VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
DIFERENCIALNIŲ LYGČIŲ IR SKAIČIAVIMO MATEMATIKOS KATEDRA

Raminta Pralgauskaitė

APIE VIENĄ, VAIKUS GLOBOJANČIOS POPULIACIJOS MODELĮ

Magistro darbas

Vadovas
Prof. Vladas Skakauskas

VILNIUS 2006

Turinys

1 Įvadas

Matematinė biologija nagrinėja daugybę įvairiausių matematinių modelių. Populiacijų dinamikos modeliavimas–vienas iš jų. Matematinėje biologijoje yra žinomi Šarpo–Lotkos–McKendrikso [1], Hopenstedo–Staroverovo [2,3], Gurtino–MacKamy [4], Hadelerio [5] populiacijos modeliai. Tačiau šie modeliai neatsižvelgia į vieną svarbiausių reiškinių daugelyje populiacijų–jauniklų priežiūrą. Šis instinktas yra įgimtas daugelio žinduolių ir paukščių populiacijose.

Darbuose [6–9] pateikti trys populiacijų dinamikos modeliai, kuriuose atsižvelgiama į vaikų piežiūrą. Dviejuose iš jų laikoma, kad populiacija–vienalytė, kituose–dvilytė, ir poros sudaromos tik poravimosi periodui.

Modelyje [10] pateiktas populiacijos dinamikos modelis, kuriame atsižvelgiama į amžių, patelių nėštumą, vaikų priežiūrą, ekologinius veiksnius. Į vaikų priežiūros sąvoką įeina jauniklių maitinimas, šildymas, saugojimas nuo priešų. Skirtingų lyčių poros sudaromos naudojant harmoninio vidurkio funkciją, ir laikoma, kad poros egzistuoja tik dauginimosi periodu. Daugumoje populiacijų jauniklius prižiūri tik motinos, todėl laikoma, kad jaunikliai miršta, jei žūva juos prižiūrinti patelė. Kiekvienas individas turi priešreproduktyvųjį, reproduktyvųjį ir poreproduktyvųjį amžiaus intervalus. Individai, esantys priešreproduktyviajame amžiaus intervale, skirstomi į jauniklius, kuriems reikalinga motinos priežiūra, bei paauglius, kurie jau yra savarankiški individai, tik dar nepasiruošę daugintis. Reproduktyvaus amžiaus individai skirstomi į patinus, neapvaisintas pateles, apvaisintas pateles ir jauniklius prižiūrinčias pateles.

Darbo tikslas–išnagrinėti ir įsisavinti pateiktą metodą. Modelį sudaro integrodiferencialinės lygtys dalinėmis išvestinėmis su integralinio tipo sąlygomis. Lygčių skaičius priklauso nuo biologiškai galimo maksimalaus skaičiaus palikuonių, ir jis yra baigtinis. Limituotos populiacijos atveju surandami separabilūs sprendiniai, nelimituotos populiacijos atveju įrodoma egzistavimo ir vienaties teorema.

2 Žymėjimai

T_3–nėštumo periodas;

T_4–vaikų priežiūros periodas;

$u_1(t,\tau_1)d\tau_1$–paauglių arba suaugusių patinų skaičiaus vidurkis, kurių amžius momentu t priklauso intervalui $\xi \in [\tau_1, \tau_1 + d\tau_1]$;

$u_2(t,\tau_2)d\tau_2$–paauglių patelių arba neapvaisintų suaugusių patelių skaičiaus vidurkis, kurių amžius momentu t priklauso intervalui $\xi \in [\tau_2, \tau_2 + d\tau_2]$;

$u_{3k_1k_2}(t,\tau_1,\tau_2,\tau_3)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3,\ \ k_1, k_2 \geq 0,\ \ 1 \leq k_1 + k_2 \leq n$–vidutinis skaičius, apvaisintų k_1 vyriškos lyties ir k_2 moteriškos lyties amžiaus $\xi \in [\tau_3, \tau_3 + d\tau_3]$ embrionais, amžiaus $\xi \in [\tau_2, \tau_2 + d\tau_2]$ patelių skaičius momentu t, kurias apvaisino amžiaus $\xi \in [\tau_1, \tau_1 + d\tau_1]$ patinai;

$u_{4k_1k_2}(t, tau_1, \tau_2, \tau_4)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_4$–vidutinis amžiaus $\xi \in [\tau_2, \tau_2 + d\tau_2]$ momentu t patelių skaičius, kurios prižiūri amžiaus $\xi \in [\tau_4, \tau_4 + d\tau_4]$ k_1 patinėlius ir k_2 pateles, kurių tėvas jų motinos apvaisinimo metu buvo $\xi \in [\tau_1, \tau_1 + d\tau_1]$ amžiaus;

$\nu_1(t,\tau_1)dt$–tikimybė τ_1 amžiaus paaugliui arba suaugusiam patinui ($\tau_1 \in (T_4, \tau_{11})$–paaugliui, $\tau_1 \in (\tau_{11}, \infty)$–suaugusiam patinui) numirti laiko intervale $[t, t + dt]$;

$\nu_2(t,\tau_2)dt$–tikimybė τ_2 amžiaus paauglei arba nepavaisintai suaugusiai patelei ($\tau_2 \in (T_4, \tau_{21})$–paauglei, $\tau_2 \in (\tau_{21}, \infty)$–neapvaisintai suaugusiai patelei) numirti laiko intervale $[t, t + dt]$;

$\nu_{3k_1k_2}(t,\tau_1,\tau_2,\tau_3)dt$–tikimybė τ_2 amžiaus patelei numirti laiko intervale $[t, t + dt]$, kuri yra apvaisinta k_1 vyriškos lyties ir k_2 moteriškos lyties embrionais, kurių amžius τ_3, ir kurią apvaisino amžiaus τ_1 patinas;

$\nu_{4k_1k_2}(t,\tau_1,\tau_2,\tau_4)dt$–tikimybė τ_2 amžiaus patelei, kuri prižiūri k_1 patinėlį ir k_2 patelę, kurių amžius τ_1, numirti laiko intervale $[t, t + dt]$;

$\nu_{4k_1k_2;s_1s_2}(t,\tau_1,\tau_2,\tau_4)dt$–tikimybė $k_1 - s_1$ patinėliams ir $k_2 - s_2$ patelėms jauniklėms, kurių amžius τ_4, ir kurių motina tuo pat metu yra τ_2 amžiaus, o tėvas apvaisinimo metu buvo amžiaus τ_1, numirti laiko intervale $[t, t + dt]$;

$p_{k_1k_2}(t,\tau_1,\tau_2)dt$–tikimybė patelei iš poros, susidedančios iš τ_1 amžiaus patino ir τ_2 amžiaus patelės, pastoti k_1 vyriškos lyties ir k_2 moteriškos lyties embrionais laiko intervale $[t, t + dt]$;

$\rho(N(t))dt$–tikimybė paaugliui arba suaugusiam individui numirti laiko intervale $[t, t + dt]$ dėl ekologinių priežasčių, priklausančų nuo suminio paauglių ir suaugusių individų skaičiaus $N(t)$;

$L_u(t,\tau_2)d\tau_2 dt$–vidutinis amžiaus $\xi \in [\tau_2, \tau_2 + d\tau_2]$ neapvaisintų patelių skaičius, kurios bus apvaisintos laiko intervale $[t, t + dt]$;

$S_{u,1}(t,\tau_2)d\tau_2 dt$–amžiaus $\xi \in [\tau_2, \tau_2 + d\tau_2]$ motinų vidutinis skaičius, kurios baigia rūpintis savo jaunikliais laiko intervale $[t, t + dt]$;

$S_{u,2}(t,\tau_2)d\tau_2 dt$–amžiaus $\xi \in [\tau_2, \tau_2 + d\tau_2]$ motinų vidutinis skaičius, kurių visi jaunikliai numirs laiko intervale $[t, t + dt]$;

$L_{uk_1k_2}(t, \tau_1, \tau_2, \tau_4)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_4 dt$–amžiaus $\xi \in [\tau_2, \tau_2 + d\tau_2]$ patelių vidutinis skaičius, kurios rūpinasi k_1 patinėliais ir k_2 patelėmis, kurių amžius $\xi \in [\tau_4, \tau_4 + d\tau_4]$, ir kurių tėvas jų motinos apvaisinimo metu buvo amžiaus $\xi \in [\tau_1, \tau_1 + d\tau_1]$, ir kurių $k_1 - s_1$ patinėliai ir $k_2 - s_2$ patelės jauniklės numirs laiko intervale $[t, t + dt]$;

$S_{uk_1k_2}(t, \tau_1, \tau_2, \tau_4)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_4 dt$–amžiaus $\xi \in [\tau_2, \tau_2 + d\tau_2]$ motinų vidutinis skaičius, kurios rūpinsis k_1 patinėliais ir k_2 patelėmis jauniklėmis, kurių amžius $\xi \in [\tau_4, \tau_4 + d\tau_4]$, ir kurių likusieji jaunikliai žus laiko intervale $[t, t + dt]$;

u_1^0, u_2^0, $u_{3k_1k_2}^0$, $u_{4k_1k_2}^0$–pradiniai kintamieji;

$\sigma_s = (\tau_{s1}, \tau_{s2})$, $\tau_{s1} > T_4$–lytinio aktyvumo amžiaus intervalas ($s = 1$ patinams, $s = 2$ patelėms);

$\tilde{\tau}_{2s} = \tau_{2s} + T_3$, $\hat{\tau}_{2s} = \tilde{\tau}_{2s} + T_4$, $s = 1, 2$;

Kai $\tau_{22} - \tau_{21} > T_3 + T_4$, tai

$$\omega(\tau_2) = \begin{cases} [0, \tau_2, \tilde{\tau}_{21}], & \tau_2 \in [\tilde{\tau}_{21}, \hat{\tau}_{21}), \\ [0, T_4], & \tau_2 \in [\hat{\tau}_{21}, \tilde{\tau}_{22}), \\ [\tau_2 - \tilde{\tau}_{22}, T_4], & \tau_2 \in [\tilde{\tau}_{22}, \hat{\tau}_{22}], \end{cases}$$

ir kai $\tau_{22} - \tau_{21} \leq T_3 + T_4$, tai

$$\omega(\tau_2) = \begin{cases} [0, \tau_2 - \tilde{\tau}_{21}], & \tau_2 \in [\tilde{\tau}_{21}, \tilde{\tau}_{22}) \\ [\tau_2 - \tilde{\tau}_{22}, \tau_2 - \tilde{\tau}_{21}], & \tau_2 \in [\tilde{\tau}_{22}, \hat{\tau}_{21}), \\ [\tau_2 - \tilde{\tau}_{22}, T_4], & \tau_2 \in [\hat{\tau}_{21}, \hat{\tau}_{22}] \end{cases}$$

$\sigma_1 = (\tau_{11}, \tau_{12})$, $\sigma_2 = (\tau_{21}, \tau_{22})$, $\sigma_3(\tau_3) = (\tau_3 + \tau_{21}, \tau_3 + \tau_{22}), \sigma_4(\tau_4) = (\tau_4 + \tilde{\tau}_{21}, \tau_4 + \tilde{\tau}_{22})$,

$\tilde{\sigma}_4 = (\tilde{\tau}_{21}, \hat{\tau}_{22})$–vaikų priežiūros amžiaus intervalas,

$Q_2 = (T_4, \infty) \backslash \{\tau_{21}, \hat{\tau}_{21}, \tau_{22}, \hat{\tau}_{22}\}$,

$Q_3 = \{(\tau_1, \tau_2, \tau_3) : \tau_1 \in \sigma_1,\ \tau_2 \in \sigma_3(\tau_3), \tau_3 \in (0, T_3)\}$,

$Q_4 = \{(\tau_1, \tau_2, \tau_4) : \tau_1 \in \sigma_1,\ \tau_2 \in \sigma_4(\tau_4), \tau_4 \in (0, T_4)\}$.

Be to, $\sigma_2 = \sigma_3(0)$, $\sigma_4(0) = \sigma_3(T_3)$.

$[u_2|_{\tau_2=\xi}]$–funkcijos u_2 šuolis, kai $\tau_2 = \xi$.

3 Nemigruojančios populiacijos modelis

Šiame skyriuje pristatome nemigruojančios populiacijos modelį [10], kuriame atsižvelgiama į individų lytį, amžių, patelių nėštumą ir vaikų priežiūrą. Mirtingumo greitis apibrėžiamas dviejų dėmenų suma: 1-asis dėmuo–mirtingumas dėl natūralių veiksnių, 2-asis dėmuo–mirtingumas dėl aplinkos įtakos. Porų sudarymui naudojama harmoninio vidurkio funkcija, ir laikoma, kad poros egzistuoja tik kryžminimosi laikotarpiu.

Tegul $|k| = k_1 + k_2$ ir $|s| = s_1 + s_2$, kur $|k| = 1, 2, \ldots, n$.

Modelį sudaro (3.1)–(3.5) lygtys:

lygtys patinams

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u_1}{\partial t} + \dfrac{\partial u_1}{\partial \tau_1} = -(\nu_1 + \rho(N))u_1, \quad t > 0, \ \tau_1 > T_4, \\
u_1|_{t=0} = u_1^0, \quad \tau_1 \in [T_4, \infty), \\
u_1|_{\tau_1 = T_4} = \displaystyle\sum_{k_2=0}^{n-1} \sum_{k_1=1}^{n-k_2} k_1 \int_{\sigma_1} d\tau_1 \int_{\sigma_4(T_4)} u_{4k_1k_2}|_{\tau_4=T_4} d\tau_2, \quad t \geq 0;
\end{cases}
\tag{3.1}
$$

lygtys apvaisintoms patelėms

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u_{3k_1k_2}}{\partial t} + \dfrac{\partial u_{3k_1k_2}}{\partial \tau_2} + \dfrac{\partial u_{3k_1k_2}}{\partial \tau_3} = -(\nu_{3k_1k_2} + \rho(N))u_{3k_1k_2}, \quad t > 0, \ (\tau_1, \tau_2, \tau_3) \in Q_3, \\
u_{3k_1k_2}|_{t=0} = u_{3k_1k_2}^0, \\
\qquad \tau_3 \in [0, T_3], \ \tau_2 \in [\tau_3 + \tau_{21}, \tau_3 + \tau_{22}], \ \tau_1 \in (\tau_{11}, \tau_{12}), \\
u_{3k_1k_2}|_{\tau_3=0} = \dfrac{p_{k_1k_2} u_1 u_2}{\int_{\sigma_1} u_1 d\tau_1' + \int_{\sigma_2} u_2 d\tau_2'}, \\
\qquad t \geq 0, \ \tau_2 \in [\tau_{21}, \tau_{22}], \ \tau_1 \in (\tau_{11}, \tau_{12});
\end{cases}
\tag{3.2}
$$

lygtys patelėms, prižiūrinčioms savo jauniklius

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u_{4k_1k_2}}{\partial t} + \dfrac{\partial u_{4k_1k_2}}{\partial \tau_2} + \dfrac{\partial u_{4k_1k_2}}{\partial \tau_4} = -(\nu_{4k_1k_2} + \rho(N))u_{4k_1k_2} - L_{uk_1k_2} + S_{uk_1k_2}, \\
\qquad t > 0, \ (\tau_1, \tau_2 \tau_4) \in Q_4, \\
u_{4k_1k_2}|_{t=0} = u_{4k_1k_2}^0, \quad \tau_4 \in [0, T_4], \ \tau_2 \in [\tau_4 + \tau_{21} + T_3, \tau_4 + \tau_{22} + T_3], \ \tau_1 \in \sigma_1 \\
u_{4k_1k_2}|_{\tau_4=0} = u_{3k_1k_2}|_{\tau_3=T_3}, \quad t \geq 0, \ \tau_2 \in [\tau_{21} + T_3, \tau_{22} + T_3], \ \tau_1 \in \sigma_1,
\end{cases}
\tag{3.3a}
$$

kur

$$
L_{uk_1k_2} = \sum_{j=0}^{|k|-1} \sum_{\substack{|s|=j \\ 0 \leq s_i \leq k_i}} \nu_{4k_1k_2;s_1s_2} u_{4k_1k_2},
\tag{3.3b}
$$

$$
S_{uk_1k_2} = \begin{cases}
0, & |k| = n; \ 0 \leq k_i \leq n, \\
\displaystyle\sum_{j=|k|+1}^{n} \sum_{\substack{|s|=j \\ s_i \geq k_i \geq 0}} \nu_{4s_1s_2;k_1k_2} u_{4s_1s_2}, & 1 \leq |k| \leq n-1;
\end{cases}
\tag{3.3c}
$$

lygtys neapvaisintoms ir baigusioms prižiūrėti savo jauniklius patelėms

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u_2}{\partial t} + \dfrac{\partial u_2}{\tau_2} = -(\nu_2 + \rho(N))u_2 - L_u + S_{u,1} + S_{u,2}, \\
\qquad t > 0, \ \tau_2 \in (T_4, \infty) \backslash \{\tau_{21}, \tau_{21} + T_3 + T_4, \tau_{22}, \tau_{22} + T_3 + T_4\}, \\
u_2|_{t=0} = u_2^0, \quad \tau_2 \in [T_4, \infty), \\
u_2|_{\tau_2=T_4} = \displaystyle\sum_{k_1=0}^{n-1} \sum_{k_2=1}^{n-k_1} k_2 \int_{\sigma_1} d\tau_1 \int_{\sigma_4(T_4)} u_{4k_1k_2}|_{\tau_4=T_4} d\tau_2, \quad t \geq 0, \\
[u_2|_{\tau_2=\xi}] = 0, \quad \xi_1 = \tau_{21}, \ \tau_{21} + T_3 + T_4, \ \tau_{22}, \ \tau_{22} + T_3 + T_4,
\end{cases}
\tag{3.4}
$$

kur

$$L_u = \begin{cases} 0, \quad \tau_2 \in (T_4, \infty) \backslash (\tau_{21}, \tau_{22}), \\ \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{|k|=j \\ k_i \geq 0}} \int_{\sigma_1} u_{3k_1k_2|_{\tau_3=0}} d\tau_1, \quad \tau_2 \in (\tau_{21}, \tau_{22}), \end{cases}$$

$$S_{u,1} = \begin{cases} 0, \quad \tau_2 \in (T_4, \infty) \backslash (T_4 + \tau_{21} + T_3, T_4 + \tau_{22} + T_3), \\ \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{|k|=j \\ k_i \geq 0}} \int_{\sigma_1} u_{4k_1k_2|_{\tau_4=T_4}} d\tau_1, \quad \tau_2 \in (T_4 + \tau_{21} + T_3, T_4 + \tau_{22} + T_3), \end{cases}$$

$$S_{u,2} = \begin{cases} 0, \quad \tau_2 \in (T_4, \infty) \backslash (\tau_{21} + T_3, \tau_{22} + T_3 + T_4), \\ \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{|k|=j \\ k_i \geq 0}} \int_{\omega(\tau_2)} d\tau_4 \int_{\sigma_1} \nu_{4k_1k_2;00} u_{4k_1k_2} d\tau_1, \quad \tau_2 \in (\tau_{21} + T_3, \tau_{22} + T_3 + T_4), \end{cases}$$

$$\begin{aligned} N \;=\; & \int_{T_4}^{\infty} u_1 d\tau_1 + \int_{T_4}^{\infty} u_2 d\tau_2 + \sum_{k_1=0}^{n-1} \sum_{k_2=1}^{n-k_1} \int_0^{T_3} d\tau_3 \int_{\sigma_3(\tau_3)} d\tau_2 \int_{\sigma_1} u_{3k_1k_2} d\tau_1 \\ & + \sum_{k_1=0}^{n-1} \sum_{k_2=1}^{n-k_1} \int_0^{T_4} d\tau_4 \int_{\sigma_4(\tau_4)} d\tau_2 \int_{\sigma_1} u_{4k_1k_2} d\tau_1. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Suderinamumo sąlygos:

$$\begin{cases} u^0_{3k_1k_2}|_{\tau_3=T_3} = u^0_{4k_1k_2}|_{\tau_4=0} \\ u^0_{3k_1k_2}|_{\tau_3=0} = p_{k_1k_2}|_{t=0} u^0_1 u^0_2 \Big/ \left(\int_{\sigma_1} u^0_1 d\tau'_1 + \int_{\sigma_2} u^0_2 d\tau'_2 \right), \\ u^0_1(T_4) = \sum_{k_2=0}^{n-1} \sum_{k_1=1}^{n-k_2} k_1 \int_{\sigma_1} d\tau_1 \int_{\sigma_4(T_4)} u^0_{4k_1k_2} \,|_{\tau_4=T_4} \, d\tau_2, \\ u^0_2(T_4) = \sum_{k_1=0}^{n-1} \sum_{k_2=1}^{n-k_1} k_2 \int_{\sigma_1} d\tau_1 \int_{\sigma_4(T_4)} u^0_{4k_1k_2} \,|_{\tau_4=T_4} \, d\tau_2. \end{cases} \tag{3.6}$$

Visos duotos funkcijos $\nu_1, \nu_2, \nu_{3k_1k_2}, \nu_{4k_1k_2}, \nu_{k_1k_2;s_1s_2}, p_{k_1k_2}, u^0_1, u^0_2, u^0_{3k_1k_2}, u^0_{4k_1k_2}$ ir nežinomos funkcijos $u_1, u_2, u_{3k_1k_2}, u_{4k_1k_2}$ turi būti teigiamos, nes kitaip jos netektų biologinės prasmės. Be to $\int_{\sigma_1} u^0_1 d\tau'_1 + \int_{\sigma_2} u^0_2 d\tau'_2$ turi būti teigiamos.

4 Separabilūs sprendiniai

Tarkime, kad gyvybiškai svarbūs greičiai $\nu_1, \nu_2, \nu_{3k_1k_2}, \nu_{4k_1k_2}, \nu_{k_1k_2;s_1s_2}, p_{k_1k_2}$ yra stacionarūs. Ieškosime separabilių sprendinių tokiu pavidalu:

$$\begin{cases} u_1(t, \tau_1) = v_1(\tau_1) f(t), \quad f(0) = 1, \\ u_2(t, \tau_2) = v_2(\tau_2) f(t), \\ u_{3k_1k_2}(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3) = v_{3k_1k_2}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) f(t), \\ u_{4k_1k_2}(t, \tau_1, \tau_2, \tau_4) = v_{4k_1k_2}(\tau_1, \tau_2, \tau_4) f(t), \end{cases} \quad \begin{cases} u^0_1(\tau_1) = v_1(\tau_1), \\ u^0_2(\tau_2) = v_2(\tau_2), \\ u^0_{3k_1k_2}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = v_{3k_1k_2}(\tau_1, \tau_2, \tau_3), \\ u^0_{4k_1k_2}(\tau_1, \tau_2, \tau_4) = v_{4k_1k_2}(\tau_1, \tau_2, \tau_4), \end{cases} \tag{4.1}$$

čia

$$\begin{cases} v_1(\tau_1) = a_1 w_1(\tau_1) e^{-\lambda(\tau_1 - T_4)}, \quad w_1(T_4) = 1, \\ v_2(\tau_2) = a_2 w_2^{\lambda}(\tau_2) e^{-\lambda(\tau_2 - T_4)}, \quad w_2^{\lambda}(T_4) = 1, \\ v_{3k_1k_2}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = e^{-\lambda\tau_3} v_1(\tau_1) v_2(\tau_2 - \tau_3) w_{3k_1k_2}(\tau_1, \tau_2, \tau_3)/\alpha, \\ v_{4k_1k_2}(\tau_1, \tau_2, \tau_4) = e^{-\lambda(\tau_4 + T_3)} v_1(\tau_1) v_2(\tau_2 - \tau_4 - T_3) w_{4k_1k_2}(\tau_1, \tau_2, \tau_4)/\alpha, \\ \qquad \alpha = \int_{\sigma_1} v_1 d\tau_1 + \int_{\sigma_2} v_2 d\tau_2. \end{cases} \tag{4.2}$$

λ yra nežinoma kintamųjų atskyrimo konstanta, a_1 ir a_2–ieškomos teigiamos konstantos, $w_1, w_2^{\lambda}, w_{3k_1k_2}, w_{4k_1k_2}$–ieškomos funkcijos.

Įstatydami (4.1)–(4.2) funkcijas į (3.1)–(3.6) lygtis, rasime lygtis nežinomoms funkcijoms $w_1, w_2^{\lambda}, w_{3k_1k_2}, w_{4k_1k_2}$.

$$\begin{cases} \partial_t v_1 f + \partial_{\tau_1} v_1 f = -(\nu_1 + \rho(N)) v_1 f, \quad t > 0, \ \tau_1 > T_4, \\ v_1 f|_{t=0} = v_1, \quad \tau_1 \in [T_4, \infty), \\ v_1 f|_{\tau_1 = T_4} = \sum\limits_{k_2=0}^{n-1} \sum\limits_{k_1=1}^{n-k_2} \int_{\sigma_1} d\tau_1 \int_{\sigma_4 T_4} v_{4k_1k_2} f|_{\tau_4 = T_4} d\tau_2, \quad t \geq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_t v_2 f + \partial_{\tau_2} v_2 f = -(\nu_2 + \rho(N)) v_2 f - L_u + S_{u,1} + S_{u,2}, \quad t > 0, \ \tau_2 \in Q_2, \\ v_2 f|_{t=0} = v_2, \quad \tau_2 \in [T_4, \infty), \\ v_2 f|_{\tau_2 = T_4} = \sum\limits_{k_1=0}^{n-1} \sum\limits_{k_2=1}^{n-k_1} k_2 \int_{\sigma_1} d\tau_1 \int_{\sigma_4(T_4)} v_{4k_1k_2} f|_{\tau_4 = T_4} d\tau_2, \quad t \geq 0, \\ [v_2 f|_{\tau_2 = \xi}] = 0, \quad \xi = \tau_{21}, \hat{\tau}_{21}, \tau_{22}, \hat{\tau}_{22}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_t v_{3k_1k_2} f + \partial_{\tau_2} v_{3k_1k_2} f + \partial_{\tau_3} v_{3k_1k_2} f = -(\nu_{3k_1k_2} + \rho(N)) v_{3k_1k_2} f, \quad t > 0 \ (\tau_1, \tau_2, \tau_3) \in Q_3, \\ v_{3k_1k_2} f|_{t=0} = v_{3k_1k_2}, \\ \qquad \tau_3 \in [0, T_3], \ \tau_2 \in [\tau_3 + \tau_{21}, \tau_3 + \tau_{22}], \ \tau_1 \in (\tau_{11}, \tau_{12}) \\ v_{3k_1k_2} f|_{\tau_3 = 0} = \dfrac{p_{k_1k_2} v_1 v_2 f^2}{\int_{\sigma_1} v_1 f d\tau_1' + \int_{\sigma_2} v_2 f d\tau_2'}, \\ \qquad t \leq 0, \ \tau_2 \in [\tau_{21}, \tau_{22}], \ \tau_1 \in (\tau_{11}, \tau_{12}), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_t v_{4k_1k_2} f + \partial_{\tau_2} v_{4k_1k_2} f + \partial_{\tau_4} v_{4k_1k_2} f = -(\nu_{4k_1k_2} + \rho(N)) v_{4k_1k_2} f - L_{uk_1k_2} + S_{uk_1k_2}, \\ \qquad t > 0, \ (\tau_1, \tau_2 \tau_4) \in Q_4 \\ v_{4k_1k_2} f|_{t=0} = v_{4k_1k_2}, \quad \tau_4 \in [0, T_4], \ \tau_2 \in [\tau_4 + \tau_{21} + T_3, \tau_4 + \tau_{22} + T_3], \ \tau_1 \in \sigma_1, \\ v_{4k_1k_2} f|_{\tau_4 = 0} = v_{3k_1k_2} f|_{\tau_3 = T_3}, \quad t \geq 0, \tau_2 \in [\tau_{21} + T_3, \tau_{22} + T_3], \ \tau_1 \in \sigma_1. \end{cases}$$

Atskyrę kintamuosius ir pažymėję $\lambda = \frac{f'(t)}{f(t)} + \rho(N)$ gausime lygtis:

$$\begin{cases} w_1' = -\nu_1 w_1, \ (T_4, \infty), \\ w_1(T_4) = 1; \end{cases} \tag{4.3}$$

$$\begin{cases} (w_2^\lambda)' = -\nu_2 w_2^\lambda - L_w + S_{w,1} + S_{w,2}, \\ w_2(T_4) = 1, \qquad [w_2^\lambda|_{\tau_2=\xi}] = 0, \ \xi = \tau_{21}, \hat{\tau}_{21}, \tau_{22}, \hat{\tau}_{22}; \end{cases} \tag{4.4}$$

$$\begin{cases} \partial_{\tau_2} w_{3k_1k_2} + \partial_{\tau_3} w_{3k_1k_2} = -\nu_{3k_1k_2} w_{3k_1k_2}, \\ w_{3k_1k_2}|_{\tau_3=0} = p_{k_1k_2}, \quad \tau_2 \in \bar{\sigma}_2; \end{cases} \tag{4.5}$$

$$\begin{cases} \partial_{\tau_2} w_{4k_1k_2} + \partial_{\tau_4} w_{4k_1k_2} = -\nu_{3k_1k_2} w_{4k_1k_2} - L_{wk_1k_2} + S_{wk_1k_2}, \\ w_{4k_1k_2}|_{\tau_4=0} = w_{3k_1k_2}|_{\tau_3=T_3}, \quad \tau_2 \in \bar{\sigma}_4(0), \ \tau_1 \in \sigma_1. \end{cases} \tag{4.6}$$

Čia $L_{wk_1k_2}, S_{wk_1k_2}$ apibrėžti (3.3b)–(3.3c) lygtimis

$$L_w = \begin{cases} 0, & \tau_2 \in (T_4, \infty)\sigma_2, \\ A(\tau_2) w_2^\lambda(\tau_2), & \tau_2 \in \sigma_2, \end{cases}$$

$$S_{w,1} = \begin{cases} 0, & \tau_2 \in (T_4, \infty) \backslash \sigma_4(T_4), \\ B(\tau_2) w_2^\lambda w_2^\lambda(\tau_2 - T_3 - T_4), & \tau_2 \in \sigma_4(T_4), \end{cases}$$

$$S_{w,2} = \begin{cases} 0, & \tau_2 \in (T_4, \infty) \backslash \tilde{\sigma}_4, \\ \displaystyle\int_{\tilde{w}(\tau_2)} C(\tau_2, \tau_2 - x - T_3) w_2^\lambda(x) dx, & \tau_2 \in \tilde{\sigma}_4, \end{cases}$$

Kuriose

$$A(\tau_2) = y_1 \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{|k|=j \\ k_i \geq 0}} \int_{\sigma_1} e^{-\lambda(\tau_1 - T_4)} w_1(\tau_1) p_{k_1k_2}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1, \quad y_1 = \frac{a_1}{\alpha},$$

$$B(\tau_2) = y_1 \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{|k|=j \\ k_i \geq 0}} \int_{\sigma_1} e^{-\lambda(\tau_1 - T_4)} w_1(\tau_1) w_{4k_1k_2}(\tau_1, \tau_2, T_4) d\tau_1,$$

$$C(\tau_2, \tau_4) = y_1 \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{|k|=j \\ k_i \geq 0}} \int_{\sigma_1} e^{-\lambda(\tau_1 - T_4)} \nu_{4k_1k_2;00} w_1(\tau_1) w_{4k_1k_2}(\tau_1, \tau_2, \tau_4) d\tau_1,$$

$$\tilde{w}(\tau_2) = \begin{cases} [\tau_{21}, \tau_2 - T_3], & \tau_2 \in [\tilde{\tau}_{21}, \hat{\tau}_{21}), \\ [\tau_2 - T_3 - T_4, \tau_2 - T_3], & \tau_2 \in [\hat{\tau}_{21}, \tilde{\tau}_{22}) \\ [\tau_2 - T_3 - T_4, \tau_{22}] & \tau_2 \in [\tilde{\tau}_{22}, \hat{\tau}_{22}) \end{cases}$$

jeigu $\tau_{22} - \tau_{21} > T_3 + T_4$, ir

$$\tilde{w}(\tau_2) = \begin{cases} [\tau_{21}, \tau_2 - T_3], & \tau_2 \in [\tilde{\tau}_{21}, \tilde{\tau}_{22}), \\ [\tau_{21}, \tau_{22}], & \tau_2 \in [\tilde{\tau}_{22}, \hat{\tau}_{21}) \\ [\tau_2 - T_3 - T_4, \tau_{22}], & \tau_2 \in [\hat{\tau}_{21}, \hat{\tau}_{22}) \end{cases}$$

jei $\tau_{22} - \tau_{21} \leq T_3 + T_4$.

Konstantoms y_1 ir $y_2 = a_2/\alpha$ gauname tokias lygtis

$$\begin{cases} 1 = \sum_{k_2=0}^{n-1} \sum_{k_1=1}^{n-k_2} k_1 D_{k_1k_2}(\lambda, y_1) y_2, \\ 1 = \sum_{k_1=0}^{n-1} \sum_{k_2=1}^{n-k_1} k_2 D_{k_1k_2}(\lambda, y_1) y_1, \end{cases} \tag{4.7}$$

kur

$$\begin{aligned} D_{k_1k_2}(\lambda, y_1) &= \int_{\sigma_1} w_1(\tau_1) e^{-\lambda(\tau_1 - T_4)}\, d\tau_1 \\ &\quad \times \int_{\sigma_2} w_2^\lambda(\tau_2) e^{-\lambda(\tau_2+T_3)} w_{3k_1k_2}(\tau_1, \tau_2 + T_3 + T_4, T_4)\, d\tau_2; \end{aligned}$$

λ-ai rasti gauname tokią charakteristinę lygtį

$$1 = y_1 \int_{\sigma_1} w_1(\tau_1) e^{-\lambda(\tau_1 - T_4)}\, d\tau_1 + y_2 \int_{\sigma_2} w_2^\lambda(\tau_2) e^{-\lambda(\tau_2 - T_4)}\, d\tau_2, \tag{4.8}$$

o funkcijai $N = f(t)\beta$ turime uždavinį

$$N' = N(\lambda - \rho(N)), \quad N(0) = \beta = \alpha\tilde{\beta}(\lambda), \tag{4.9}$$

kur

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}(\lambda) &= y_1 \int_{T_4}^{\infty} w_1(\tau_1) e^{-\lambda(\tau_1 - T_4)} d\tau_1 + y_2 \int_{T_4}^{\infty} w_2^\lambda(\tau_2) e^{-\lambda(\tau_2 - T_4)} d\tau_2 \\ &\quad + y_1 y_2 \sum_{k_1=0}^{n-1} \sum_{k_2=0}^{n-k_1} \int_0^{T_3} d\tau_3 \int_{\sigma_2} d\tau_2 \int_{\sigma_1} w_1(\tau_1) w_2^\lambda(\tau_2) w_{3k_1k_2}(\tau_1, \tau_2 + \tau_3, \tau_3) \\ &\quad \times e^{-\lambda(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 - 2T_4)} d\tau_1 \\ &\quad + y_1 y_2 \sum_{k_1=0}^{n-1} \sum_{k_2=0}^{n-k_1} \int_0^{T_4} d\tau_4 \int_{\sigma_2} d\tau_2 \int_{\sigma_1} w_1(\tau_1) w_2^\lambda(\tau_2) w_{4k_1k_2}(\tau_1, \tau_2 + \tau_4 + T_3, \tau_4) \\ &\quad \times e^{-\lambda(\tau_1 + \tau_2 + \tau_4 + T_3 - 2T_4)} d\tau_1. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Teorema 1. *Tegul f-jos $\nu_1, \nu_2, \nu_{3k_1k_2}, \nu_{4k_1k_2}, \nu_{4k_1k_2;s_1s_2}, p_{k_1k_2}$ ir pastovūs dydžiai $T_3, T_4 < \tau_{s1} < \tau_{s2} < \infty$ yra teigiami, kai $s = 1, 2$. Tegul $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{C}^0([T_4, \infty))$, $p_{k_1k_2} \in \mathbb{C}^{0,1}(\bar{\sigma}_1 \times \bar{\sigma}_2)$, $\nu_{3k_1k_2} \in \mathbb{C}^{0,1,1}(\overline{Q}_3)$, $\nu_{4k_1k_2;s_1s_2}, \nu_{4k_1k_2} \in \mathbb{C}^{0,1,1}(\overline{Q}_4)$. Tada:*

(1) *Egzistuoja vienintelės teigiamos funkcijos $w_1, w_{3k_1k_2}, w_{4k_1k_2}$, tenkinančios lygtis* (4.3), (4.5), (4.6). *Fiksuotiems y_1 ir λ egzistuoja vienintelė teigiama funkcija w_2^λ, tenkinanti lygtį* (4.4). *Funkcijos $w_1, w_2, w_{3k_1k_2}, w_{4k_1k_2}$ taip pat tenkina sąlygas*

$$\begin{aligned} &w_1 \in \mathbb{C}^1([T_4, \infty]), \qquad w_{3k_1k_2} \in \mathbb{C}^{0,1,1}(\overline{Q}_3), \\ &w_{4k_1k_2} \in \mathbb{C}^{0,1,1}(\overline{Q}_4), \qquad w_2^\lambda \in \mathbb{C}([T_4, \infty)) \cap \mathbb{C}^1(Q_2); \end{aligned}$$

(2) *Fiksuotam dydžiui* λ *funkcijos* $v_1, v_2, v_{3k_1k_2}, v_{4k_1k_2}$ *tenkina*:

$$v_1 \in \mathbb{C}^1((T_4,\infty)),\ v_2 \in \mathbb{C}((T_4,\infty)) \cap \mathbb{C}^1(Q_2),$$
$$\begin{cases} v_{3k_1k_2} \in \mathbb{C}^0(\overline{Q}_3) \cap \mathbb{C}^{0,1,1}(Q_3 \backslash \{\tau_2 - \tau_3 = \hat{\tau}_{21}\}), \\ v_{4k_1k_2} \in \mathbb{C}^0(\overline{Q}_4) \cap \mathbb{C}^{0,1,1}(Q_4 \backslash \{\tau_2 - \tau_4 - T_3 = \hat{\tau}_{21}\}), \end{cases}$$

jei $\tau_{22} - \tau_{21} > T_3 + T_4$. *Ir*

$$\begin{cases} v_{3k_1k_2} \in \mathbb{C}^0(\overline{Q}_3) \cap \mathbb{C}^{0,1,1}(Q_3), \\ v_{4k_1k_2} \in \mathbb{C}^0(\overline{Q}_4) \cap \mathbb{C}^{0,1,1}(Q_4), \end{cases}$$

jei $\tau_{22} - \tau_{21} \leq T_3 + T_4$;

(3) *su teigiamais* $y_1(\lambda_0)$ *ir* $y_2(\lambda_0)$ *sistema* (4.7), (4.8) *turi bent vieną realų sprendinį* $(y_1(\lambda_0), y_2(\lambda_0), \lambda_0)$.

Jeigu $\rho(0) = 0$, $\rho'(N) > 0$, $\forall N \geq 0$ *ir* λ_0 *tenkina sąlygą* $\tilde{\beta}(\lambda_0) < \infty$, *tai sistema* (3.1)–(3.6) *turi bent vieną vienparametrinę klasę teigiamų separabilių,* (4.1),(4.2) *tipo sprendinių (su teigiamu parametru* α*), kurie elgiasi taip*:

$$(u_1, u_2, u_{3k_1k_2}, u_{4k_1k_2}) \to \begin{cases} 0, & \textit{kai } \lambda_0 \leq 0, \\ \infty, & \textit{kai } \lambda_0 \geq \sup_N \rho, \\ (v_1, v_2, v_{3k_1k_2}, v_{4k_1k_2}) N_*/\beta, & \textit{kai } \lambda_0 \in (0, \sup_N \rho), \end{cases}$$

kai $t \to \infty$, *kur* N_**–vienintelė lygties* $\rho(N_*) = \lambda_0$ *realioji šaknis.*

Įrodymas. Lygtys (4.3), (4.5), (4.6) nepriklauso nuo λ, ir remiantis teoremos sąlygomis, gali būti išspręstos tiksliai. Lygtis (4.6) gali būti išspręsta rekurentiniu būdu, pradedant nuo $|k| = n$. Lygtis (4.4) turi vėluojančią struktūrą tik tuo atveju, kai $\tau_2 \in (\hat{\tau}_{21}, \hat{\tau}_{22})$ ir gali būti išspręsta kaip paprasta diferencialinė lygtis.

Parodysime, kad lygtys (4.7), (4.8) turi bent vieną realų sprendinį.

Pažymėkime

$$\begin{cases} q_1^\lambda(y_1) = \displaystyle\sum_{k_1=0}^{n-1} \sum_{k_2=1}^{n-k_1} k_2 D_{k_1k_2}(\lambda, y_1), \\ q_2^\lambda(y_1) = \displaystyle\sum_{k_2=0}^{n-1} \sum_{k_1=1}^{n-k_2} k_1 D_{k_1k_2}(\lambda, y_1), \end{cases}$$

lygtį (4.7) perrašykime taip:

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{q_1^\lambda(y_1)}, \\ y_2 = \dfrac{1}{q_2^\lambda(y_1)}. \end{cases} \tag{4.11}$$

Nagrinėjame (4.4) lygtį.

Kai $\tau_2 \in [T_4, \tau_{21}]$, tai $L_w = 0$, $S_{w,1} = 0$, $S_{w,2} = 0$. Todėl

$$\begin{cases} (w_2^\lambda)' = -\nu_2 w_2^\lambda, \quad \tau_2 \in (T_4, \tau_{21}], \\ w_2^\lambda(T_4) = 1. \end{cases}$$

Kai $\tau_2 \in (\tau_{21}, \tau_{22})$, tai

$$\begin{aligned} L_w &= y_1 \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{|k|=j \\ k_i \geq 0}} \int_{\sigma_1} e^{-\lambda(\tau_1 - T_4)} w_1(\tau_1) p_{k_1 k_2}(\tau_1, \tau_2)\, d\tau_1 \cdot w_2^\lambda(\tau_2) \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{|k|=j \\ k_i \geq 0}} \sup_{\tau_1} p_{k_1 k_2}(\tau_2) y_1 \int_{\sigma_1} e^{-\lambda(\tau_1 - T_4)} w_1(\tau_1)\, d\tau_1 \cdot w_2^\lambda(\tau_2) \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{|k|=j \\ k_i \geq 0}} \sup_{\tau_1} p_{k_1 k_2}(\tau_2) \cdot w_2^\lambda(\tau_2), \end{aligned}$$

$S_{w,1} \geq 0$ ir $S_{w,2} \geq 0$. Todėl

$$(w_2^\lambda)' > -\Big(\nu_2 - \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{|k|=j \\ k_i \geq 0}} \sup_{\tau_1} p_{k_1 k_2}(\tau_2)\Big) w_2^\lambda(\tau_2), \quad [w_2^\lambda(\tau_2)] = 0.$$

Iš pastarųjų lygčių gauname įverčius

$$\begin{cases} w_2^\lambda(\tau_2) = w_{2*}(\tau_2) := e^{-\int_{T_4}^{\tau_2} \nu_2(\xi)\, d(\xi)}, \qquad \tau_2 \in [T_4, \tau_{21}], \\ w_2^\lambda(\tau_2) > w_{2*}(\tau_2) := e^{-\int_{T_4}^{\tau_2} \nu_2(\xi)\, d(\xi) - \int_{\tau_{21}}^{\tau_2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{|k|=j} \sup_{\tau_1} p_{k_1 k_2}(\xi)\, d\xi}, \qquad \tau_2 > \tau_{21}. \end{cases} \tag{4.12}$$

Iš čia seka, kad

$$0 < \frac{1}{q_1^\lambda(y_1)} < \frac{1}{q_1(\lambda)} \quad \text{su } \forall y_1 \geq 0,$$

kur

$$\begin{aligned} q_1(\lambda) &= \sum_{k_1=0}^{n-1} \sum_{k_2=1}^{n-k_1} k_2 \int_{\sigma_1} d\tau_1 \int_{\sigma_2} w_1(\tau_1) e^{-\lambda(\tau_1 - T_4)} w_{2*}(\tau_2) \\ &\quad \times e^{-\lambda(\tau_2 + T_3)} w_{4k_1k_2}(\tau_1, \tau_2 + T_3 + T_4, T_4)\, d\tau_2 \leq q_1^\lambda(y_1). \end{aligned}$$

Todėl

$$\left(y_1 - \frac{1}{q_1^\lambda(y_1)}\right)\Bigg|_{y_1=0} < 0 \quad \text{ir} \quad \left(y_1 - \frac{1}{q_1^\lambda(y_1)}\right)\Bigg|_{y_1=\frac{1}{q_1(\lambda)}} > 0.$$

Iš to išplaukia, kad lygtys $(4.11)_1$ turi bent vieną teigiamą šaknį $y_1(\lambda) \in (0, \frac{1}{q_1(\lambda)})$. Akivaizdu, kad tiek $y_1(\lambda)$, tiek ir $y_2(\lambda) = \frac{1}{q_2^\lambda(y_1(\lambda))}$–tolydžios parametro λ funkcijos. Įstatę $y_s(\lambda)$ į (4.8), gausime charakteristinę lygtį parametrui λ

$$1 = y_1(\lambda) \int_{\sigma_1} w_1(\tau_1) e^{-\lambda(\tau_1 - T_4)}\, d\tau_1 + y_2(\lambda) \int_{\sigma_2} w_2^\lambda(\tau_2) e^{-\lambda(\tau_2 - T_4)}\, d\tau_2.$$

Parodysim, kad ši lygtis turi bent vieną realią šaknį $\lambda = \lambda_0$. Pažymėję

$$w_4^* = \sup_{k_1,k_2,\tau_1,\tau_2} w_{4k_1k_2} > 0, \quad w_{4*} = \inf_{k_1,k_2,\tau_1,\tau_2} w_{4k_1k_2} > 0.$$

$$r(\lambda) = y_1(\lambda) \int_{\sigma_1} w_1(\tau_1)e^{-\lambda(\tau_1 - T_4)}\, d\tau_1 + y_2(\lambda) \int_{\sigma_2} w_2^\lambda(\tau_2)e^{-\lambda(\tau_2 - T_4)}\, d\tau_2$$

gausime įverčius:

$$\begin{aligned} q_1^\lambda(y_1) &\geq \sum_{k_1=0}^{n-1}\sum_{k_2=1}^{n-k_1} k_2 \int_{\sigma_1} w_1(\tau_1)e^{-\lambda(\tau_1 - T_4)}\, d\tau_1 \\ &\quad \times \int_{\sigma_2} w_{2*}(\tau_2)e^{-\lambda(\tau_2+T_3)} w_{4k_1k_2}(\tau_1, \tau_2 + T_3 + T_4, T_4)\, d\tau_2 \\ &\geq \sum_{k_1=0}^{n-1}\sum_{k_2=1}^{n-k_1} k_2 \int_{\sigma_2} e^{-\lambda(\tau_2+T_3)} w_{2*}(\tau_2) \inf_{\tau_1} w_{4k_1k_2}(\tau_1, \tau_2 + T_3 + T_4, T_4)\, d\tau_2 \\ &\quad \times \int_{\sigma_1} w_1(\tau_1)e^{-\lambda(\tau_1 - T_4)}\, d\tau_1, \\ q_2^\lambda(y_1) &\leq w_4^* \sum_{k_2=0}^{n-1}\sum_{k_1=1}^{n-k_2} k_1 \int_{\sigma_1} w_1(\tau_1)e^{-\lambda(\tau_1 - T_4)}\, d\tau_1 \int_{\sigma_2} w_2^\lambda(\tau_2)e^{-\lambda(\tau_1+T_3)}\, d\tau_2, \\ q_2^\lambda(y_1) &\geq w_{4*} \sum_{k_2=0}^{n-1}\sum_{k_1=1}^{n-k_2} k_1 \int_{\sigma_1} w_1(\tau_1)e^{-\lambda(\tau_1 - T_4)}\, d\tau_1 \int_{\sigma_2} w_2^\lambda(\tau_2)e^{-\lambda(\tau_1+T_3)}\, d\tau_2. \end{aligned}$$

Tuomet

$$\begin{aligned} r(\lambda) &= \int_{\sigma_1} w_1(\tau_1)e^{-\lambda(\tau_1 - T_4)}\, d\tau_1 y_1(\lambda) + \int_{\sigma_2} w_2^\lambda(\tau_2)e^{-\lambda(\tau_2 - T_4)}\, d\tau_2 y_2(\lambda) \\ &> \int_{\sigma_2} w_2^\lambda(\tau_2)e^{-\lambda(\tau_2 - T_4)}\, d\tau_2 \frac{1}{q_2^\lambda(y_1)} \\ &\geq \eta_1(\lambda) := \frac{1}{w_4^* \sum_{k_2=0}^{n-1}\sum_{k_1=1}^{n-k_2} k_1 \int_{\sigma_1} w_1(\tau_1)e^{-\lambda(\tau_1+T_3)}\, d\tau_1} \end{aligned}$$

ir

$$\begin{aligned} r(\lambda) \leq \eta_2(\lambda) \;&:=\; \frac{1}{\sum_{k_1=0}^{n-1}\sum_{k_2=1}^{n-k_1} k_2 \int_{\sigma_2} w_{2*}(\tau_2) \inf_{\tau_1} w_{4k_1k_2}(\tau_1, \tau_2 + T_3 + T_4, T_4) e^{-\lambda(\tau_2+T_3)}\, d\tau_2} \\ &\quad + \frac{1}{w_{4*} \sum_{k_2=0}^{n-1}\sum_{k_1=1}^{n-k_2} k_1 \int_{\sigma_1} w_1(\tau_1)e^{-\lambda(\tau_2+T_3)}\, d\tau_1}. \end{aligned}$$

Lygtis $r(\lambda) = 1$ turi bent vieną realią šaknį λ_0, nes $0 < \eta_1(\lambda) < r(\lambda) \leq \eta_2(\lambda)$, funkcijos $\eta_1$ir η_2–monotoniškai didėja nuo 0 iki ∞, kai λ kinta nuo $-\infty$ iki ∞.

Remiantis papildoma sąlyga $\tilde{\beta}(\lambda_0) < \infty$, (4.9) lygties sprendinys elgiasi taip:

$$N \to \begin{cases} 0, & \text{jei } \lambda_0 \leq 0, \\ \infty, & \text{jei } \lambda_0 \geq \sup_N \rho, \\ N_*, & \text{jei } \lambda_0 \in (0, \sup_N \rho). \end{cases}$$

□

5 Egzistavimo ir vienaties toerema, kai $\rho = 0$

Šiame paragrafe nagrinėsime (3.1)–(3.6) modelį su stacionariais gyvybiškai svarbiais greičiais $\nu_1, \nu_2, \nu_{3k_1k_2}, \nu_{4k_1k_2}, p_{k_1k_2}, \nu_{4k_1k_2;s_1s_2}$. Kai $\rho = 0$ įrodysime egzistavimo ir vienaties teoremą. Nagrinėsime atvejį $\tau_{22} - \tau_{21} > T_3 + T_4$. (Priešingą atvejį galima išnagrinėti analogiškai.)

Pažymėkime:

$$\Gamma_1 = \{t = \tau_1 - T_4, \tau_1, \tau_1 + T_3\},$$
$$\Gamma_2 = \{t = \tau_2 - \tau_{21}, \tau_2 - T_4, \tau_2, \tau_2 + T_3, \tau_2 - \hat{\tau}_{21}, \tau_2 - \tau_{22}, \tau_2 - \hat{\tau}_{22}\} \cup \{\tau_2 = \tau_{21}, \tau_{22}, \hat{\tau}_{21}, \hat{\tau}_{22}\},$$
$$\Gamma_3 = \{t = \tau_2 - \tau_{21}, \tau_2 - T_4, \tau_2, \tau_2 + T_3, \tau_2 - \hat{\tau}_{21}, \tau_2 - \tau_{22}, \tau_3\} \cup \{\tau_2 - \tau_3 = \tau_{21}, \tau_{22}, \hat{\tau}_{21}\}$$
$$\Gamma_4 = \{t = \tau_2 - \tau_{21}, \tau_2 - T_4, \tau_2, \tau_2 + T_3, \tau_2 - \hat{\tau}_{21}, \tau_2 - \tau_{22}, \tau_4, \tau_4 + T_3\} \cup \{\tau_2 - \tau_4 = T_3 + \hat{\tau}_{21}\}.$$

Teorema 2. *Tegul funkcijos $\nu_1, \nu_2, \nu_{3k_1k_2}, \nu_{4k_1k_2}, p_{k_1k_2}, \nu_{4k_1k_2;s_1s_2}$ ir konstantos $T_3, T_4, \tau_{s1}, \tau_{s2}$, kai $s = 1, 2$ tenkina pirmos teoremos sąlygas. Tegul $\tau_{22} - \tau_{21} > T_3 + T_4$. Tarkime, kad pradiniai duomenys $u_1^0, u_2^0, u_{3k_1k_2}^0, u_{4k_1k_2}^0$ tenkina (3.6) lygtis. Tegul u_1^0 ir $u_2^0 \in \mathbb{C}^1([T_4, \infty))$, $u_{3k_1k_2}^0 \in \mathbb{C}^{0,1,1}(\overline{Q}_3)$, $u_{4k_1k_2}^0 \in \mathbb{C}^{0,1,1}(\overline{Q}_4)$. Tada kiekvienam baigtiniui $t^* > 0$ sistema (3.1)–(3.4) turi vienintelį teigiamą sprendinį, tokį, kad:*

$$u_1 \in \mathbb{C}^0\big([0, t^*] \times [T_4, \infty)\big) \cap \mathbb{C}^1\big(((0, t^*) \times (T_4, \infty)) \backslash \Gamma_1\big),$$
$$u_2 \in \mathbb{C}^0\big([0, t^*] \times [T_4, \infty)\big) \cap \mathbb{C}^1\big(((0, t^*) \times (T_4, \infty)) \backslash \Gamma_2\big),$$
$$u_3 \in \mathbb{C}^0\big([0, t^*] \times \bar{Q}_3\big) \cap \mathbb{C}^{0,1,1}\big(((0, t^*) \times Q_3) \backslash \Gamma_3\big),$$
$$u_4 \in \mathbb{C}^0\big([0, t^*] \times \bar{Q}_4\big) \cap \mathbb{C}^{0,1,1}\big(((0, t^*) \times Q_4) \backslash \Gamma_3\big).$$

Įrodymas. Apibrėšime:

$$\tilde{\nu}_{4k_1k_2} = \nu_{4k_1k_2} + \sum_{j=0}^{|k|+1} \sum_{\substack{|s|=j \\ 0 \le s_i \le k_i}} \nu_{4k_1k_2;s_1s_2},$$

$$q(t, \tau_2) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{|k|=j \\ k_i \ge 0}} \int_{\sigma_1} p_{k_1k_2}(\tau_1, \tau_2) u_1(t, \tau_1) d\tau_1, \tag{5.1}$$

$$B_s = u_s(t, T_4), s = 1, 2, \tag{5.2}$$

$$h(t) = \int_{\sigma_1} u_1(t, \tau_1) d\tau_1 + \int_{\sigma_2} u_2(t, \tau_2) d\tau_2. \tag{5.3}$$

Užrašysime lygtis (3.1)–(3.4) integraline forma.

1. (3.1) užrašykime srityje $D_- = \{(t, \tau_1) : 0 < t < \tau_1 - T_4,\ \tau_1 > T_4\}$.

   Turime charakteristines lygtis

$$\frac{dt}{1} = \frac{d\tau_1}{1} = \frac{du_1}{-\nu_1 u_1} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} d\tau_1 = dt, \\ \dfrac{du_1}{-\nu_1 u_1} = dt. \end{cases}$$

   Kadangi $\tau_1 = t + \xi$, $\xi =$const., tai suintegravę lygtį (3.1) gausime

$$\underline{u(t, \tau_1) = u_1^0(\tau_1 - t) e^{-\int_0^t \nu_1(x + \tau_1 - t) dx} = u_1^0(\tau_1 - t) e^{-\int_{\tau_1 - t}^t \nu_1(x) dx}, \quad 0 \le t \le \tau_1 - T_4.}$$

Srityje $D_+ : t > \tau_1 - T_4 > 0$ turime

$$\begin{cases} dt = d\tau_1, \\ \dfrac{du_1}{-\nu_1 u_1} = d\tau_1. \end{cases}$$

Todėl $t = \tau_1 + \xi$, o

$$\underline{u_1(t,\tau_1) = B_1(T_4 + t - \tau_1)e^{-\int_{T_4}^{\tau_1} \nu_1(x)dx}, \quad t \geq \tau_1 - T_4 > 0.}$$

Tokiu būdu gauname sistemą

$$\begin{cases} u_1(t,\tau_1) = u_1^0(\tau_1 - t)e^{-\int_{\tau_1-t}^{t} \nu_1(x)dx}, \quad 0 \leq t \leq \tau_1 - T_4, \\ u_1(t,\tau_1) = B_1(T_4 + t - \tau_1)e^{-\int_{T_4}^{\tau_1} \nu_1(x)dx}, \quad t \geq \tau_1 - T_4. \end{cases} \tag{5.4}$$

2. Nagrinėkime (3.2) lygtį. Kai $0 < t < \tau_3$ turime

$$\frac{dt}{1} = \frac{d\tau_2}{1} = \frac{d\tau_3}{1} = \frac{du_{3k_1k_2}}{-\nu_{3k_1k_2}u_{3k_1k_2}} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} d\tau_3 = dt, \\ d\tau_2 = dt, \\ \dfrac{du_{3k_1k_2}}{-\nu_{3k_1k_2}} = dt. \end{cases}$$

Todėl

$$\underline{u_{3k_1k_2}(t,\tau_1,\tau_2,\tau_3) = u_{3k_1k_2}^0(\tau_1, \tau_2 - t, \tau_3 - t)e^{-\int_{\tau_3-t}^{\tau_3} \nu_{3k_1k_2}(\tau_1, x+\tau_2-\tau_3, x)dx}, \quad 0 \leq t \leq \tau_3.}$$

Kai $t > \tau_3$ turime

$$\begin{cases} dt = d\tau_3, \\ d\tau_2 = d\tau_3, \\ \dfrac{du_{3k_1k_2}}{-\nu_{3k_1k_2}u_{3k_1k_2}} = d\tau_3. \end{cases}$$

Todėl

$$\underline{u_{3k_1k_2}(t_1,\tau_1,\tau_2,\tau_3) = \left(\frac{p_{k_1k_2}u_1u_2}{h}\right)\Bigg|_{(t-\tau_3,\tau_1,\tau_2-\tau_3)} e^{-\int_0^{\tau_3} \nu_{3k_1k_2}(\tau_1, x+\tau_2-\tau_3, x)dx}, \quad t \geq \tau_3.}$$

Šias funkcijas sujungiame į sistemą:

$$\begin{cases} u_{3k_1k_2}(t,\tau_1,\tau_2,\tau_3) = u_{3k_1k_2}^0(\tau_1, \tau_2 - t, \tau_3 - t)e^{-\int_{\tau_3-t}^{\tau_3} \nu_{3k_1k_2}(\tau_1, x+\tau_2-\tau_3, x)dx}, \\ \qquad 0 \leq t \leq \tau_3, \\ u_{3k_1k_2}(t_1,\tau_1,\tau_2,\tau_3) = \left(\dfrac{p_{k_1k_2}u_1u_2}{h}\right)\Bigg|_{t-\tau_3,\tau_1,\tau_2-\tau_3} e^{-\int_0^{\tau_3} \nu_{3k_1k_2}(\tau_1, x+\tau_2-\tau_3, x)dx}, \\ \qquad t \geq \tau_3 \end{cases} \tag{5.5}$$

3. Nagrinėkime (3.3) lygtį. Kai $0 < t < \tau_4$, $\tau_4 > 0$ turime

$$\frac{dt}{1} = \frac{d\tau_2}{1} = \frac{d\tau_4}{1} = \frac{du_{4k_1k_2}}{-\tilde{\nu}_{4k_1k_2}u_{4k_1k_2} + S_{uk_1k_2}} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} d\tau_2 = dt, \\ d\tau_4 = dt, \\ \dfrac{du_{4k_1k_2}}{-\tilde{\nu}_{4k_1k_2}u_{4k_1k_2} + S_{uk_1k_2}} = dt. \end{cases}$$

Todėl

$$\underline{u_{4k_1k_2}(t,\tau_1,\tau_2,\tau_4) = u^0_{4k_1k_2}(\tau_1,\tau_2 - t,\tau_4 - t)e^{-\int_{\tau_4-t}^{\tau_4}\tilde{\nu}_{4k_1k_2}(\tau_1,x+\tau_2-\tau_4,x)dx}}$$
$$\underline{+\int_{\tau_4-t}^{\tau_4} e^{-\int_\eta^{\tau_4}\tilde{\nu}_{4k_1k_2}(\tau_1,x+\tau_2-\tau_4,x)dx} S_{uk_1k_2}(\eta + t - \tau_4,\tau_1,\eta+\tau_2-\tau_4,\eta)d\eta,}$$
$$\underline{0 \le t \le \tau_4}.$$

Analogiškai srityje $t > \tau_4$ gauname

$$\begin{cases} dt = d\tau_4, \\ d\tau_2 = d\tau_4, \\ \dfrac{du_{4k_1k_2}}{-\tilde{\nu}_{4k_1k_2}u_{4k_1k_2} + S_{uk_1k_2}} = dt. \end{cases}$$

Todėl

$$\underline{u_{4k_1k_2}(t,\tau_1,\tau_2,\tau_4) = u_{4k_1k_2}(t-\tau_4,\tau_1,\tau_2 - \tau_4,0)e^{\int_0^{\tau_4}\tilde{\nu}_{4k_1k_2}(\tau_1,x+\tau_2-\tau_4,x)dx}}$$
$$\underline{+\int_0^{\tau_4} e^{-\int_\eta^{\tau_4}\tilde{\nu}_{4k_1k_2}(\tau_1,x+\tau_2-\tau_4,x)dx} S_{uk_1k_2}(\eta + t - \tau_4,\tau_1,\eta+\tau_2-\tau_4,\eta)d\eta,}$$
$$\underline{t \ge \tau_4}.$$

Kadangi $u_{4k_1k_2}(t,\tau_1,\tau_2,0) = u_{3k_1k_2}(t,\tau_1,\tau_2,T_3)$, tai pasinaudojęsistema (5.5) gausime

$$\begin{cases} u_{4k_1k_2}(t,\tau_1,\tau_2,\tau_4) = u^0_{4k_1k_2}(\tau_1,\tau_2 - t,\tau_4 - t)e^{-\int_{\tau_4-t}^{\tau_4}\tilde{\nu}_{4k_1k_2}(\tau_1,x+\tau_2-\tau_4,x)dx} \\ \quad +\displaystyle\int_{\tau_4-t}^{\tau_4} e^{-\int_\eta^{\tau_4}\tilde{\nu}_{4k_1k_2}(\tau_1,x+\tau_2-\tau_4,x)dx} S_{uk_1k_2}(\eta + t - \tau_4,\tau_1,\eta+\tau_2-\tau_4,\eta)d\eta, \\ \quad 0 \le t \le \tau_4, \\ u_{4k_1k_2}(t,\tau_1,\tau_2,\tau_4) = u_{3k_1k_2}(t-\tau_4,\tau_1,\tau_2 - \tau_4,T_3)e^{\int_0^{\tau_4}\tilde{\nu}_{4k_1k_2}(\tau_1,x+\tau_2-\tau_4,x)dx} \\ \quad +\displaystyle\int_0^{\tau_4} e^{-\int_\eta^{\tau_4}\tilde{\nu}_{4k_1k_2}(\tau_1,x+\tau_2-\tau_4,x)dx} S_{uk_1k_2}(\eta + t - \tau_4,\tau_1,\eta+\tau_2-\tau_4,\eta)d\eta, \\ \quad t \ge \tau_4, \end{cases} \tag{5.6}$$

kur

$$u_{3k_1k_2}(t-\tau_4,\tau_1,\tau_2-\tau_4,T_3)=\begin{cases} u^0_{3k_1k_2}(\tau_1,\tau_2-t,T_3-t) \\ \quad \times e^{-\int_{T_3-t+\tau_4}^{T_3}\nu_{3k_1k_2}(\tau_1,x+\tau_2-\tau_4-T_3,x)dx}, \\ \quad \tau_4\le t\le\tau_4+T_3, \\ \left(\frac{p_{k_1k_2}u_1u_2}{h}\right)\Big|_{(t-\tau_4-T_3,\tau_1,\tau_2-\tau_4-T_3)} \\ \quad \times e^{-\int_0^{T_3}\nu_{3k_1k_2}(\tau_1,x+\tau_2-\tau_4-T_3,x)dx}, \quad t\ge\tau_4+T_3. \end{cases}$$

4. Nagrinėsime (3.4) lygtį.

a) Kai $\tau_2\in(T_4,\tau_{21})$, tai

$$\frac{dt}{1}=\frac{d\tau_2}{1}=\frac{du_2}{-\nu_2u_2}.$$

Srityje $0<t<\tau_2-T_4$, $\tau_2\in(T_4,\tau_{21})$ turime

$$\begin{cases} d\tau_2=dt, \\ \dfrac{du_2}{-\nu_2u_2}=dt. \end{cases}$$

Todėl

$$\underline{u_2(t,\tau_2)=u_2^0(\tau_2-t)e^{-\int_{\tau_2-t}^{\tau_2}\nu_2(x)dx}}.$$

Analogiškai srityje $t>\tau_2-T_4$, $\tau_2\in(\tau_4,\tau_{21})$ gauname

$$\begin{cases} dt=d\tau_2, \\ \dfrac{du_2}{-\nu_2u_2}=d\tau_2, \end{cases}$$

$$\underline{u_2(t,\tau_2)=B_2(T_4+t-\tau_2)e^{-\int_{T_4}^{\tau_2}\nu_2(x)dx}}.$$

Vadinasi turime sistemą

$$\begin{cases} u_2(t,\tau_2)=u_2^0(\tau_2-t)e^{-\int_{\tau_2-t}^{\tau_2}\nu_2(x)dx} & 0\le t\le\tau_2-T_4, \\ u_2(t,\tau_2)=B_2(T_4+t-\tau_2)e^{-\int_{T_4}^{\tau_2}\nu_2(x)dx}. & t\ge\tau_2-T_4 \end{cases} \tag{5.7}$$

b) Tegul $\tau_2\in[\tau_{21},\tau_{21}+T_3]$. Tuomet

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}+\frac{\partial u_2}{\partial\tau_2}=\left(-\nu_2-\sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{|k|=j\\k_i\ge0}}\int_{\sigma_1}\frac{p_{k_1k_2}u_1d\tau_1}{\int_{\sigma_1}u_1d\tau_1'+\int_{\sigma_2}u_2d\tau_2'}\right)u_2$$

arba

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}+\frac{\partial u_2}{\partial\tau_2}=-\left(\nu_2+\frac{q}{h}\right)u_2.$$

Taip pat kaip ir išvedant (5.7), gauname

$$u_2 = \begin{cases} u_2^0(\tau_2 - t)e^{-\int_0^t (\nu_2 + q\backslash h)|_{(x,x+\tau_2-t)}dx}, & 0 \le t \le \tau_2 - \tau_{21}, \\ u_2(\tau_{21} + t - \tau_2, \tau_{21})e^{-\int_{\tau_{21}+t-\tau_2}^t (\nu_2+q\backslash h)|_{(x,x+t-\tau_2)}dx} & t \ge \tau_2 - \tau_{21}. \end{cases} \tag{5.8}$$

Analogiškai užrašomos u_2 intergralinės lygtys kitais atvejais. Užrašysime likusias u_2 išraiškas.

c) Kai $\tau_2 \in [\tau_{21} + T_3, \tau_{21} + T_3 + T_4]$, tai $L_u \neq 0, S_{u,2} \neq 0$. Todėl gauname sistemą

$$u_2 = \begin{cases} u_2^0(\tau_2 - t)e^{-\int_0^t (\nu_2+q\backslash h)|_{(x,x+\tau_2-t)}dx} \\ \quad + \int_0^t e^{-\int_\eta^t (\nu_2+q\backslash h)|_{(x,x+\tau_2-t)}dx} S_{u,2}(\eta, \eta + \tau_2 - t)d\eta, \\ \quad 0 \le t \le \tau_2 - \tilde{\tau}_{21}, \\ u_2(\tilde{\tau}_{21} + t - \tau_2, \tilde{\tau}_{21})e^{-\int_{\tilde{\tau}_{21}+t-\tau_2}^t (\nu_2+q\backslash h)|_{(x,x+t-\tau_2)}dx} \\ \quad + \int_{\tilde{\tau}_{21}+t-\tau_2}^t e^{-\int_\eta^t (\nu_2+q\backslash h)|_{(x,x+\tau_2-t)}dx} S_{u,2}(\eta, \eta + \tau_2 - t)d\eta, \\ \quad t \ge \tau_2 - \tilde{\tau}_{21}. \end{cases} \tag{5.9}$$

d) Kai $\tau_2 \in [\tau_{21} + T_3 + T_4, \tau_{22}]$, tai $L_u \neq 0,\ S_{u,1} \neq 0,\ S_{u,2} \neq 0$. Todėl

$$u_2 = \begin{cases} u_2^0(\tau_2 - t)e^{-\int_0^t (\nu_2+q\backslash h)|_{(x,x+\tau_2-t)}dx} \\ \quad + \int_0^t e^{-\int_\eta^t (\nu_2+q\backslash h)|_{(x,x+\tau_2-t)}dx} (S_{u,1} + S_{u,2})|_{(\eta,\eta+\tau_2-t)}d\eta, \\ \quad 0 \le t \le \tau_2 - \hat{\tau}_{21}, \\ u_2(\hat{\tau}_{21} + t - \tau_2, \hat{\tau}_{21})e^{-\int_{\hat{\tau}_{21}+t-\tau_2}^t (\nu_2+q\backslash h)|_{(x,x+t-\tau_2)}dx} \\ \quad + \int_{\hat{\tau}_{21}+t-\tau_2}^t e^{-\int_\eta^t (\nu_2+q\backslash h)|_{(x,x+\tau_2-t)}dx} (S_{u,1} + S_{u,2})_{(\eta,\eta+\tau_2-t)}d\eta, \\ \quad t \ge \tau_2 - \hat{\tau}_{21}. \end{cases} \tag{5.10}$$

e) Kai $\tau_2 \in [\tau_{22}, \tau_{22} + T_3 + T_4]$, tai $L_u = 0,\ S_{u,1} \neq 0,\ S_{u,2} \neq 0$. Todėl

$$u_2 = \begin{cases} u_2^0(\tau_2 - t)e^{-\int_{\tau_2-t}^{\tau_2} \nu_2(x)dx} \\ \quad + \int_{t-\tau_2}^{\tau_2} e^{-\int_\eta^{\tau_2} \nu_2(x)dx} (S_{u,1} + S_{u,2})_{(\eta+t-\tau_2,\eta)}d\eta, \\ \quad 0 \le t \le \tau_2 - \tau_{22}, \\ u_2(\tau_{22} + t - \tau_2, \tau_{22})e^{-\int_{\tau_{22}}^{\tau_2} \nu_2(x)dx} \\ \quad + \int_{\tau_{22}}^{\tau_2} e^{-\int_\eta^{\tau_2} \nu_2(x)dx} (S_{u,1} + S_{u,2})_{(\eta+t-\tau_2,\eta)}d\eta, \\ \quad t \ge \tau_2 - \tau_{22}. \end{cases} \tag{5.11}$$

f) Kai $\tau_2 \in [\tau_{22} + T_3 + T_4, \infty]$ gauname sistemą

$$u_2 = \begin{cases} u_2^0(\tau_2 - t)e^{-\int_{\tau_2-t}^{\tau_2} \nu(x)dx}, & 0 \le t \le \tau_2 - \tau_{22} - T_3 - T_4, \\ u_2(\tau_{22} + T_3 + T_4 + t - \tau_2, \tau_{22} + T_3 + T_4)e^{-\int_{\tau_{22}+T_3+T_4}^{\tau_2} \nu_2(x)dx}. \end{cases} \tag{5.12}$$

Pasinaudoję (5.3), (5.4), (5.8)–(5.10), gausime integralinę lygtį. Trumpumo dėlei, ją užrašysime taip:

$$h = K(h; t, B_1, B_2, S_{u,1}, S_{u,2}). \tag{5.13}$$

Ši lygtis turi vėluojančią struktūrą. Mes ją nagrinėsime judėdami ašimi t žingsniu T_3.

Tegul $t \in [0, T_3]$. Pasinaudoję (5.5), gausime $u_{3k_1k_2}$, kai $t \leq \tau_3$ (tuo pačiu randame ir $u_{3k_1k_2}|_{\tau_3=T_3}$, kai $t \leq T_3$). Pradedant $|k| = n$, rekurentiškai išsprendžiame (5.6) su $S_{4k_1k_2}$, apibrėžtu (3.3) lygybe ir gauname $u_{4k_1k_2}$, kai $0 \leq t \leq \tau_4 + T_3$ (tuo pačiu randame $u_4k_1k_2|_{\tau_4=T_4}$, kai $0 \leq t \leq T_4 + T_3$). Tai, $(3.1)_3$, $(3.4)_3$, (5.2) ir funkcijų $S_{u,1}$ ir $S_{u,2}$ apibrėžimai leidžia rasti $B_1, B_2, S_{u,1}$, kai $0 \leq t \leq T_3 + T_4$ ir $S_{u,2}$, kai $0 \leq t \leq T_3$.

Todėl, panaudoję (5.4), rasime u_1, kai $0 \leq t \leq \tau_1 + T_3, \tau_1 \in [T_4, \infty]$ (tuo pačiu ir $\int_{\sigma_1} u_1 d\tau_1$, ir remdamiesi apibrėžimu randame q, kai $0 \leq t \leq \tau_{11} + T_3$).

Lygybė (5.7) apibrėžia u_2, kai $0 \leq t \leq \tau_2 + T_3, \tau_2 \in [T_4, \tau_2 1]$. Lygybės (5.8)–(5.10) rodo, kad u_2 priklauso nuo t, τ_2 ir h, kai $t \in [0, T_3]$, $\tau_2 \in [\tau_{21}, \tau_{22}]$. Todėl (5.13) yra integralinė lygtis funkcijai h, kai $t \in [0, T_3]$.

Naudodami (5.8)–(5.10) lygtis, galime pastebėti, kad $K(h'', \cdot) > K(h', \cdot)$, jeigu $h'' > h'$ ir $0 < K(\int_{\sigma_1} u_1 d\tau_1, \cdot) < K(h, \cdot) < K(\infty, \cdot)$. Tai leidžia išspręsti (5.13) iteracijų metodu, pradedant nuo $h^0 = \int_{\sigma_1} u_1 d\tau_1$ ir gauti monotoniškai augančią seką $\{K(h^s, \cdot)\}$, kuri konverguoja, nes yra aprėžta dydžiu $K(\infty, \cdot)$. Be to, iš (5.3), (5.13), (5.8)–(5.10) išplaukia, kad

$$\left|h^{s+1} - h^s\right| \leq a \int_0^t \left|h^s - h^{s-1}\right| d\xi, \quad s = 1, 2, \ldots \tag{5.14}$$

kur $a > 0$-tam tikra konstanta. Todėl

$$\left|h^{s+1} - h^s\right| \leq a^s t^s \frac{c}{s!}, \quad c = \sup_{t \in [0, T_3]} \big(K(\infty, \cdot) - \int_{\sigma_1} u_1 d\tau_1\big), \ s = 1, 2, \ldots \tag{5.15}$$

ir seka $\{h^s\}$ tolygiai konverguoja į griežtai teigiamą funkciją $h \in C^0([0, T_3])$. h vienatis seka iš analogiško (5.14) nelygybei įverčio dviems (5.13) sprendiniams.

Žinant h is (5.7)–(5.12) randame u_2, kai $t \in [0, T_3]$, $\tau_2 \in [T_3, \infty]$. □

6 Išvados

Darbe pateiktas straipsnio [10] dalies referatas. 1. Išnagrinėti limituotos populiacijos modelio separabilieji sprendiniai.

2. Nelimituotos populiacijos atveju, kai reprodukcijos intervalas didesnis už nėštumo trukmę ir vaikų priežiūros periodą, įrodyta sprendinio egzistencijos ir vienaties teorema.

3. Tuo pačiu metodu ši teorema gali būti įrodyta populiacijai, susilaukiančiai palikuonių vienintelį kartą gyvenime.

Summary

On a Population Model with Child Care

A deterministic model for a sexual age-structured population with females pregnancy, maternal care of offspring, and an environmental pressure is presented. The model involves pairs that exist for period of mating only and uses mating function of simplified harmonic mean type. All adult males are treated as singles. Each sex has pre-reproductive, reproductive, and post-reproductive age intervals. All adult individuals (of reproductive age) are divided into males, single females, pregnant females, and females taking child care. All individuals of pre-reproductive age are divided into young and juvenile groups. All young individuals are under maternal care while juveniles can live without maternal care. The model consists of integro-differential equations. Separable solutions are studied for the limited nondispersing population. The existence and uniqueness theorem is proved in the case of unlimited population.

Literatūra

1. G.F. Webb, Theory of Non-Linear Age-Dependant Population Dynamics, New York (1985).

2. F.C. Hoppensteat, mathematical theories of populations, genetics, and epidemics, in: CMBS Appl. Math. SIAM, vol. 20, Philadelphia (1975).

3. O.V. Staroverov, Reproduction of the structure of the population and marriages, Ekonomika i matematicheskije metody, 13, 77–82 (1977) (in Russian).

4. M.E. Gurtin, R. MacCamy, Nonlinear age-dependant population dynamics, Arch. Rat. Mech. Anal., 54, 281–300 (1974).

5. K.P. Hadeler, Pair formation with maturation period, J. Math. Biol., 32, 1–15 (1993).

6. V. Skakauskas, Two population dynamics models with child care, Informatica, 11 (2), 195–218 (2000).

7. V. Skakauskas, A density-dependant population dynamics model with offspring production at fixed ages and child care, in: Mathematical Modelling and Computing in Biology and Medicine 1, 5th ISMTB conference, V. Capasso (Ed.), MIRIAM (2002), pp. 368–373.

8. V. Skakauskas, Large time behavior in a population dynamics with offspring production at fixed ages, child care, and spatial dispersal, Lith. Mat. J., 44 (2), 180–197 (2004).

9. V. Skakauskas, Large time behavior in a density-dependant population dynamics problem with age structure and child care, in: Math. Modelling of Population Dynamics, vol. 63, R. Rudnicki (Ed.), Banach center publications, Inst. of math. Polish Academy of Sci., Warszawa (2004), pp. 243–258.

10. V. Skakauskas, Populiacijos dinamikos modelis įskaitant amžių, patelių nėštumą ir vaikų globą. Liet. Matemat. Rink., 44, Nr. 3, 315–342 (2004).