Gradient method without the agonizing pain, Pittsburgh, 1994.

[7] L. Cobb, Stochastic differential equations for social sciences, 1998.

[8] A.D. Viencel, Kurs teoriĭ sluqaĭnyh procesov, Nauka, Moskva, 1975.

[9] R. Sinkevičiūtė, Stochastinės diferencialinės CIR lygties, naudojamos palūkanų normų modeliavimui, parametrų vertinimo metodai, 2005.

[10] J. Jusel, Stochastinio genetinio modelio ir CKLS lygties parametrų vertinimas, 2006.

[11] H. Sarimveis, A. Nikolakopoulos, A line up evolutionary algorithm for solving nonlinear constrained optimization problems, Computer & Operations Research 32 (2005), 1499–1514.

[12] D.J. Higham, An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations, SIAM Review 43 (3) 525–546.

1 Priedas

LUDE algoritmas

Praktikoje daugelyje sričių, uždaviniai formuluojami taip, jog tiesinio programavimo įrankių nepakanka. Dažnai prisireikia optimizuoti netiesinę tikslo funkciją. Tikslo funkcijų būna pačių įvairiausių, tą pat galima pasakyti ir apie optimizavimo metodus. Tačiau kiekvienas metodas turi savų apribojimų, savų reikalavimų. Štai, kad ir gradientiniai metodai – norint juos taikyti funkcija privalo tenkinti tolydumo, iškilumo ir kt. sąlygas. Efektyvaus optimizavimo metodo, kuris keltų kuo mažiau reikalavimų suradimas yra labai svarbus uždavinys. Vis labiau populiarėja stochastiniai paieškos algoritmai. Vienas iš jų yra LUDE (Line up evolutionary algorithm). Šio algoritmo privalumas, kad jo pagalba išvengiame daugelio problemų, kurios kyla naudojant nestochastinius paieškos algoritmus. Galima būtų išvardinti tokius pagrindinius privalumus:

- Metodas gali būti taikomas netolydžioms, nediferencijuojamoms, neiškiloms tikslo funkcijoms.
- Nereikia skaičiuotų gradientų.
- Lengvai susidoroja su patekimo į lokalų minimumą problema.

Tačiau kaip ir visi algoritmai turi savų trūkumų. Pagrindinis trūkumas, jog šis optimizavimo metodas sunkiai sprendžia uždavinius su apribojimais.

Aprašymas

Šio algoritmo tikslas yra surasti globalų ekstremumo tašką, remiantis N kontrolinių reikšmų ir iš anksto pasirinkus tik kintamųjų pagal kuriuos minimizuojame viršutinį ir apatinį rėžius. Minimizavimo užduotį galima formuluoti taip:

$$\min_x f(x). \tag{32}$$

Pagal

$$x \in X = \{x \mid x \in \mathbb{R}^n,\ x^{\mathrm{lo}} \leqslant x \leqslant x^{\mathrm{up}}\}, \tag{32}$$

čia $f(x)$ yra užduoties tikslo funkcija, o x^{lo} ir x^{up} yra kintamųjų pagal kuriuos minimizuojame apatinis ir viršutinis rėžiai.

Suformuluotos užduoties minimizavimui, panaudojant LUDE algoritmą, žingsniai yra šie:

1. Pasirenkama galutinį iteracijų skaičių $mxiter$, o pirmoji iteracija prilyginama nuliui ($iter = 0$).

2. Sugeneruojama L sprendinių x_i, $i = 1, \ldots, L$. Sprendiniai yra sugeneruojami atsitiktinai, laikant, kad sprendiniai yra pasiskirstę pagal tolygųjį skirstinį tarp viršutinio x^{up} ir apatinio x_{lo} rėžio

3. Vienetu padidinimas iteracijos numeris, $iter = iter + 1$.

4. Kiekvienam sprendiniui paskaičiuojama tikslo funkcijos reikšmės $f(x_i)$, $i = 1, \ldots, L$.

5. Sprendiniai išrikiuojami mažėjimo tvarka: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_L$, kur x_i eina prieš x_j, jei $f(x_i) > f(x_j)$, $i, j = 1, \ldots, L$

6. Atliekama `crossover` keitimo operacija:

   FOR $\quad i = 1, \ldots, L-1$

   $\qquad x_{i,new} = x_i + r(x_{i+1} - x_i),$ kur r atsitiktinis dydis tarp 0 ir 1

   $\qquad$ if $\quad f(x_{i,\text{new}}) < f(x_{i+1}) \quad$ then $x_i = x_{i,\text{new}}$

   END

7. Surikiuojami sprendiniai mažėjimo tvarka $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_L$ taip, kad x_i eitų prieš x_j jei $f(x_i) > f(x_j)$, $i, j = 1, \ldots, L$.

8. Atliekama netolygaus keitimo operacija visiems sprendiniams

FOR $\quad i = 1, \ldots, L-1$

$$p_{m,i} = \frac{L - i + 1}{L}$$

FOR $\quad j = 1, \ldots, N$

Generuojame atsitiktinį dydį r tolygiai pasiskirsčiusį intervale $(0, 1)$

IF $r < p_{m,i}$

Generuojamas atsitiktinis dydis b įgyjantis reikšmes 1 arba 0

ir atsitiktinį dydį r tolygiai pasiskirsčiusį intervale $(0, 1)$

IF $\quad b = 0 \quad$ THEN $x_{i,\text{new}}(j) = x_i(j) + \big(x^{up}(j) - x_i(j)\big)\dfrac{r}{d}\mathrm{e}^{-2*iter/mxiter}$

IF $\quad b = 1 \quad$ THEN $x_{i,\text{new}}(j) = x_i(j) - \big(x_i(j) - x^{up}(j)\big)\dfrac{r}{d}\mathrm{e}^{-2*iter/mxiter}$

END

END

IF $\quad f(x_{i,\text{new}}) < f(x_i)$ then $x_i = x_{i,\text{new}}$

END

9. Tikslo funkcijai priskiriama reikšmė gauta įstačius geriausią sprendinį ir iteracijų skaičius padidinamas vienetu.

10. Jei iteracijų skaičius lygus $maxiter$ procedūra baigiama priešingu atveju grįžtama į 3 žingsnį.

5 pastaba. Procedūroje 8 žingsnyje įvedamas parametras d. Šiam parametrui yra priskiriama reikšmė 1, jei optimizavimo uždavinyje nėra sprendinių tarpusavio apribojimų.

6 pastaba. Naudojamos procedūros privalumas, jog vieninteliai parametrai, kuriuos turi nurodyti vartotojas pradinių sprendinių aibė ir iteracijų skaičius.

2 Priedas

Čia pateikiamas SAS programos kodas, naudas paskaičiavimas vienai iš lygčių. Kitoms lygtims naudoto kodo nepateikiame, nes ten skiriasi tik tankio funkcijos ir pačios lygtys.

```
/*Skaiciavimai  CIR lygciai*/
 options nodate pageno=1 linesize=80 pagesize=60;
 data BrJ_pk;
 temp = 0;
 delta_t = 0.01;
  do i = 1 to 1000;
       Z_t = rannor(19);
       Z_t_2 = rannor(20);
       Z_tt = Z_t + 1/sqrt(3) * Z_t_2;
   output;
 end;
 drop temp delta_t i; run;
/*Generuojame procesa*/
 proc iml;
   use BrJ_pk;
   read all var{Z_t}  into br_j;
   use BrJ_pk;
   read all var{Z_tt}  into br_jj;
   total = nrow(br_j);
   k = 1; sigma = 0.5; theta = 3;
   param = j(3,2);
   param[1,1]=k;
   param[2,1]=sigma;
   param[3,1]=theta;
   create parametrai from param;
   append from param;
   X=j(total,3) ;
   X[1,1]=0.1;/*Proceso pradzia*/
   interval=100;/*intervalo ilgis  10000*/
   dt=interval/nrow(br_j);
/*1. Cir lygtis*/
   /*Eulerio aproksimacija*/
 /*
   do i=2 to total;
     X[i,1]=X[i-1,1]+k*(theta-X[i-1,1])*dt+
     sigma*((X[i-1,1]))##(0.5)*br_j[i]*dt##(0.5);
   end;
   */
   /*Milsteino aproksimacija*/
  do i=2 to total;
```

```
      X[i,1]=X[i-1,1]+(k*(theta-X[i-1,1])
      -(sigma##2)/4)*dt+sigma*((X[i-1,1]))##(0.5)*br_j[i]*dt##(0.5)
      +(sigma##2)/4*(br_j[i]*dt##(0.5))##2;
    end;
 /* 3/2 aproksimacija*/
/* do i=2 to total;
      X[i,1]=X[i-1,1]+(k*(theta-X[i-1,1])-(sigma##2)/4)*dt
      +sigma*(abs(X[i-1,1]))##(0.5)*br_j[i]*dt##(0.5)
      +(sigma##2)/2*(br_j[i]*dt##(0.5))##2+(k*sigma/2*(theta-X[i-1,1])
      -sigma##3/8)*(abs(X[i-1,1]))##(-0.5)*dt*br_j[i]*dt##(0.5)
      +(k*sigma*(abs(X[i-1,1]))##(0.5)-(k*sigma/2*(theta-X[i-1,1])
      -sigma##3/8)*(abs(X[i-1,1]))##(-0.5))*0.5*dt##(1.5)*br_jj[i];
         end;
*/
  create lygt_duom from X;
  append from X;
quit; run; proc sort data=lygt_duom; by col1; run;
 data lygt_duom_1;
  set lygt_duom;
 if col1<14 then x=col1; keep x;
 drop col1 col2 col3;
/*Gaminame proceso histograma*/
 proc iml;
   use lygt_duom_1;
   read all var{x}  into x_temp;
/*Duomenu histograma*/
   x_min=x_temp[><,1];
   x_max=x_temp[<>,1];
   interval=x_max-x_min;
   dalys=50;
   total=nrow(x_temp);
   plotis=round(interval/dalys,.000001);/*vieno intervalo plotis*/
   x_hist=j(dalys,2) ;/*Sukuriama matrica reiksmems saugoti*/
   temp=x_temp[1,1];
   j=1;
   sustoti=x_temp[j,1];
 do i=1 to dalys;
    x_hist[i,1]=temp;
    x_hist[i,2]=0;
   do while (sustoti<(temp+plotis) & j<=total);
     x_hist[i,2]=x_hist[i,2]+1;
     j=j+1;
     sustoti=x_temp[j,1];
   end;
    temp=temp+plotis;
 end;
do i=1 to dalys;
x_hist[i,2]=x_hist[i,2]/total; end;
 create mano_hist from x_hist;
 append from x_hist; quit; run;
```

```
proc capability data=lygt_duom_1 noprint;
      var x ;
      histogram x/OUTHISTOGRAM=histogram_duom_1;
   run;
data mano_hist_1;
 set histogram_duom_1;
  x_kord=_MIDPT_; x_proc=_OBSPCT_/100;
  keep x_kord x_proc;
  drop _MIDPT_ _OBSPCT_ _VAR_;
proc gplot data=mano_hist_1;
plot (x_proc)*x_kord/ overlay; run;
/*Paskaiciuojame stacionaru tanki*/
proc iml;
 use mano_hist_1;
 read all into x_temp;
 total=nrow(x_temp);/*Lygties parametrai*/
 use parametrai;
 read all into param;
 X=j(total,4);
   k=param[1,1];
   sigma=param[2,1];
   theta=param[3,1];
   k_1=0.66;
   sigma_1 = 1.25;
   theta_1 = 3.06;
   plotis = x_temp[3,2]-x_temp[2,2];
 /*-----------------*/
 do j=1 to total;
    X[j,1] = x_temp[j,1];
    X[j,2] = x_temp[j,2];
    X[j,3] = 1/(sigma##2*x_temp[j,1])*exp(2*k/sigma##2*
    (theta*log(x_temp[j,1])-x_temp[j,1]+1));
    X[j,4] = 1/(sigma_1##2*x_temp[j,1])*exp(2*k_1/sigma_1##2*
    (theta_1*log(x_temp[j,1])-x_temp[j,1]+1));
    end;
   temp_1=X[+,2];
   temp_2=X[+,3];
   temp_3=X[+,4];
  do k=1 to total;
    X[k,2]=X[k,2]/temp_1;
    X[k,3]=X[k,3]/temp_2;
    X[k,4]=X[k,4]/temp_3;
   end;
   create mano_hist_2 from X;
   append from X;
quit; run;
 /*Sulyginame stacionaru ir empirini tankius*/
 proc gplot3d data=mano_hist_2;
  plot (col2)*col1 (col3)*col1 (col4)*col1; run;
 data mano_hist_2;
```

```
  set mano_hist_2; if col1<0 then
  col1=0.001;
/*Algoritmas LUDE*/
proc iml;
 use mano_hist_2;
   read all into x_temp;
   total=nrow(x_temp);
   X=j(total,8);
  argument=round(ranuni(13)*100,1);
/*minimizuojama funkcija*/
  start F_langeven(a) global(x_temp,total,X);
    plotis = x_temp[3,1]-x_temp[2,1];
     do k = 1 to total;
       X[k,7] = 1/(a[2]##2*x_temp[k,1])*exp(2*a[1]/a[2]##2*
       (a[3]*log(x_temp[k,1])-x_temp[k,1]+1));
     end;
   temp_11 = X[+,7];
   do i = 1 to total;
     X[i,7] = X[i,7]/temp_11;
   end;
   do j = 1 to total;
     X[j,8] = (x_temp[j,2]-X[j,7])##2;
   end;
   F_a_sigma = X[+,8];
   return(F_a_sigma);
   finish F_langeven;

/*Rusiavimo algoritmas*/
 start rusiavimas(A,F) global(trr);
   tarp=A||F;
   if trr=0 then do;
                create tarp_1 from tarp;
                append from tarp;
                end;
           else do;
                call delete(work,tarp_1);
                create tarp_1 from tarp;
                append from tarp;
                end;
    close tarp_1;
    if trr>0 then  call delete(work,surusiuota);
    sort tarp_1 out=surusiuota by descending col4;
    trr = 1;
 finish;
   A_min_max = j(2,3);
   A_min_max[1,1] = 0.2;
   A_min_max[1,2] = 0.2;
   A_min_max[1,3] = 2;
   A_min_max[2,1] = 2;
   A_min_max[2,2] = 1;
```

```
    A_min_max[2,3] = 4;
     L = 80; /*1. pasirenkame L pradiniu reiksmiu*/
    F = j(L+1,1);
    A = j(L+1,3);
     do i = 1 to L+1 ;
      A[i,1] = A_min_max[1,1] + ranuni(argument)*
      ( A_min_max[2,1]-A_min_max[1,1];
      A[i,2] = A_min_max[1,2] + ranuni(argument)*
      ( A_min_max[2,2]-A_min_max[1,2]);
      A[i,3] = A_min_max[1,3] + ranuni(argument)*
      ( A_min_max[2,3]-A_min_max[1,3]);
     end;
     maxiter = 100;
     trr = 0;
do iter = 0 to  maxiter;
  if iter <> 0 then do;
                    use surusiuota;
                    read all var{col1 col2 col3} into A;
                  end;
  do j=1 to L+1;
  F[j,1]=F_langeven(A[j,]);
  end;
  /*Surusiuojame pagal F mazejimo tvarka*/
  run rusiavimas(A,F);
  /*crossover operacija*/
   use surusiuota;
   read all var{col1 col2 col3} into A;
    A_1 = j(1,3);
  do i = 1 to L;
     A_1[1,1] = A[i,1] + ranuni(argument)*(A[i+1,1] - A[i,1]);
     A_1[1,2] = A[i,2] + ranuni(argument)*(A[i+1,2] - A[i,2]);
     A_1[1,3] = A[i,3] + ranuni(argument)*(A[i+1,3] - A[i,3]);
      if (F_langeven(A_1[1,]) < F_langeven(A[i,])) then
          do;
            A[i,1] = A_1[1,1];
            A[i,2] = A_1[1,2];
            A[i,3] = A_1[1,3];
          end;
   end;
 do j= 1 to L+1;
    F [j,1] = F_langeven(A[j,]);
 end;
 run rusiavimas(A,F);
  /*nonuniform mutation  operacija*/
   use surusiuota;
   read all var{col1 col2 col3} into A;
 do i = 1 to L+1;
   pm_i = (L-i+1)/L;
  do j = 1 to 3;/*kintamuju kaicius*/
    r = ranuni(argument);
```

```
    if (r < pm_i) then
      do;
         r = ranuni(argument);
       B_1 = ranuni(argument);
       A_2 = j(1,3);
       if (B_1<0.5) then b=0; else b=1;
        if (b = 0) then  A_2[1,j] = A[i,j] + (A_min_max[2,j]-A[i,j])*r/1
        *exp(-2*iter/maxiter);
        if (b = 1) then  A_2[1,j] = A[i,j] - (A[i,j]-A_min_max[1,j])*r/1
        *exp(-2*iter/maxiter);
      end;
  end;
  if (F_langeven(A_2[1,]) < F_langeven(A[i,])) then
          do;
            A[i,1] = A_2[1,1];
            A[i,2] = A_2[1,2];
            A[i,3] = A_2[1,3];
          end;
 end;
 do j = 1 to L+1;
  F[j,1] = F_langeven(A[j,]);
  end;
 run rusiavimas(A,F); /*Surusiuojame pagal F mazejimo tvarka*/
end;
 use parametrai; read all into param_1;
 use surusiuota; read all into param_2;
param_1[1,2] = param_2[L+1,1]; param_1[2,2] = param_2[L+1,2];
param_1[3,2] = param_2[L+1,3]; print param_1; fnkc=param_2[L+1,4];

call delete(work,parametrai);
 create parametrai from param_1;
 append from param_1;
quit; run;
/*Paskaiciuojame stacionaru tanki*/ proc iml;
 use mano_hist_1;
 read all into x_temp;
 total=nrow(x_temp);
 use parametrai;
 read all into param;
 X=j(total,4);
   k=param[1,1]; sigma=param[2,1];theta=param[3,1];
 k_1=param[1,2]; sigma_1=param[2,2];theta_1=param[3,2];
 plotis=x_temp[3,2]-x_temp[2,2];
 do j=1 to total;
    X[j,1]=x_temp[j,1];
    X[j,2]=x_temp[j,2];
    X[j,3]=1/(sigma##2*x_temp[j,1])*exp(2*k/sigma##2*
    (theta*log(x_temp[j,1])-x_temp[j,1]+1));
    X[j,4]=1/(sigma_1##2*x_temp[j,1])*exp(2*k_1/sigma_1##2*
    (theta_1*log(x_temp[j,1])-x_temp[j,1]+1));
```

```
 end;
   temp_1=X[+,2];
   temp_2=X[+,3];
   temp_3=X[+,4];
   do k=1 to total;
    X[k,2]=X[k,2]/temp_1;
    X[k,3]=X[k,3]/temp_2;
    X[k,4]=X[k,4]/temp_3;
   end;
   create mano_hist_3 from X;
   append from X;
quit; run;
 /*Sulyginame stacionaru ir empirini tankius*/ legend2
frame cframe=ligr cborder=black position=center; axis1 label=
none; title 'Tankiu palyginimas CIR'; proc gplot data=mano_hist_3;
plot (col2 col3 col4)*col1/ overlay
                            cframe = ligr
                            legend = legend2
                            grid
                            vaxis=axis1;

  label col1='X(t)'; label col2='Empirinis tankis';
  label col3='Teorinis tankis';
  label col4='Ivertintas tankis';
  SYMBOL1 I=none  C=Black V=plus;
  SYMBOL2 I=join  C=RED V=plus;
  SYMBOL3 I=NONE C=GREEn V=plus;
run; /*Kitas minimizavimo budas*/
 proc iml;
   use mano_hist_2;
   read all into x_temp;
   total=nrow(x_temp);
   X=j(total,8);
  start F_langeven(a) global(x_temp,total,X);
    plotis=x_temp[3,1]-x_temp[2,1];
     do k=1 to total;
       X[k,7]=1/(a[2]##2)*exp(2*a[1]/a[2]##2*(1-x_temp[k,1]))*
       x_temp[k,1]##(2*a[1]/a[2]##2*a[3]-1);
     end;
   temp_11=X[+,7];
   do i=1 to total;
     X[i,7]=X[i,7]/temp_11;
   end;
   y=j(total,1);
   do j=1 to total;
     X[j,8]=(x_temp[j,2]-X[j,7])##2;
   end;
    F_a_sigma=X[+,8];
   return(F_a_sigma);
   finish F_langeven;
```

```
   con= {0.2 0.2 2,
          2. 1. 4.};
   a = {1. 1. 1.};
   tc = j(1,12,.);
   tc[6]=1.e-11;
   optn={0  2};
    call NLPcg(rc,xr,"F_langeven",a,optn, con,tc) ;
  quit; run;
/*Su gautais parametrais generuojame lygtis*/
 proc iml;
   use BrJ_pk;
   read all var{Z_t}  into br_j;
   use BrJ_pk;
   read all var{Z_tt}  into br_jj;
   total=nrow(br_j);
use parametrai;
 read all into param;
 /*--------------------*/
   k=param[1,1];
   sigma=param[2,1];
   theta=param[3,1];
  k_1=param[1,2];
   sigma_1=param[2,2];
   theta_1=param[3,2];
   create parametrai from param;
  append from param;
 /*--------------------*/
  total1=total;
   X=j(total1,3) ;
   X[1,1]=0.01;   /*Proceso pradzia*/
   X[1,2]=0.01;
   interval=100;/*intervalo ilgis  10000*/
   dt=interval/nrow(br_j);
   /*Milsteino aproksimacija*/
    X[1,3]=0;
 do i=2 to total1;
     X[i,1]=X[i-1,1]+(k*(theta-X[i-1,1])-(sigma##2)/4)*dt+
    sigma*((X[i-1,1]))##(0.5)*br_j[i]*dt##(0.5)+(sigma##2)/4*(br_j[i]*dt##(0.5))##2;
     X[i,2]=X[i-1,2]+(k_1*(theta_1-X[i-1,2])-(sigma_1##2)/4)*dt+
    sigma_1*((X[i-1,2]))##(0.5)*br_j[i]*dt##(0.5)+(sigma_1##2)/4*(br_j[i]*dt##(0.5))##2;
     X[i,3]=i*dt;
   end;
  create lygt_duom_3 from X;
  append from X;
quit; run;
 legend2 frame cframe=ligr cborder=black
position=center; axis1 label= none; title
 'Sprendiniu palyginimasCIR';
 proc gplot data=lygt_duom_3; p
 lot (col1 col2 )*col3/ overlay
```

```
                             cframe = ligr
                             legend = legend2
                             grid
                             vaxis=axis1;
label col3='t'; label col2='Su ivertintais parametrais'; label
col1='Tikrieji parametrai'; SYMBOL1 I=join  C=RED V=none;
 SYMBOL2 I=join  C=GREEN V=none;
run;
```