VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ IR SKAIČIAVIMO MATEMATIKOS KATEDRA

Agnė Kulikauskaitė

BŪSTO PASKOLŲ PALYGINIMAS

Magistro darbas

Darbo vadovas
doc. P. Katauskis

VILNIUS 2006

TURINYS

ĮVADAS

Priklausomai nuo skolininko ir kreditoriaus susitarimo gali būti pasirenkamos įvairios paskolų padengimo sutartys:didėjančių mokėjimų, lengvatinio periodo, su periodiškai reguliuojama palūkanų norma, su keičiama palūkanų norma ir kt. paskolos

Lietuva Europos Sąjungoje pirmauja pagal nekilnojamojo turto kainų didėjimą. „Hansabanko" duomenimis Lietuvoje pernai būstas brango 50%, kai tuo tarpu Latvijoje - 45%, Estijoje - 40%. Europos Sąjungos šalyse šeima turi dirbti vidutiniškai penkis metus, kad nusipirktų butą, o Lietuvoje - dvylika - ketiriolika metų. Todėl žmogui siekiančiam įsigyti būstą dabar tenka apsvarstyti ir paskolos ėmimo galimybę.

2004 m. Lietuvos būsto paskolų rinka augo sparčiausiai Europos Sąjungoje. Gyventojų turimos būsto paskolos padidėjo 87%, tai antras rodiklis Europos Sąjungoje (pirmą vietą užima Latvija, kur gyventojų turimos paskolos padidėjo 90%). Lietuvos Banko duomenimis gyventojai iš bankų buvo paėmę 7,355 mlrd. Lt būsto paskolų. Iš viso gyventojai bankams skolingi 9,847 mlrd. Lt.

Susipažinęs su bankų siūlomomis pasklоų padengimo salygomis, klientas gali pasrinkti kažkurį iš siūlomų skolos padengimo metodų, tarp jų ir pastoviųjų anuitetų arba linijinį (kintamų anuitetų) metodą. Šiuos paskolų padengimo metodus ir nagrinėju savo darbe, pirmajame skyriuje.

Didesnį dėmesį skyriau paskoloms su pastovia metine palūkanų norma. Šiuo metu yra prognozuojamas palūkanų normos kilimas. Palūkanų augimas ir prognozės apie tolimesnį jų didėjimą, skatina imančius būsto paskolas domėtis palūkanų augimo rizikos valdymo priemonėmis. Viena iš jų yra palūkanų normos fiksavimas. Pastebima, kad bankų klientai pradėjo dažniau skolintis pasirinkdami fiksuotas palūkanas - tai naujas reiškinys Lietuvos rinkoje, nors kitose šalyse kintamos palūkanos nėra populiarios ir dauguma kreditų teikiama fiksuotomis palūkanomis. Nors situacija Lietuvoje ir keičiasi, bet vis dar pagrindinė kreditų būstui dalis suteikiama kintamomis palūkanomis, tai nagrinėjamas ir kintamos palūkanų normos atvejis (ketvirtas skyrius), darant prielaidą, kad palūkanų norma per paskolos terminą tik didės kas metai tokiu pat dydžiu.

Būsto paskolos yra ilgalaikės, todėl per paskolos terminą tiek skolininkui, tiek ir skolintojui neišvengiamai tenka susidurti su tokiu veiksniu kaip infliacija. Aptarsime infliacijos pasekmes tiek vienai, tiek ir kitai pusei. Infliacijos pasekmės, bei pastovių ir kintamų anuitetų metodų palyginimas yra pateikiami antrajame skyriuje.

Būsto kreditų ėmėjai daugiausia yra jauni, 25 - 35 metų amžiaus, neseniai sukūrę šeimas žmonės, būstą perkantys pirmą kartą. Dauguma šių žmonių gali neturėti pakankamai finansinių lėšų paskolos termino pradžioje, tokiu atveju jiems gali būti suteikiama lengvatinė paskola. Lengvatinės paskolos atveju, skolininkui sumažėja pirmųjų mokėjimų našta, o likusius pinigus jis gali skirti kitoms reikmėms. Aptarsime lengvatinių paskolų atvejį tiek pastovių, tiek ir kintamų anuitetų atvejais (trečias skyrius).

Darbe nagrinėjamas ir trumpesnio termino su šiek tiek žemesne palūkanų norma paskolos atvejis (penktas skyrius).

I.ANUITETŲ IR LINIJINIS METODAI. BENDRA APŽVALGA

Lietuvoje šiuo metu vienos populiariausių paskolų yra būsto paskolos. Jos ilgalaikės ir paprastai padengiamos ne iš karto, o dalimis. Kreditas dažniausiai suteikiamas visas iš karto, tuo tarpu padengiamas dalimis. Bankininkystėje kredito padengimas dar vadinamas paskolos amortizavimu. Praktikuojami įvairūs kredito amortizavimo būdai: skirtingo dydžio dalimis įmokamomis ne periodiškai pasikartojančiomis datomis, anuitetais (anuitetas (vok. Annuität) - įmoka skolai ir palūkanoms dengti), susidedančiais iš įmokų, kartu padengiančių tiek skolą, tiek ir palūkanas, ir kt.

Vienas iš paskolų padengimo būdų gali būti periodiškas įnašų mokėjimas. Šie įnašai gali būti mokami įvairiai: periodo pradžioje, pabaigoje, viduryje ir t. t. Mes nagrinėsime atvejį, kai įnašai mokami periodo pabaigoje. Periodu vadinsime pastovų laikotarpį tarp gretimų mokėjimų.

Sudarant paskolos sutartį tiek skolininkui, tiek ir skolintojui svarbu rasti tinkamiausią (patogiausią) jam kredito padengimo būdą. Kiekvienai paskolai yra sudaromas planas, kuris numato, kada ir kokia pagrindinės skolos dalis ir palūkanos bus padengti. Patogus yra anuitetinis padengimo būdas. Padengti galima pastovaus ir kintamo dydžio anuitetais.

I.1. PASTOVIŲJŲ ANUITETŲ METODAS

Pastoviųjų anuitetų metodas dar vadinamas skolos padengimu vienodais įnašais. Šiame skyrelyje detaliau panagrinėsime šį metodą ir išvesime pagrindines šio metodo formules. Mums prireiks tokių žymėjimų:

A – pradinė skolos suma;

i – periodo palūkanų norma;

n – paskolos trukmė periodais;

R – periodo įnašas;

I_k, k=1,...n – k - tuoju periodu sumokama palūkanų suma;

I – per visą paskolos terminą sumokamos palūkanos;

P_k, k=1,...n – k - tuoju periodu grąžinama skolos suma;

S – visa už paskolą sumokama suma;

B_k, k=1,...n – skolos likutis praėjus k periodų nuo paskolos paėmimo (pastebėsime, kad $B_0 = A$);

$v = \frac{1}{1+i}$ – diskontavimo koeficientas.

Padengiant pastoviaisiais anuitetais visa skolos suma (pradinė skolos suma kartu su palūkanomis) tolygiai išdėstoma visam padengimo laikui, t. y. kiekvieną periodą yra mokama vienodo dydžio įmoka. Pirmasis įnašas bus sumokamas pirmojo periodo pabaigoje, ir todėl šio įnašo diskontuotas dydis yra $R \cdot v$. Antrasis įnašas bus po dviejų periodų, tad jo diskontuotas dydis bus $R \cdot v^2$ ir t. t. Pagaliau, n - tasis įnašas bus mokamas po n periodų ir jo diskontuotas dydis bus $R \cdot v^n$.

Visa skola bus padengta, jeigu visų dalinių įmokų dabartinė vertė bus lygi paskolos sumos dydžiui, t. y.

$$A = R \cdot v + R \cdot v^2 + ... + R \cdot v^n$$

Pertvarkę šią išraišką, pasinaudoję geometrinės progresijos formule, ir įvedę pažymėjimą [žr.1]

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \tag{1}$$

gausime tokį sąryšį tarp pradinės skolos sumos ir periodo įnašo [žr.1]

$$A = R \cdot a_{\overline{n}|i} \tag{2}$$

Dydis $a_{\overline{n}|i}$ - būsimų mokėjimų, kai mokama po vieną litą, diskontuota arba dabartinė vertė. Dabartinė vertė parodo kiek mūsų busimieji mokėjimai yra verti šiandien. Dabartinės vertės koeficientas priklauso nuo dviejų dydžių paskolos termino n ir palūkanų normos i. Perrašykime dabartinės vertės koeficientą taip

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^n}$$

Pastebėsime, kad pagal n, tai bus didėjanti funkcija, kadangi kuo didesnis n, tuo daugiau narių sudėsime. Suskaičiavę išvestinę pagal i, galime parodyti, kad

$$\left(a_{\overline{n}|i}\right)_i' = -\frac{1}{(1+i)^2} - \frac{2}{(1+i)^3} - \ldots - \frac{n}{(1+i)^{n+1}} < 0$$

t. y. dabartinės vertės koeficientas yra mažėjanti palūkanų normos funkcija.

Tuo pačiu galime apibrėžti ir mokėjimų būsimos vertės koeficientą [žr.1]

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \tag{3}$$

Jeigu turime n periodų, o i – periodo palūkanų norma ir kiekvieną periodą mokame po 1 Lt, tai būsima vertė parodo, kiek tie mūsų n Lt bus verti po n periodų. Panašiai kaip ir dabartinės vertės koeficiento atveju galima parodyti, kad būsimosios vertės koeficientas yra didėjanti tiek palūkanų normos i, tiek ir paskolos termino n funkcija.

Ryšys tarp busimosios ir dabartinės vertės koeficientų yra toks [žr.1]

$$s_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i} \cdot (1+i)^n \tag{4}$$

Pasinaudoję (2) formule matome, kad periodo įnašas yra

$$R = \frac{A}{a_{\overline{n}|i}} \tag{5}$$

Kaip jau buvo minėta pradžioje, kiekvieno periodo įnašą sudaro dvi dalys: už atitinkamą periodą sumokamos palūkanos ir grąžinamos skolos suma

$$R = P_k + I_k \tag{6}$$

Ne retai tiek skolininkui, tiek ir skolintojui aktualus yra skolos likučio, praėjus k periodų nuo paskolos termino pradžios, dydis

$$B_k = R \cdot a_{\overline{n-k}|i} \tag{7}$$

Arba galima rašyti, kad skolos likutis už k - tąjį periodą yra lygus skolos likučio už k-1 - ąjį periodą ir k tuoju periodu grąžinamos skolos sumos skirtumui

$$B_k = B_{k-1} - P_k \tag{8}$$

Periodo palūkanos skaičiuojamos nuo skolos likučio, todėl k - tuoju periodu sumokama palūkanų suma bus skaičiuojama nuo skolos likučio už k-1 - ąjį periodą

$$I_k = i \cdot B_{k-1} = i \cdot R \cdot a_{\overline{n-(k-1)}|i} \tag{9}$$

Kadangi jos skaičiuojamos nuo skolos likučio, kuris laikui bėgant mažėja, tai mažėja ir palūkanų sumos.

Žinodami tiek įnašo, tiek ir palūkanų dydį galime rasti k - tuoju periodu grąžinamos skolos sumos dydį. Pasinaudoję (6), (2) ir (9), turime

$$P_k = R - I_k = \frac{A}{a_{\overline{n}|i}} - i \cdot A \cdot \frac{a_{\overline{n-(k-1)}|i}}{a_{\overline{n}|i}} = \frac{A}{a_{\overline{n}|i}} \cdot (1+i)^{-(n-(k-1))} \tag{10^a}$$

o dar atsižvelgę į (4) galime užrašyti taip

$$P_k = \frac{A}{s_{\overline{n}|i}} \cdot (1+i)^{k-1} \tag{10^b}$$

ir galiausiai, gauname tokią grąžinamos skolos sumą

$$P_k = R \cdot (1+i)^{-(n-(k-1))} \tag{10c}$$

Ekvivalenti grąžinamos skolos išraiška, tik per grąžinamos skolos sumas būtų

$$P_k = P_1 (1+i)^{k-1} \tag{11}$$

Iš gautos išraiškos matome, kad grąžinamos sumos sudaro seką

$$P_1,\ P_1(1+i)^1,\ P_1(1+i)^2, ...,\ P_1(1+i)^{n-1}$$

Pastebėsime, kad gautosios sekos nariai kinta pagal geometrinės progresijos dėsnį, kurio vardiklis yra didesnis už vienetą, t. y. progresijos nariai didėja. Kadangi periodo įnašo dydis per visą paskolos terminą yra nekintantis, o palūkanų sumos laikui bėgant mažėja, tai grąžinamo skolos sumos turi augti.

Dabar panagrinėsime konkretų paskolos laikotarpį nuo p - ojo iki q - tojo periodų, $0 < p+1 < q \le n$. Apskaičiuosime kiek per šį laikotarpį yra sumokama palūkanų, grąžinama skolos ir iš viso sumokama už paskolą grąžinant ją pastovių anuitetų metodu. Pažymėkime

R_{p+1}^{q} - iš viso sumokama suma per laikotarpį nuo p - ojo iki q - tojo periodų;

P_{p+1}^{q} - grąžinama suma už laikotarpį nuo p - ojo iki q - tojo periodų;

I_{p+1}^{q} - palūkanų suma už laikotarpį nuo p - ojo iki q - tojo periodų.

Per laikotarpį nuo p - ojo iki q - ojo periodų iš viso sumokama suma yra

$$R_{p+1}^{q} = R \cdot \sum_{k=p+1}^{q} 1 = (q-p) \cdot R \tag{12}$$

Panaudoję (9) išraišką matome, kad už šį laikotarpį sumokame palūkanų

$$I_{p+1}^{q} = i \cdot R \cdot \sum_{k=p+1}^{q} a_{\overline{n-(k-1)}|i} = R \cdot \left(q - p - (1+i)^{-n+q} \cdot a_{\overline{q-p}|i}\right) \tag{13}$$

Atsižvelgę į sąryšį tarp busimosios ir dabartinės verčių koeficientų gausime palūkanų sumos tokią išraišką

$$I_{p+1}^{q} = R \cdot \left(q - p - (1+i)^{-n+p} s_{\overline{q-p}|i}\right) \tag{14}$$

Aišku, kad per ši laiko tarpsnį grąžinamos skolos dydį rasime paėmę per šį laikotarpį iš viso įnešamos sumos ir palūkanų skirtumą

$$P_{p+1}^{q} = R \cdot (1+i)^{-n+q} \cdot a_{\overline{q-p}|i} \tag{15}$$

įrašę būsimos vertės koeficientą gausime ekvivalentišką išraišką

$$P_{p+1}^{q} = R \cdot (1+i)^{-n+p} \cdot s_{\overline{q-p}|i} \tag{16}$$

Pastebėsime, kad (12) - (16) išraiškomis apibrėžiami dydžiai, dar atsižvelgus ir į (5), priklauso nuo pradinės paskolos sumos A, periodo palūkanų normos i, paskolos termino n, bei konkrečių dydžių p ir q.

Pagal (12) formule, iš viso per visą paskolos terminą mes sumokame už paskolą

$$S = n \cdot R \tag{17}$$

Kadangi pradinė skolos suma yra A, tai atėmę ją iš visos per paskolos terminą įnešamos sumos, bei pasinaudoję (2) išraiška, gausime per visą terminą sumokamas palūkanas

$$I = R \cdot \left(n - a_{\overline{n}|i}\right) \tag{18}$$

Jeigu panaudosime busimosios vertės koeficientą, tai

$$I = R \cdot \left(n - (1+i)^{-n} \cdot s_{\overline{n}|i}\right) \tag{19}$$

Įnašais nuo p+1 - ojo iki q - ojo sumokama

$$\frac{R_{p+1}^{q}}{S} = \frac{q-p}{n} \tag{20}$$

dalis visosskolą padengiančios sumos.

Už šį laikotarpį sumokama palūkanų suma yra tokia

$$\frac{I_{p+1}^{q}}{I} = \frac{q-p-(1+i)^{-n+q} \cdot a_{\overline{q-p}|i}}{n-a_{\overline{n}|i}} \tag{21}$$

dalis visų palūkanų. Galime šią išraišką perrašyti per būsimosios vertės koeficientus

$$\frac{I_{p+1}^{q}}{I} = \frac{q-p-(1+i)^{-n+p} \cdot s_{\overline{q-p}|i}}{n-(1+i)^{-n} \cdot s_{\overline{n}|i}} \tag{22}$$

Apskaičiuokime ir kokią dalį skolos grąžiname per nagrinėjamą laiko tarpą

$$\frac{P_{p+1}^{q}}{A} = (1+i)^{-n+q} \cdot \frac{a_{\overline{q-p}|i}}{a_{\overline{n}|i}} \tag{23}$$

arba

$$\frac{P_{p+1}^{q}}{A} = (1+i)^{p} \cdot \frac{s_{\overline{q-p}|i}}{s_{\overline{n}|i}} \tag{24}$$

Matome, kad (20) formulėje santykinis įnašo dydis priklauso tik nuo nagrinėjamo laikotarpio dydžio q-p, ir paskolos termino n, tuo tarpu tiek sumokama palūkanų dalis (21), (22), tiek ir grąžinamos skolos dalis (23), (24) dar priklauso ir nuo palūkanų normos i.

Jeigu paskolos terminas yra ilgas, o procentai priskaičiuojami ir įnašai mokami kas mėnesį, tai aišku, kad jeigu skaičiuotume kiekvieno mėnesio atitinkamus dydžius tai būtų ne maža skaičiavimų apimtis. Kartais pakanka, tiesiog visą paskolos terminą padalinti į kelias lygias dalis ir suskaičiuoti dydžius už atitinkamą laikotarpį. Tad mes dabar ir padalinsime visą paskolos terminą į keturias lygias dalis. Paėmę atitinkamas p ir q reikšmes perrašysime prieš tai gautas formules šiais naujais laikotarpiais.

Perrašysime (13) formulę paėmę p lygų nuliui, o q lygų $n/4$. Gausime, kad per pirmą paskolos termino ketvirtį sumokėsime palūkanų

$$I_{1}^{n/4} = R \cdot \left(\frac{n}{4} - (1+i)^{-\frac{3n}{4}} \cdot a_{\overline{n/4}|i} \right) \tag{25}$$

Panašiai elgdamiesi gausime, kad už antrą ketvirtį palūkanų suma bus

$$I_{n/4+1}^{n/2} = R \cdot \left(\frac{n}{4} - (1+i)^{-\frac{n}{2}} \cdot a_{\overline{n/4}|i} \right) \tag{26}$$

Trečiuoju ketvirčiu sumokėsime

$$I_{n/2+1}^{3n/4} = R \cdot \left(\frac{n}{4} - (1+i)^{-\frac{\cdot n}{4}} \cdot a_{\overline{n/4}|i} \right) \tag{27}$$

Ir per paskutinį ketvirtį

$$I_{3n/4+1}^{n} = R \cdot \left(\frac{n}{4} - a_{\overline{n/4}|i} \right) \tag{28}$$

Pasinaudoję priklausomybe tarp dabartinės ir būsimosios verčių koeficientų galime šias (25) - (28)

formules perrašyti ir per būsimąsias vertes. Iš (25) - (28) matome, kad visose išraiškose pirmasis narys dešinėje pusėje yra vienodas, $R \cdot n/4$, o antrasis - mažėjantis. Atidžiau pažvelgę į antro nario pavidalą matome, kad jį sudaro dvi dalys. Viena dalis yra pastovi, ji visose išraiškose yra tokia pat $R \cdot a_{\overline{n/4}|i}$, o antroji dalis kiekvienoje sekančioje formulėje yra vis didesnė (skaičius didesnis už vienetą keliamas vis mažesniu neigiamu laipsniu). Todėl kiekvieną sekantį paskolos termino ketvirtį iš $n/4$ atimame vis didesnį skaičių. Taigi kiekvieną sekantį paskolos termino ketvirtį mokėsime vis mažesnę palūkanų sumą.

Per pirmą paskolos termino ketvirtadalį sumokame tokią dalį visų palūkanų

$$\frac{I_1^{n/4}}{I} = \frac{\frac{n}{4} - (1+i)^{-\frac{3n}{4}} \cdot a_{\overline{n/4}|i}}{n - a_{\overline{n}|i}} \tag{29}$$

Už antrąjį ketvirtį priskaičiuotų palūkanų dalis

$$\frac{I_{n/4+1}^{n/2}}{I} = \frac{\frac{n}{4} - (1+i)^{-\frac{n}{2}} \cdot a_{\overline{n/4}|i}}{n - a_{\overline{n}|i}} \tag{30}$$

Trečiojo ketvirčio palūkanų suma bus

$$\frac{I_{n/2+1}^{3n/4}}{I} = \frac{\frac{n}{4} - (1+i)^{-\frac{n}{4}} \cdot a_{\overline{n/4}|i}}{n - a_{\overline{n}|i}} \tag{31}$$

visos palūkanų sumos. Ketvirtojo ketvirčio dalis yra

$$\frac{I_{3n/4+1}^{n}}{I} = \frac{\frac{n}{4} - a_{\overline{n/4}|i}}{n - a_{\overline{n}|i}} \tag{32}$$

Prieš tai minėjome, kad ketvirčio palūkanų sumos, (25) - (28) formulės, mažėja, tai atitinkamai ir sumokamų palūkanų dalys per kiekvieną sekantį paskolos termino ketvirtį sudarys vis mažesnę dalį visos palūkanų sumos.

Dažnai įdomu yra sužinoti kokia dalis pradinės skolos sumos yra už atitinkamą laikotarpį sumokama palūkanų suma. Per pirmą ketvirtį priskaičiuotų palūkanų suma sudaro tokią pradinės skolos dalį:

$$\frac{I_1^{n/4}}{A} = \frac{\frac{n}{4} - (1+i)^{-\frac{3n}{4}} \cdot a_{\overline{n/4}|i}}{a_{\overline{n}|i}} \tag{33}$$

Antruoju ketvirčiu sumokamos palūkanos yra

$$\frac{I_{n/4+1}^{n/2}}{A} = \frac{\frac{n}{4} - (1+i)^{-\frac{n}{2}} \cdot a_{\overline{n/4}|i}}{a_{\overline{n}|i}} \tag{34}$$

dalis paskolos sumos. Trečiojo ketvirčio palūkanos lyginant su skola sudaro

$$\frac{I_{n/2+1}^{3n/4}}{A} = \frac{\frac{n}{4} - (1+i)^{-\frac{n}{4}} \cdot a_{\overline{n/4}|i}}{a_{\overline{n}|i}} \tag{35}$$

Ir paskutiniuoju ketvirčiu sumokama dalis

$$\frac{I_{3n/4+1}^{n}}{A}=\frac{\frac{n}{4}-a_{\overline{n/4}|i}}{a_{\overline{n}|i}} \tag{36}$$

Aišku, ir šiuo atveju, kiekvieną tolimesnį ketvirtį sumokama palūkanų suma sudarys vis mažesnę pradinės skolos dalį.

Pereikime prie skolos sumų skaičiavimo. Pasinaudoję (15) formule, joje paėmę atitinkamas p ir q reikšmes užrašysime grąžinamų skolos sumų už paskolos termino kiekvieną ketvirtį išraiškas. Per pirmą paskolos termino ketvirtį grąžinsime sumą

$$P_{1}^{n/4}=R\cdot(1+i)^{-\frac{3n}{4}}\cdot a_{\overline{n/4}|i} \tag{37}$$

Per antrąjį ketvirtį grąžinama suma išauga dydžiu $(1+i)^{\frac{n}{4}}$, ir bus lygi

$$P_{n/4+1}^{n/2}=R\cdot(1+i)^{-\frac{n}{2}}\cdot a_{\overline{n/4}|i} \tag{38}$$

Per trečią ketvirtadalį paskolos termino grąžinamos skolos suma vėl padidėja tiek pat kartų ir yra

$$P_{n/2+1}^{3n/4}=R\cdot(1+i)^{-\frac{n}{4}}\cdot a_{\overline{n/4}|i} \tag{39}$$

Galiausiai, per paskutinį ketvirtį grąžinama didžiausia skolos suma

$$P_{3n/4+1}^{n}=R\cdot a_{\overline{n/4}|i} \tag{40}$$

Apskaičiavę kokią dalį pradinės skolos grąžiname kiekvienu ketvirčiu gausime, kad pirmuoju ketvirčiu grąžiname

$$\frac{P_{1}^{n/4}}{A}=\frac{(1+i)^{-\frac{3n}{4}}\cdot a_{\overline{n/4}|i}}{a_{\overline{n}|i}} \tag{41}$$

Per antrą ketvirtį grąžinama skolos suma sudaro

$$\frac{P_{n/4+1}^{n/2}}{A}=\frac{(1+i)^{-\frac{n}{2}}\cdot a_{\overline{n/4}|i}}{a_{\overline{n}|i}} \tag{42}$$

visos skolos. Trečiuoju - grąžinsime jau

$$\frac{P_{n/2+1}^{3n/4}}{A}=\frac{(1+i)^{-\frac{n}{4}}\cdot a_{\overline{n/4}|i}}{a_{\overline{n}|i}} \tag{43}$$

O likusioji dalis bus grąžintą per likusią paskolos termino dalį ir sudarys

$$\frac{P_{3n/4+1}^{n}}{A}=\frac{a_{\overline{n/4}|i}}{a_{\overline{n}|i}} \tag{44}$$

Matome, kad tiek kiekvieną paskolos ketvirtį grąžinamos skolos sumos (37)–(40), tiek per šiuos laikotarpius grąžintos skolos dalys (41)–(44) sudaro geometrinę progresiją su vardikliu $(1+i)^{n/4}$.

Norint sužinoti kiek sumokame už paskolą per pusę paskolos termino, reikėtų (12) – oje formulėje paimti p lygų nuliui, o q lygų $n/2$, jeigu naudosimės santykine įnašų formule (20) gausime, koką dalį sumokame už paskolą per paskolos termino pusę. Panašiai elgiamės ir palūkanų bei grąžinamos skolos sumų atvejais, tik naudojamės atitinkamai (13) ir (21), bei (15) ir (23) formulėmis. Jeigu vietoje q paimsime ne $n/2$, o $3n/4$, tai galėsime apskaičiuoti atitinkamus dydžius už paskolos termino trys ketvirtadalius.

Visus gautus dydžius galima užrašyti ir per būsimąją vertę.

Tūrėdami reikalingas formules galime pereiti ir prie konkrečios situacijos nagrinėjimo.

1 pavyzdys. Paskolos suma – 300000,00 Lt. Skola grąžinama vienodais įnašais, mokamais kas mėnesį per

a) 20 metų, esant 6% metinei palūkanų normai;
b) 20 metų, kai metinė palūkanų norma yra 9%;
c) 30 metų, kai metinė palūkanų norma 6%;
d) 30 metų, kai metinė palūkanų norma 9%.

Pirmuoju atveju, kai paskolos terminas yra 20 metų, o metinė palūkanų norma 6%, pasinaudoję (5) formule, gausime, kad kiekvieno mėnesinio įnašo dydis

$$R_a = \frac{300000}{\left(1-1{,}005^{-240}\right)/0{,}005} = 2149{,}29 \text{ Lt}$$

b)–d) paskolų atvejais, įnašai atitinkamai yra

$R_b = 2699{,}18$ Lt, $R_c = 1798{,}65$ Lt, $R_d = 2413{,}87$ Lt.

Matome, kad jeigu palūkanų norma nekinta, o terminas ilgėja nuo 20 iki 30 metų, tai mėnesinis įnašas sumažėja 350,64 Lt, kai metinė palūkanų norma yra 6%, ir 285,31 Lt, 9% palūkanų normos atveju. Taigi šiuo atveju mėnesiniai įnašai, ilgėjant paskolos terminui, labiau skiriasi mažesnės palūkanų normos atveju, arba kitaip, kuo aukštesnė paskolos palūkanų norma, tuo mažiau skirsis mėnesio įmokos ilgesnio ir trumpesnio termino paskolose. Esant pastoviam terminui, bet palūkanų normai išaugus nuo 6% iki 9% mėnesinis įnašas išauga 549,89 Lt, kai terminas yra 20 metų ir 615,22 Lt, kai terminas 30 metų. Taigi ilgesnio termino atveju, didėjant metinei palūkanų normai, didėja ir skirtumas tarp mėnesinių įnašų, arba esant ilgesiam paskolos grąžinimo terminui įmoka išaugs labiau didėjant metinei palūkanų normai.

a)–d) paskolų terminus padalinsime į keturias lygias dalis. Apskaičiuosime kiek per kiekvieną ketvirtį yra iš viso sumokama už paskolą, grąžinama skolos, sumokama palūkanų.

Grąžindami 300000,00 Lt skolą per 20 metų su 6% metine palūkanų norma už paskolos termino kiekvieną ketvirtį mokėsime po sumą

$$R_{1,a}^{60} = 60 \cdot 2149{,}29 = 12895{,}74 \text{ Lt}$$

20 metų su 9% metine palūkanų norma atveju už ketvirtį paskolos termino įnešime

$$R_{1,b}^{60} = 161950{,}80 \text{ Lt}$$

Paskolos terminui išaugus iki 30 metų, 6% metinė normos atveju sumokėsime po

$$R_{1,c}^{90} = 161878{,}50 \text{ Lt},$$

o 9% metinės normos atveju

$$R_{1,d}^{90} = 217248{,}30 \text{ Lt}$$

Mažiausias ketvirtinių įnašų sumas mokame 20 metų su 6% metine palūkanų norma paskolos atveju, o didžiausias - 30 metų paskolos su 9% metine palūkanų norma atveju. Tuo tarpu, 20 metų paskolos su 9% palūkanų norma ir 30 metų paskolos su 6% metine norma įnašų dydžiai beveik sutampa, kadangi vienu atveju turime trumpesnį terminą bet didesnę palūkanų norma, o kitu - ilgesnis terminas kompensuojamas mažesne palūkanų norma. Paskolos palūkanų normai padidėjus nuo 6% iki 9%, ketvirtinis įnašas padidėja 149055,06 Lt 20 metų paskolos atveju ir 55369,80 Lt 30 metų paskolos atveju.

Panaudoję (25) – (28) formules apskaičiuosime per kiekvieną paskolos ketvirtį sumokamas palūkanų sumas.

20 metų paskolos su 6% metine palūkanų norma už pirmą paskolos ketvirtį sumokėsime sumą

$$I_{1,a}^{60} = 2149{,}29 \cdot \left(60 - 1{,}005^{-180} \cdot \frac{1-1{,}005^{-60}}{0{,}005}\right) = 83656{,}36 \text{ Lt}$$

Antrojo paskolos termino ketvirčio, pagal (26), palūkanų suma

$$I_{61,a}^{120} = 67853{,}05 \text{ Lt}$$

Matome, kad antrąjį ketvirtį sumokame 15803,21 Lt mažesnę palūkanų sumą, nei pirmuoju ketvirčiu. Trečio ketvirčio palūkanos sumažėja iki

$$I_{121,a}^{180} = 46536{,}73 \text{ Lt}$$

Paskutinio paskolos termino ketvirčio palūkanų suma tėra tik

$$I_{181,a}^{240} = 17784{,}20 \text{ Lt}$$

Pasinaudoję (18) formule apskaičiuosime kiek iš viso per visą paskolos terminą yra sumokama palūkanų kiekvienu atveju. 20 metų paskolos su 6% metine norma atveju sumokame

$$I_a = 2149{,}29 \cdot \left(240 - \frac{1-1{,}005^{-240}}{0{,}005}\right) = 215830{,}36 \text{ Lt}$$

Atitinkamai, b) - d) atvejais $I_b = 347802{,}69$ Lt, $I_c = 347514{,}57$ Lt, $I_d = 568992{,}43$ Lt.

Iš viso sumokamos sumos 20 metų paskolos su 9% palūkanų norma ir 30 metų su 6% palūkanų norma beveik sutampa. Daugiausia sumokame 30 metų ir 9% palūkanų normos atveju.

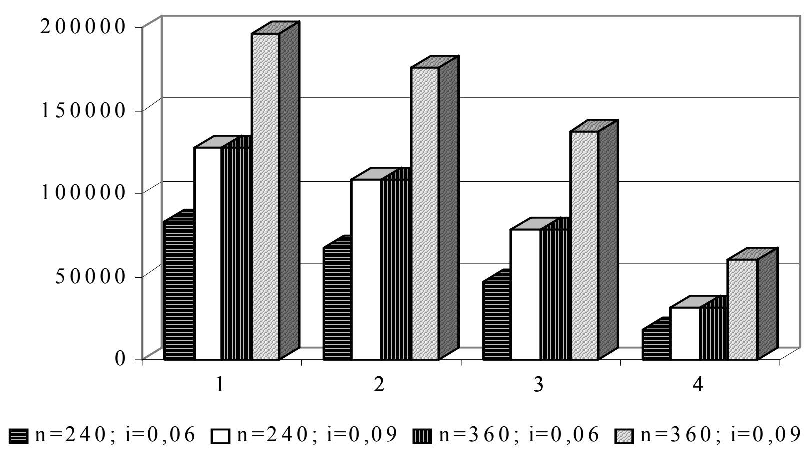
Pasinaudoję (29) išraiška, gausime, kad pirmojo ketvirčio palūkanos sudaro visų palūkanų

$$\frac{I_{1,a}^{60}}{I_a} \cdot 100\% = 38{,}76\%$$

O pagal (32), gausime, kad ketvirtą ketvirtį sumokama palūkanų suma sudaro visų palūkanų tik

$$\frac{I_{181,a}^{240}}{I_a} \cdot 100\% = 8{,}24\%$$

Panašiai ketvirtinių palūkanų sumų dydžius skaičiuojame ir kitais atvejais. Rezultatai 1 pav.



1 pav. Per paskolos termino ketvirčius sumokamų palūkanų palyginimas.

Paveiksle matome, kad didžiausios palūkanų sumos yra mokamos ilgiausio termino ir dižiausios palūkanų normos atveju, mažiausios atitinkamai trumpiausio termino ir mažiausios palūkanų normos atveju. Tarpiniais atvejais, t. y. mažiausios palūkanų normos, bet ilgiausio termino ir didžiausios palūkanų normos, bet trumpiausio termino, sumokamos sumos beveik sutampa, šiek tiek didesnės yra tuo atveju, kai turime trumpesnį terminą, bet didesnę palūkanų normą.

Palyginsime ir kaip kiekvienu atveju yra grąžinama 300000 Lt skola.

20 metų su 6% metine palūkanų norma atveju per pirmą paskolos ketvirtį, pagal (37), grąžiname skolos

$$P_{1,a}^{60} = 2149{,}29 \cdot 1{,}005^{-180} \cdot \frac{1 - 1{,}005^{-60}}{0{,}005} = 45301{,}20 \text{ Lt}$$

Antruoju ketvirčiu grąžinama skolos suma padidėja $1{,}005^{60}$ ir yra lygi

$$P_{61,a}^{120} = 61104{,}53 \text{ Lt}$$

Trečiojo grąžinamą skolos sumą nustatoma padauginus šią sumą iš $1{,}005^{60}$,

$$P_{121,a}^{180} = 82420{,}86 \text{ Lt}$$

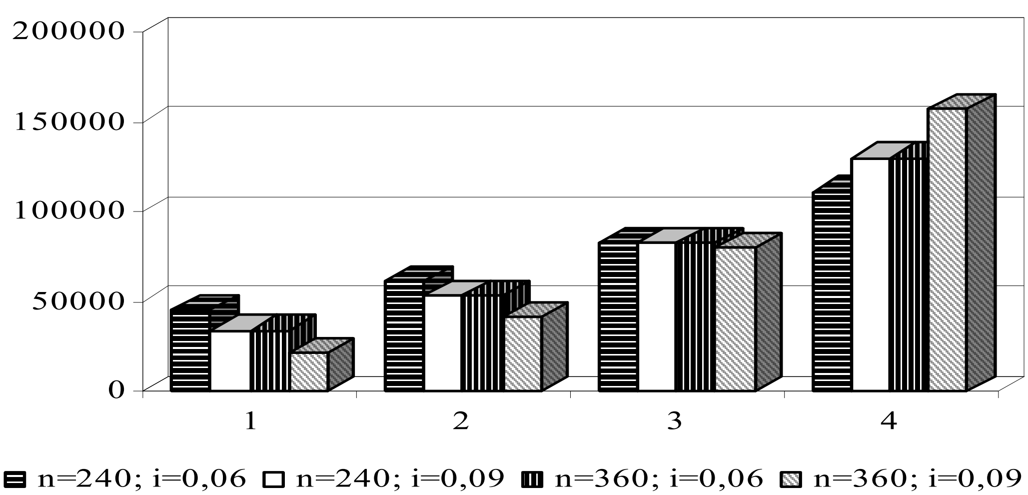
Didžiausią skolos dalį grąžinsime paskutinį ketvirtį

$$P_{181,a}^{240} = 111173{,}39 \text{ Lt}$$

Pasinaudoję (44), apskaičiuojame, kad ketvirtą paskolos termino ketvirtį grąžiname visos skolos

$$\frac{P_{181,a}^{240}}{A} \cdot 100\% = 37{,}06\%$$

Kitų paskolų atvejais skaičiuojama panašiai. Rezultatai 2 paveiksle.



2 pav. Per paskolos termino ketvirtį grąžinamų skolos sumų palyginimas.

Tiek per pirmą, tiek ir per antrą ketvirtį didžiausia suma grąžinama 20 metų ir 6% palūkanų normos paskolos atveju. Per trečią paskolos termino ketvirtadalį grąžinamos sumos yra apylygės. Ketvirtą ketvirtį didžiausi suma yra 30 metų ir 9% palūkanų normos atveju. Kiekvienu atveju laikui bėgant ketvirtinės sumos didėja, tačiau 30 metų ir 9% palūkanų normos atveju ketvirtą periodą grąžiname daugiau nei pusę skolos sumos. 20 metų paskolos su 9% norma ir 30 metų su 6% norma ketvirtinės sumos beveik sutampa.

Gautose formulėse dydžiai priklauso nuo paskolos palūkanų normos *i*. Todėl dabar panagrinėkime situaciją, kai keičiasi tik paskolos metinė palūkanų norma.

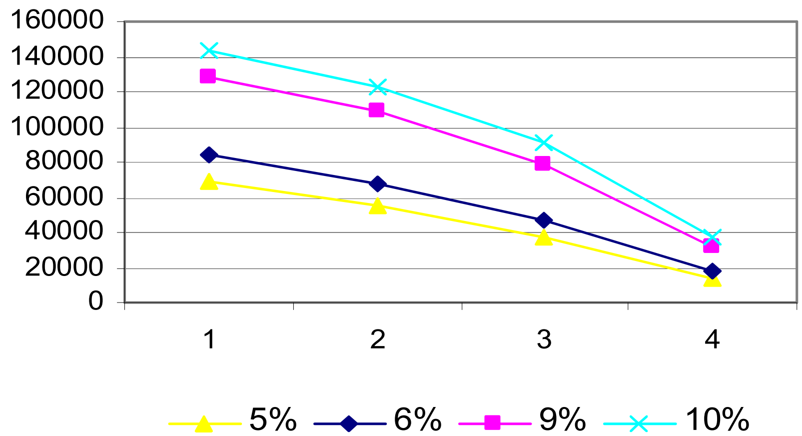
2 pavyzdys. 300000 Lt paskola grąžinama per 20 metų, kas mėnesį mokant vienodus įnašus. Paskolos metinė palūkanų norma: a) 5 %; b) 6 %; c) 9%; d) 10%.

Kai paskolos metinė palūkanų norma 5%, kas mėnesį reikia mokėti po sumą

$$R_a = \frac{300000}{\left(1-1{,}0042^{-240}\right)/0{,}0042} = 1986{,}50 \text{ Lt},$$

$R_b = 2149{,}29$ Lt, $R_c = 2699{,}18$ Lt, $R_d = 2887{,}12$ Lt atvejais b)–d) atitinkamai.

Kokią įtaką paskolos palūkanų norma daro atitinkamo paskolos termino ketvirtį sumokamoms palūkanoms apskaičiuotoms pagal (25)–(28), parodyta 3 pav.



3 pav. Palūkanų sumų už paskolos termino ketvirtį palyginimasskirtingoms palūkanų normoms.

Pirmojo ketvirčio palūkanų sumos ryškiai skiriasi, tuo tarpu ketvirtą ketvirtį skirtumas tarp sumų žymiai mažesnis. Iš viso už paskolą sumokame

$I_{5\%} = 175168{,}13$ Lt, $I_{6\%} = 215830{,}36$ Lt, $I_{9\%} = 347802{,}69$ Lt, $I_{10\%} = 394815{,}58$ Lt.

Matome, kad 9% ir 10% metinėms palūkanų normoomssumokamų palūkanų sumos gerokai viršyja gautos paskolos sumą.

Panagrinėsime situaciją, kai paskolos terminas metais nesikeičia, bet keisis procentų priskaičiavimo ir įnašų mokėjimo per vienerius metus kartų skaičius. Priminsiu, kad mes nagrinėjame situaciją, kai įnašų mokėjimo ir procentų priskaičiavimo kartų skaičius sutampa. Paskolos terminą galime užrašyti

$$n = M \cdot m, \tag{45}$$

čia M - paskolos trukmė metais; m - procentų priskaičiavimo ir įnašų mokėjimo per metus kartų skaičius.

Anksčiau užrašytose formulėse pakeitę n pagal (45), gautume kaip apskaičiuojamos sumos priklauso mokėjimų dažnumo.

3 pavyzdys. 300000,00 Lt paskola gražinama per 20 metų. Metinė palūkanų norma 6%.
Tegul skola grąžinama ir palūkanos mokamos a) kas 3 mėnesius; b) kas mėnesį.

Jeigu įnašai mokami kas 3 mėnesius, tai kaskart mokėsime po

$$R_a = \frac{300000}{\left(1-1{,}015^{-80}\right)/0{,}015} = 6464{,}50 \text{ Lt}.$$

Mokant kas mėnesį mokėsime gerokai mažiau tik $R_b = 2149{,}29$ Lt, tačiau mokėjimus atliksime tris kartus dažniau.

Grąžindami 300000,00 Lt skolą vienodomis įmokomis mokamomis kas 3 mėnesius, už paskolos termino kiekvienus penkerius metus teks sumokėti po sumą

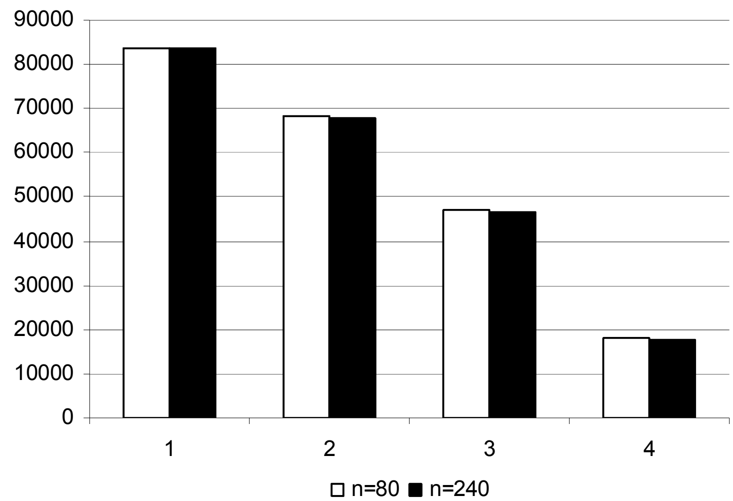
$$80 \cdot R_a = 129289{,}94 \text{ Lt}$$

Jeigu įmokos bus mokamos kas mėnesį, tai už ketvirtadalį paskolos termino sumokėsime

$$R_{1,b}^{60} = 60 \cdot R_b = 128957{,}59 \text{ Lt}$$

Matome, kad mažesnis ketvirtinis įnašas bus sumokamas tuo atveju, kai procentai yra priskaičiuojami kas mėnesį. Skirtumas tarp ketvirtinių įnašų, kai procentai priskaičiuojami kas mėnesį ir tuo atveju kai - kas ketvirtį yra lygus 332,35 Lt. Nors dažnumui m mažėjant skirtumas tarp įnašų sumų didėja, tačiau palyginus su pradine skolos suma, tai yra ne didelis skirtumas.

Panagrinėkime palūkanų sumas. Ketvirtinės palūkanų sumos skaičiuojamos pagal (25) – (28). Rezultatai 4 paveiksle.



4 pav. 3 pavyzdžio palūkanų palyginimas.

Mažiausios sumos per paskolos termino ketvirtį sumokamos, kai priskaičiavimas atliekamas kas mėnesį. Paveiksle matome, kad palūkanos mažėja, tačiau skirtumas tarp ketvirčio palūkanų sumų kiekvienu atveju yra palyginti ne didelis. Įnašus mokant kas 3 mėnesius , už paskolą iš viso sumokėsime palūkanų

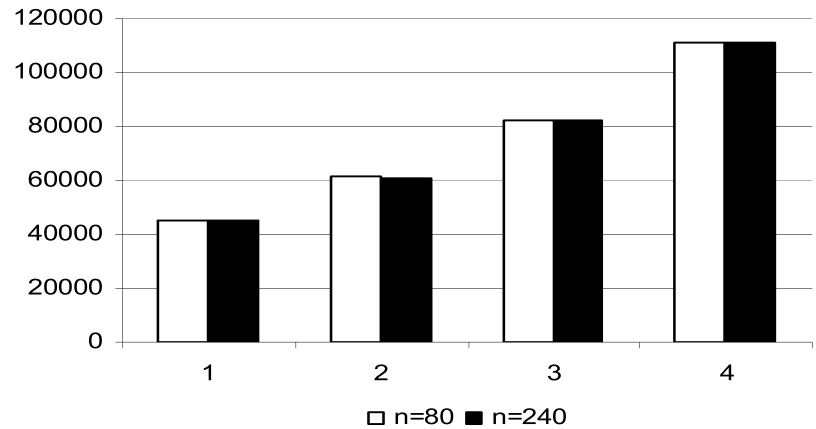
$$I_a = 217159{,}75 \text{ Lt},$$

o mokėdami kas mėnesį

$$I_b = 215830{,}36 \text{ Lt}$$

Matome, kad daugiau palūkanų sumokame tuomet, kai procentų priskaičiavimas atliekamas rečiau, t. y. kas ketvirtį. Skirtumas tarp iš viso sumokamų palūkanų kai procentai priskaičiuojami kas mėnesį ir tuo atveju, kai kas ketvirtį sudaro 1329,39 Lt. Tad didėjant dažnumui mažėja sumokamų palūkanų suma.

Palyginkime ir per kiekvieną ketvirtį grąžinamą skolos sumą.



5 pav. 3 pavyzdžio grąžintos skolos sumų palyginimas.

Pirmuoju ir antruoju ketvirčiai didesnę sumą grąžiname tuomet, kai procentai priskaičiuojami kas ketvirtį. Trečiuoju ir ketvirtuoju ketvirčiais šiek tiek didesnę sumą grąžinsime, kai procentai priskaičiuojami kas mėnesį.

Apibendrinant, galime pastebėti, kad dažnumo įtaka dydžiams nėra tokia jau didelė. Didesnio m atveju yra iš viso sumokama mažiau palūkanų, nei mažesnio m atveju, bet tas skirtumas, lyginant su pradine skolos suma, nėra jau toks didelis. Todėl, kokiu dažnumu priskaičiuoti procentus ir mokėti įnašus priklauso nuo skolininko ar skolintojo pageidavimo, t. y. kaip dažnai skolintojas pageidauja, kad skolininkas mokėtų. Priešingai yra su dydžio M įtaka sumoms. Kuo ilgesnis paskolos terminas metais, tuo daugiau sumokame už paskolą.

I.2. KINTAMŲ ANUITETŲ METODAS

Bankininkystėje šis metodas dar vadinamas linijiniu metodu. Nagrinėtame pastoviųjų anuitetų metode periodo įnašas buvo pastovus visą paskolos grąžinimo terminą. Dabar susipažinsime su tokiu paskolos grąžinimo metodu, kai įnašai per paskolos terminą, kinta aritmetine progresija. Pagrindinis šio metodo bruožas yra tas, kad kiekvieną periodą mes grąžiname tokio pat dydžio pradinės skolos sumą, kurios dydis yra

$$P = \frac{A}{n} \tag{46}$$

Periodo palūkanos, kaip ir prieš tai, yra skaičiuojamos nuo skolos likučio

$$I_k = i \cdot B_{k-1}, \text{ k=1,2,...n.} \tag{47}$$

Kadangi kiekvieno periodo įnašą sudaro tuo periodu sumokama palūkanų ir grąžinamos skolos suma, turime, kad

$$R_k = P + I_k \tag{48}$$

Skolos likutis šiuo atveju kiekvieną periodą sumažėja tokio pat dydžio suma P, tai skolos likutį galime užrašyti

$$B_k = B_{k-1} - P = B_{k-2} - P - P = B_{k-3} - 3 \cdot P = ... = B_0 - k \cdot P = A - A \cdot \frac{k}{n} \tag{49}$$

Pasinaudoję gauta skolos likučio išraiška, taip pat (46) ir (47) formulėmis, k – tojo periodo įnašą galime perrašyti taip

$$R_k = \frac{A}{n} \cdot \left(1 + i \cdot n - i \cdot (k-1)\right) \tag{50}$$

Iš (50) galime pastebėti, kad įnašo dydis kinta aritmetine progresija, kurios vardiklis yra lygus

$$-\frac{i \cdot A}{n} = -i \cdot P,$$

o pirmasis narys

$$\frac{A}{n} \cdot (1 + i \cdot n) = P \cdot (1 + i \cdot n).$$

Kadangi progresijos vardiklis yra neigiamas, tai aišku, kad laikui bėgant įmokos mažėja.

Nagrinėkime paskolos laikotarpį nuo p – ojo iki q – tojo periodų, $0 < p+1 < q \leq n$. Rasime kiek per šį laikotarpį sumokame palūkanų, grąžiname skolos, bei iš viso sumokame už paskolą.

Pasinaudoję (46) formule gausime, kad per šį laikotarpį grąžiname sumą

$$P_{p+1}^{q} = (q-p) \cdot \frac{A}{n} \tag{51}$$

Sumokama palūkanų suma, panaudojus (47), (49) ir aritmetinės progresijos formulėmis, yra

$$I_{p+1}^{q} = \frac{i \cdot A \cdot (q-p) \cdot (2 \cdot n - p - q + 1)}{2 \cdot n} \tag{52}$$

Tuomet iš viso sumokama už paskolą suma bus lygi sumokamų palūkanų ir grąžinamos skolos sumai, t. y.

$$R_{p+1}^{q} = \frac{A \cdot (q-p)}{2 \cdot n} \cdot \left(2 + i \cdot (2 \cdot n - q - p + 1)\right) \tag{53}$$

Per nagrinėjama laikotarpį grąžinama skola sudaro visos skolos dalį lygią

$$\frac{P_{p+1}^{q}}{A} = \frac{q-p}{n} \tag{54}$$

Atsižvelgę į tai, kad per visą paskolos terminą teks sumokėti palūkanų

$$I = \frac{i \cdot A \cdot (n+1)}{2}, \tag{55}$$

gausime, kad per laikotarpį nuo p – ojo iki q – tojo periodo sumokama palūkanų suma sudaro tokią dalį visų palūkanų

$$\frac{I_{p+1}^{q}}{I} = \frac{(q-p) \cdot (2 \cdot n - q - p + 1)}{(n+1) \cdot n} \tag{56}$$

Palūkanos už šį laikotarpį lyginant su pradine skolos suma sudaro tokią dalį

$$\frac{I_{p+1}^{q}}{A} = \frac{(q-p) \cdot i \cdot (2 \cdot n - q - p + 1)}{2 \cdot n} \tag{57}$$

Grąžinant paskolą linijiniu metodu iš viso už paskolą sumokama

$$S = \frac{A}{2} \cdot \left(2 + i \cdot (n+1)\right) \tag{58}$$

Todėl nuo p+1 – ojo iki q – tojo periodų sumokama už paskolą suma sudaro

$$\frac{R_{p+1}^{q}}{S} = \frac{(q-p) \cdot \left(2 + i \cdot (2 \cdot n - q - p + 1)\right)}{\left(2 + i \cdot (n+1)\right) \cdot n} \tag{59}$$

dalį visos sumokamos sumos ir

$$\frac{R_{p+1}^{q}}{A}=\frac{(q-p)\cdot(2+i\cdot(2\cdot n-q-p+1))}{2\cdot n} \qquad (60)$$

dalį pradinės skolos sumos.

Panašiai kaip ir pastoviųjų anuitetų metodui užrašysime atitinkamus dydžius už paskolos termino kiekvieną ketvirtį, pusmetį ir tris ketvirčius paskolos termino. Tačiau šiuo atveju gautas išraiškas surašysime į lenteles. Lentelėse bus surašytos santykinių dydžių išraiškos. Didžiojoje įstrižainėje bus dydžiai už paskolos termino atitinkamą ketvirtį, o pirmojoje dydžiai - už paskolos termino ketvirtį, pusę, tris ketvirčius, visą paskolos terminą, reikšmės. Formules užrašome naudodami prieš tai gautas (54), (56), (57), (59), (60) išraiškas, tik vietoje p ir q įsirašę atitinkamai 0, $n/4$, $n/2$, $3n/4$, n. 1 lentelėje pateiksime atitinkamo laikotarpio palūkanų sumos lyginant su visa palūkanų suma išraiškas. Pirmajame stulpelyje surašytos dydžio p reikšmės, o pirmoje eilutėje – q.

1 lentelė. Palūkanų sumos už laikotarpį nuo p - ojo iki q – tojo periodų palyginimas su visa palūkanų suma.

	$\frac{n}{4}$	$\frac{n}{2}$	$\frac{3\cdot n}{4}$	n
0	$\frac{1}{16}\cdot\left(7-\frac{3}{n+1}\right)$	$\frac{1}{4}\cdot\left(3-\frac{1}{n+1}\right)$	$\frac{3}{16}\cdot\left(5-\frac{1}{n+1}\right)$	1
$\frac{n}{4}$		$\frac{1}{16}\cdot\left(5-\frac{3}{n+1}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{16}\cdot\left(3+\frac{1}{n+1}\right)$
$\frac{n}{2}$			$\frac{1}{16}\cdot\left(3+\frac{1}{n+1}\right)$	$\frac{1}{4}\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$
$\frac{3\cdot n}{4}$				$\frac{1}{16}\cdot\left(1+\frac{3}{n+1}\right)$

Šioje lentelėje parodyta, kokią dalį visų palūkanų sudaro už atitinkamą laikotarpį sumokama palūkanų suma. Matome, kad dydžiai už paskolos termino ketvirtį, t. y. dydžiai esantys didžiojoje įstrižainėje vienas nuo kito skiriasi dydžiu $(-2+2/(n+1))/16$, o esantys pirmoje eilutėje sudaro progresiją su vardikliu $(-1+1/(n+1))/4$. Pastebėsime, kad visos šioje lentelėje esančios išraiškos priklauso tik nuo paskolos termino n, bet nepriklauso nuo paskolos palūkanų normos i.

Nagrinėdami dydžius esančius didžiojoje įstrižainėje, matome, kad jeigu paskolos terminas bus pakankamai ilgas, tai išraiškose esantis antrasis narys, $1/(n+1)$, yra pakankamai mažas ir jo galima nepaisyti. Atmetant antrąjį dėmenį paklaida yra $O\left(\frac{1}{n}\right)$. Vadinasi, pirmąjį paskolos termino ketvirtį apytiksliai sumokame $7/16$, antrąjį $5/16$, trečiajį $3/16$, o ketvirtąjį ketvirtį $1/16$ visų už paskolą atiduodamų palūkanų. Šios trupmenos pakankami tiksliai informuoja apie sumokamų palūkanų dalis. Tegul δ_k^N yra tikslios ir apytikslės palūkanų dalies, sumokamos per k – tąjį (k=1,2,3,4) paskolos termino ketvirtį, skirtumo modulis. Palyginimui nagrinėkime 5 metų ($n=12\cdot 5=60$) ir 30 metų ($n=12\cdot 30=360$) trukmės paskolas. Pirmajai paskolai apskaičiuojame

$$\delta_1^{60}=\left|\frac{I_1^{15}}{I}-\frac{7}{16}\right|=0{,}0492\,,$$

$$\delta_2^{60} = \left| \frac{I_{16}^{30}}{I} - \frac{5}{16} \right| = 0{,}0492,$$

$$\delta_3^{60} = \left| \frac{I_{31}^{45}}{I} - \frac{3}{16} \right| = 0{,}0164,$$

$$\delta_4^{60} = \left| \frac{I_{46}^{60}}{I} - \frac{1}{16} \right| = 0{,}0492,$$

o antrajai

$$\delta_1^{360} = \left| \frac{I_{1}^{90}}{I} - \frac{7}{16} \right| = 0{,}0083$$

$$\delta_2^{360} = \left| \frac{I_{91}^{180}}{I} - \frac{5}{16} \right| = 0{,}0083$$

$$\delta_3^{360} = \left| \frac{I_{181}^{270}}{I} - \frac{3}{16} \right| = 0{,}0028$$

$$\delta_4^{360} = \left| \frac{I_{271}^{360}}{I} - \frac{1}{16} \right| = 0{,}0083$$

Matome, kad ir trumpalaikei 5 metų trukmės paskolai didžiausia paklaida yra tik 0,0164.

Taigi kuo ilgesnis paskolos grąžinimo terminas, tuo tikslesnį rezultatą duoda apytikslės formulės. Ilgo paskolos termino atveju, santykiniai palūkanų dydžiai nepriklauso nei nuo pradinės paskolos sumos, nei nuo palūkanų normos, nei nuo konkretaus n.

2 lentelėje parodyta kokią dalį pradinės skolos skolos sumos sudaro už atitinkamą paskolos termino laikotarpį sumokamos palūkanos.

2 lentelė. Už laikotarpį nuo p – ojo iki q – tojo periodų sumokamų palūkanų palyginimas su paskolos suma A lentelė.

	$\frac{n}{4}$	$\frac{n}{2}$	$\frac{3\cdot n}{4}$	n
0	$\frac{i}{32}\cdot(7\cdot n+4)$	$\frac{i}{8}\cdot(3\cdot n+2)$	$\frac{3\cdot i}{32}\cdot(5\cdot n+4)$	$\frac{i}{2}\cdot(n+1)$
$\frac{n}{4}$		$\frac{i}{32}\cdot(5\cdot n+4)$	$\frac{i}{4}\cdot(n+1)$	$\frac{3\cdot i}{32}\cdot(3\cdot n+4)$
$\frac{n}{2}$			$\frac{i}{32}\cdot(3\cdot n+4)$	$\frac{i}{8}\cdot(n+2)$
$\frac{3\cdot n}{4}$				$\frac{i}{32}\cdot(n+4)$

Pagrindinės įstrižainės dydžiai sudaro progresiją su vardikliu $-ni/16$. Šiuo atveju, išraiškos priklauso nuo dviejų parametrų: palūkanų normos *i* ir paskolos termino *n*.

Kokią dalį visos įnešamos sumos sudarys už konkretų laikotarpį sumokama suma sužinosime, pažvelgę į 3 lentelės duomenis.

3 lentelė. Už laikotarpį nuo p – ojo iki q – tojo periodų sumokamų įnašų sumų palyginimas su iš viso už paskolą sumokama suma.

	$\frac{n}{4}$	$\frac{n}{2}$	$\frac{3\cdot n}{4}$	n
0	$\frac{1}{16}\cdot\left(7-3\cdot\frac{2+i}{2+i\cdot(n+1)}\right)$	$\frac{1}{4}\cdot\left(3-\frac{2+i}{2+i\cdot(n+1)}\right)$	$\frac{3}{16}\cdot\left(5-\frac{2+i}{2+i\cdot(n+1)}\right)$	1
$\frac{n}{4}$		$\frac{1}{16}\cdot\left(5-\frac{2+i}{2+i\cdot(n+1)}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{16}\cdot\left(3+\frac{2+i}{2+i\cdot(n+1)}\right)$
$\frac{n}{2}$			$\frac{1}{16}\cdot\left(3+\frac{2+i}{2+i\cdot(n+1)}\right)$	$\frac{1}{4}\cdot\left(1+\frac{2+i}{2+i\cdot(n+1)}\right)$
$\frac{3\cdot n}{4}$				$\frac{1}{16}\cdot\left(1+3\cdot\frac{2+i}{2+i\cdot(n+1)}\right)$

3 lentelės didžiosios įstrižainės dydžiai kinta progresija, kurios vardiklis yra $\left(-2+2\cdot(2+i)/(2+i\cdot(n+1))\right)/16$. Santykiniai įnašų dydžiai už atitinkamą laikotarpį priklauso ir nuo termino n, ir nuo palūkanų normos i.

Per pirmąjį paskolos termino ketvirtį sumokėtos sumos dalį

$$\frac{R_1^{n/4}}{S}=\frac{1}{16}\cdot\left(7-3\cdot\frac{2+i}{2+i\cdot(n+1)}\right)$$

ekvivalenčiai galime užrašyti

$$\frac{R_1^{n/4}}{S}=\frac{7}{16}-\frac{3}{16}\cdot\frac{i+2}{i\cdot(n+1)+2}$$

Plaūkanų norma i yra mažas dydis (dešimtosios arba šimtosios procento dalys), todėl

$$\frac{R_1^{n/4}}{S}\approx\frac{7}{16}-\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{i\cdot(n+1)+2}$$

Kai n pakankamai didelis antrasis dėmuo yra pakankamai mažas, todėl galima sakyti, kad pirmąjį paskolos termino ketvirtį apytikslisi sumokama $7/16$ visos už paskolą sumokamos sumos. Panašiai per likusius ketvirčius reikia padengti apytiksliai $5/16$, $3/16$, $1/16$ visos sumos.

Tegul Δ_k^n žymi k – tojo paskolos termino ketvirčio (k=1,2,3,4) tikslios ir apytikslės už paskolą sumokamos sumos dalies santykinę paklaidą. Apskaičiuosime Δ_k^n 5 ir 30 metų trukmės paskoloms, kai metinė palūkanų norma yra 6%.

5 metų paskolai gauname

$$\Delta_1^{60}=\frac{\left|R_1^{15}/S-7/16\right|}{7/16}=0,3728$$

$$\Delta_2^{60} = \frac{\left| R_{16}^{30} / S - 5/16 \right|}{5/16} = 0{,}1741$$

$$\Delta_3^{60} = \frac{\left| R_{31}^{45} / S - 3/16 \right|}{R_{31}^{45} / S} = 0{,}2249$$

$$\Delta_4^{60} = \frac{\left| R_{46}^{60} / S - 1/16 \right|}{R_{46}^{60} / S} = 0{,}723$$

30 metų paskolos atveju, pirmuoju paskolos termino ketvirčiu sumokamų sumų santykinė paklaida $\Delta_1^{360} = 0{,}2258$, likusiais atitinkamai $\Delta_2^{360} = 0{,}1053$, $\Delta_3^{360} = 0{,}1613$, $\Delta_4^{360} = 0{,}6125$.

Taigi didžiausia santykinė paklaida 5 metų paskolos atveju yra 0,3728, o 30 metų – 0,6125. Didėjant palūkanų normai, paklaidos mažėja. Pavyzdžiui, jeigu paskolos palūkanų norma būtų 10%, tai didžiausia paklaida 5 metų paskolai būtų 0,3433, o 30 metų 0,5467.

4 pavyzdys. Paskolos suma - 300000 Lt. Skola grąžinama vienodomis skolos dalimis. Įnašai mokami kas mėnesį, o paskola grąžinama per

a) 20 metų, esant 6% metinei palūkanų normai;
b) 20 metų, kai metinė palūkanų norma yra 9%;
c) 30 metų, kai metinė palūkanų norma 6%;
d) 30 metų, kai metinė palūkanų norma 9%.

a) ir b) paskoloms kiekvieną mėnesį reikia grąžinti po

$$P_{a,b} = \frac{300000}{240} = 1250{,}00 \text{ Lt},$$

o paskoloms c) ir d) po

$$P_{c,d} = 833{,}33 \text{ Lt}.$$

Pagal (50) paskolos a) pirmasis įnašas yra

$$R_{a;1} = 1250{,}00 \cdot \left(1 + 0{,}005 \cdot 240\right) = 2750{,}00 \text{ Lt}.$$

Panašiai suskaičiuojame ir pirmuosius įnašus b) – d) atvejais $R_{b;1} = 3500{,}00$ Lt, $R_{c;1} = 2333{,}32$ Lt, $R_{d;1} = 3083{,}32$ Lt, atitinkamai.

Grąžindami 300000,00 Lt skolą per 20 metų su 6% metine palūkanų norma per pirmą paskolos termino ketvirtį sumokėtų palūkanų sumą, gausime pagal (52) formulę paėmę joje p=0, o q=60,

$$I_{1,a}^{60} = \frac{0{,}005 \cdot 300000 \cdot 60 \cdot \left(480 - 60 + 1\right)}{480} = 78937{,}50 \text{ Lt}$$

Antrojo ketvirčio palūkanas skaičiuojame (52) formulėje imdami p lygų 60, o q – 120

$$I_{61,a}^{120} = 56437{,}50 \text{ Lt}$$

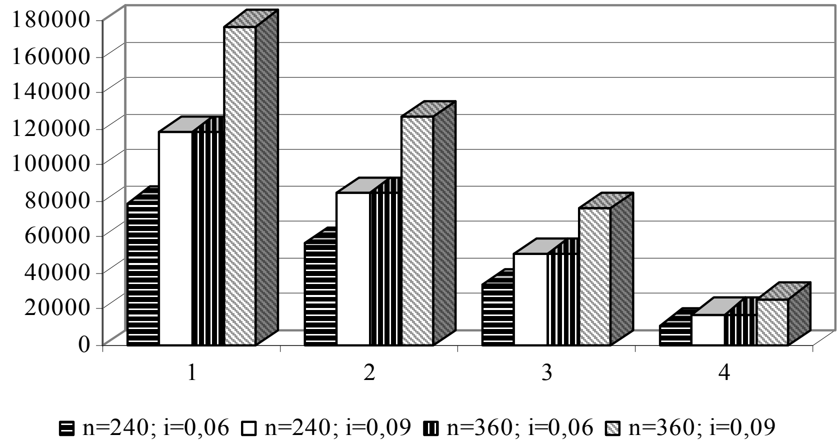
Trečiojo ketvirčio palūkanos sumažėja iki

$$I_{121,a}^{180} = 33937{,}50 \text{ Lt}$$

Paskutinį paskolos termino ketvirtį sumokėsime tik

$$I_{181,a}^{240} = 11437{,}50 \text{ Lt}$$

Kitais atvejais skaičiuojama panašiai. Rezultatai paveiksle 6.



6 pav. 4 pavyzdžio per paskolos termino ketvirtį sumokamų palūkanų sumų palyginimas.

Paveiksle matome, kad didžiausios palūkanų sumos yra mokamos 30 metų paskolos su 9% palūkanų norma, atveju, o mažiausios sumos – 20 metų paskolos su 6% palūkanų norma. Tuo tarpu 20 metų paskolos su 9% palūkanų norma ir 30 metų paskolos su 6% palūkanų norma sumokamos sumos yra apylygės kiekvieną laikotarpį. Kiekvieną sekantį ketvirtį sumokame vis mažesnę palūkanų sumą. Suskaičiuosime kiek iš viso per paskolos terminą sumokame palūkanų. Pasinaudosime (55) formule. 20 metų paskolos su 6% metine palūkanų norma atveju sumokame palūkanų

$$I_a = \frac{0{,}005 \cdot 300000 \cdot 241}{2} = 180750{,}00 \text{ Lt},$$

panašiai gauname, kad b) – d) paskolų atvejais sumokama $I_b = 271125{,}00$ Lt, $I_c = 270750{,}00$ Lt, $I_d = 406125{,}00$ Lt palūkanų.

Taigi pailgėjusi paskolos trukmė ir padidėjusi palūkanų norma stipriai padidina už paskolą sumokamų palūkanų sumą.

20 metų su 6% metine palūkanų norma atveju, pagal (53) formulę paėmę joje p=0, o q=60, gausime, kad per pirmą ketvirtį iš viso sumokėsime už paskolą

$$R_{1,a}^{60} = \frac{300000 \cdot 60 \cdot \left(2 + 0{,}005 \cdot \left(480 - 60 + 1\right)\right)}{480} = 153937{,}50 \text{ Lt}$$

Už antrą paskolos termino ketvirtadalį sumokama suma sumažėja iki

$$R_{61,a}^{120} = 131437{,}50 \text{ Lt}$$

t. y. 22500,00 Lt mažiau už paskolą sumokame antruoju paskolos termino ketvirčiu. Trečiuoju ketvirtadaliu sumokama suma sumažėja iki

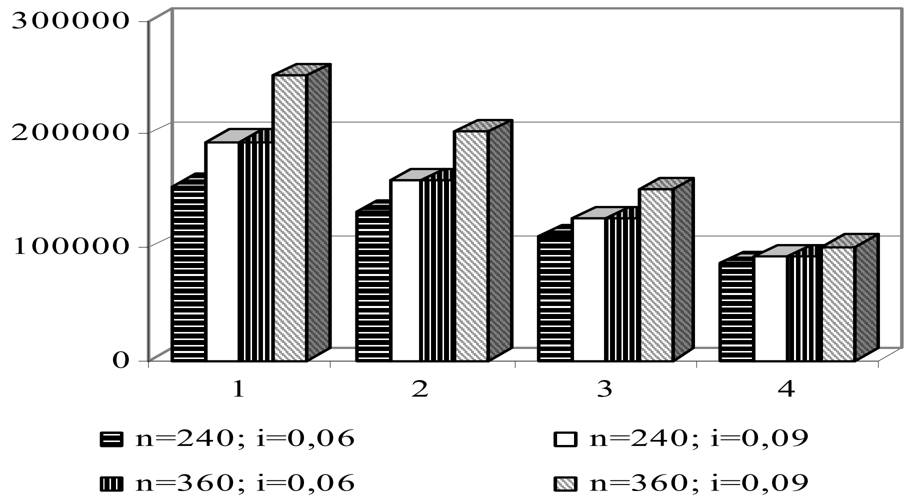
$$R_{121,a}^{180} = 108937{,}50 \text{ Lt}$$

Paskutinį ketvirtį tesumokėsime tik

$$R_{181,a}^{240} = 86437{,}50 \text{ Lt}$$

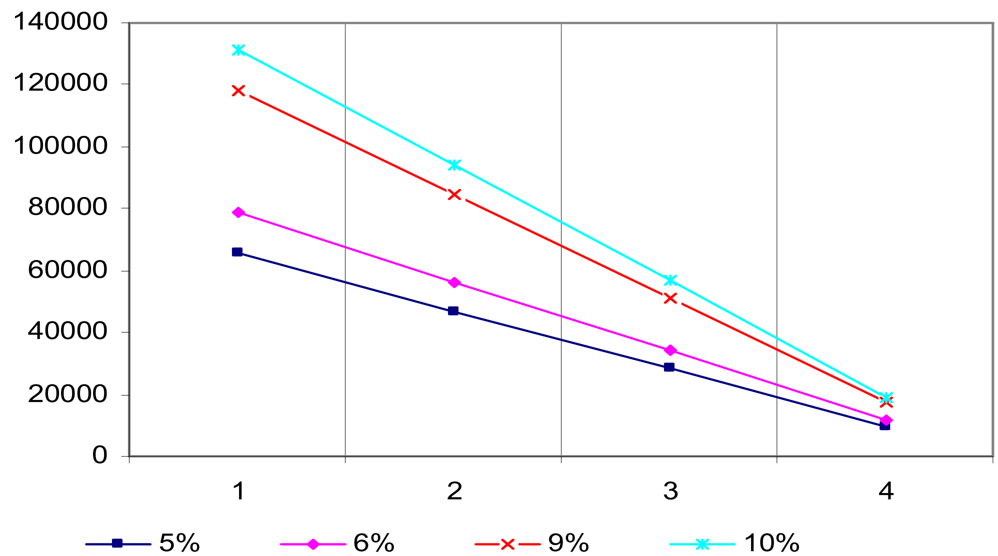
Ketvirtą ketvirtį sumokėsime 67500,00 Lt mažesnę sumą nei pirmą ketvirtį.

Panašiai skaičiuojame ir kitais atvejais. Rezultatai 7 paveiksle.



7 pav. 4 pavyzdžio per paskolos termino ketvirtį sumokamų įnašų sumų palyginimas.

Kiekvieną ketvirtį 30 metų paskolos su 9% palūkanų norma sumokamų įnašų sumos yra didžiausios lyginant su kitais atvejais, nors paskutinį ketvirtį tarp sumokamų įnašų skirtumai ne tokie dideli, kaip kitais ketvirčiais. Šio grąžinimo metodo atveju matome, kad kiekvieną ketvirtį sumokama už paskolą vis mažiau.



8 pav. Už paskolos termino ketvirtį sumokamų palūkanų sumų palyginimas kintant palūkanų normai

Dabar panagrinėsime situaciją, kai paskolos terminas bus pastovus, o keičiasi tiktai paskolos palūkanų norma.

5 pavyzdys. 300000,00 Lt paskola grąžinam kas mėnesį mokant įnašus ir priskaičiuojant palūkanas. Paskolos metinė palūkanų norma a) 5 %; b) 6 %; c) 9%; d) 10%.

Į (52) išraišką įrašę atitinkamas p ir q reikšmes apskaičiuojame per atitinkamą paskolos termino ketvirtį sumokėtų palūkanų sumas. Rezultatus matome 8 pav. Paveiksle matome, kad palūkanų normai didėjant, per ketvirtį sumokamų palūkanų sumos didėja, tačiau paskolos termino pabaigoje, skirtumas tarp palūkanų nėra jau toks ryškus kaip paskolos termino pradžioje. Apskaičiuokime iš viso per paskolos terminą sumokamas palūkanų sumas. 5% palūkanų normos atveju, grąžinant 300000,00 Lt paskolą, sumokama palūkanų

$I_a = 150625{,}00$ Lt,

$I_b = 180750{,}00$ Lt,

$I_c = 271125{,}00$ Lt,

$I_d = 301250{,}00$ Lt.

Didėjant sutarties palūkanų normai už skolą sumokamų palūkanų sumos didėja.

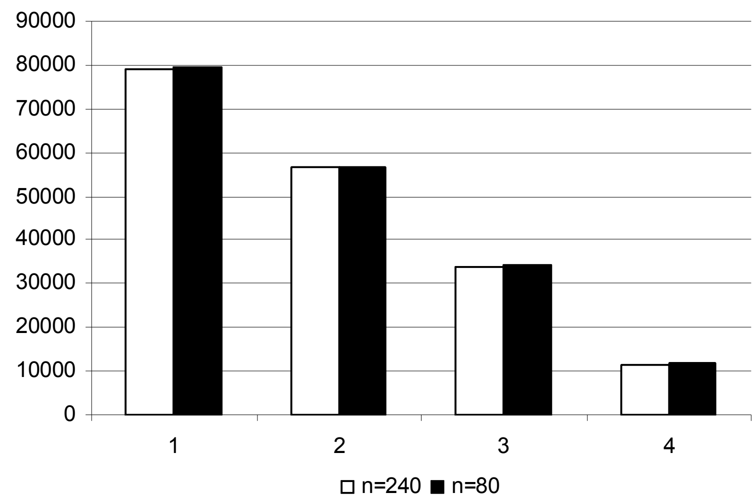
6 pavyzdys.300000 Lt paskola grąžinama per 20 metų. Metinė palūkanų norma 6%. Kai įnašai mokami: a) kas 3 mėnesius; b) kas mėnesį.

Kai įnašai mokami kas 3 mėnesius, vienu mokėjimu grąžinama skolos suma yra

$$P_a = \frac{300000}{80} = 3750{,}00 \text{ Lt},$$

o kai kas mėnesį

$P_b = 1250{,}00$ Lt.



9 pav. 6 pavyzdžio už paskolos termino ketvirtį sumokamų palūkanų sumų palyginimas.

Kadangi paskolos termino ketvirtį sudaro 5 paskolos termino metai tiek mokant įmokas kas 3 mėnesius, tiek ir kas mėnesį, tai po kievienų 5 metų skolos likutis sumažės ketvirtadaliu, t. y. po kiekvienų 5 metų skolos likučių dydžiai sutaps. Tad ir už paskolos termino ketvirtį sumokamos palūkanų sumos nedaug skirsis. Mokėdami įmokas kas 3 mėnesius, mokame vienu mokėjimu didesnę sumą, nei kas mėnesį, bet mokėjimus atliekame tris kartus rečiau. Pastebėsime, kad $3P_b=P_a$.

Paveiksle 9 matome, kad dažniau mokėdami įmokas, per ketvirtį sumokamos palūkanos tik šiek tiek yra mažesnės, nei kai mokama rečiau. Dėl to, kad kiekvieną ketvirtadalį grąžiname po ketvirtį pradinės skolos, tai ir įnašų situacija bus tokia pat kaip palūkanų sumų, t. y. retesnis procentų priskaičiavimas tik šiek tie padidins ketvirtines sumas. Norėdami įsitikinti, kad dažnumo įtaka sumokamoms sumoms yra ne didelė apskaičiuosime iš viso už paskolą sumokamas palūkanas. Pradėsime nuo atvejo, kai procentai priskaičiuojami kas ketvirtį pagal (55) turime

$$I_a = \frac{300000 \cdot 0{,}015 \cdot 81}{2} = 182250{,}00 \text{ Lt}$$

Panašiai skaičiuojame ir tuo atveju, kai procentai priskaičiuojami kas mėnesį, gausime

$I_b = 180750{,}00$ Lt.

Kai procentai priskaičiuojami kas ketvirtį sumokame tik 1500,00 Lt daugiau palūkanų, nei tuomet, kai priskaičiuojama kas mėnesį, grąžindami skolą lygiomis dalimis, o ši suma lyginant su pradine skolos suma yra ne didelė.

Susipažinę su šiais dviem metodais jau galime juos palyginti.

II.METODŲ PALYGINIMAS

Susipažinome su dviem paskolų padengimo metodais: pastoviųjų anuitetų ir linijiniu metodu, palyginsime juos. Tolimesniuose skyreliuose nagrinėsime, kuriuo metodu grąžindami skolą sumokėsime už paskolą mažiau, kokie yra vieno ir kito metodo privalumai skolininkui ir skolintojui.

II.1. PALYGINIMAS

Nagrinėkime n periodų trukmės paskolą. Vieno periodo palūkanų norma i, paskolos suma A. Grąžinant paimtą paskolą linijiniu būdu kiekvieną periodą padengiama A/n skolos ir mokamos palūkanos už skolos likutį. Pirmasis įnašas, pažymėkime jį R_1^l, yra $R_1^l = A/n + i \cdot A$.

Pasirinkus anuitetų metodą, visi įnašai vienodi ir lygūs $R^a = A / a_{\overline{n}|i}$. Pirmuoju mokėjimu palūkanų sumokame $i \cdot A$, o skolos padengiame $P_1^a = R^a - i \cdot A$. Palyginkime pirmuoju įnašu abiem metodais grąžinamas skolos dalis.

Kai $A=1$, turime

$$P_1^a = 1 / a_{\overline{n}|i} - i .$$

Atsižvelgę į (1), galime užrašyti

$$P_1^a = \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} - i .$$

Sudėję ir padauginę skaitiklį ir vardiklį iš $(1+i)^n$, gauname

$$P_1^a = \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

Vardilyje pritaikę Niutono binomo formulę apskaičiuojame

$$P_1^a = \frac{1}{n + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot i + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3 \cdot 2} \cdot i^2 + \ldots + n \cdot i^{n-2} + i^{n-1}} < \frac{1}{n} .$$

Vadinasi, pastovių anuitetų būdu grąžinamos skolos dalis pirmajame įnaše $P_1^a = R^a - i \cdot A$ yra mažesnė už linijinio metodo pirmosios įmokos skolos dalį A/n. Tuo pačiu, kai paskolos sąlygos yra vienodos, linijinio metodo pirmasis įnašas yra didesnis negu tos pačios paskolos, grąžinamos pastovių anuitetų būdu, pirmąją įmoką.

Panagrinėsime situaciją, kai tokio pat dydžio skola, su ta pačia metine palūkanų norma, tokiu pat paskolos terminu, grąžinama pastoviųjų ir kintamų anuitetų metodais. Nagrinėkime pavyzdį.

7 pavyzdys. 300000,00 Lt paskola turi būti grąžinta per 20 metų kas mėnesį mokant įnašus. Sutarties metinė palūkanų norma: a) 6%; b) 9%.

Detaliau panagrinėsime metinės 6% palūkanų normos atvejį, o kadangi 9% metinės palūkanų normos atveju skaičiuojama panašiai, todėl pateiksime tik rezultatus.

Padengdami skolą pastoviaisiais anuitetais pagal (5) kiekvieną mėnesį mokėsime po sumą

$$R^a = \frac{300000}{\frac{1-1{,}005^{-240}}{0{,}005}} = 2149{,}29 \text{ Lt}$$

Pirmojo mėnesio įmokoje, palūkanų suma, pagal (9), lygi

$$I_1^a = 300000 \cdot 0{,}005 = 1500{,}00 \text{ Lt}$$

Todėl pirmuoju mėnesiu grąžinama suma bus lygi įnašo ir palūkanų skirtumui

$$P_1^a = 649{,}29 \text{ Lt}$$

Padengiant kintamais anuitetais, kiekvieną mėnesį mes grąžinsime po sumą, (46),

$$P^l = \frac{300000}{240} = 1250{,}00 \text{ Lt}$$

Pirmojo mėnesio palūkanų suma bus tokio pat dydžio kaip pastoviųjų anuitetų atveju, kadangi skolos likučiai sutampa. Kadangi linijiniu metodu pirmuoju mokėjimu grąžinamos skolos suma (1250,00 Lt) yra didesnė nei pastovių anuitetų metodo (649,29 Lt), tai linijinio metodo skolos likutis po pirmojo periodo bus mažesnis nei pastovių anuitetų metodo. Savo ruožtu ir pastoviųjų anuitetų metodo antrojo periodo palūkanos bus didesnės.

Kintamų anuitetų metodo pirmasis įnašas bus didesnis, nei pastoviųjų anuitetų ir bus lygus

$$R_1^l = I_1^l + P^l = 2750{,}00 \text{ Lt}$$

Turime pakankamai ilgą paskolos terminą. Todėl ir vėl patogiau būtų lyginti ne mėnesinius dydžius, o tam tikro laikotarpio dydžius. Visą paskolos terminą padalinkime į keturias dalis po penkis metus. Skaičiuojame naudodamiesi (25) – (32), (37) – (44) formulėmis. Apskaičiuosime ir kokią dalį procentais sudaro už atitinkamą periodą sumokama palūkanų, grąžinamos skolos suma ir iš viso sumokama suma.

Grąžindami 300000,00 Lt skolą pastoviųjų anuitetų metodu, kiekvieną paskolos termino ketvirtį už paskolą mokėsime po sumą

$$60 \cdot R^a = 128957{,}59 \text{ Lt}$$

arba po 25,00% visos už paskolą sumokamos sumos. Grąžindami skolą kintamų anuitetų metodu pagal (53) pirmą paskolos termino ketvirtį už paskolą sumokėsime sumą

$$R_1^{60,l} = \frac{300000 \cdot 60}{480} \cdot \left(2 + 0{,}005 \cdot \left(480 - 60 + 1\right)\right) = 153937{,}50 \text{ Lt}$$

arba 32,02% visos už paskolą sumokamos sumos. Matome, kad pirmuoju paskolos termino ketvirtadaliu pastovių anuitetų metodo atveju sumokame 24979,91 Lt mažesnę sumą, nei linijiniu grąžindami skolą linijiniu metodu.

Pirmo paskolos termino ketvirčio pastovių anuitetų metodo palūkanų suma pagal (25), yra

$$I_1^{60,a} = 2149{,}29 \cdot \left(60 - 1{,}005^{-188} \cdot \frac{1-1{,}005^{-60}}{0{,}005}\right) = 83656{,}39 \text{ Lt}$$

arba 38,76% visų palūkanų. Linijinio metodo - pagal (52) formulę,

$$I_1^{60,l} = \frac{0{,}005 \cdot 300000 \cdot 60 \cdot (480 - 60 + 1)}{2} = 78937{,}50 \text{ Lt}$$

arba 43,67% visų palūkanų. Taigi pastovių anuitetų pirmo paskolos termino ketvirčio palūkanos 4718,89 Lt viršija kintamų anuitetų palūkanas.
Pastovių anuitetų atveju per pirmą paskolos ketvirtadalį grąžinsime skolos pagal (37) gausime

$$P_1^{60,a} = 2149{,}29 \cdot 1{,}005^{-180} \cdot \frac{1 - 1{,}005^{-60}}{0{,}005} = 45301{,}20 \text{ Lt}$$

arba 15,10% visos skolos. Už tą patį laikotarpį linijiniu būdu grąžinsime

$$60 \cdot 12500 = 75000{,}00 \text{ Lt}$$

arba ketvirtadalį skolos. Per pirmus 5 paskolos termino metus grąžinsime 29698,80 Lt didesnę sumą kintamų anuitetų atveju.

Toliau skaičiuojame panašiai. Rezultatai lentelėje 4.

4 lentelė. Pastoviųjų ir kintamų anuitetų metodų palyginimas, kai paskolos metinė palūkanų norma 6%.

Pastovieji anuitetai				**Kintami anuitetai**		
Laikotarpis:		*Lt*	*%*		*Lt*	*%*
[1;5]	Grąžinama suma	45301,20	15,10	Grąžinama suma	75000,00	25,00
	Palūkanos	83656,39	38,76	Palūkanos	78937,50	43,67
	Įnašas	128957,59	25,00	Įnašas	153937,50	32,02
[6;10]	Grąžinama suma	61104,54	20,37	Grąžinama suma	75000,00	25,00
	Palūkanos	67853,05	31,44	Palūkanos	56437,50	31,22
	Įnašas	128957,59	25,00	Įnašas	131437,50	27,34
[11;15]	Grąžinama suma	82420,86	27,47	Grąžinama suma	75000,00	25,00
	Palūkanos	46536,73	21,56	Palūkanos	33937,50	18,78
	Įnašas	128957,59	25,00	Įnašas	108937,50	22,66
[16;20]	Grąžinama suma	111173,39	37,06	Grąžinama suma	75000,00	25,00
	Palūkanos	17784,20	8,24	Palūkanos	11437,50	6,33
	Įnašas	128957,59	25,00	Įnašas	86437,50	17,98
Iš viso	515830,36			480750,00		

Kadangi 9% palūkanų normos atveju skaičiavimai atliekami panašiai, tai pateiksime tik rezultatus 5 lentelėje.

5 lentelė. 9% metinės palūkanų normos pastoviųjų anuitetų ir linijinio metodų palyginimas

Pastovieji anuitetai				Kintami anuitetai		
Laikotarpis		*Lt*	*%*		*Lt*	*%*
[1;5]	Grąžinama suma	33878,85	11,29	Grąžinama suma	75000,00	25,00
	Palūkanos	128071,82	36,82	Palūkanos	118406,25	43,67
	Įnašas	161950,67	25,00	Įnašas	193406,25	33,86
[6;10]	Grąžinama suma	53043,48	17,68	Grąžinama suma	75000,00	25,00
	Palūkanos	108907,19	31,31	Palūkanos	84656,25	31,22
	Įnašas	161950,67	25,00	Įnašas	159656,25	27,95
[11;15]	Grąžinama suma	83049,17	27,68	Grąžinama suma	75000,00	25,00
	Palūkanos	78901,51	22,69	Palūkanos	50906,25	18,78
	Įnašas	161950,67	25,00	Įnašas	125906,25	22,05
[16;20]	Grąžinama suma	130028,50	43,34	Grąžinama suma	75000,00	25,00
	Palūkanos	31922,17	9,18	Palūkanos	17156,25	6,33
	Įnašas	161950,67	25,00	Įnašas	92156,25	16,14
Iš viso	647802,69			571125,00		

Iš abiejų lentelių duomenų matome, kad pirmais dviem laikotarpiais daugiau palūkanų skolininkas mokės grąžindamas skolą linijiniu metodu, atitinkamai – 43,67% už pirmąjį ketvirtį ir 31,22% už antrąjį ketvirtį lyginant su anuiteto metodu 38,76% ir 31,44% esant 6% metinei palūkanų normai, bei 43,67% ir 31,22% lyginant su 35,19% ir 31,09%, esant 9% metinei palūkanų normai. Tačiau, pradedant trečiuoju ketvirčiu, pastovių anuitetų metodo palūkanos ima viršyti linijinio metodo palūkanas. Iš 4 lentelės matome, kad linijiniu metodu už trečią ir ketvirtą ketvirčius atitinkamai sumokame 18,76% ir 6,33%, kai grąžindami paskolą anuiteto metodu sumokame 21,56% ir 8,24%. Panašūs rezultatai gaunami ir 5 lentelėje.

Linijiniu metodu kiekvienu iš keturių laikotarpių grąžiname po ketvirtadalį sumos. Anuitetų metodu didžiausią dalį grąžiname 16-20 metais, būtent 37,06%, esant 6% metinei normai, ir 49,50%, esant 9% metinei normai.

Pastoviųjų anuitetų metodu kaskart sumokame ketvirtadalį sumos. Linijiniu metodu didžiausias įnašas įnešamas 1-5 metais po to įnašas, kaip jau buvo minėta, mažėja aritmetine progresija.

Galime pastebėti, kad 1-10 metais iš viso už paskolą didesnės sumos prireiks grąžinant skolą kintamų anuitetų metodu lyginant su pastoviųjų anuitetų metodu. Be to, pastoviųjų anuitetų metodu iš viso sumokame 515830,36 Lt, esant 6% metinei palūkanų normai ir 647802,69 Lt, esant 9% metinei palūkanų normai. Tuo tarpu linijiniu metodu atitinkamai 480750,00 Lt, ir 571125,00 Lt.

Taigi lyginant šiuos du metodus pastebėsime, kad grąžindamas skolą linijiniu būdu skolininkas už paskolą sumoka mažesnę sumą. Skirtumas tarp įneštų pinigų linijiniu metodu ir anuitetų metodo yra 35080,36 Lt, esant 6% metinei normai, o esant 9% metinei normai sutaupome 76677,69 Lt. Todėl šiuo požiūriu pastovių anuitetų metodas yra geresnis skolintojo atžvilgiu, nes skolininikas sumoka daugiau už paskolą.

Skirtumas tarp lyginamų metodų palūkanų sumų didėja, didėjant sutarties palūkanų normai.

II.2. UŽ PASKOLĄ SUMOKAMŲ PALŪKANŲ PALYGINIMAS

Pavyzdžiuose 1 ir 4 nagrinėti buvo tik du atvejai: palūkanų normos padidėjimas nuo 6% iki 9% metinės palūkanų normos ir termino pailgėjimas nuo 20 iki 30 metų. Matėme, kad tiek didėjant palūkanų normai, tiek ilgėjant paskolos terminui, sumokamų per visą paskolos terminą palūkanų, sumos didėja. Panagrinėsime detaliau sumokamas už visą paskolos terminą palūkanas. Panaudoję (18) palūkanų sumos išraišką, bei (5) periodo įnašo formulę, galime užrašyti, kad

$$I = n \cdot i + \frac{n \cdot i}{(1+i)^n - 1} - 1 \tag{*}$$

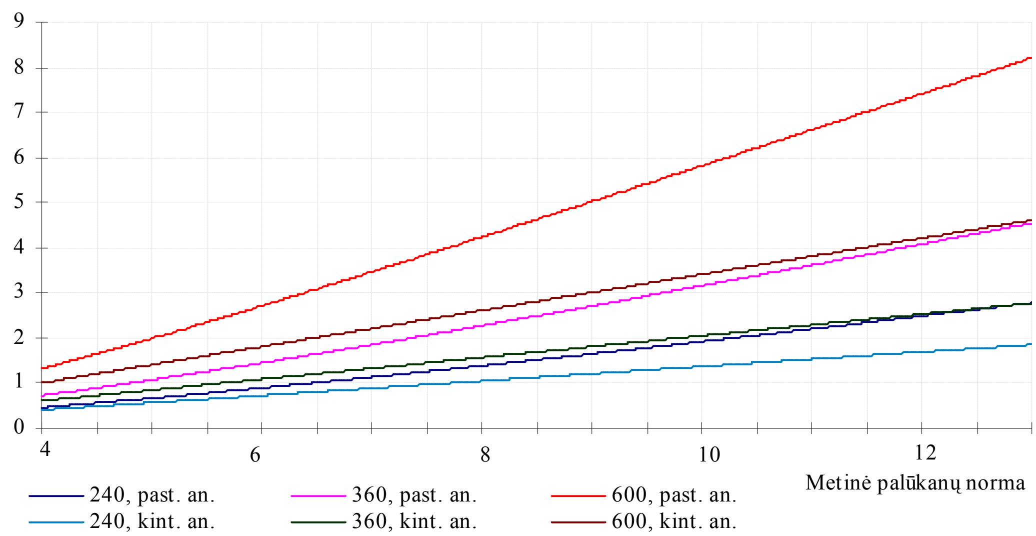
Kintamų anuitetų atveju, pagal (55) tūrėsime

$$I^{l} = \frac{i \cdot (n+1)}{2} \tag{**}$$

Kad būtų paprasčiau nagrinėsime atvejį, kai paskolos suma A yra lygi 1 Lt. Gautus rezultatus bus galima užrašyti bet kokio dydžio paskolos sumai A, tereikės gautą rezultatą padauginti iš A.

Turime, kad per visą paskolos terminą sumokama palūkanų suma priklauso nuo dviejų dydžių paskolos trukmės n ir palūkanų normos i. Nagrinėsime du atvejus. Pradžioje laikysime, kad esant fiksuotam paskolos terminui n, palūkanų suma yra nežinomojo i funkcija, t. y. $I=I(i)$, o kitu atveju laikysime, kad palūkanų norma yra fiksuota, o kinta paskolos terminas periodais, t. y. $I=I(n)$.

Tegul palūkanos yra nežinomojo i funkcija, o paskolos terminas n yra fiksuotas. Paimkime 20, 30 ir 50 metų paskolas, t. y. $n=240$, $n=360$ ir $n=600$. Įrašę šias n reikšmes į (*) ir (**) turime po tris funkcijas kiekvieno metodo atveju. Nagrinėsime iš viso už paskolą sumokamų palūkanų sumų augimą didėjant palūkanų normai skirtingos trukmės paskolos. Esant fiksuotam paskolos terminui n, imdami skirtingas metines palūkanų normas galėsime pavaizduoti, kaip iš viso už paskolą sumokama palūkanų suma priklauso nuo paskolos palūkanų normos. Naudosimės paveikslo 10 duomenimis.



10 pav. Iš viso už paskolą sumokamų palūkanų sumų augimas pastoviųjų ir kintamų anuitetų atveju, kintant palūkanų normai.

Pastovių anuitetų atveju, jeigu metinė paskolos palūkanų norma yra maža, pavyzdžiui 4%, tai tiek 20 metų (mėlyna spalva), tiek ir 30 metų (rausva spalva), tiek ir 50 metų (raudona spalva) paskolos sumokamos palūkanos nedaug skiriasi. Tačiau kuo daugiau auga metinė paskolos palūkanų norma tuo didesni skirtumai susidaro tarp palūkanų sumų. Pavyzdžiui, 6% metinės palūkanų normos atveju, 20 metų paskolos atveju sumokėsime šiek tiek mažiau nei 1 Lt palūkanų. Grąžindami 1 Lt skolą per 30 metų sumokėsime apie 1,5 Lt palūkanų, o per 50 metų jau daugiau nei 2,5 Lt palūkanų. Jeigu žiūrėsime 10% metinės palūkanų normos atvejį, tai palūkanos už 20 metų laikotarpį yra beveik 2 Lt, už 30 metų - apie 2,5 Lt, o 50 metų - jau apie 6 Lt. Palyginę gautų palūkanų sumų dydžius, matome, kad 20 metų paskolos atveju, didėjant metinei palūkanų normai nuo 6% iki 10%, palūkanų suma padidėja apie 1 Lt, 30 metų paskolos atveju - apie 1,5 Lt, o 50 metų paskoloje palūkanos išauga apie 3,5 Lt. Taigi matome, kad pailgėjus paskolos terminui 1,5 karto arba nuo 20 metų iki 30 metų skirtumas tarp palūkanų sumų išauga apie pusę lito, o pailgėjus terminui iki 50 metų arba 2,5 karto, skirtumas tarp palūkanų padidėja jau 3,5 Lt.

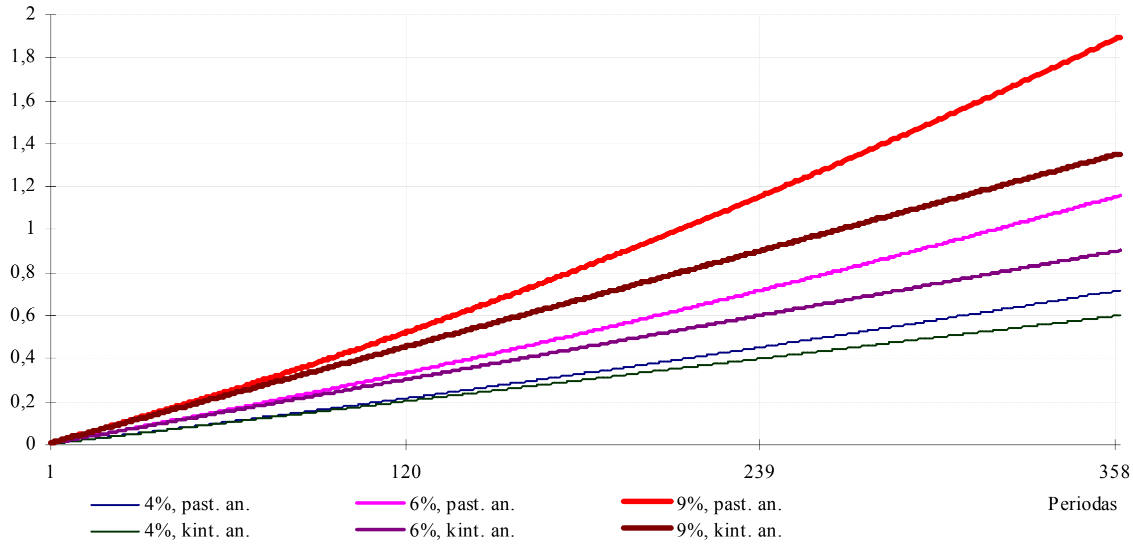
Dabar panagrinėkime kintamus anuitetus. Pastebėsime, kad ir šiuo atveju didėjant metinei palūkanų normai skirtumai tarp palūkanų sumų 20 metų (žydra spalva), 30 metų (tamsiai žalia spalva) ir 50 metų (ruda) didėja. Kuo ilgesnis paskolos terminas tuo jautriau sumokama palūkanų suma reaguos į metinės palūkanų normos kitimą. Pavyzdžiui, 6% metinės palūkanų normos atveju, grąžindami 1 Lt skolą per 20 metų sumokėsime kiek daugiau nei pusę lito palūkanų, per 30 metų - kiek daugiau nei litą, o per 50 metų - apie 1,9 Lt. 10% metinės palūkanų normos atveju, per 20 metų bus priskaičiuota apie 1,5 Lt palūkanų, per 30 metų - kiek daugiau nei 2 Lt, o per 50 metų - kiek mažiau nei 3,5 Lt palūkanų. Matome, kad 20 metų paskolos atveju palūkanų normos padidėjimas nuo 6% iki 10%, sumokamų palūkanų sumą padidina apie 1 Lt, 30 metų paskolos atveju - irgi apie 1 Lt, o 50 metų paskolos atveju - apie 1,5 Lt.

Lygindami pastoviųjų ir kintamų anuitetų metodus, pastebėsime, kad pastoviųjų anuitetų atveju palūkanų suma yra jautresnė palūkanų normos kitimui ilgesnio termino atveju. Matėme, kad 6% metinės palūkanų normos atveju terminui pailgėjus nuo 20 iki 50 metų pastoviųjų anuitetų metodu sumokama palūkanų suma išauga apie 1,5 Lt, o kintamų anuitetų atveju apie 1,3 Lt, o 10% palūkanų normos atveju atitinkamai apie 4 Lt ir apie 2 Lt. Pastebėsime, kad per 20 metų sumokamos palūkanos pastoviųjų anuitetų metodu yra artimos savo dydžiu 30 metų kintamų anuitetų palūkanoms vienodos paskolos palūkanų normos atveju. Kuo didesnė metinė palūkanų norma, tuo mažesnis skirtumas tarp šių metodų palūkanų. Taip pat nedaug skiriasi ir pastoviųjų anuitetų palūkanų sumos 30 metų paskolos atveju nuo kintamų anuitetų palūkanų 50 metų paskolos atveju.

Didėjant metinei palūkanų normai, skirtumas tarp už paskolą sumokamų palūkanų pastoviųjų anuitetų ir linijinio metodų atvejais didėja, t. y. kuo aukštesnė metinė paskolos palūkanų norma, tuo daugiau palūkanų sumokėsime grąžindami skolą pastoviųjų anuitetų metodu lyginant su linijiniu metodu.

Didžiausios palūkanų sumos mokamos 30 metų pastoviųjų anuitetų metode. Augant metinei palūkanų normai sumokamų palūkanų sumos auga daugiausia. Daug mažesnes sumas mokėtume 30 metų kintamų anuitetų atveju, kurios nedaug viršija pastovių anuitetų 30 metų paskolos palūkanų sumas. 30 metų kintamų anuitetų palūkanų sumos yra mažesnės už tokio pat paskolos termino pastovių anuitetų palūkanas, bet nedaug didesnės už 20 metų pastovių anuitetų palūkanas, kurios yra didesnės už 20 metų linijinio metodo palūkanas.

Pažiūrėsime, kaip augs už paskolą sumokama palūkanų suma ilgėjant paskolos terminui n. Imsime 4%, 6% ir 9% metines palūkanų normas. Kiekvienam metodui tūrėsime po tris funkcijas, kuriose skirsis palūkanų normos dydis. Imdami skirtingas n reikšmes formulėse (*) ir (**) galėsime nubrėžti grafikus, kaip iš viso už paskolą sumokama palūkanų suma priklauso nuo paskolos termino. Turėsime 11 paveikslą.



11 pav. Iš viso už paskolą sumokamų palūkanų sumų augimas pastoviųjų ir kintamų anuitetų atveju, kintant paskolos terminui.

Pastovių anuitetų metodo atveju, paveiksle 11 matome, kad trumpo paskolos termino atveju sumokamos palūkanos nedaug skiriasi 4% palūkanų normos (mėlyna spalva), 6% (rausva spalva) ir 9% (raudona spalva) atvejais. Ilgėjant paskolos terminui skirtumai tarp sumokamų palūkanų auga. Pavyzdžiui jeigu paskola bus 10 metų, t. y. n=120, tai 4% metinės palūkanų normos atveju sumokėsime kiek daugiau nei 0,2 Lt, 6% metinės normos atveju - kiek daugiau nei 0,3 Lt, o 9% atveju - kiek daugiau nei 0,5 Lt. 20 metų paskolos atveju, t. y. n=240, jeigu metinė palūkanų norma yra 4%, tai sumokėsime kiek daugiau nei 0,4 Lt, 6% metinės palūkanų normos atveju - apie 0,7 Lt, o 9% atveju - virš 1,1 Lt palūkanų. Aukštesnės palūkanų normos atveju, palūkanų suma yra jautresnė paskolos termino kitimui. 9% palūkanų normos atveju, paskolos terminui pailgėjus 10 metų, nuo 10 iki 20 metų, sumokama per visą paskolos terminą palūkanų suma padidėja apie 0,6 Lt, o 4% metinės palūkanų normos atveju - kiek daugiau nei 0,2 Lt.

Linijinio metodo atveju ilgėjant paskolos terminui didės ir už paskolą sumokamos palūkanų sumos. Aukštesnės palūkanų normos atveju palūkanų suma augs sparčiau ilgėjant paskolos terminui. Pavyzdžiui per 10 metų grąžindami 1 Lt skolą kintamų anuitetų metodu 4% metinės palūkanų normos atveju sumokėsime apie 0,2 Lt palūkanų, o 9% atveju - kiek mažiau nei 0,5 Lt. Per 20 paskolos termino metų 4% paskolos atveju sumokėsime apie 0,4 Lt, o 9% - apie 0,9 Lt palūkanų. Paskolos su metine 4% palūkanų norma atveju, paskolos terminui padidėjus nuo 10 iki 20 metų palūkanų iš viso už paskolą sumokama palūkanų suma padidėja apie 0,2 Lt, 9% atveju palūkanos išauga 0,4 Lt.

Lygindami abu paskolų grąžinimo metodus, pastebime, kad trumpo paskolos termino atveju, už paskolą sumokamos palūkanų sumos beveik lygios, t. y. jeigu paskolos terminas yra trumpas, tai palūkanų sumos abiejų metodu atveju skirsis nedaug. Ilgėjant paskolos terminui palūkanų sumos didės. Matėme, kad pastovių anuitetų atveju ilgėjant paskolos terminui skirtumas tarp palūkanų sumų yra didesnis nei linijinio metodo atveju. 9% metinės palūkanų normos atveju paskolos terminui padidėjus nuo 10 iki 20 metų palūkanų suma padidėja apie 0,6 Lt pastoviųjų anuitetų atveju ir tik apie 0,4 Lt kintamų anuitetų metode.

Kuo aukštesnė paskolos palūkanų norma tuo daugiau skirsis sumokamos palūkanų sumos abiem metodais.

Palūkanų normos padidėjimas turės didesnę įtaką palūkanų sumai nei termino pailgėjimas.

II.3. NUOKRYPIO PROBLEMA

Iki šiol niekur nebuvo užsiminta apie infliaciją – veiksnį, kuris yra svarbus tiek skolintojui, tiek ir skolininkui. Infliacijos (bendro kainų lygio) augimas mažina pinigų perkamąją galią.

Atliekant skaičiavimus, susijusius su piniginių srautų koregavimu įvertinant infliaciją, priimta naudoti dvi pagrindines sampratas – nominali ir reali lėšų suma.

Nominali piniginių lėšų suma – tai pinigų kiekis neatsižvelgiant į jų perkamomjo pajėgumo pasikeitimą.

Reali piniginių lėšų suma – tai pinigų kiekis atsižvelgiant į jų perkamojo pajėgumo pasikeitimus rinkoje dėl vykstančio infliacijos proceso.

Kai sudaroma paskolos sutartis yra nustatoma paskolos palūkanų norma i. Šioje palūkanų normoje jau yra įskaičiuoti nuostoliai susiję su infliacija per visą paskolos terminą Dabar apie tai detaliau. Palūkanų normą i, realią palūkanų normą r ir tikėtiną infliacijos tempo vidurkį λ sieja Fišerio lygybė:

$$i = r + \lambda + \lambda \cdot r$$

Reali palūkanų norma yra mažesnė nei sutartyje nurodyta palūkanų norma. Sutarties palūkanų norma, kaip matome, yra apspręsta realios palūkanų normos ir tikėtino infliacijos tempo. Prieš tai nagrinėtame pavyzdyje tūrėjome 6% metinę palūkanų normą, atsižvelgę į tai, kad tikėtinas infliacijos tempas yra 3%, gausime, kad reali palūkanų norma yra 2,9%,

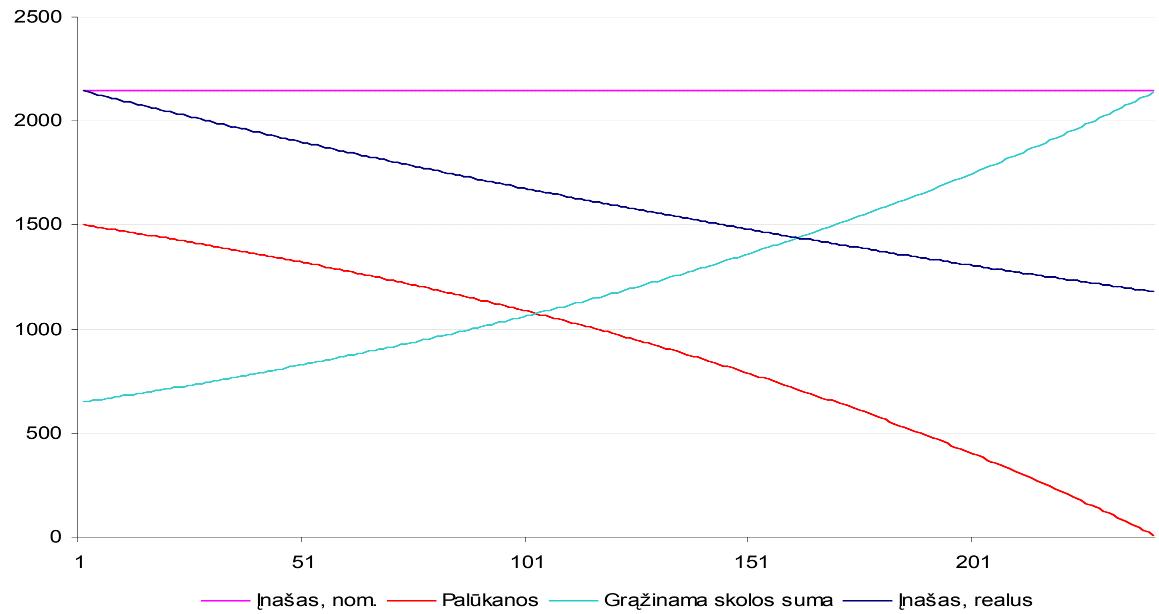
$$0{,}06 = 0{,}029 + 0{,}03 + 0{,}029 \cdot 0{,}03 .$$

Padengdami 300000,00 Lt skolą vienodais įnašais mokamais kas mėnesį, su metine 6% palūkanų norma, per 20 metų visą paskolos terminą, kiekvieną mėnesi mokame po įmoką lygią 2149,29 Lt. Nominali įnašų vertė ir yra 2149,29 Lt, ji nekinta visą paskolos terminą. Tačiau dėl infliacijos, reali įnašų vertė mažėja. Nors kiekvieną mėnesį mokame tokio pat dydžio sumą, tačiau jos vertė laikui bėgant mažėja. Todėl pirmojo ir paskutiniojo įnašų realios vertės skirtingos (vieno lito vertė šiandien ir to paties vieno lito vertė rytoj bus skirtingos). Reali k – osios įmokos vertė, k - tajam momentui, apskaičiuojama pasinaudojus išraiška

$$R_k^{realus} = \frac{R_k^{nom}}{(1+\lambda)^k}$$

12 paveiksle nominali įnašų vertė vaizduojama tiesia, rausva linija, o realios įnašų vertės mažėjimas vaizduojamas mėlyna kreive. Matome, kad paskolos termino pradžioje reali įnašų vertė yra artima nominaliai, bet termino pabaigoje nominalioji viršija realią. Paskutiniojo įnašo reali vertė yra tik

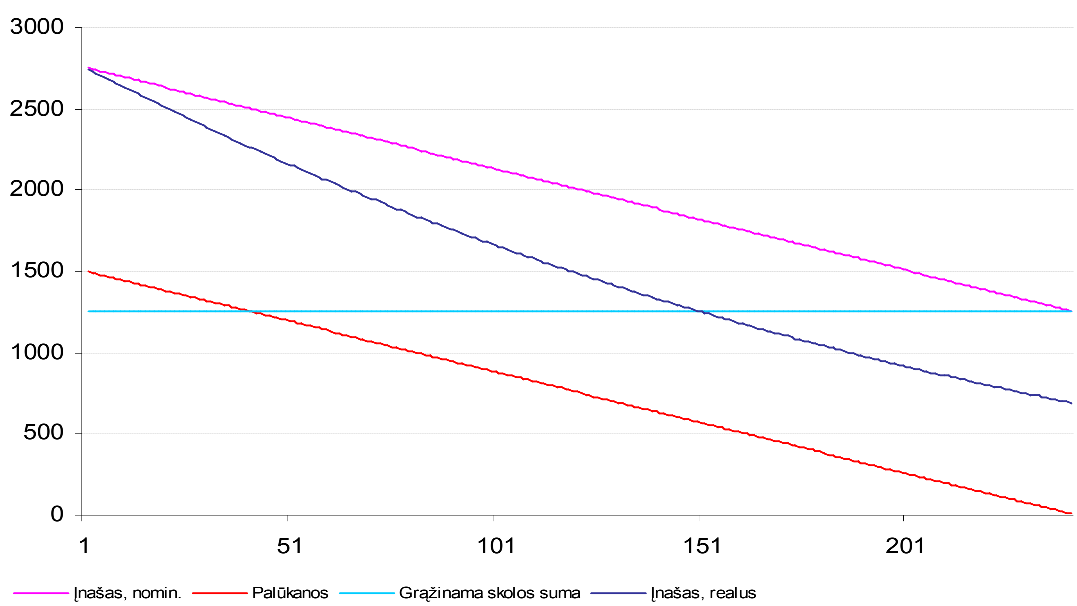
$$R_{240}^{realus} = \frac{R_{240}^{nom}}{(1+\lambda)^{240}} = 1180{,}44 \text{ Lt}$$



12 pav. 300000 Lt skolos grąžinimas pastoviųjų anuitetų metodu, kai metinė palūkanų norma 6%, o terminas 20 metų.

Pastebėsime, kad nors turime diskrečius dydžius, bet brėždami grafikus laiką imame tolydų, o norėdami apskaičiuoti konkretų dydį, į atitinkamą formulę įsirašome reikalingą reikšmę.

Pastoviųjų anuitetų metode kiekvieną periodą mokame po tokio pat dydžio įmoką R, kurią sudaro, kaip jau buvo minėta, palūkanos ir grąžinamos skolos dalis. Pirmojoje įmokoje palūkanų dalis yra didžiausia, bet vėliau, laikui bėgant, ji mažėja, kadangi palūkanos yra skaičiuojamos nuo mažėjančio skolos likučio. Tuo tarpu priešingai yra su grąžinamomis sumomis. Pirmajame įnaše grąžinamos skolos suma mažiausia, o paskutiniame - didžiausia. (Kalbame tik apie nominalias tiek periodo palūkanų, tiek ir grąžinamos skolos sumas). Tai ir matome paveiksle 12.



13 pav. 300000 Lt skolos grąžinimas kintamų anuitetų metodu, kai metinė palūkanų norma 6%, o terminas 20 metų.

Kintamų anuitetų atveju 300000,00 Lt paskolos su 6% metine palūkanų norma, grąžinamos per 20 metų kas mėnesį mokant įmokas situaciją vaizduojama 13 paveiksle.

Linijinio metodo atveju nominali įnašų vertė nėra pastovi kaip, kad buvo pastoviųjų anuitetų atveju, ji mažėja, rausva kreivė. Reali įnašų vertė, mėlyna kreivė, irgi mažėja, todėl paskutiniojo įnašo vertė yra maža, ji tėra 689,96 Lt, mažesnė ir už pastoviųjų anuitetų metodo paskutiniojo įnašo realią vertę. Tad linijinis metodas parankesnis skolininkui, kuris nesitiki, kad jo pajamos ateityje kils.

Infliacija, kaip jau buvo minėta prieš tai, yra svarbus veiksnys tiek skolintojui, tiek ir skolininkui. Pradžioje pažvelkime iš skolintojo pozicijos. Tarkime, kad skolintojas sudarydamas sutartį tikėjos, jog infliacijos tempas bus λ. Tuo tarpu realiai, pasirodė, kad infliacijos tempas yra didesnis už λ. Aišku, kad aukštesnį infliacijos tempą atitiks didesnė rinkos palūkanų norma, tačiau skolintojas sudarė sutartį su žemesne palūkanų norma i, tad aišku, kad šiuo atveju jis patirs nuostolių. Esant didesniam infliacijos tempui, norint, kad skolintojas nepatirtų nuostolių, jis turėjo sudaryti sutartį su aukštesne palūkanų norma. Taigi didesnė nei tikėtasi infliacija įtakoja aukštesnes rinkos palūkanų normas ir jau egzistuojančios paskolos vertė krenta. Ir atvirkščiai, jeigu realiai pasirodė, kad infliacijos tempas yra žemesnis, tuomet palūkanų norma, kuri reikalinga, kad skolintojas nepatirtų nuostolių esant žemesnei infliacijai yra mažesnė nei sutarties palūkanų norma i. Žemesnė nei tikėtasi infliacija įtakoja žemesnes rinkos palūkanų normas, ir jau egzistuojančios sutarties vertė išauga, t. y. skolos vertė dėl infliacijos išauga. Pavyzdžiui, jeigu skolintojas sudarė sutartį su 6% palūkanų norma, kuri apima ir 3% infliaciją, tai infliacijai realiai išaugus iki tarkim 5%, sutarties palūkanų norma tūrėtų būti

$$0{,}08 = 0{,}029 + 0{,}05 + 0{,}029 \cdot 0{,}05$$

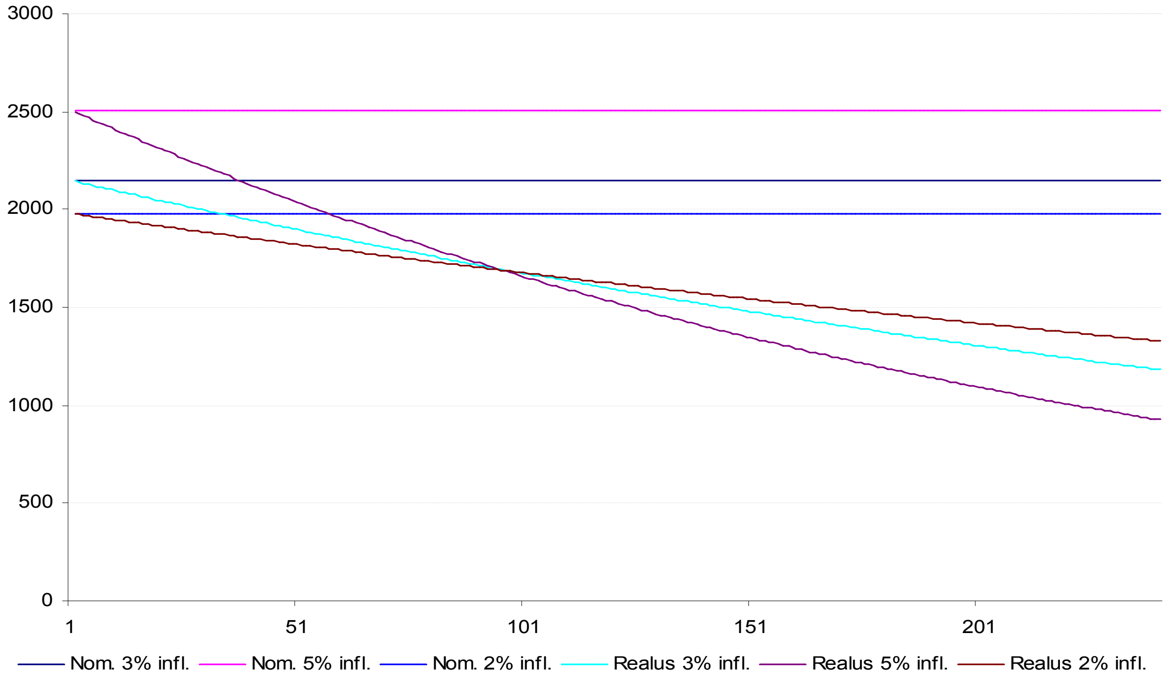
Apskaičiavus mėnesinių įmokų nominalius dydžius, tiek pastoviųjų, tiek ir kintamų anuitetų atvejais, aukštesnės palūkanų normos atveju įmokos bus didesnės, tačiau reali įmokų vertė paskolos termino pabaigoje 8% metinės palūkanų normos atveju bus mažesnė nei 6% metinės palūkanų normos atveju.

Jeigu vis tik realiai yra žemesnė infliacija, tarkim 2%, tai rinkos palūkanų norma yra

$$0{,}05 = 0{,}029 + 0{,}02 + 0{,}029 \cdot 0{,}02$$

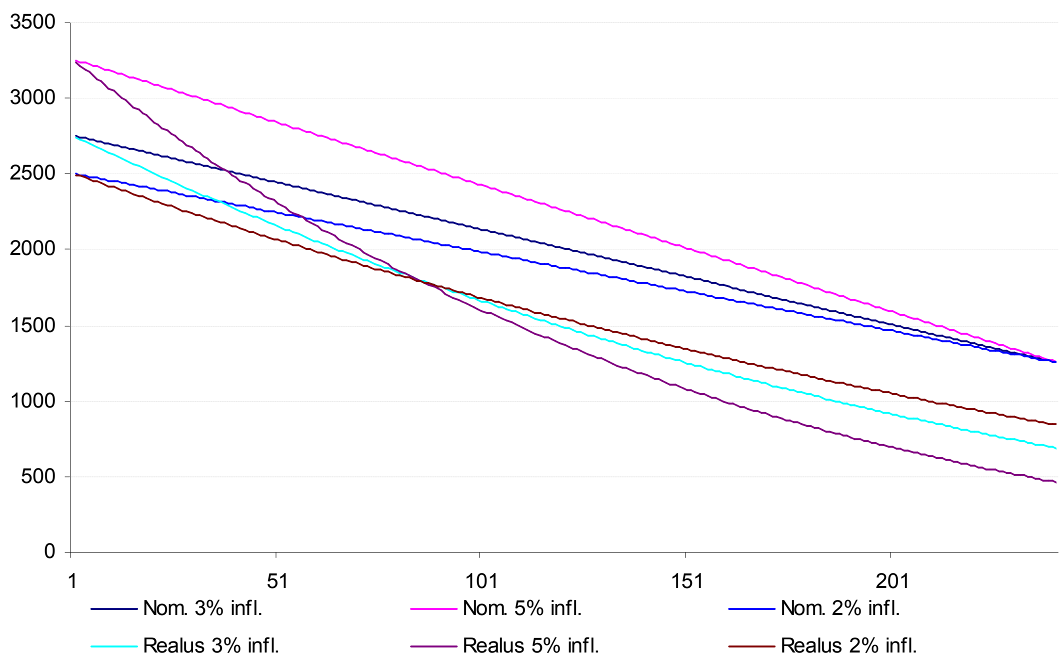
šiuo atveju nominalūs įnašai bus mažesni, tačiau paskutiniųjų įnašų reali vertė bus didesnė nei 6% metinės palūkanų normos atveju.

Situaciją, kai infliacija padidėja nuo 3% iki 5%, bei sumažėja nuo 3% iki 2% matome paveiksle 14. Paveiksle vaizduojama 300000,00 Lt skolos, padengiamos per 20 metų kas mėnesį mokant įmokas pastoviųjų anuitetų metodo atveju, įmokų reali ir nominali vertės esant skirtingiems infliacijos tempams.



14 pav. Reali ir nominali įmokų vertė, pastovių anuitetų metodo atveju, esant skirtingiems infliacijos tempams.

14 paveiksle matome, kad kuo aukštesnė infliacija, tuo mažesnė yra paskutinių įmokų reali vertė. 5% metinės infliacijos atveju, paskutinio mokėjimo reali vertė yra daugiau nei dvigubai mažesnė nei nominali.



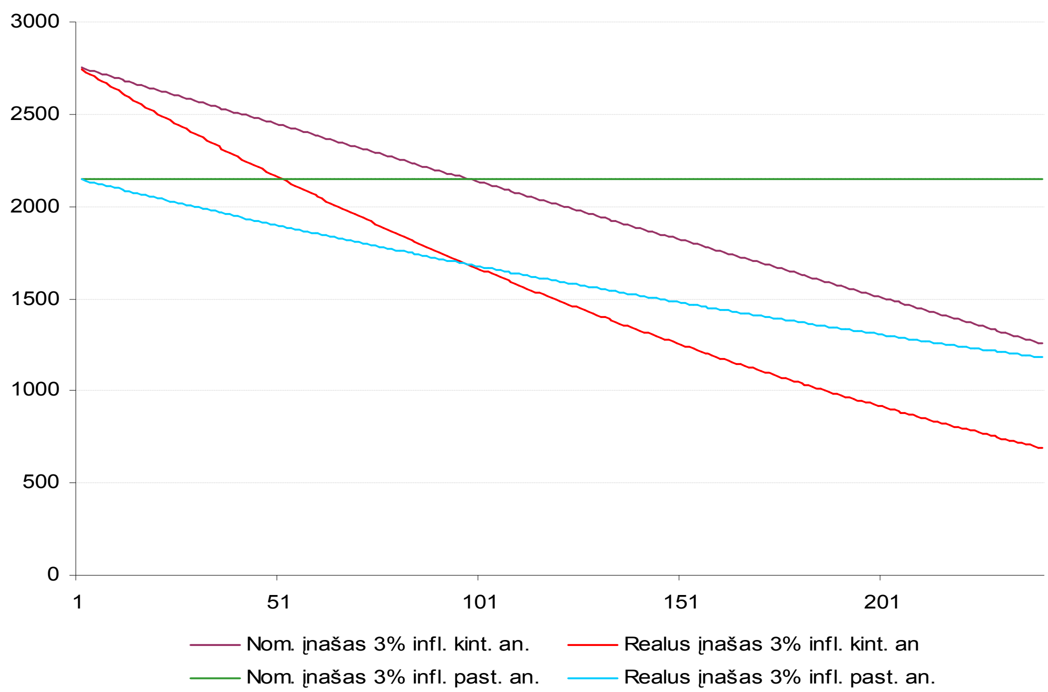
15 pav. Reali ir nominali įmokų vertė, kintamų anuitetų metodo atveju, esant skirtingiems infliacijos tempams.

Kintamų anuitetų atveju, 300000,00 Lt skolą grąžinant per 20 metų kas mėnesį mokant įmokas, esant skirtingiems infliacijos tempams, realius ir nominalius įmokų dydžius galime palyginti naudojantis 15 paveikslo duomenimis.

Kintamų anuitetų metodo atveju, esant skirtingiems infliacijos tempams nominalūs įnašai paskolos termino pabaigoje yra beveik vienodo dydžio, tuo tarpu realūs – kuo didesnis infliacijos tempas, tuo mažesni.

Dabar pažvelkime iš skolininko pozicijos. Matėme, kad dėl infliacijos laikui bėgant reali įnašų vertė krinta, t. y. jie skolininkui tampa vis „pigesni". Dėl infliacijos atsiranda tap vadinama *nuokrypio problema*. Realioji įnašų vertė, laikui bėgant, vis stipriau nukrypsta nuo nominaliosios. Taigi, jeigu tikėtina infliacija yra 5%, tai paskutiniojo įnašo reali vertė yra daugiau nei dvigubai mažesnė nei nominalioji, ką matėme pav. 14 ir 15. Todėl, jeigu tikimąsi didelio infliacijos tempo, tai paskutinieji įnašai skolininkui tampa labai „pigūs", bet tuo pačiu pradiniai įnašai yra labai „brangūs".

Nuokrypio laipsnį, t. y. kiek daug realūs įnašai nukryps nuo nominalių, įtakoja sutarties palūkanų norma, kurią savo ruožtu apsprendžia infliacijos tempas. Kuo aukštesnė paskolos palūkanų norma, tuo stipriau reali įmokų vertė nukrypsta nuo nominalios. Viso to pasekmė yra ta, kad paskolos termino pradžioje skolininkas susiduria su palyginti „brangiais" pirmaisiais įnašais. Dėl infliacijos pradinių įnašų reali vertė turi būti pakankamai aukšta, kad kompensuotų paskutiniųjų įnašų perkamosios galios sumažėjimą paskolos davėjui. Nuokrypio problemos galima nepaisyti, kai infliacija yra žema.



16 pav. Nuokrypio problema linijinio ir pastoviųjų anuitetų metodo atveju.

Sulyginę nuokrypio problemas kintamų ir pastovių anuitetų atvejais, pastebėsime, kad kintamų anuitetų atveju nuokrypio problema yra didesnė ir „skaudžiau“ ji paliečia skolininką. Kadangi paskutiniųjų įnašų reali vertė yra mažesnė nei pastovių anuitetų atveju, tai pradinių - reali vertė turi būti didesnė. Paskolos termino pradžioje mokėti „brangius" įnašus nėra lengva. Nuokrypio problemą abiejų metodų atveju, grąžinant 300000 Lt skolą esant 6% palūkanų normai (kuri apima 3% metinę infliaciją) ir paskolos terminui 20 metų, vaizduojama paveiksle 16. Paveiksle matome, kad pradinių linijinio metodo įnašų reali vertė, raudona kreivė, yra net didesnė už anuitetų metodo įnašų nominalią vertę, samanų spalvos kreivė. Reali kintamų anuitetų metodo įmokų vertė paskolos termino pabaigoje yra mažesnė nei pastovių anuitetų įmokų reali vertė.

Pastebėsime, kad 300000,00 Lt skolos suma, esant 6% metinei palūkanų normai, 20 metų paskolos atveju, grąžinta anuitetų metodu sudaro 58,16%, o linijiniu – 62,40% visos už paskolą sumokamos sumos. Todėl linijinio metodo atveju palūkanos sudaro tik 37,60%, o pastoviųjų anuitetų atveju – jau 41,84% visos už paskolą sumokamos sumos.

II.4.PALYGINIMAS 2: PASTOVIŲJŲ IR KINTAMŲ ANUITETŲ METODŲ ĮMOKOS.

Šiame skyrelyje detaliau panagrinėsime metodų įnašus. Kaip žinome kiekvieną įmoką sudaro palūkanos ir grąžinamos skolos dalis. 12 ir 13 paveiksluose, matėme, kad palūkanos paskolos termino pradžioje yra didžiausios ir viršija grąžinamos skolos sumą periodo įnaše. Tuo tarpu termino pabaigoje didesnę įnašo dalį sudaro grąžinama skola. Dažnai žmonės nustemba sužinoję kiek laiko turi praeiti, kad grąžinama suma taptų didesnė už palūkanų sumą periodo įnaše. Taip pat domimasi, tai kiek gi laiko praėjus nuo paskolos termino pradžios, bus grąžinta pusė skolos. Intuityvus atsakymas tarsi būtų, kad po pusės paskolos termino busime sugrąžinę pusę skolos. Tai būtų tiesa, jeigu periodo įnaše grąžinama skola ir palūkanos sudarytų lygias dalis. Deja, bet mūsų situacija yra kiek kitokia. Kadangi palūkanų sumos pirmaisiais termino periodais žymiai viršija grąžinamos skolos sumas (tačiau laikui bėgant palūkanų sumos mažėja, o auga grąžinamos sumos), tai pusė skolos bus grąžinta praėjus daugiau nei pusei paskolos termino.

Šiame skyrelyje išvesime formules, kurios tiek pastoviųjų anuitetų, tiek ir kintamų anuitetų atveju padėtų nustatyti periodus, pradedant kuriais grąžinama skola ima viršyti palūkanų sumas įnaše, bei kada bus grąžinta pusė skolos.

Pradėkime nuo pastoviųjų anuitetų metodo. Norint nustatyti periodą nuo kurio grąžinama skola bus didesnė už palūkanas turime spręsti nelygybę

$$P_k^a \geq I_k^a$$

Pasinaudoję dydžių P_k^a ir I_k^a išraiškomis (9), (10^c), gausime tokią nelygybę

$$R^a \cdot (1+i)^{-(n-(k-1))} \geq R^a \cdot i \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Pertvarkę šią nelygybę gausime, kad periodo numeris turi tenkinti

$$k^a \geq n+1-\frac{\ln 2}{\ln(1+i)} \tag{61}$$

Atidžiau pažvelgę į k^a išraišką, (61), galime pastebėti, kad jeigu paskolos terminas *n* yra pastovus, didėjant sutarties palūkanų normai i, vis vėliau palūkanų suma taps mažesnė už grąžinamos skolos dydį, t. y. k^a reikšmė vis labiau slinksis į dešinę. Taip pat k^a slinksis į dešinę esant fiksuotai sutarties palūkanų normai, bet ilgėjant terminui *n*.

Dabar ieškosime nuo kurio periodo m skolos likutis bus mažesnis nei pusė skolos, t. y. spręsime nelygybę

$$B_m^a \leq \frac{A}{2}$$

Įrašę skolos likučio išraišką (7), bei pasinaudoję sąryšio tarp *A* ir *R* išraiška (2), gausime nelygybę

$$R^a \cdot a_{\overline{n-m}|i} \leq \frac{R^a \cdot a_{\overline{n}|i}}{2}$$

Išsprendę nelygybę m atžvilgiu turime

$$m^a \leq \frac{\ln\left(1+(1+i)^n\right)-\ln 2}{\ln(1+i)} \tag{62}$$

Matome, kad fiksuoto termino n atveju, augant palūkanų normai i, vis vėliau bus grąžinta pusė skolos, t. y. m^a tolsta į dešinę. Taip pat dydis m^a elgsis ir esant fiksuotai palūkanų normai, bet ilgėjant terminui n.

Kintamų anuitetų atveju, pasinaudoję nelygybe

$$P^l \geq I_k^l,$$

bei formulėmis (46), (47), (49) gauname

$$\frac{A}{n} \geq i \cdot A \cdot \left(1-(k-1)\cdot\frac{1}{n}\right)$$

Tuomet atsižvelgus į šią nelygybę, grąžinamos skolos suma taps didesnė už periodo palūkanas, kai

$$k^l \leq n+1-\frac{1}{i} \tag{63}$$

Iš (63) formulės matome, kad ilgėjant paskolos terminui n, pastovios palūkanų normos atveju, dydis k^l slenka į dešinę. Jeigu didinsime palūkanų normą i, bet fiksuosime paskolos terminą n, k^l reikšmė irgi didės.

Akivaizdu, kad linijinio metodo atveju pusę skolos bus grąžinta praėjus pusei paskolos termino, kadangi kiekvieną periodą mes grąžiname po vienodo dydžio sumą P. tai Todėl m šiuo atveju bus

$$m^l = \frac{n}{2} \tag{64}$$

Šiuo atveju m^l nepriklauso nuo sutarties palūkanų normos i, o priklauso tik nuo paskolos termino n dydžio, todėl didėjant n, m^l reikšmė didės, bet vis tiek, bus lygi pusei paskolos termino.

8 pavyzdys. 300000 Lt paskola, esant metinei palūkanų normai 6%, per 20 metų grąžinama

a) pastoviųjų anuitetų;
b) linijiniu

metodu, kas mėnesį mokant įnašus.

Nustatysime, pastovių anuitetų metodo atveju, nuo kurio periodo k palūkanos periode taps mažesnės nei grąžinama skola. Pasinaudoję (61), gausime

$$k^a \geq 241-\frac{\ln 2}{\ln 1{,}005} = 102{,}02$$

Taigi paėmę artimiausią didesnį sveiką skaičių, t. y. 103, gauname, kad nuo 103 periodo, arba praėjus 8 metams ir 7 mėnesiams nuo paskolos termino pradžios, grąžinamos skolos suma

$$P_{103}^a = 1079{,}89 \text{ Lt},$$

įmokoje yra didesnė nei palūkanos

$$I_{103}^a = 1069{,}40 \text{ Lt}.$$

Pagal (62), gauname, kad skolos likutis taps mažesnis nei pusė skolos ne anksčiau nei praėjus 154 periodams arba 12 metų ir 10 mėnesių nuo paskolos termino pradžios. Kadangi

$$B_{154} = 149934{,}92 \text{ Lt}.$$

Kintamų anuitetų atveju gausime, pasinaudoję (63), kad grąžinama skola taps didesnė nei periodo palūkanos nuo 41 periodo, arba praėjus 3 metams ir 5 mėnesiams nuo paskolos termino pradžios.

Aišku, kad pusė skolos bus grąžinta praėjus 10 metų.

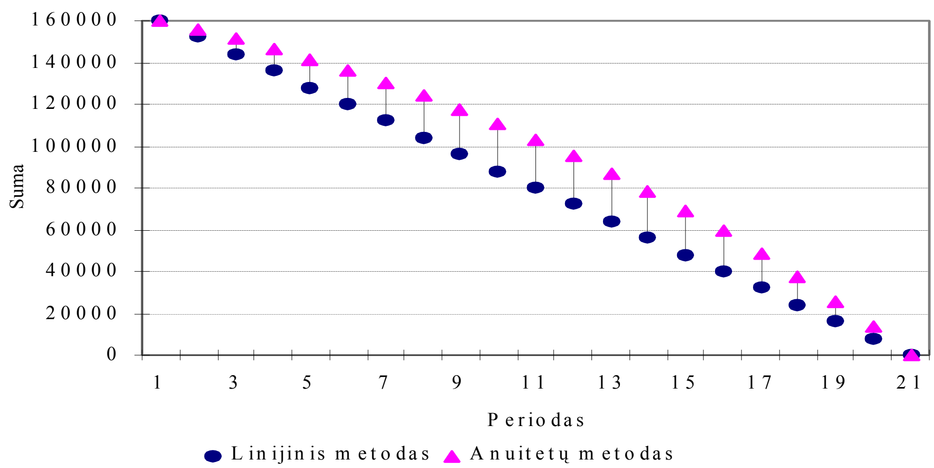
Palyginę su pastoviųjų anuitetų metodu, matome, kad kintamų anuitetų atveju žymiai anksčiau grąžinama skola pradės viršyti periodo palūkanas, t. y. 5 metais ir 2 mėnesiais anksčiau, pusė skolos bus grąžinta 2 metais ir 10 mėnesių anksčiau.

Pavyzdyje 8 matėme, kad pastoviųjų anuitetų atveju k^a reikšmė yra didesnė nei k^l .

II.5.SKOLOS NEGRĄŽINIMO IR PALŪKANŲ NORMOS RIZIKOS.

Dabar aptarsime dar du veiksnius, kurie svarbūs tiek skolintojui, tiek ir skolininkui. Kalbėsime apie skolos negrąžinimo ir palūkanų normos rizikas.

Skolos negrąžinimo rizika, tai pavojus skolintojui, kad skolininkui nepavyks grąžinti skolos. Anuitetų metodo atveju, skolos likutis kiekvieną periodą sumažėja vis didesne suma, dėl šios priežasties skolos likutis mažėja didėjančia dalimi. Jeigu lyginsime 160000 Lt paskolos, išduotos 20 metų kas mėnesį mokant įnašus, esant 6% metinių palūkanų, skolos likučius grąžinant paskolą anuitetų ir linijiniu metodu, tai gausime vaizdą pavaizduotą paveiksle 18.



18 pav. Anuitetų ir linijinio metodų skolos likučių palyginimas.

Matome, kad anuitetų metodo likutis kiekvieną periodą (aišku, išskyrus pirmą ir paskutinį) yra didesnis nei linijinio metodo. Todėl anuiteto metodo atveju rizika, kad negrąžins skolos yra didesnė. Šiuo požiūriu linijinio metodo paskola yra patrauklesnė skolintojui.

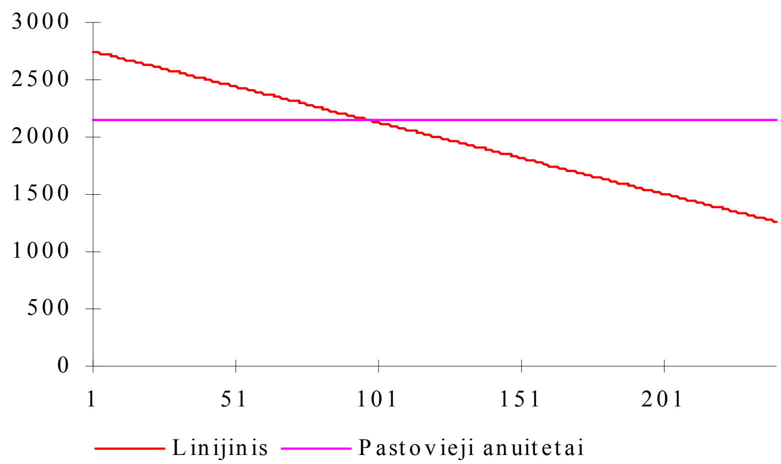
Palūkanų normos rizika, tai dydis charakterizuojantis, finansinio instrumento vertės jautrumą rinkos palūkanų normos kitimui. Linijinio metodo atveju yra mažesnė palūkanų normos rizika lyginant su anuitetų metodu. Jeigu rinkos palūkanų normos pakyla, tai paskolų vertė krinta, kadangi skolintojas sudarė sutartį su fiksuota, žemesne palūkanų norma. Jeigu palūkanų normos krenta, tai paskolos vertė kyla, nes sutarties palūkanų norma yra didesnė nei rinkos. Tačiau, dėl išankstinio grąžinimo rizikos, šių paskolų vertė nebūtinai išaugs skolintojui. Skolininkas ryšis grąžinti paskolą anksčiau nustatyto termino, jei dabartinė vertė būsimų mokėjimų, diskontuotų sutarties palūkanų norma (skolos likutis), viršys mokėjimų vertę diskontuotų rinkos palūkanų norma, atskaičius išankstinio grąžinimo bei kitas skolintojo nustatytas baudas.

Kadangi palūkanų dalis likusiuose mokėjimuose anuitetų metodo atveju yra didesnė nei linijinio metodo atveju, tai didesnė tikimybė, kad skolininkas ryšis grąžinti paskolą anksčiau nustatyto termino anuitetų metodo atveju, nukritus palūkanų normoms. Taigi linijinio metodo atveju yra mažesnė išankstinio grąžinimo tikimybė.

Linijinio metodo atveju skolintojas išlošia dėl to, kad yra mažesnės negrąžinimo ir palūkanų normos rizikos, bet skolininkas susiduria su didesne nuokrypio problema.

II.6.PUSIAUSVYROS PERIODAS

Prieš tai nagrinėtose situacijose matėme, kad paskolos termino pradžioje kintamų anuitetų įmokos yra didesnės, nei pastoviųjų anuitetų, tačiau laikui bėgant jos mažėja ir paskolos termino pabaigoje jau būna mažesnės, nei pastoviųjų anuitetų įmokos. Tuo tarpu vieno periodo grąžinamos skolos sumos paskolos termino pradžioje yra didesnės linijinio metodo atveju, o pabaigoje – pastovių anuitetų metode. Šiame skyrelyje nustatysime tuos paskolos termino periodų numerius, pradedant kuriais linijinio metodo įnašai tampa didesni už pastovių anuitetų įnašus, o grąžinamos skolos sumos – mažesnėmis nei pastovių anuitetų grąžinamos sumos.



19 pav. Pastovių ir kintamų anuitetų metodų įnašų palyginimas.

300000,00 Lt skolos grąžinamos per 20 metų ir esant 6% metinei palūkanų normai, abiejų metodų įnašų situaciją vaizduoja 19 paveikslas.

Kaip matome 19paveiksle, pradžioje linijinio metodo įnašai yra didesni, praėjus tam tikram laikui, jie susilygina ir tampa mažesni už atitinkamus pastoviųjų anuitetų įnašus. Įdomu sužinoti, kiek laiko turi praeiti nuo paskolos termino pradžios, kad anuitetų įmoka taptų didesnė nei linijinio metodo. Todėl dabar ir nustatysime metodų įnašų pusiausvyros periodą, t. y. kiek periodų praėjus metodų įmokos susilygins. Turime spręsti lygybę

$R^a = R_m^l$,

čia m – ieškomo periodo numeris.

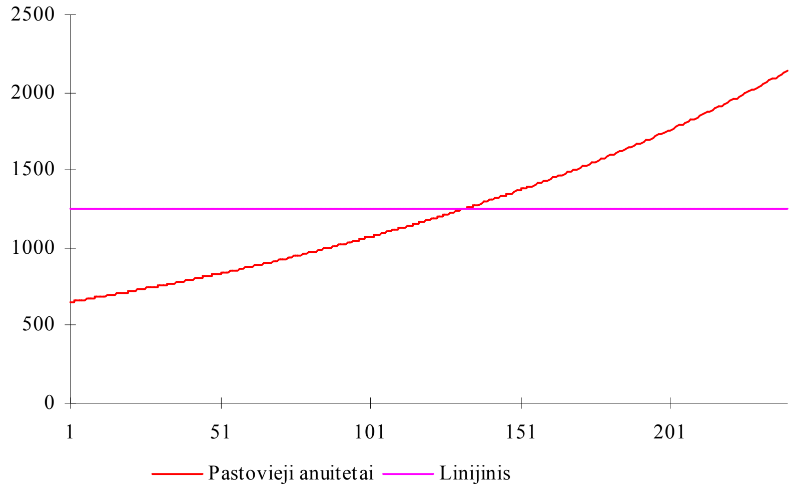
Pasinaudosime dydžių R^a ir R_m^l išraiškomis (5) ir (50). Turime lygtį

$$\frac{A \cdot i}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{A}{n} \cdot \left(1 + i \cdot n - i \cdot (m-1)\right)$$

Išsprendę ją m atžvilgiu, gausime

$$m = n + 1 + \frac{1}{i} - \frac{n}{1-(1+i)^{-n}} \qquad (65)$$

20 metų trukmės, 6% metinės palūkanų normos mėnesio grąžinamų skolos dalių keitimasis 20 pav.



20 pav. Pastovių ir kintamų anuitetų grąžinamu skolos sumų palyginimas.

Pagal 20 pav. duomenis, paskolos termino pradžioje didesnės skolos sumos yra grąžinamos linijiniu metodu, praėjus tam tikram laikui didesnės yra pastovių anuitetų sumos. Tad ir šiuo atveju nustatysime pusiausvyros periodą grąžinamoms skolos sumoms. Sprendžiame lygtį

$$P_k^a = P^l$$

čia k – ieškomo periodo numeris

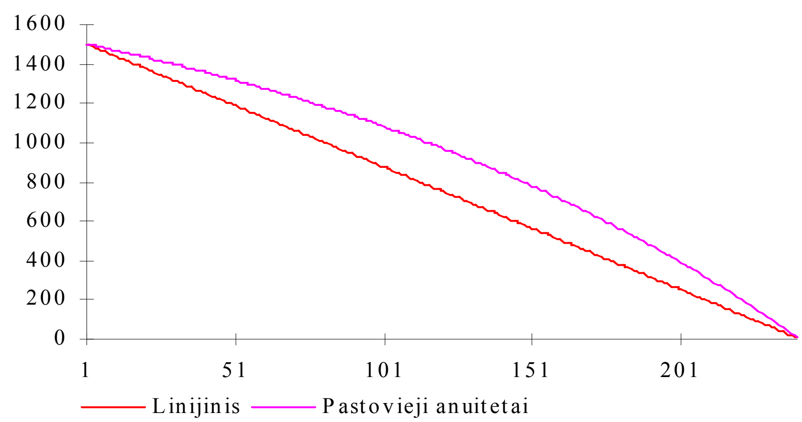
Įrašę (10^c), (5) ir (46) išraiškas į lygybę gausime lygtį

$$\frac{A}{1-(1+i)^{-n}} \cdot (1+i)^{-n+k-1} = \frac{A}{n}$$

kurią išsprendę k atžvilgiu turėsime

$$k = \frac{\ln\left((1+i)^n - 1\right) - \ln(n \cdot i)}{\ln(1+i)} + 1 \qquad (66)$$

Jeigu m ir k nebus sveiki skaičiai, tai skaičiuodami apvalinsime iki didesnio sveiko skaičiaus. Pavyzdžiui, jeigu gautume, kad m yra tarkim 33,01, tai imsime m lygų 34.



21 pav. Pastovių ir kintamų anuitetų metodų palūkanų sumų palyginimas.

Paveiksle 21 matome, kad tik pirmąjį paskolos termino periodą palūkanų sumos sutampa. Situacija paaiškėja prisiminus kaip palūkanos yra skaičiuojamos. Abiem atvejais palūkanos skaičiuojamos nuo skolos likučio, kadangi pirmo periodo palūkanos skaičiuojamos nuo pradinės skolos sumos, kuri yra vienoda abiem metodais, todėl palūkanų sumos ir sutampa. Prisiminę prieš tai skyrelyje nagrinėta situaciją su skolos likučiais, matėme, kad pastoviųjų anuitetų skolos likutis yra didesnis už atitinkamą kintamų anuitetų skolos likutį per visą paskolos terminą. Todėl ir palūkanos pastovių anuitetų yra didesnės už kintamų anuitetų palūkanų sumas. Termino pabaigoje, palūkanų sumos yra beveik lygios.

Panagrinėkime pavyzdį.

9 pavyzdys. 300000 Lt skola grąžinama kas mėnesį mokant įnašus per 20 metų, esant 6% metinei palūkanų normai.

Apskaičiuosime paskolos grąžinamos abiem metodais įnašų ir grąžinamų sumų pusiausvyros periodus. Pasinaudoję (65), gausime, kad įnašų pusiausvyros periodas

$$m = 241 + \frac{1}{0{,}005} - \frac{240}{1 - 1{,}005^{-240}} = 97{,}11$$

Taigi praėjus 98 periodams, arba 8 metams ir 2 mėnesiams nuo paskolos termino pradžios pastoviųjų anuitetų įnašas (2149,29 Lt) taps didesnis nei kintamų (2143,75 Lt).

Iš (66) gausime, kad

$$k = \frac{\ln\left(1{,}005^{240} - 1\right) - \ln\left(240 \cdot 0{,}005\right)}{\ln 1{,}005} + 1 = 132{,}33$$

Taigi pastovių anuitetų grąžinama skolos suma taps didesnė už linijinio metodo grąžinamą sumą ne anksčiau, nei praėjus 133 periodams arba 11 metų ir 1 mėnesiui nuo paskolos termino pradžios.

10 pavyzdys. 300000 Lt skola grąžinama kas mėnesį mokant įnašus per 30 metų, su 4% metine palūkanų norma.

Šiuo atveju įmokų pusiausvyros periodas bus

$$m = 361 + \frac{1}{0{,}0033} - \frac{360}{1 - 1{,}0033^{-360}} = 142{,}7 \approx 143$$

Po 11 metų ir 11 mėnesių linijinio metodo įmoka taps mažesnė nei pastovių anuitetų. Grąžinama suma pastovių anuitetų metodo atveju nuo 199 periodo taps didesnė už kintamų anuitetų, nes

$$k = \frac{\ln\left(1{,}0033^{360} - 1\right) - \ln\left(360 \cdot 0{,}0033\right)}{\ln 1{,}0033} + 1 = 198{,}09 \approx 199$$

Matome, kad 10 pavyzdžio paskolos sąlygomis pastovių anuitetų įmoka ir grąžinamos skolos dalis taps didesnės už kintamų anuitetų įnašą ir grąžinamą dalį vėliau, nei 9 pavyzdyje. Be to skirtumas tarp įnašų pusiausvyros periodų (45 periodai) yra mažesnis nei tarp grąžinamos skolos dalių pusiausvyros periodų (66 periodai). Taigi grąžinamų skolos dalių pusiausvyros periodas jautriau reaguos į paskolos sąlygų keitimą.

Pastebėsime, kad grąžinamų skolos sumų pusiausvyros periodas yra vėliau nei įnašų.

III.LENGVATINIS PERIODAS

Nagrinėdami pastoviųjų ir kintamų anuitetų metodus, matėme, kad vienas šių paskolų bruožų yra tai, kad susiduriama su nuokrypio problema. Aišku, tuomet, kai infliacijos tempai, o kartu ir palūkanų normos yra stabilios ir žemos, nuokrypio problemos galima nepaisyti. Priešingu atveju, nagrinėti paskolų grąžinimo metodai gali būti labai brangūs dėl tikėtinos infliacijos. Jeigu tikimąsi aukšto infliacijos tempo, tai tuomet, kad kompensuoti įnašų perkamosios galios praradimą, pirmųjų įnašų reali vertė, termino pradžioje, yra didžiausia, kai tuo tarpu skolininko pajamos, tikėtina, kad bus mažiausios. (Tas ypač svarbu žmogui, kuris grąžina paskolą linijiniu metodu, kur nuokrypio problema yra aštresnė nei pastoviųjų anuitetų metode.) Todėl siekiant palengvinti skolininkui pirmųjų mokėjimų naštą ir sušvelninti nuokrypio problemą yra suteikiamas lengvatinis periodas. Paskolos su lengvatiniu periodu padeda sumažinti šią nuokrypio problemą. Pagrindinis skirtumas tarp lengvatinio periodo paskolų ir standartinių metodų (pastoviųjų ir kintamų anuitetų metodų) yra įnašų apskaičiavime. Įnašai lengvatinio periodo paskolos atveju pirmaisiais paskolos termino periodais yra mažesni, nei, kad jie būtų atitinkamose standartinėse paskolose, tačiau vėlesnieji (tuomet, kai manoma skolininko pajamos jau turėtų išaugti) paskolos su lengvatiniu periodu - viršija standartinių metodų įnašus.

Šiame skyrelyje aptarsime pastovių ir kintamų anuitetų metodų lengvatinius periodus. Pastoviųjų anuitetų atveju nagrinėsime, tik tokius lengvatinius laikotarpius, kai įmokos per juos didės arba aritmetine, arba geometrine progresija. Kintamų anuitetų atveju nagrinėsime paskolą su lengvatiniu periodu, kuri turi savo pavadinimą – Elastingas kreditas.

III.1. PASTOVIŲJŲ ANUITETŲ METODO LENGVATINIAI PERIODAI

Lengvatinio periodo, kaip ir standartinės paskolos yra ilgalaikės ir pilnai grąžinamos, kurių metu skolininkas moka įnašus (dažniausiai mėnesinius) skolintojui. Tačiau, priešingai, nei standartinėje pastoviųjų anuitetų paskoloje, kur įnašai yra pastovūs visą paskolos terminą, šiuo atveju, įnašai padidėja vieną ar kelis kartus, pagal tam tikrą dėsnį, per paskolos laikotarpį. Mes nagrinėsime tiktai atvejį, kai įmokos lengvatinio periodo metu, didės kas metai, kiekvienų sekančių metų pradžioje. Jeigu tiksliau, tai įnašai būna mažiausi paskolos pradžioje. Tada, praėjus tam tikram laikotarpiui (pavyzdžiui, metams), mėnesinių įnašų dydis padidėja ir tokio dydžio išlieka visus sekančius metus. Taip įnašai didėja per visą lengvatinį periodą, kuriam pasibaigus, išlieka stabilūs, visą likusį paskolos terminą. Įnašų atveju, per lengvatinį periodą mes turime laiptuotą funkciją, o pasibaigus lengvatiniam terminui - tiesę.

Įnašai per lengvatinį periodą gali kisti tiek geometrine, tiek ir aritmetine progresija. Šiuos atvejus ir panagrinėsime. Šiame skyrelyje mums prireiks tokių papildomų žymėjimų:

Q - pradinis įnašas;

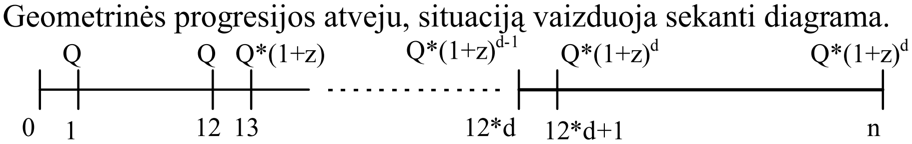
z - geometrinės progresijos vardiklis;

M - aritmetinės progresijos vardiklis;

d - lengvatinio periodo trukmė metais.

Tarsime, kad pirmaisiais termino metais kiekvieną periodą mokame po Q Lt dydžio įmoką. Po to, antrųjų metų pradžioje, įnašas padidėja vardikliu z geometrinės progresijos atveju arba M - aritmetinės progresijos atveju, ir visus antrus metus daugiau nekinta iki trečiųjų metų. Po to trečiųjų metų pradžioje ir vėl padidėja. Taip įmokos auga per visą lengvatinį periodą. Paskutinių d - tųjų metų pradžioje išaugęs įnašo dydis išlieka tokio pat dydžio visą likusį paskolos laikotarpį. Periodo įnašai padidės kas 12 mėnesių (periodų), nes laikysime, kad procentai priskaičiuojami ir įnašai mokami kas mėnesį.

Geometrinės progresijos atveju, situaciją vaizduoja sekanti diagrama.



Žinome, kad pradinė skolos suma A turi būti lygi visų mokėjimų dabartinių verčių sumai. Įnašų, kuriuos mokame pirmaisiais metais dabartinė vertė apskaičiuojama taip

$$A_1 = Q\cdot(1+i)^{-1} + Q\cdot(1+i)^{-2} + \ldots + Q\cdot(1+i)^{-12} = Q\cdot a_{\overline{12}|i}$$

Antrų metų įnašų dabartinė vertė

$$A_2 = Q\cdot(1+z)\cdot(1+i)^{-13} + Q\cdot(1+z)\cdot(1+i)^{-14} + \ldots + Q\cdot(1+z)\cdot(1+i)^{-24} = Q\cdot(1+z)\cdot(1+i)^{-12}\cdot a_{\overline{12}|i}$$

Ir t. t. Įmokų už d - tuosius metus dabartinė vertė

$$A_d = Q\cdot(1+z)^{d-1}\cdot(1+i)^{-(d-1)\cdot 12}\cdot a_{\overline{12}|i}$$

Likusių įnašų dabartinė vertė bus

$$A_{likę} = Q\cdot(1+z)^{d}\cdot(1+i)^{-12\cdot d}\cdot a_{\overline{n-12\cdot d}|i}$$

sudėję šias dabartines vertes ir sutvarkę, gausime tokį sąryšį tarp pradinės skolos sumos ir pradinio įnašo Q

$$A = Q\cdot\left(\frac{1-\left(\frac{1+z}{(1+i)^{12}}\right)^{d}}{1-\frac{1+z}{(1+i)^{12}}}\cdot a_{\overline{12}|i} + \left(\frac{1+z}{(1+i)^{12}}\right)^{d}\cdot a_{\overline{n-d\cdot 12}|i}\right) \tag{67}$$

Kadangi kiekvienais lengvatinio periodo metais įmokų dydžiai skiriasi, tai palūkanų sumą sumokamą per visą paskolos terminą, pastoviųjų anuitetų metodu, pagal (18) galime perrašyti kaip palūkanų sumokamų per lengvatinį periodą ir palūkanų – po lengvatinio periodo sumą. Lengvatinio periodo palūkanų suma yra

$$\begin{aligned} I_{lengv} &= Q\cdot\left(12-a_{\overline{12}|i}\right) + Q\cdot(1+z)\cdot(1+i)^{-12}\cdot\left(12-a_{\overline{12}|i}\right) + \ldots \\ &+ Q\cdot(1+z)^{d-1}\cdot(1+i)^{-(d-1)\cdot 12}\cdot\left(12-a_{\overline{12}|i}\right) \end{aligned} \tag{68a}$$

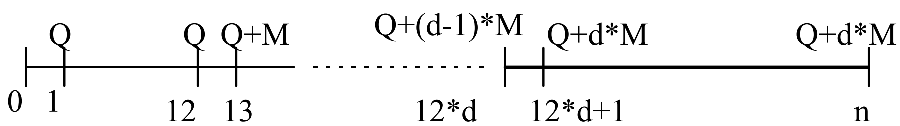
Palūkanos už likusį paskolos terminą bus

$$I_{likkę} = Q\cdot(1+z)^{d}\cdot(1+i)^{-12\cdot d}\cdot\left(n-12\cdot d-a_{\overline{n-12\cdot d}|i}\right) \tag{68b}$$

Taigi gausime

$$I = I_{lengv} + I_{likę} \tag{68c}$$

Aritmetinės progresijos atveju situacija bus tokia:



Šiuo atveju irgi panašiai gausime sąryšį tarp pradinės skolos sumos ir įnašo Q. Skaičiuojame pirmųjų metų įnašų dabartinę vertę

$$A_1 = Q\cdot(1+i)^{-1} + Q\cdot(1+i)^{-2} + \ldots + Q\cdot(1+i)^{-12} = Q\cdot a_{\overline{12}|i}$$

Antrų metų įmokų dabartinė vertė

$A_1 = (Q+M)\cdot(1+i)^{-13} + (Q+M)\cdot(1+i)^{-14} + \ldots + (Q+M)\cdot(1+i)^{-24} = (Q+M)\cdot(1+i)^{-12}\cdot a_{\overline{12}|i}$ Toliau skaičiuojame panašiai kaip ir geometrinės progresijos atveju. Apskaičiavę visų įnašų dabartines vertes jas sudedame, sutvarkome ir gauname tokią formulę

$$A = Q \cdot \left(a_{\overline{12}|i} \cdot \frac{1-(1+i)^{-d\cdot 12}}{1-(1+i)^{-12}} + (1+i)^{-d\cdot 12} \cdot a_{\overline{n-d\cdot 12}|i} \right) + M \cdot (1+i)^{-12} \cdot$$
$$\left(a_{\overline{12}|i} \cdot \left(1 + 2\cdot(1+i)^{-12} + 3\cdot(1+i)^{-24} + \ldots + (d-1)\cdot(1+i)^{-(d-2)\cdot 12}\right) + d\cdot(1+i)^{-(d-1)\cdot 12} \cdot a_{\overline{n-d\cdot 12}|i} \right) \quad (69)$$

Pasinaudoję (18) išraiška užrašysime iš viso už paskolą sumokamų palūkanų formulę. Kaip ir geometrinės progresijos atveju, iš viso už paskolą sumokamų palūkanų sumą sudarys dvi dalys: lengvatinio periodo palūkanos ir likusio paskolos termino palūkanos. Per lengvatinį periodą sumokama palūkanų

$$I_{lengv} = Q\cdot\left(12 - a_{\overline{12}|i}\right) + (Q+M)\cdot(1+i)^{-12}\cdot\left(12 - a_{\overline{12}|i}\right) + \ldots$$
$$+ (Q + (d-1)\cdot M)\cdot(1+i)^{-(d-1)\cdot 12}\cdot\left(12 - a_{\overline{12}|i}\right) \quad (70^{a})$$

Likusio laikotarpio palūkanos bus lygios

$$I_{likkę} = (Q + d\cdot M)\cdot(1+i)^{-12\cdot d}\cdot\left(n - 12\cdot d - a_{\overline{n-12\cdot d}|i}\right) \quad (70^{b})$$

Dabar panagrinėkime porą pavyzdžių.

11 pavyzdys. 300000,00 Lt paskolą reikia grąžinti per 20 metus kas mėnesį mokant įnašus ir priskaičiuojant palūkanas, esant 6% metinei normai. Paskola turi 5 metų lengvatinį laikotarpį, per kurį įnašai auga kas metai geometrine progresija su vardikliu 0,15.

Pasinaudoję šiame skyrelyje gauta formule (67), gausime, kad pradinis įnašas

$Q = 1222{,}96$ Lt

Taigi pirmuosius paskolos termino metus kiekvieną mėnesį mokėsime po sumą 1222,96 Lt. Apskaičiavę palūkanas už pirmą mėnesį pagal (9) formulę

$I_1 = 300000 \cdot 0{,}005 = 1500{,}00$ Lt

Matome, kad įnašo lėšų nepakanka padengti net pirmo mėnesio palūkanoms. Tokiu atveju skirtumas tarp įnašo ir palūkanų sumų yra pridedamas prie skolos likučio. Taigi turime skolos likučio padidėjimą. Tokia situacija yra vadinama neigiamu skolos padengimu arba neigiama amortizacija. Skolos likutis antrų metų pradžioje bus lygus

$B_2 = 300000 + 277{,}04 = 300277{,}04$ Lt

Kadangi visus pirmuosius metus įnašo dydis daugiau nedidės, tai po kiekvieno mokėjimo skolos likutis didės, savo ruožtu didės ir periodo palūkanų sumos. Antrųjų metų pradžioje įnašo dydis išauga

$1222{,}96 \cdot 1{,}15 = 1406{,}40$ Lt

Po 1406,40 Lt sumą mokėsime iki antrųjų metų pabaigos. Apskaičiavę skolos likučio dydį pirmųjų metų pabaigoje, gausime, kad skolos suma bus per vienerius metus išaugusi iki

$B_{12} = 303417{,}47$ Lt

Apskaičiavę antrų metų pirmo mėnesio palūkanas, gausime

$I_{13} = 303417{,}47 \cdot 0{,}005 = 1517{,}09$ Lt

Matome, kad dar ir antrųjų metų pradžioje tūrėsime neigiamą skolos grąžinimą, kadangi skirtumas tarp įnašo dydžio ir periodo palūkanų yra neigiamas.

Trečiųjų metų pradžioje skolos likutis bus išaugęs iki

$B_{24} = 304782{,}84$ Lt

Trečiaisiais termino metais įnašo dydis bus

$$1222{,}96 \cdot (1{,}15)^2 = 1617{,}36 \text{ Lt}$$

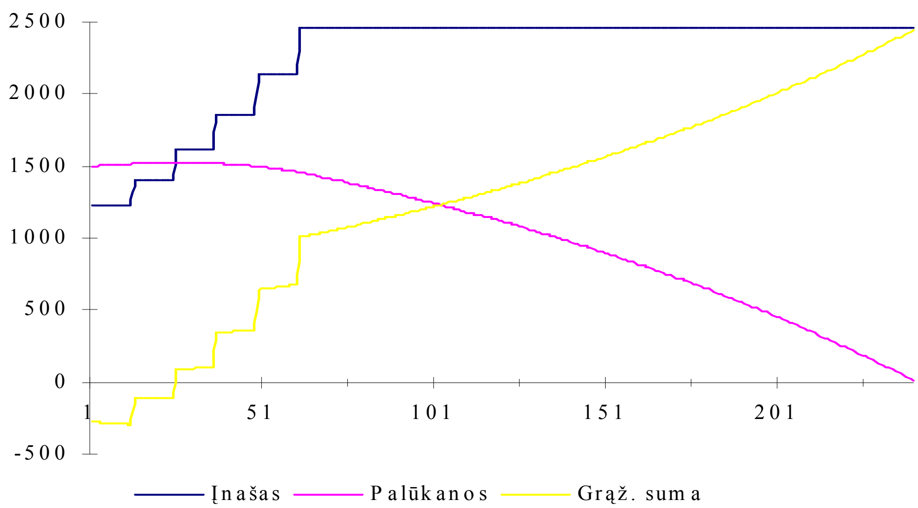
Palūkanų suma už pirmą trečiųjų metų periodą yra 1523,91 Lt. Taigi jau nuo trečiųjų metų mes pradėsime mažinti skolos likutį, kadangi įnašas jau yra išaugęs tiek, kad jo dydis yra pakankamas, kad ne tik padengtų palūkanas, bet ir būtų pradėta grąžinti išaugusi skolos suma.

Toliau įnašai kiekvienais metais padidėja 1,15 karto iki pat šeštų metų pradžios. Šeštaisiais metais išaugęs įnašas iki

$$1222{,}96 \cdot (1{,}15)^5 = 2459{,}81 \text{ Lt}$$

išlieka tokio pat dydžio iki paskolos termino galo.

Šios paskolos situacija vaizduojama paveiksle 22.



22 pav. Paskolos grąžinimas pastoviųjų anuitetų metodu, kai per lengvatinį periodą įnašai auga geometrine progresija.

Palyginę šią situaciją su situacija be lengvatinio periodo 12 pav., matome, kad skiriasi grąžinamos sumos, palūkanų, įnašų funkcijų elgesys tik laikotarpiu nuo 1 - jo iki 60 - jo periodų, t. y. tik per lengvatinį periodą. Pasibaigus lengvatiniam periodui funkcijų elgesys yra vienodas (aišku funkcijų reikšmės skiriasi, bet elgiasi jos taip pat). Po lengvatinio periodo, įnašai yra pastovūs, mėlyna tiesė paveiksle, grąžinamų skolos sumų funkcija yra išgaubta (per lengvatinį periodą ji buvo laiptuota), palūkanų - įgaubta ir mažėjanti (per lengvatinį periodą ji buvo didėjanti iki trečiųjų metų, o po to pradėjo mažėti).

Nuo trečiųjų metų skolos likutis daugiau nebeaugs ir pradės mažėti. Tačiau pradinę skolos sumą mes pradėsime grąžinti tik nuo 47 periodo, arba praėjus trims metams ir vienuolikai mėnesių, kadangi

$$B_{47} = 299774{,}73 \text{ Lt}$$

Jeigu lyginsime mėnesinių įnašų dydžius, tuo atveju kai nėra lengvatinio periodo, 2149,29 Lt, su šios paskolos įnašais, tai matysime, kad įnašai mokami per lengvatinį periodą yra mažesni, nei standartinės paskolos įnašas. Pasibaigus lengvatiniam terminui, paskolos su lengvatiniu periodu atveju mokėsime didesnius įnašus, t. y. po 2459,80 Lt kiekvieną periodą.

Apskaičiavę iš viso už paskolą sumokamas palūkanas, Pasinaudoję (68^a), (68^b), (68^c) gausime

$$I = 241712{,}65 \text{ Lt}$$

Palyginę su iš viso sumokama palūkanų suma be lengvatinio periodo, pagal (18)

$I_{belengv} = 215830{,}36\ \text{Lt}$

Matome, kad palūkanų suma dėl lengvatinio periodo išauga 25882,29 Lt.

Pastebėsime, kad šiuo atveju išauga ne tiktai palūkanų suma, bet ir skolos suma, dėl paskolos termino pradžioje buvusio neigiamo skolos padengimo.

12 pavyzdys. 300000,00 Lt paskolą reikia grąžinti per 20 metus kas mėnesį mokant įnašus ir priskaičiuojant palūkanas, esant 6% metinei normai. Paskola turi 5 metų lengvatinį laikotarpį, per kurį įnašai auga kas metai aritmetine progresija su vardikliu 200.

Pagal (69) formulę, gauname, kad pradinio įnašo dydis yra

$Q = 1380{,}50\ \text{Lt}$

Pirmuosius termino metus mokėsime po 1380,50 Lt kas mėnesį. Apskaičiavę pirmojo mėnesio palūkanas pagal (9) formulę

$I_1 = 300000 \cdot 0{,}005 = 1500{,}00\ \text{Lt}$

matome, kad ir vėl kaip ir geometrinės progresijos atveju turime neigiamą skolos grąžinimą. Skolos likutis po pirmųjų metų bus išaugęs iki

$B_{12} = 301474{,}13\ \text{Lt}$

Visus antruosius metus mokėsime po

$1380{,}50 + 200 = 1580{,}50$

Apskaičiavę pirmojo antrų metų mėnesio palūkanas

$I_{13} = 301474{,}13 \cdot 0{,}005 = 1507{,}37\ \text{Lt}$

gausime, kad įnašas yra jau pakankamai didelis, kad būtų pradėta grąžinti skola. Taip po 200 Lt augs kiekvienų sekančių metų įnašo dydis iki pat šeštųjų metų. Šeštų pradžioje išaugusi įmoka iki

$1380{,}50 + 5 \cdot 200 = 2380{,}50\ \text{Lt}$

išliks nepakitusio dydžio iki termino pabaigos. Jeigu lyginsime įnašų dydžius su paskolos be lengvatinio periodo įnašo dydžiu 2149,29 Lt, tai ir vėl matome, kad per lengvatinį periodą nors ir didėja įmokos, bet jos yra mažesnės nei standartinės paskolos atveju. Pasibaigus lengvatiniam laikotarpiui, standartinės paskolos įmoka jau tampa mažesnė, lyginant su lengvatinio periodo paskolos įnašu.

Šiuo atveju, pradinę skolą pradėsime grąžinti tik nuo 27 - jo periodo, arba praėjus dviem metams ir trim mėnesiams nuo paskolos termino pradžios, kadangi skolos likutis

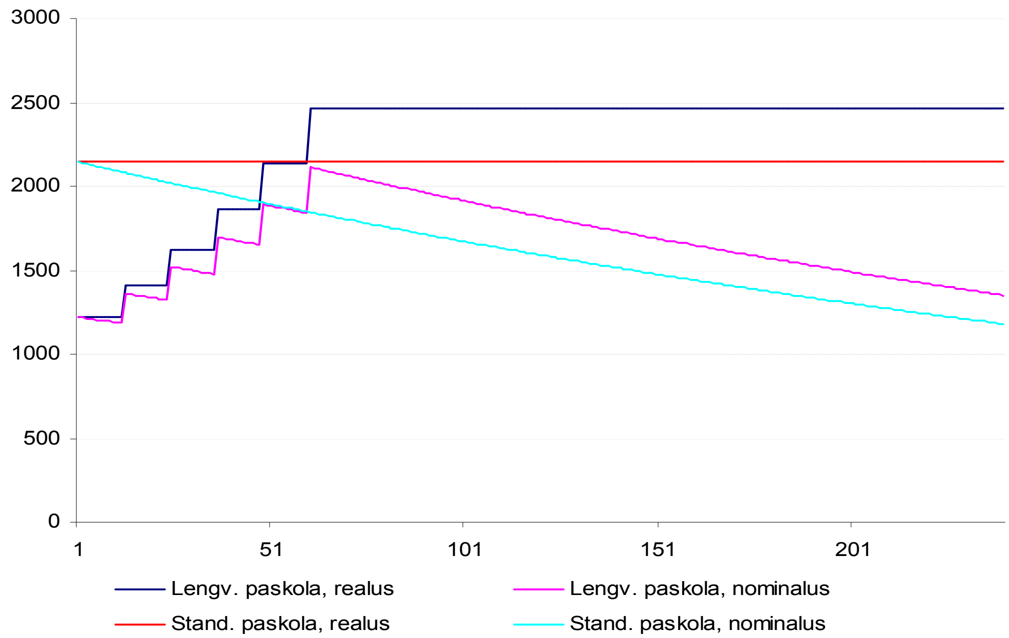
$B_{27} = 299734{,}97\ \text{Lt}$

Aritmetinės progresijos atveju, iš viso už paskola sumokama palūkanų suma, pagal (68^c), (70^a), (70^b) išauga iki

$I = 235319{,}50\ \text{Lt}$

kuri lyginant su standartinės paskolos palūkanų suma yra 19489,14 Lt didesnė.

Pradžioje buvo minėta, kad lengvatinis periodas sušvelnina nuokrypio problemą. Nuokrypio problema šiose paskolose šiek tiek skiriasi nuo nuokrypio problemos standartinėse pastoviųjų anuitetų paskolose. Nominalūs įnašai per lengvatinį periodą kyla staigiai (laiptine funkcija), tuo tarp realūs kyla nedaug. 23 paveiksle vaizduojama 10 pavyzdžio sąlygomis, lengvatinio periodo ir atitinkamos be lengvatinio periodo paskolos įnašų realių ir nominalių verčių palyginimas, kai metinis infliacijos tempas 3%.



23 pav. Paskolos su lengvatiniu periodu ir standartinės paskolos įnašų realios ir nominalios verčių palyginimas.

Paveiksle 23 matome, kad lengvatinės paskolos atveju nuokrypio problema yra ne tokia didelė nei standartinės paskolos atveju. Lengvatinės paskolos įnašų po lengvatinio periodo reali vertė yra didesnė, nei standartinės paskolos atitinkamų įnašų realioji vertė, kadangi nominalūs įnašai po lengvatinio periodo yra didesni.

Pavyzdžiuose susidūrėme su vienu neigiamu šių paskolų bruožu neigiamu skolos padengimu pirmaisiais paskolos termino metais, ko pasekmė yra padidėjusi skolos suma, t. y. tenka grąžinti didesnę skolos sumą. Nagrinėtuose pavyzdžiuose, geometrinės progresijos atveju tenka grąžinti 4782,84 Lt, o aritmetinės progresijos atveju 1474,13 Lt didesnes sumas. Tuo pačiu tolsta pradinės skolos padengimo pradžia. Matėme, kad geometrinės progresijos atveju, pradinė skolos suma (300000 Lt) pradedama grąžinti tik nuo 47 periodo, o aritmetinės - nuo 27 periodo. Aišku galima išvengti šio neigiamo skolos padengimo. Nagrinėtų paskolų sąlygomis tereikėtų sumažinti progresijų vardiklius z ir M, arba sumažinti paskolos palūkanų normą i, arba sutrumpinti paskolos trukmę n, arba sutrumpinti lengvatinio periodo trukmę 12*d. Tačiau bet kuris iš siūlomų pakeitimų sumažintų iš viso už paskolą sumokamų palūkanų sumą.

Pagrindinė sąlyga, kuri turi būti patenkinta siekiant išvengti neigiamo skolos padengimo yra

$Q \geq I_1$,

t. y. pradinis inašas turi būti ne mažesnis nei pirmo periodo palūkanos. Geometrinės progresijos atveju, išsireiškę Q iš (67) formulės, įsirašę į nelygybę ir sutvarkę turėsime

$$\frac{1-\left(\frac{1+z}{(1+i)^{12}}\right)^{d+1}-\frac{1}{(1+i)^{12}}\cdot\left(1-\left(\frac{1+z}{(1+i)^{12}}\right)^{d}\right)}{1-\frac{1+z}{(1+i)^{12}}}-\frac{(1+z)^{d}}{(1+i)^{n}}\leq 1$$

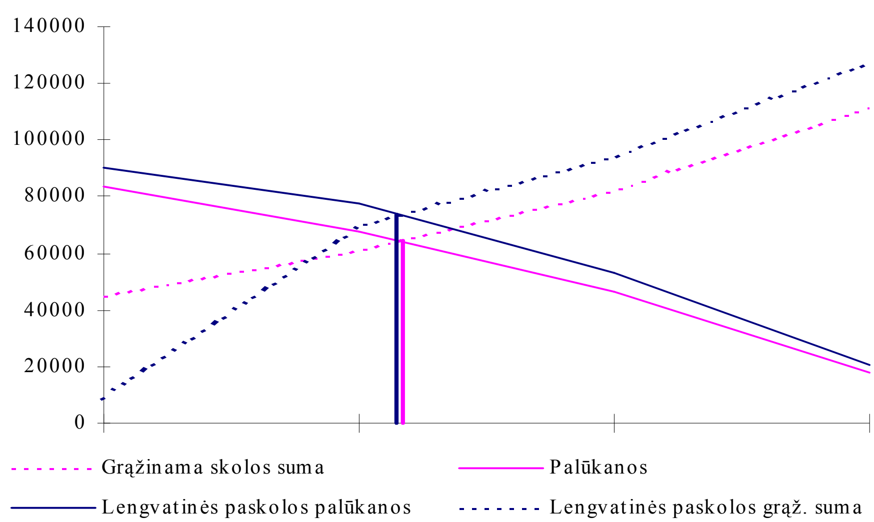
Jeigu parinksime z, d, n ir i taip, kad būtų tenkinama gautoji neligybė, tai tuomet neturėsime neigiamo skolos padengimo. Įsirašę pavyzdžio 10 duomenis, gausime, kad kairioji neligybės pusė yra lygi 1,2265. Taigi nelygybė netenkinama ir todėl turėjome paskolos termino pradžioje neigiamą paskolos padengimą.

Panašiai galime gauti nelygybę ir aritmetinės progresijos atveju, tereikia pasinaudoti (69) formule.

Kokios lengvatinio periodo paskolos pasekmės skolintojui? Visų pirma, dėl neigiamo skolos padengimo, išaugusi skolos suma didina riziką, kad skolininkui nepavyks grąžinti skolos. Siekdami sumažinti šią riziką, skolintojai prašo šiek tiek didesnio pradinio įnašo. Ironiška, bet tas laimėjimas, kurį skolininkas gauna mokėdamas mažesnius pradinius įnašus yra kompensuojamas skolintojui tuo, kad paskolos gavėjas turi sumokėti daugiau paskolos sudarymo momentu. Taip pat skolininkas susiduria ir didesne palūkanų normos rizika, nei standartinės paskolos atveju. Lengvatinio periodo tipo paskolos yra jautresnės palūkanų normos kitimui nei pastoviųjų anuitetų metodo paskolos. Jeigu palūkanų normos pakyla virš sutarties palūkanų normos, tai paskolos su lengvatinio periodu vertė, tikėtina, kad nukris labiau nei standartinės paskolos, esant tokio pat dydžio pradinei skolai. Kadangi termino pradžioje, lengvatinio periodo paskolos atveju mes turime skolos likučio didėjimą. Skolintojas, kad kompensuotų šiuos nuostolius, gali nustatyti šiek tiek aukštesnę palūkanų normą, nei kad būtų standartinės paskolos atveju.

Dabar pažiūrėkime koką įtaką lengvatinis periodas turi tiems periodams, pradedant kuriais grąžinamos skolos suma įmokoje tampa didesnė už periodo palūkanas ir skolos likutis tampa mažesnis už pusę pradinės skolos sumos. Aišku, kad dėl neigiamo skolos padengimo paskolos termino pradžioje laiko momentas, kai bus grąžinta pusė skolos tols, t. y. lengvatinės paskolos atveju pusę skolos grąžinsime vėliau nei standartinės pastoviųjų anuitetų paskolos atveju.

Norėdami sužinoti, kaip elgsis laiko momentas pradedant kuriuo palūkanos tampa mažesnės už grąžinamą sumą periodo įnaše pasinaudosime 24 paveikslu.



24 pav. Periodų pradedant kuriais grąžinama suma tampa didesnė už palūkanas įmokoje, palyginimas lengvatinės paskolos, kai įmokos per lengvatinį laikotarpį auga geometrine progresija ir standartinės pastoviųjų anuitetų paskolos atvejais.

Paveiksle 24 vaizduojama 300000 Lt skolos padengimo su 6% metine palūkanų norma per 20 metų lengvatinės 5 metų paskolos, kai įmokos per lengvatinį laikotarpį auga geometrine progresija, mėlyna spalva, ir standartinės paskolos, be lengvatinio periodo, rausva spalva, atvejai. Stambesnė atitinkamos spalvos vertikali linija nurodo ieškomo periodo padėtį paskolos termine. Matome, kad dėl lengvatinio periodo tik šiek tiek anksčiau grąžinama suma taps didesnė už periodo palūkanas įmokoje, lengvatinės paskolos atveju.

III.2. KINTAMŲ ANUITETŲ METODO LENGVATINIS PERIODAS (ELASTINGAS KREDITAS)

Nagrinėdami linijinį metodą matėme, kad pirmieji mokėjimai yra labai dideli, o tai skolininkui yra neparanku. Siekiant sumažinti skolininkui pirmų mokėjimų naštą ir linijinio metodo atveju gali būti suteikiama lengvatinė paskola. Lengvatinio laikotarpio metu, daliniai skolos grąžinimai skaičiuojami ne nuo visos skolos sumos A. Pasibaigus lengvatiniam periodui, daliniai grąžinimai skaičiuojami skolos likutį padalijus likusiam paskolos terminui po lygiai.

Nagrinėsime tik 5 arba 10 metų trukmės lengvatinio laikotarpio paskolas, kai lengvatinio laikotarpio daliniai grąžinimai skaičiuojami nuo pusės skolos sumos, taip vadinama elastingą kreditą.

Per pirmus penkis ar dešimt metų daliniai kredito grąžinimai nustatomi lygiomis dalimis tik nuo pusės suteiktos paskolos sumos. Pasibaigus šiam periodui, kredito likutis išdalijamas lygiomis dalimis kas mėnesį, likusiam kredito terminui. Linijinio metodo atveju, visa kredito suma paskirstoma lygiomis dalimis visam kredito laikotarpiui. Elastingo kredito palūkanos skaičiuojamos lygiai taip pat kaip ir linijinio metodo atveju, nuo negrąžintos skolos sumos.

Vienu periodu grąžinamos skolos suma per lengvatinį laikotarpį

$$\overline{P} = P_k = \frac{A}{2 \cdot n} \qquad k = \overline{1, d} \tag{71}$$

Pastebėsime, kad šiuo atveju d reiškia visą lengvatinio periodo trukmę periodais. Pasibaigus lengvatiniam terminui, vienu periodu grąžinsime

$$P = P_k = \frac{A - d \cdot \overline{P}}{n - d} \qquad k = \overline{d + 1, n} \tag{72}$$

Skaičiuojant kiek iš viso už paskolą sumokame nuo p - ojo iki q - ojo periodų reikės išskirti trys galimus atvejus. Mums šiuo atveju svarbi laikotarpio nuo p - ojo iki q - ojo periodų vieta paskolos termine. Iškirsime tris atvejus:

a) tiek p, tiek ir q reikšmės patenka į lengvatinį periodą, t. y. $0<p+1<q\le d$;
b) tiek p, tiek ir q yra už lengvatinio periodo ribų, t. y. $d<p+1<q\le n$;
c) p patenka į lengvatinį periodą, o q yra už lengvatinio periodo, t. y. $0<p+1<d<q\le n$.

a) Todėl jeigu $0<p+1<q\le d$, tai įmokų suma pasinaudojus (71), bus

$$R_{p+1}^{q} = \sum_{k=p+1}^{q} R_k = \overline{P} \cdot \left(q - p + i \cdot (q-p) \cdot \left(1 - \frac{p+1+q}{2} \right) \right) + A \cdot i \cdot (q-p) \tag{73}$$

b) Jeigu $d<p+1<q\le n$, tai sumokėta suma už periodą nuo p+1 - jo iki q - ojo periodų, atsižvelgus į (72), bus

$$R_{p+1}^{q} = \sum_{k=p+1}^{q} R_k = (q-p) \cdot \left(P \cdot \left(1 + i \cdot (d+1) - \frac{p+1+q}{2} \right) - d \cdot \overline{P} \cdot i + A \cdot i \right) \tag{74}$$

c) Jeigu $0<p+1<d<q\le n$, tai sumokamą sumą sudarys dvi dalys, viena dalis bus nuo p - tojo iki d - tojo periodų, skaičiuojama panaudojus (71) išraišką, o kita bus nuo d - ojo iki q - ojo periodų panaudojus (72). Taigi tūrėsime

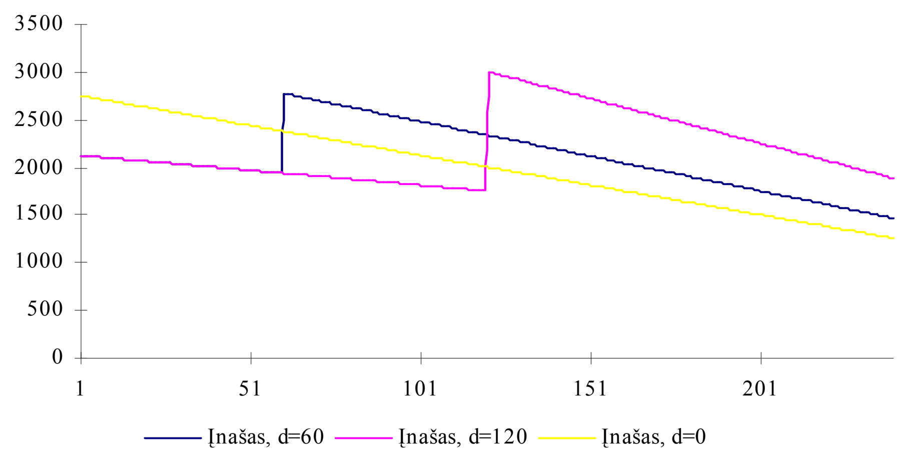
$$R_{p+1}^{q} = \sum_{k=p+1}^{d} R_k + \sum_{k=d+1}^{q} R_k = A \cdot i \cdot (q-p) + \overline{P} \cdot (d-p) \cdot \left(1 + \frac{1-p-d}{2} \cdot i\right) + + (n-d) \cdot \left(P \cdot \left(1 + \frac{d+1-n}{2} \cdot i\right) - d \cdot \overline{P} \cdot i\right) \quad (75)$$

Dabar panagrinėkime pavyzdį ir palyginkime elastingą kreditą ir linijinį metodą.

13 pavyzdys. 300000,00 Lt skola turi būti grąžinta lygiomis dalimis per 20 metų esant 6% metinei palūkanų normai ir

a) 5 metų lengvatiniam periodui;
b) 10 metų lengvatiniam periodui;
c) be lengvatinio periodo.

Pasinaudoję gauta formule (71) gauname, kad per lengvatinį periodą mes grąžiname kiekvieną mėnesį tik po 625,00 Lt, o standartinio linijinio metodo atveju, pagal (46), po 1250 Lt. Kadangi visais trim atvejais skolos suma yra tokio pat dydžio, t. y. pirmųjų metų pradžioje skolos likučio dydžiai sutampa, tai sutaps ir palūkanų sumos sumokamos pirmuoju mokėjimu. Todėl aišku, kad dėl mažesniu grąžinamos vienu periodų skolos sumų mažesnius įnašus mokėsime abiejų lengvatinių paskolų atveju, beje pirmasis įnašas 5 metų lengvatinio laikotarpio paskolos bus tokio pat dydžio, kaip ir 10 metų lengvatinio periodo paskoloje. Panagrinėkime 25 paveikslą, kuriame pavaizduoti periodiniai mokėjimai kiekvienos paskolos atveju.



25 pav. Periodo įnašų palyginimas paskolos su 5 metų, 10 metų lengvatiniu laikotarpiu ir be lengvatinio laikotarpio atvejais.

Pastebėsime, kad kai d=12*5=60, t. y. turime 5 metų lengvatinį periodą, d=120 - 10 metų lengvatinį periodą, o d=0 - standartinį kintamų anuitetų metodą.

Paveiksle 25 matome, kad per pirmuosius 5 metus linijinio metodo įnašai yra didžiausi lyginant visų trijų paskolų įnašų dydžius. Beje, abiejų lengvatinių paskolų įmokų dydžiai sutampa. Kadangi kaip jau buvo minėta, vienu periodu grąžinamos skolos sumos dydis priklauso tik nuo pradinės skolos dydžio ir paskolos trukmės n, (o šie dydžiai abiejų lengvatinių paskolų atveju sutampa), tai sutaps ir vieno periodo grąžinama skolos suma per pirmuosius 5 paskolos termino metus. Aišku, kad tuomet sutaps ir atitinkami skolos likučiai, todėl sutaps ir pirmų penkių metų periodo palūkanų sumos, ko pasekmėje ir turime lygias įmokas.

Įnašų situacija keičiasi per sekančius 5 metus, t. y. per laikotarpį nuo 6 - tų iki 10 - tų metų. Lengvatinės 10 metų paskolos atveju, bei linijinio metodo atvejais ir toliau grąžiname per vieną periodą atitinkamai po 625,00 Lt ir 1250,00 Lt sumas. Tuo tarpu 5 metų lengvatinėje paskoloje lengvatinis terminas jau yra pasibaigęs ir vienu periodu grąžinamos skolos suma pagal (72) šokteli iki

$P = 1450{,}00$ Lt,

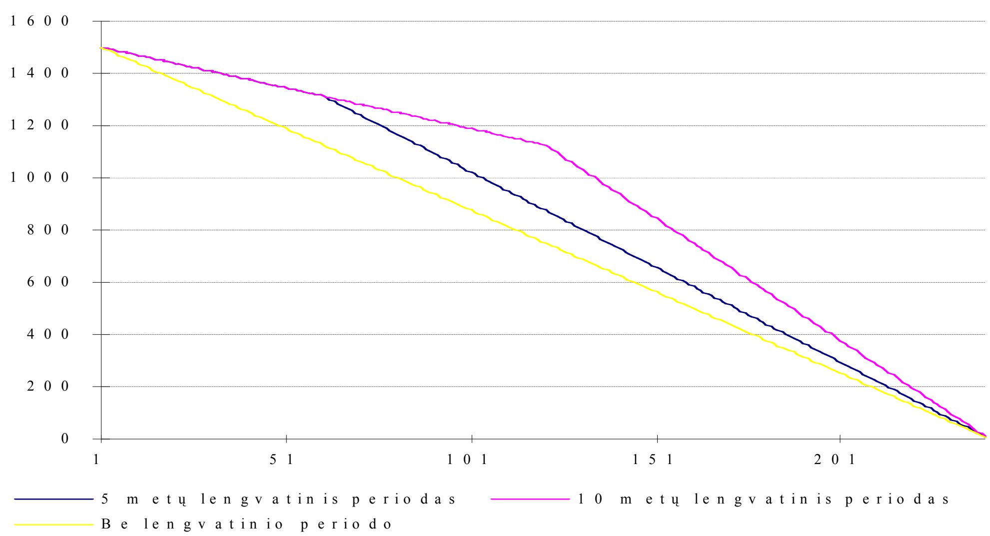
dėl to, šios paskolos atveju turime didžiausius įnašus lyginant su kitais dviem atvejais. Mažiausias įmokas ir tolia mokame lengvatinės 10 metų paskolos atveju.

Vėl situacija pasikeičia pradedant 11 paskolos termino metais, t. y. pasibaigus lengvatiniam laikotarpiui ir lengvatinėje 10 metų paskoloje. Lengvatinės 10 metų paskolos atveju, buvę patys mažiausi įnašai nuo 11 metų tampa didžiausiais, kadangi per vieną periodą grąžinamos skolos suma išauga pagal (72), iki

$P = 1850{,}00$ Lt

Tuo tarpu linijinio metodo įmokos paskolos termino pradžioje buvusios didžiausios, nuo vienuoliktų paskolos termino metų tampa mažiausiomis. Kaip matome paveiksle tokia situacija išlieka iki paskolos termino pabaigos.

Dabar panagrinėkime per vieną periodą sumokamas palūkanų sumas.



26 pav. periodo palūkanų sumų Elastingo kredito su 5 metų, 10 metų ir linijinio metodo atvejais, palyginimas.

Paveiksle 26, 1 - 5 - iais metais mažiausias palūkanų sumas mokėsime standartinio kintamų anuitetų metodo atveju, kadangi tuo laikotarpiu grąžinamos per vieną periodą skolos sumos šiame metode yra didžiausios, tuo pačiu skolos likutis pradedant antruoju periodu bus mažiausias lyginant su kitais dviem atvejais. Dėl vienodo dydžio periodo grąžinamų skolos sumų abiejų lengvatinių paskolų skolos likučiai kaip jau buvo minėta sutampa, tai aišku, kad sutaps ir periodo palūkanų sumos. Pastebime, kad kuo anksčiau pasibaigia lengvatinis periodas, tuo anksčiau išauga vieno periodo grąžinama suma, tuo mažesnes palūkanas pradedame mokėti. 6 - 10 - ais paskolos termino metais, lengvatinio 5 metų kredito atveju palūkanos jau yra mažesnės už atitinkamas 10 metų kredito palūkanas, bet vistiek, didesnės už linijinio metodo palūkanas. Pastebėsime, kad tik pasibaigus lengvatiniam periodui, palūkanų grafikai, elastingo kredito atveju, staigiau pradeda mažėti, t. y.

sumažėja kampas tarp palūkanų grafikų ir abscisių ašies. Linijinio metodo periodo palūkanos yra mažiausios per visą paskolos terminą, didžiausios - 10 metų elastingo kredito atveju.

Apskaičiuosime kiekvienu atveju iš viso už paskolą sumokamas sumas. Tam pasinaudosime (75), paėmę joje p lygų nuliui, o q lygų n, ir (58). Gausime, kad standartinės paskolos atveju yra

$S_{s\tan d} = 480750{,}00$ Lt

5 metų lengvatinis periodas padidina sumą iki

$S_{d=60} = 503250{,}00$ Lt,

o 10 metų - iki

$S_{d=120} = 525750{,}00$ Lt

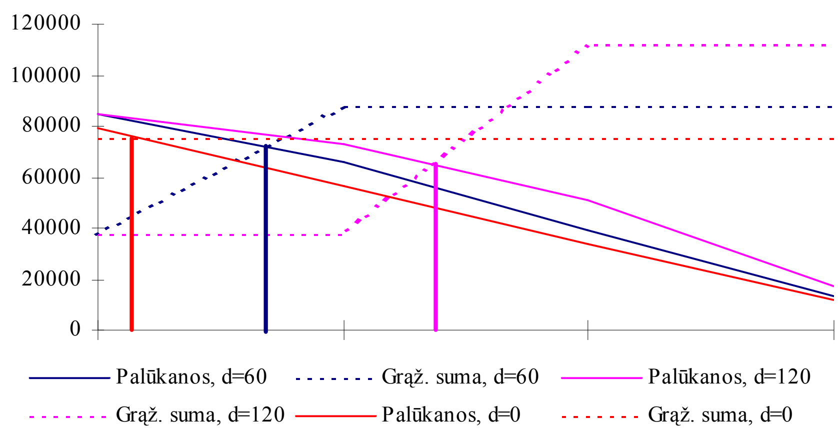
Kaip matome, lengvatinio periodo termino dydis turi įtakos už paskolą sumokamų sumų dydžiui. 5 metų lengvatinis periodas padidina sumokamą sumą 22500,00 Lt, o lengvatinis 10 metų laikotarpis net 45000,00 Lt lyginant su standartiniu linijiniu metodu.

Lengvatinio laikotarpio trukmė neturi įtakos per lengvatinį periodą vieno periodo grąžinamos skolos sumos dydžiui, t. y. daliniai skolos dydžiai per visą lengvatinį periodą yra tokio pat dydžio tiek ir 5, tiek ir 10 metų lengvatinio termino atveju.

Lyginant skolos likučius gausime vaizdą panašų į palūkanų paveikslą 26 (kadangi periodo palūkanos yra fiksuotos palūkanų normos ir skolos likučio sandauga).

Akivaizdu, kad dėl to kad per lengvatinį periodą grąžinamos per vieną periodą skolos suma yra skaičiuojama tik nuo pusės skolos sumos, tai periodas pradedant kuriuo busime grąžinę pusę skolos tols į dešinę lyginant su standartiniu kintamų anuitetų metodu. Kadangi standartinės paskolos atveju, mes buvome gavę, kad pusė skolos bus grąžinta po pusės paskolos termino, tai elastingo kredito atveju pusė skolos bus grąžinta antroje paskolos termino pusėje. Kuo ilgesnis bus lengvatinis terminas, tuo vėliau grąžinsime pusę skolos.

Nagrinėto pavyzdžio sąlygomis pasižiūrėsime, kokią įtaką lengvatinis laikotarpis turi tam paskolos termino periodui pradedant kuriuo periodo įnaše palūkanų suma tampa mažesnė už grąžinamos skolos sumas. Pasinaudosime 27 paveikslu.

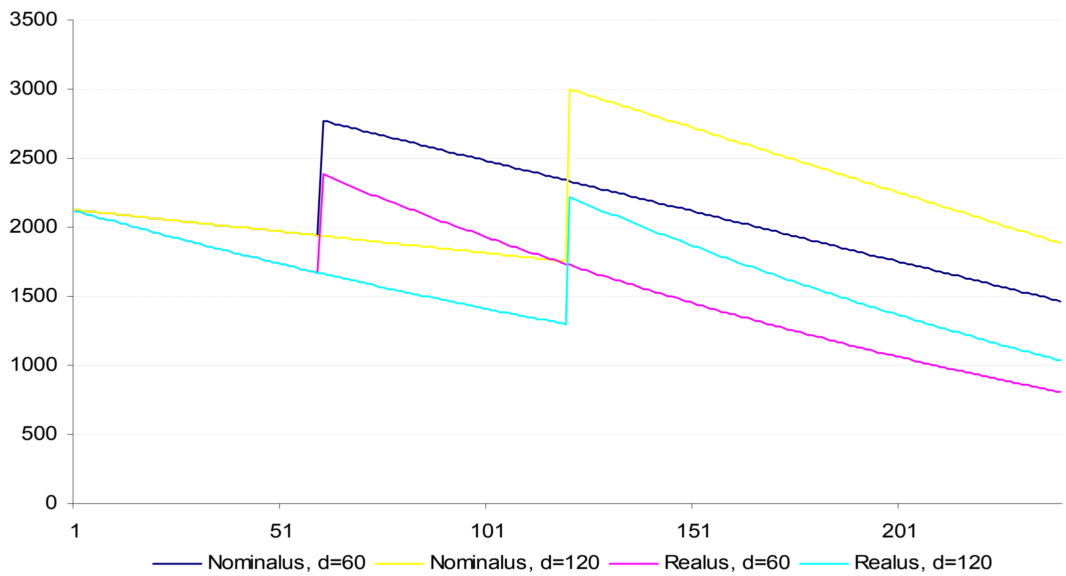


27 pav. Paskolų periodų, pradedant kuriais grąžinamos skolos suma įmokoje tampa didesnė už periodo palūkanas, palyginimas elastingo kredito su 5 metų, 10 metų ir linijinio metodo atvejais.

Paveiksle 27 storesne atitinkamos spalvos vertikalia linija nurodo nagrinėjamo periodo padėtį paskolos termine. Taigi anksčiausiai grąžinamos skolos suma taps didesnė už periodo palūkanas standartinio linijinio metodo atveju, raudona linija. Ilgėjant lengvatiniam periodui, laiko momentas, kai palūkanos taps mažesnės už periodo grąžinamas sumas tolsta į dešinę. Pastebėsime, kad

Elastingo kredito atveju, tik pasibaigus lengvatiniam laikotarpiui, grąžinama skolos suma periodo įmokoje iš karto tampa didesnė už periodo palūkanų sumą.

Elastingo kredito atveju, kaip ir lengvatinėje pastoviųjų anuitetų paskoloje, yra mažesnės nuokrypio problemos lyginant su standartinėmis paskolomis, šiuo atveju su linijiniu metodu. Kadangi paskutinieji įnašai yra didesni, nei linijinio metodo, tai ir jų reali vertė bus didesnė. Pažvelgę į 28 paveikslą, pastebėsime, kad nuokrypio problema skolintojui „švelnėja" ilgėjant lengvatiniam terminui. Paveiksle 26 matome 300000,00 Lt skolos padengimo situaciją, kai metinė palūkanų norma 6% (kuri apima 3% metinę infliaciją), paskolos terminas 20 metų, o įmokos mokamos kas mėnesį. Matome, kad paskutiniųjų įmokų reali vertė yra didesnė 10 metų lengvatinės paskolos atveju, nei 5 metų lengvatinės paskolos.



28 pav. Nuokrypio problema Elastingo kredito su 5 ir 10 metų lengvatiniais periodais.

Dabar palyginsime pastoviųjų anuitetų paskolą su lengvatiniu periodu, per kurį įmokos auga geometrine progresija, pastoviųjų anuitetų metodą be lengvatinio periodo, linijinį metodą ir elastingą kreditą. Nagrinėkime pavyzdį.

14 pavyzdys.300000 Lt skola grąžinama per 20 metų esant 6% metinei palūkanų normai, kas mėnesį mokant įnašus. Paskolos grąžinimo būdai:

a) elastingas kreditas su 5 metų lengvatiniu periodu;
b) standartinis linijinis metodas (be lengvatinio periodo);
c) anuitetų metodas su 5 metų lengvatiniu periodu (geometrinės progresijos vardiklis 0,15);
d) standartinis pastoviųjų anuitetų metodas (be lengvatinio periodo).

Norėdami palyginti šiuos keturis paskolos grąžinimo būdus pradėkime nuo periodo įmokų. Elastingo kredito atveju pradinė įmoka bus atsižvelgus į (71) lygi

$R_1^{elast} = 2125{,}00$ Lt

Standartinio linijinio metodo pradinis įnašas

$R_1^{lin} = 2750{,}00$ Lt

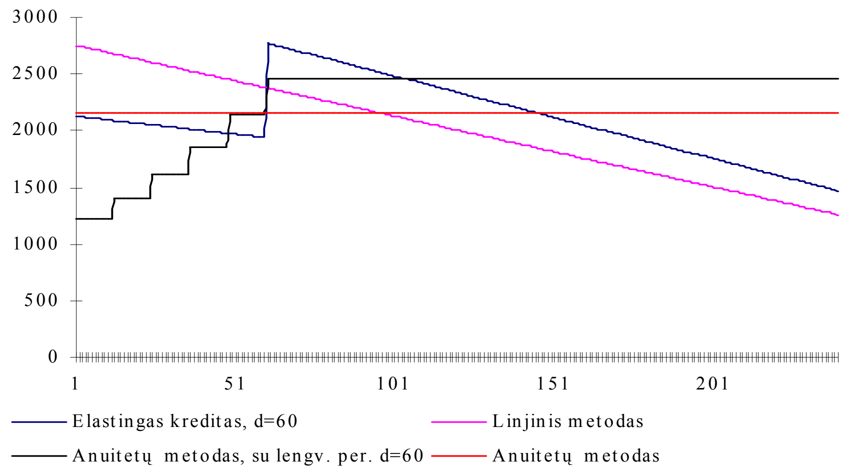
Lengvatinio pastoviųjų anuitetų metode bus

$R_1^{lengv,past} = 1222{,}96 \text{ Lt}$

Ir standartinio pastoviųjų anuiteto vieno periodo įmoka yra

$R^{past} = 2149{,}29 \text{ Lt}$

Matome, kad mažiausias pirmasis įnašas yra lengvatinio anuitetų metodo atveju. Sekančias įmokas galėsime palyginti pasinaudoję 29 paveikslu.

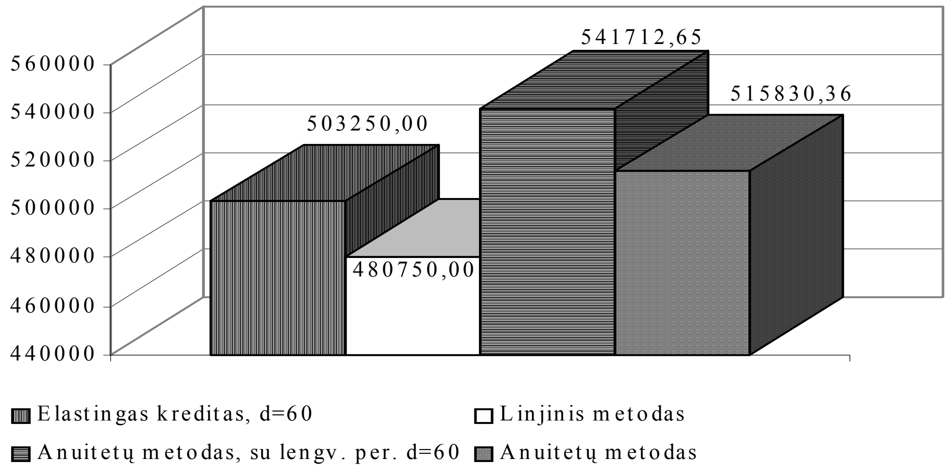


29 pav. Periodo įnašų palyginimas, elastingo kredito, lengvatinė pastoviųjų anuitetų ir standartinių pastoviųjų bei kintamų anuitetų paskolų atvejais.

Kaip matome, pradžioje mažiausi įnašai yra anuitetų metode su lengvatiniu periodu. Pirmieji standartinio anuitetų metodo ir elastingo metodo įnašai beveik sutampa, o toliau elastingo kredito įnašai mažėja, kai pastoviųjų anuitetų - nekinta. Pasibaigus lengvatiniam periodui, elastingo metodo įmokos tampa pačios didžiausios. Anuitetų metodo su lengvatiniu periodu, praėjus pirmiems penkiems paskolos termino metams - vis dar mažesni už linijinio metodo įnašus, bet didesni už standartinio pastoviųjų anuitetų metodo. Linijinio metodo įnašai pradžioje paskolos termino buvę didžiausi vėliau, pasibaigus lengvatiniam laikotarpiui, tampa mažesni už elastingo kredito įnašus ir lengvatinio anuitetų metodo įnašus, o nuo 98 - jo - ir už standartinio pastoviųjų anuitetų metodo įnašus. Taigi paskolos termino pabaigoje linijinio metodo įnašai yra mažiausi. Elastingo kredito įnašai, pasibaigus lengvatiniam periodui, pasiekę savo didžiausią reikšmę pradeda ir vėl mažėti nuo 104 - jo periodo tapdami mažesniais už lengvatinio anuitetų metodo, o nuo 147 - jo periodo - ir už standartinio pastoviųjų anuitetų metodo įnašus. Paskolos termino pabaigoje didžiausi yra lengvatinio anuitetų metodo įnašai.

Naudosimės paveikslo 29 duomenimis, kad nustatyti periodų įnašų pusiausvyros periodų elgesį. Lygindami standartinius anuitetų ir linijinį metodus matėme, kad periodo įnašų pusiausvyros periodas, t. y. laiko momentas pradedant kuriuo kintamų anuitetų įmoka tampa mažesnė už pastoviųjų anuitetų įmoką, yra lygus 98, o palyginę lengvatinį anuitetų metodą su elastingu kreditu gausime, kad pirmasis pusiausvyros periodas – 49 t. y. nuo 49 periodo elastingo kredito įmokos taps mažesnės už lengvatinio pastoviųjų anuitetų įmokas. Pasibaigus lengvatiniam terminui, lengvatinės pastovių anuitetų paskolos įnašas tampa vėl mažesnis už elastingo kredito, o nuo 104 periodo ir vėl lengvatinės pastoviųjų anuitetų paskolos įmoka tampa didesnė už elastingo kredito. Taigi dėl lengvatinio periodo turime net tris įnašų pusiausvyros periodus. Nagrinėdami tik anuitetų metodą ir elastingą kreditą matome, kad turime du pusiausvyros periodus. Pirmasis pusiausvyros periodas - 61, t. y. iš karto po lengvatinio periodo pabaigos. Antrasis, lyginant su kitais atvejais, bus toliausiai į dešinę pasislinkęs ir bus lygus 147, t. y. nuo 147 periodo pastoviųjų anuitetų įmoka taps didesne už elastingo kredito.

Norėdami palyginti kiekvienu atveju per visą paskolos terminą sumokamas sumas pasinaudosime (75), ($68^{a,b,c}$), (58) ir (17) formulėmis. Rezultatus vaizduoja 30 diagrama.



30 pav. Per visą paskolos terminą už paskolą sumokamų sumų palyginimas, Elastingo kredito, lengvatinės pastoviųjų anuitetų ir standartinių pastoviųjų ir kintamų anuitetų paskolų atvejais.

Paveiksle 30 matome, kad „brangiausias" skolininkui, šiuo atveju, yra pastoviųjų anuitetų metodas su lengvatiniu periodu, o „pigiausias" - linijinis metodas. Pastebėsime, kad šiuo atveju elastingas kreditas pareikalauja iš skolininko mažiau lėšų nei standartinis pastoviųjų anuitetų metodas, bet daugiau nei kintamų anuitetų paskola.

Lengvatinio anuitetų metodo privalumas šiuo atveju yra tas, kad paskolos termino pradžioje įnašai yra mažiausi, o anuitetų metodo - visą terminą įnašai yra pastovūs.

Pastebėsime, kad elastingo kredito atveju, skirtingai nei anuitetų metode su lengvatiniu periodu, įnašų, mokamų per lengvatinį periodą, dydžiui lengvatinio periodo dydis įtakos neturi.

Elastingo kredito ir lengvatinės pastoviųjų anuitetų paskolos privalumas skolininkui akivaizdus - mažesni pradiniai įnašai. Tai yra svarbu, nes paskolos termino pradžioje tikėtina, kad skolininkas neturės daug piniginių lėšų. Skolintojui šių metodų privalumas galėtų būti tas, kad yra šiek tiek sušvelninama nuokrypio problema. Kadangi paskutiniai įnašai yra didesni nei linijinio metodo atveju, tai ir jų dabartinės vertės bus didesnės.

Lengvatinio periodo paskolų pagrindinis trūkumas skolininkui - per paskolos terminą sumokama daugiau palūkanų nei atitinkamų paskolų be lengvatinio periodo atvejais. Sumokamų palūkanų suma priklauso ir nuo lengvatinio periodo dydžio. Lengvatinio periodo paskolų trūkumas skolintojui yra tas, kad jo dydis tolina momentą, kai bus grąžintą pusė paskolos sumos, t. y. lėtina pačios skolos grąžinimą, taip didindamas skolos negrąžinimo riziką vėlesniais termino periodais lyginant su atitinkamais standartiniais metodais.

Elastingo kredito ir lengvatinės pastoviųjų anuitetų paskolos atvejais yra susiduriama su didesne palūkanų normos rizika. Šio tipo paskolos bus jautresnės palūkanų normos kitimui nei standartinis pastoviųjų anuitetų ar linijinis metodas. Jeigu rinkos palūkanų norma pakils virš sutarties palūkanų normos, tai lengvatinių paskolų vertė (dėl didesnio atitinkamo periodo skolos likučio) nukris laibiau nei linijinio ar pastoviųjų anuitetų metodo paskolos vertė.

Lengvatinio periodo paskolas renkasi žmonės, kurie tikisi, kad jų pajamos ateityje kils, kadangi lengvatitinės paskolos atveju didesnes sumas tenka mokėti pasibaigus lengvatiniam terminui.

IV.KINTAMA PALŪKANŲ NORMA

Iki šiol visose nagrinėtose situacijose turėjome pastovią metinę palūkanų normą, t. y. palūkanų norma nekito per visą paskolos terminą. Tačiau, atsižvelgę, į bankų siūlomas paskolos suteikimo sąlygas, matome, kad gali būti taikoma fiksuota (arba kintama metų palūkanų norma, kuri nepriklauso nuo kredito laikotarpio ir nustatoma suteikiant kreditą, o vėliau kiekvienais metais koreguojama kas 3, 6 arba 12 mėnesių, atsižvelgiant į atitinkamos trukmės VILIBOR (Vilniaus Tarpbankinė Palūkanų Norma).

Kintamos palūkanų normos atveju palūkanų normą sudaro dvi dalys: pastovioji dalis, kurią nustato kiekvienas bankas ir ji nekinta, bei kintama dalis kuri ir yra koreguojama atsižvelgiant į VILIBOR arba LIBOR (Londono Tarpbankinė Palūkanų Norma). Per paskolos grąžinimo laikotarpį kintama palūkanų norma gali ir padidėti, ir sumažėti. Paprastai kintama palūkanų norma būna mažesnė už pastoviąją. Kintamoji norma gali per paskolos gražinimo laikotarpį smarkiai išaugti ir pralenkti pastovią normą, bet gali pastovios ir nepasivyti. Taigi paskolos su kintama palūkanų norma pasirinkimas susijęs su tam tikra rizika. Skolininkas ją renkasi tikėdamasis, kad kintama norma nepasivys pastovios, arba blogiausiu atveju bent jau jos nepralenks. Rinkdamasis pastovią metinę palūkanų normą skolininkas garantuoja sau, kad per visą skolos terminą palūkanų norma nesikeis.

Šiame skyrelyje apžvelgsime kintamos palūkanų normos atvejį tiek pastoviųjų, tiek ir kintamų anuitetų metoduose. Nagrinėsime atvejį, kai palūkanų norma per paskolos terminą tik augs, t. y. prasčiausią atvejį skolininko atveju. Kad būtų paprasčiau laikysime, kad palūkanų norma padidėja vienodu dydžiu kiekvienų metų pradžioje.

Lygindami du paskolų grąžinimo metodus mes, esant vienodoms paskolų suteikimo sąlygoms, grąžiname tokio pat dydžio skolą, tuomet skirtumas, tarp iš viso už paskolą, per visą paskolos laikotarpį, sumokamų sumų, atsiranda dėl sumokamų palūkanų sumų skirtumo. Todėl šiame skyrelyje ir išvesime tik formules palūkanoms.

Atsižvelgę į (45) paskolos trukmės išraišką, pastebėsime, kadangi paskola yra išduota M metų terminui, tai palūkanų norma per visą paskolos terminą augs M kartų. Įveskime tokius žymėjimus:

i_k - k - tųjų metų periodo palūkanų norma;

Δi - dydis, kuriuo padidėja periodo palūkanų norma;

R^k - k - tųjų metų periodo įmokos dydis;

I^k - palūkanų suma už k - tuosius metus.

Laikysime, kad palūkanų norma didėja kas metai, todėli vienerių metų periodo palūkanų norma galime apibrėžti taip

$$i_k = i_1 + (k-1)\cdot \Delta i \tag{76}$$

Už paskolą per visą terminą sumokamą palūkanų sumą sudarys M palūkanų sumų, t. y.

$$I = I^1 + I^2 + \ldots + I^M \tag{77}$$

Apskaičiuosime k - tųjų metų palūkanų sumos dydį. Pasinaudoję (9) formule turėsime, kad

$$I^k = \sum_{l=12\cdot(k-1)+1}^{12\cdot k} I_l = i_k \cdot R^k \cdot \sum_{l=12\cdot(k-1)+1}^{12\cdot k} a_{\overline{n-(l-1)}|i_k}$$

Sutvarkę išraiška, pasinaudoję geometrinės progresijos formule gausime, kad per k - tuosius metus sumokėsime palūkanų

$$I^k = R^k \cdot \left(12 - (1+i_k)^{-n+12\cdot(k-1)} \cdot a_{\overline{12}|i_k}\right) \tag{78}$$

Kintamų anuitetų atveju, kaip jau ne kartą buvo minėta, vieno periodo grąžinamos skolos sumos dydis nepriklauso nuo palūkanų normos dydžio, o priklauso tik nuo paskolos termino n, todėl vienu periodu grąžinamos skolos suma P bus tokio pat dydžio kaip ir kintamų anuitetų paskoloje pastovios palūkanų normos atveju. Kintama palūkanų norma neturi įtakos vieno periodo grąžinamos skolos sumos dydžiui. Pasinaudoję šiuo rezultatu galėsime apskaičiuoti ir palūkanų sumą sumokamą per k - tuosius metus.

Kintamų anuitetų atveju skaičiavimus atliksime panašiai, kaip ir pastoviųjų anuitetų metode, tik pasinaudosime (49) skolos likučio išraiška ir aritmetinės progresijos formule. K - taisiais metais sumokama palūkanų

$$I^k = \frac{6 \cdot i_k \cdot A}{n} \cdot \left(2 \cdot n - 24 \cdot k + 13\right) \tag{79}$$

Panagrinėsime konkrečią kintamos palūkanų normos situaciją tiek kintamų, tiek ir pastovių anuitetų metoduose.

15 pavyzdys. 300000,00 Lt paskolą reikia padengti per 20 metų kas mėnesį mokant skolos grąžinimo įnašus ir palūkanas. Paskola grąžinama

a) vienodais įnašais;
b) lygiomis skolos dalimis.

Sutarties sudarymo momentu buvo nustatyta 4,5% metinė palūkanų norma, kas metai ši metinė palūkanų norma padidėja po 0,1%.

Pradėkime nuo pastoviųjų anuitetų metodo. Sąlygoje duota, kad pirmųjų metų periodo palūkanų norma

$$i_1 = 0{,}00375$$

Grąžindami skolą vienodais įnašais pirmuosius paskolos termino metus pagal (5), mokėsime po sumą

$$R^1 = \frac{300000 \cdot 0{,}00375}{1 - 1{,}00375^{-240}} = 1897{,}95 \text{ Lt}$$

Palūkanos už pirmą mėnesį pagal (9) yra

$$I_1 = 300000 \cdot 0{,}00375 = 1125{,}00 \text{ Lt}$$

Paėmę įnašo ir pirmojo periodo palūkanų skirtumą, gausime, kad pirmuoju mokėjimu grąžiname sumą

$$P_1 = 1897{,}95 - 1125{,}00 = 772{,}95 \text{ Lt}$$

Toliau skaičiuojame panašiai kaip ir pastovios palūkanų normos atveju iki antrųjų metų pradžios. Antrų metų pradžioje padidėja metinė palūkanų norma dydžiu 0,1%, tada antraisiais termino metais periodo palūkanų norma bus

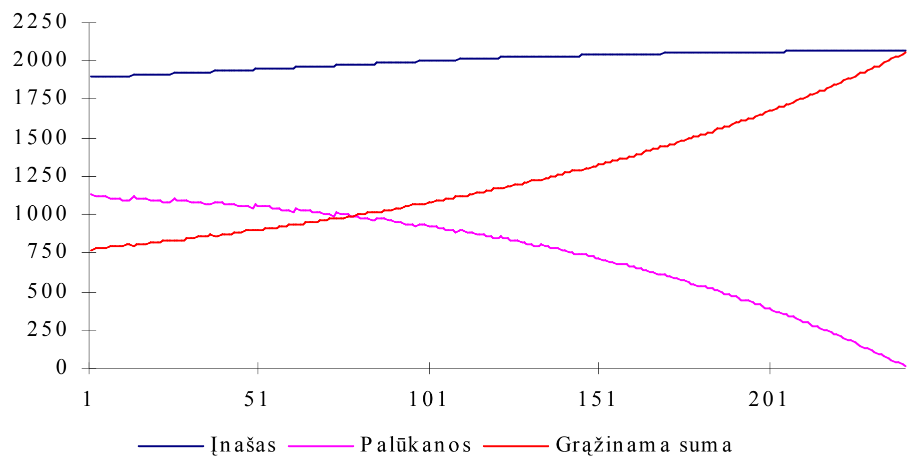
$$i_2 = 0{,}00375 + \frac{0{,}001}{12} = 0{,}0038$$

Vėl reikia perskaičiuoti periodo įmokos dydį. Naudosimės (5), paėmę joje vietoje pradinės skolos sumos A, skolos likutį po pirmųjų metų B_{12}, vietoje palūkanų normos i_1 palūkanų normą - i_2, o vietoje paskolos termino n, likusį paskolos terminą - n-12. Tuomet tūrėsime, kad

$$R^2 = \frac{B_{12} \cdot i_2}{1 - \left(1 + i_2\right)^{-n+12}} = 1913{,}50 \text{ Lt}$$

Toliau visi skaičiavimai atliekami kaip ir pirmaisiais paskolos termino metais, tik naudojant palūkanų normą i_2 iki trečiųjų metų. Trečiųjų metų pradžioje vėl padidiname palūkanų normą pagal (76), perskaičiuojame įmokos dydį. Taip skaičiuojame iki paskolos termino pabaigos.

Rezultatus pateiksime 31 paveiksle.



31 pav. Skolos padengimas vienodais įnašais, kintamos palūkanų normos atveju.

Paveiksle 31 matome, kad palūkanų ir grąžinamų skolos sumų funkcijų elgesys yra šiek tiek kitoks nei pastovios palūkanų normos atveju. Palūkanų sumos metų bėgyje mažėja, bet sekančių metų pradžioje, padidėjus palūkanų normai, padidėja. Toliau ir vėl mažėja iki sekančių metų pradžios. Grąžinamų skolos sumų atveju situacija yra priešinga. Vienų metų bėgyje grąžinamos sumos didėja, tačiau sekančių metų pradžioje jos sumažėja. Taigi metų bėgyje tiek palūkanų, tiek ir grąžinamos skolos sumos funkcijos elgiasi kaip ir pastovios palūkanų normos atveju, tačiau kiekvienų metų pradžioje - elgesys skiriasi. Skiriasi ir įnašų funkcijos. Pastovios palūkanų normos atveju turėjome tiesę, tuo tarpu dabar turime laiptuotą funkciją. Vienerių metų bėgyje įnašų funkcijos elgiasi vienodai, t. y. yra pastovios, bet kintamos palūkanų normos atveju, kiekvienų metų pradžioje periodo įmoka šiek tiek padidėja, o toliau visus metus nekinta. Paskaičiavus skirtumą tarp pirmųjų ir paskutiniųjų metų įmokų, gausime 168,93 Lt. Tad, jeigu palūkanų norma kas metai padidėja po nedaug, tai skirtumas tarp periodo įmokų bus palyginti ne didelis.

Dabar pereikime prie kintamų anuitetų metodo. Kadangi kaip jau buvo minėta, periodu grąžinamos skolos sumos dydžiui kintama palūkanų norma įtakos neturi, tai periodo įnašo dydį apsprendžia periodo palūkanų suma, kuri priklauso nuo palūkanų normos dydžio. Pradėkime nuo pirmojo periodo. Kadangi

$$P = \frac{300000}{240} = 1250{,}00 \text{ Lt}$$

Pirmojo periodo palūkanų suma

$$I_1 = 300000 \cdot 0{,}00375 = 1125{,}00 \text{ Lt}$$

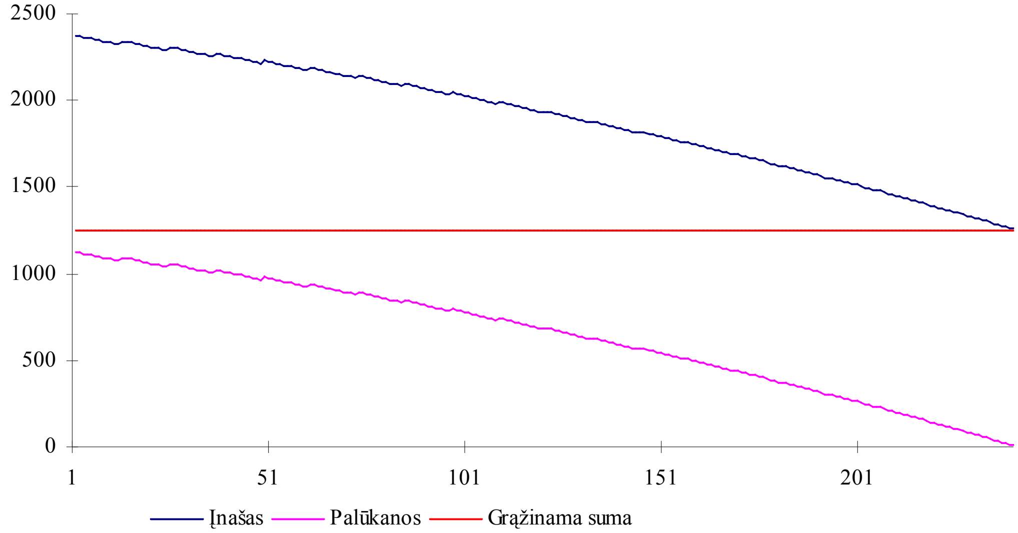
Todėl pirmasis įnašas

$$R_1 = 1250{,}00 + 1125{,}00 = 2375{,}00 \text{ Lt}$$

Toliau skaičiuojame, kaip ir pastovios palūkanų normos atveju iki antrų metų pradžios. Antrų metų pradžioje didėja metinė palūkanų norma. Antrųjų metų pirmasis įnašas bus

$$R_{13} = i_2 \cdot B_{12} + P = 1358{,}30 \text{ Lt}$$

Skaičiuojame taip ir toliau iki paskolos termino pabaigos. Rezultatus pavaizduosime grafiškai.



32 pav. Skolos padengimas kintamų anuitetų metodu, kintamos palūkanų normos atveju.

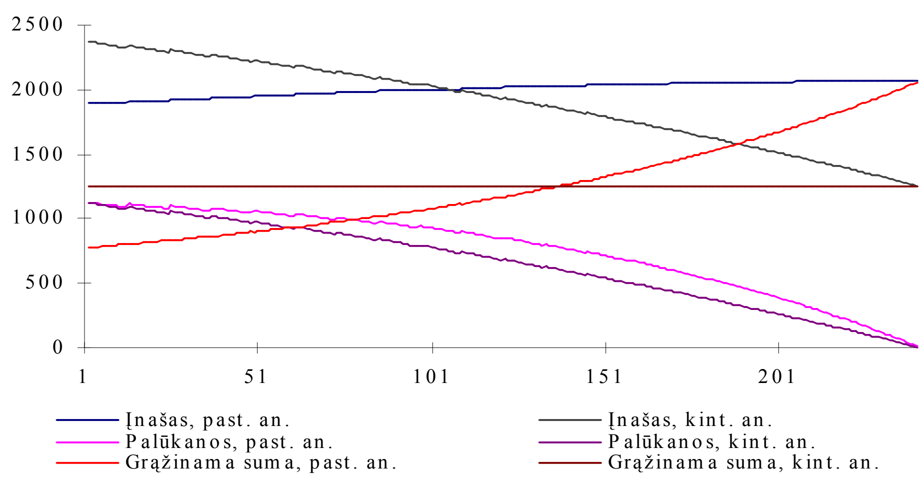
Paveiksle 32 matome, kad tik grąžinamos skolos sumų funkcija elgiasi taip pat kaip ir pastovios palūkanų normos atveju. Tuo tarpu palūkanos metų bėgyje nors ir mažėja, bet sekančių metų pradžioje vėl padidėja. Taip pat ir su įmokomis, metų bėgyje mažėję, metų pradžioje padidėja. Tačiau pastebėsime, kad lyginant su pastovių anuitetų metodu palūkanų didėjimas yra ne toks žymus linijinio metodo atveju. Krinta į akis tai, kad periodo palūkanų sumos dydis yra mažesnės nei grąžinamos skolos sumos dydis.

Apskaičiavę iš viso už paskolą sumokamas palūkanas, matysime, kad kintamų anuitetų metode palūkanų suma šiuo atveju pagal (77), (78) yra

$I = 154206{,}25$ Lt

Grąžindami skolą vienodais įnašais sumokėsime , pagal (77), (79), palūkanų

$I = 181262{,}70$ Lt, arba 27056,45 Lt daugiau.



33 pav. Kintamų ir pastovių anuitetų metodų palyginimas kintamos palūkanų normos atveju.

Dabar palyginkime pastoviųjų ir kintamų anuitetų metodus kintamos palūkanų normos atveju. Pasinaudosime paveikslu 33. Pradėkime nuo periodo įmokų. Pastebėsime, kad skirtumas tarp pirmųjų įmokų yra mažesnis, nei tarp paskutiniųjų. Kintamų anuitetų įmokos tampa mažesnės už pastoviųjų anuitetų įmokas, dar nepraėjus pusei paskolos termino. Taigi skirtumas tarp įnašų paskolos termino pradžioje nėra toks ryškus kaip termino pabaigoje, tai svarbu renkantis metodą kuriuo grąžinti skolą. Galbūt, jeigu leidžia finansinės galimybės, geriau kartais šiek tiek didesnius įnašus mokėti pradžioje paskolos termino, dar atsižvelgus ir į tai kad praėjus mažiau nei pusei paskolos termino linijinio įnašai tampa mažesni už pastoviųjų anuitetų, bet iš viso už paskolą sumokėti mažiau.

Pastoviųjų anuitetų periodo palūkanos yra didesnės už atitinkamas linijinio palūkanas visą paskolos terminą.

Grąžiname didesnes skolos sumas vienu periodu kintamų anuitetų metodu didesnę paskolos termino dalį.

Panagrinėjus kintamos palūkanų normos atvejį, būtų įdomu sulyginti pastovios ir kintamos palūkanų normos atvejus, tiksliau panagrinėkime tokį pavyzdį.

16 pavyzdys. Palyginkime dvi paskolas.

300000,00 Lt paskolą reikia grąžinti per 20 metų. Įnašai mokami ir procentai priskaičiuojami kas mėnesį.

I - oji paskola: 3,5% metinė palūkanų norma paskolos sudarymo momentu, kas metai metinė palūkanų norma padidėja 0,2%.

II - oji paskola: Pastovi 6% metinei palūkanų norma.

Paskola grąžinama: a) anuitetų metodu; b) linijiniu metodu.

Mes turime atvejį, kai kintama palūkanų norma pasiveja pastoviąją ir ją pralenkia. Jau 12 - ais metais kintama palūkanų norma (periodo) yra lygi 0,0051,o pastovioji 0,005.

Pastebėsime, kad kintamos palūkanų normos atveju, pirmaisiais metais palūkanų norma yra lygi $i_1 = 0{,}0029$

Pradėsime nuo periodo įmokų. Padengiant 300000,00 Lt skolą pastoviaisiais anuitetais, kintamos palūkanų normos atveju, pirmųjų metų įnašas pagal (5) yra

$$R^1_{passt} = \frac{300000 \cdot 0{,}0029}{1 - 1{,}0029^{-240}} = 1739{,}88 \text{ Lt}$$

Padengiant skolą kintamais anuitetais, kintamos palūkanų normos atveju, pagal (50) pirmasis įnašas lygus

$$R_{1,k\,\mathrm{int}} = 300000 \cdot 0{,}0029 + \frac{300000}{240} = 2125{,}00 \text{ Lt}$$

Pastovios palūkanų normos atveju visą paskolos terminą turime pastovią periodo palūkanų normą $i = 0{,}005$

Todėl padengiant skolą vienodais įnašais, pastovios palūkanų normos atveju, kiekvieną paskolos termino periodą mokėsime pagal (5), po

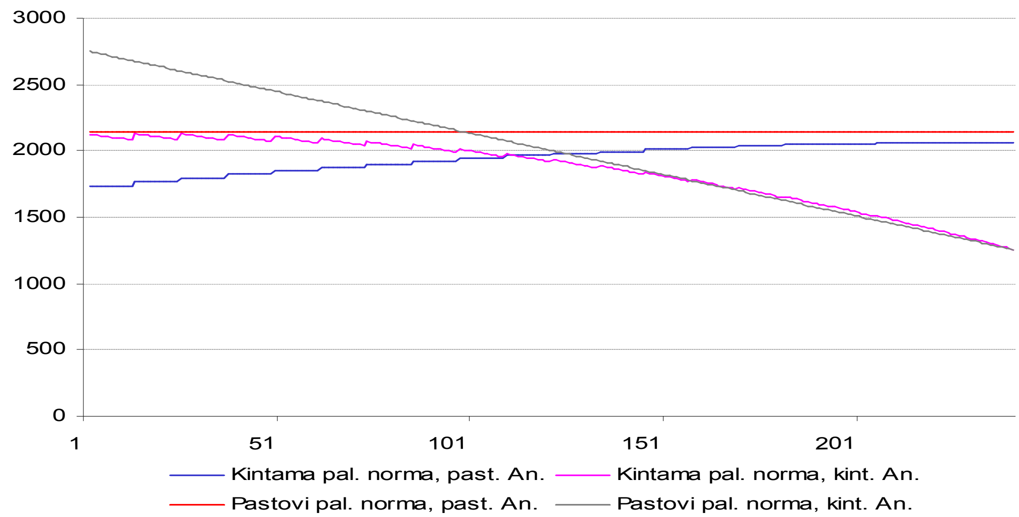
$$R_{past} = \frac{300000 \cdot 0{,}005}{1 - 1{,}005^{-240}} = 2149{,}29 \text{ Lt}$$

Pastovios 6% metinės palūkanų normos atveju, linijinio metodo pirmasis įnašas yra

$$R_{1,k\,\mathrm{int}} = 300000 \cdot 0{,}005 + \frac{300000}{240} = 2750{,}00 \text{ Lt}$$

Sulyginę pirmųjų įmokų dydžius matome, kad mažiausias įnašas yra pastoviųjų anuitetų metodo kintamos normos atveju. Po jo 385,12 Lt didesnis yra kintamų anuitetų įnašas irgi kintamos palūkanų normos atveju. Toliau seka tik 24,29 Lt didesnis pastoviųjų anuitetų įnašas, esant pastoviai metinei 6% palūkanų normai, ir galiausiai pats didžiausias yra linijinio metodo įnašas pastovios palūkanų normos atveju, kuris yra 1010,12 Lt didesnis nei mažiausias pastovių anuitetų įnašas kintamos normos atveju.

Toliau skaičiuojame panašiai kaip ir pavyzdyje 15 kintamos normos atveju, o pastovios palūkanų normos atveju jau ne kartą esame atlikę skaičiavimus. Rezultatus pavaizduosime grafiškai.



34 pav. Periodo įmokų palyginimas pastovios ir kintamos palūkanų normos atvejais, padengiant skolą kintamais ir pastoviais anuitetais.

Paveiksle 34 matome, kad daugiausia skiriasi paskolos termino pradžioje, kintamos normos pastoviųjų anuitetų (mėlyna spalva) ir pastovios palūkanų normos linijinio (pilka spalva) metodų įnašų dydžiai. Tuo tarpu paskolos termino pradžioje nedaug tesiskiria kintamos normos linijinis (rausva spalva) ir pastovios palūkanų normos pastoviųjų anuitetų (raudona) metodų įmokos. Nors kintamos normos linijinio metodo įmokos metų bėgyje šiek tiek labiau nutolsta nuo pastovių anuitetų įmokų, bet sekančių metų pradžioje įmokų dydžiai ir vėl tampa apylygiai. Pastebėsime, kad kintamos normos pastoviųjų anuitetų įmokos nors ir palaipsniui didėja, tačiau per visą paskolos terminą netampa lygios pastovios normos pastoviųjų anuitetų įmokoms. Tuo tarpu kintamos normos linijinio metodo įmokos, nors didesnę paskolos termino dalį ir buvusios mažesnės nei pastovios normos linijinio metodo įmokos, tačiau termino pabaigoje abiejų paskolų įmokos tampa apylygės. Įnašai kintamos normos atveju yra didėjantys. Nors paskolos pradžioje jie būna mažiausi lyginant su kitais atvejais, tačiau termino pabaigoje jie tampa didesni už linijinio metodo įnašus. Pastovio normos atveju linijinio metodo periodo įnašai yra mažėjantys. Beje, paskolos termino pabaigoje mažiausi yra linijinio metodo įnašai.

Paveiksle matome, kad laiko momentas pradedant kuriuo pastoviųjų anuitetų metodo įmokos tampa mažesnės už kintamo anuiteto įmokas, pastovios palūkanų normos atveju yra ankstesnis, nei kintamos normos atveju.

Pavyzdyje 16 paskolos termino pabaigoje kintama metinė palūkanų norma išauga iki 7,5%, tačiau kintamos palūkanų normos atveju pastoviųjų anuitetų įmokos paskolos termino pabaigoje yra mažesnės nei pastovios palūkanų normos įmokos. Tačiau, jeigu kintama palūkanų norma didėtų kas metai ne po 0,2%, o po 0,25%, tai paskolos termino pabaigoje, kintamos palūkanų normos įnašai jau būtų didesni, nei pastovios normos įnašai, o termino pabaigoje kintama palūkanų norma būtų išaugusi iki 8,25%. Kintamų anuitetų atveju, net jei palūkanų norma kas metai didėtų ir po 0,4%, t. y. paskolos termino pabaigoje ji išaugtų iki 11,10%, tačiau paskutinių įnašų dydžiai nedaug skirtųsi kintamos ir pastovios normos atvejais.

Palyginsime kokią dalį skolos sumos per paskolos termino ketvirtį grąžiname kiekvienu atveju. Pastebėsime, kad linijinio metodo periodo grąžinamos skolos sumos dydis nepriklauso nuo periodo palūkanų normos, todėl tiek kintamos, tiek ir pastovios palūkanų normos atveju grąžinamos skolos sumos sutaps. Rezultatus pateiksime lentelėje 6. Skaičiavimai atliekami panašiai kaip ir pavyzdžiuose 7 ir 15.

6 lentelė. Per paskolos termino ketvirtį grąžinamų skolos sumų dalių palyginimas kintamos ir pastovios palūkanų normos atvejais pastoviųjų ir kintamų anuitetų metoduose, %.

Ketvirtis	Pastovūs anuitetai		Kintami anuitetai	
	Pastovi pal. Norma	Kintama pal. Norma	Pastovi pal. Norma	Kintama pal. Norma
1	15,10	18,23	25,00	25,00
2	20,37	20,92	25,00	25,00
3	27,47	25,98	25,00	25,00
4	37,06	34,88	25,00	25,00

Lentelėje 6 matome, kad didžiausią skolos dalį per pirmą ir antrą termino ketvirčius grąžiname linijinio metodo atveju, po 25,00%. Tai palanku skolintojui, nes kuo vėliau bus grąžinta didesnė skolos dalis, tuo didesnė tikimybė, kad skolininkui nepavyks grąžinti skolos. Šiek tiek mažesnes dalis grąžiname pastoviųjų anuitetų metodu kintamos normos atveju, atitinkamai 18,23% ir 20,92%. Mažiausios dalys, pirmuoju ir antruoju ketvirčiais, grąžinama pastoviųjų anuitetų metodu pastovios normos atveju - 15,10% ir 20,37%. Nuo trečiojo ketvirčio didžiausias dalis grąžinsime jau pastoviųjų anuitetų metodu pastovios palūkanų normos atveju. Trečiuoju ketvirčiu grąžiname 27,47%, ketvirtuoju – 37,06%. Linijiniu metodu grąžinamos skolos dalys nuo trečiojo ketvirčio tampa pačios mažiausios. Pastoviųjų anuitetų metodu pastovios normos atveju, nors trečiuoju ketvirčiu grąžinama skolos dalis, 25,98%, tik šiek tiek didesnė už linijiniu metodu grąžinamą skolos dalį, bet ketvirtuoju ketvirčiu grąžinama dalis, 34,88%, jau žymiai daugiau skiriasi nuo linijiniu grąžinamos dalies.

7 lentelė. Palūkanų dalių už paskolos termino ketvirtį palyginimas kintamos ir pastovios palūkanų normos atveju, pastoviųjų ir kintamų anuitetų metoduose, %.

Ketvirtis	Pastovūs anuitetai		Kintami anuitetai	
	Pastovi pal. Norma	Kintama pal. Norma	Pastovi pal. Norma	Kintama pal. Norma
1	38,76	31,75	43,76	35,74
2	31,44	31,39	31,22	32,08
3	21,56	25,54	18,78	23,17
4	8,24	11,31	6,33	9,01

Palyginsime ir per paskolos termino ketvirtį sumokamų palūkanų dalis kiekvienos paskolos atveju. Lentelėje 7 matome, kad didžiausia palūkanų dalis per pirmą paskolos termino ketvirtį yra sumokama kintamų anuitetų metode pastovios palūkanų normos atveju net 43,67%. Kas skolininkui gali būti labai sudėtinga užduotis, nes pirmojoje paskolos termino pusėje dažniausiai neturima pakankamai lėšų, kad galima būtų sumokėti 74,89% visų palūkanų per pirmą paskolos termino pusę.

Šiuo požiūriu palankiusias skolininkui yra pastovių anuitetų metodas, esant kintamai palūkanų normai, kadangi sumokama mažiausia palūkanų dalis, 63,14% per pirmą paskolos termino pusę, lyginant su kitais atvejais, kintamų anuitetų metodu kintamos normos atveju ir pastovių anuitetų metodu pastovios normos atveju atitinkamai 67,82% ir 70,20%. Matome, kad pastovių anuitetų metode kintamos normos atveju per pirmą paskolos termino pusę sumokame 11,75% mažiau palūkanų nei linijinio metodo pastovios normos atveju. Beje, pastebėsime, kad pastovių anuitetų metodo kintamos normos atveju palūkanų dalys yra tolygiau pasiskirsčiusios ketvirčiuose, t. y. skirtumai tarp ketvirčiais sumokamų palūkanų dalių yra ne tokie ryškūs kaip kitais atvejais. Aišku, kad linijinio metodo pastovios normos atveju sumokėję didžiausią palūkanų dalį per pirmą paskolos termino pusę, per antrąją - sumokėsime mažiausią dalį.

Apskaičiuosime iš viso, per visą paskolos terminą, už paskolą sumokamas palūkanas. Kintamos palūkanų normos atveju, grąžindami skolą pastoviųjų anuitetų metodu sumokėsime, pagal (77), (78),

$$I_{past} = 167314{,}67 \text{ Lt}$$

Linijinio metodo atveju, pagal (77) ir (79),

$$I_{k\,\mathrm{int}} = 142725{,}00 \text{ Lt}$$

Pastovios palūkanų normos atveju, padengiant skolą vienodais įnašais, pagal (18) gausime

$$I_{past} = 215830{,}36 \text{ Lt}$$

Grąžinant skolą lygiomis skolos dalimis, pagal (55), sumokėsime

$$I_{k\,\mathrm{int}} = 180750{,}00 \text{ Lt}$$

Nors matėme, kad per pirmą paskolos termino pusę mažiausia palūkanų dalis sumokama pastovių anuitetų metode kintamos normos atveju, tačiau iš viso sumokama palūkanų suma mažiausia yra kintamos normos linijiniame metode. Kintamos normos pastoviųjų anuitetų metode sumokamo palūkanos yra didesnės už linijinio kintamos normos atveju, bet mažesnės nei linijinio metodo pastovios normos palūkanos. Daugiausia palūkanų sumokėsime grąžindami skolą vienodais įnašais, esant pastoviai 6% metinei palūkanų normai.

Jeigu skolininkas yra suinteresuotas kaip galima greičiau grąžinti didesnę dalį skolos jam derėtų rinktis linijinį metodą. Jeigu jam būtų siūlomi tik pastovių anuitetų metodas arba kintamos, arba pastovios palūkanų normos atveju, tuomet šiuo atžvilgiu geriausias yra kintamos normos atvejis.

Kintamos normos atveju, pastovių anuitetų metodo privalumas skolininkui yra tas, kad pirmojoje paskolos termino pusėje jis mokės mažesnes sumas lyginant su kitais atvejais. Jeigu skolininkas pageidauja per visą paskolos laikotarpį mokėti vienodo dydžio sumas, tai jam derėtų rinktis pastovių anuitetų metodą su pastovia metine palūkanų norma.

Atsižvelgę tik į skolininko pageidavimą per pirmąją paskolos termino pusę mokėti kuo mažesnius įnašus, bet grąžinti kuo didesnę skolos dalį tai geriausia jam būtų rinktis linijinį metodą kintamos normos atveju. Tarp anuitetų metodų šiuo požiūriu greičiausiai derėtų rinktis tokį pastovios normos metodą, kai kintama norma pralenktų turimą pastovią ne vėliau kaip per paskolos termino vidurį. Kadangi kuo anksčiau pastovią palūkanų normą pralenks kintama, tuo daugiau sumokėsime už paskolą.

V.TRUMPESNĖS TRUKMĖS IR ŠIEK TIEK ŽEMESNĖS PALŪKANŲ NORMOS PASKOLA

Lygindami įvairias bankų siūlomų paskolų sąlygas, pastebėsime, kad paprastai, klientui siūloma trumpesnio termino paskola, yra su šiek tiek žemesne metine palūkanų norma. Dabar pasižiūrėsime kaip keisis situacija trumpėjant paskolos terminui ir nedaug žemėjant metinei paskolos palūkanų normai, t. y. palyginsime paskolą su ilgesniu terminu ir aukštesne palūkanų norma su paskola, trumpesnio termino ir žemesne palūkanų norma. Nagrinėsime 30, 20, 15 ir 10 metų paskolas, kurių metinės palūkanų normos atitinkamai yra lygios 6%, 5,8%, 5,5% ir 5,3%. Matome, kad palūkanų normos skirias nuo 0,2% iki 0,7%. Pažiūrėsime kaip pasikeis paskolų dydžiai, t. y. už paskolą sumokamos palūkanos, periodo įmokos, grąžinamos vienu periodu skolos sumos dydis, paskolos terminui sutrumpėjus ir tik šiek tiek sumažėjus metinei palūkanų normai.

17 pavyzdys. 300000,00 Lt skola grąžinama vienodais, kas mėnesį mokamais įnašais

a) per 30 metų su 6% metine palūkanų norma;
b) per 20 metų su 5,8% metine palūkanų norma;
c) per 15 metų su 5,5% metine palūkanų norma;
d) per 10 metų su 5,3% metine palūkanų norma.

Apskaičiuosime kiekvienu atveju mėnesinės įmokos dydį. 30 metų paskolos su 6% metine palūkanų norma atveju, pagal (5) išraišką gauname

$$R^{30} = \frac{300000 \cdot 0,005}{1 - 1,005^{-360}} = 1798,65 \text{ Lt}$$

20 metų paskolos su 5,8% metine palūkanų norma mėnesinis įnašas yra

$$R^{20} = \frac{300000 * 0,0048}{1 - 1,0048^{-240}} = 2114,82 \text{ Lt}$$

Paskolos terminui sutrumpėjus iki 15 metų, o palūkanų normai sumažėjus iki 5,5% mėnesinė įmoka išauga iki

$$R^{15} = 2451,25 \text{ Lt}$$

Grąžindami skolą per 10 metų su 5,3% metine palūkanų norma kas mėnesį mokėsime po

$$R^{10} = 3216,14 \text{ Lt}$$

Matome, kad trumpiausio paskolos termino atveju turime didžiausią mėnesinę įmoką. 10 metų paskolos įnašas 774,89 Lt yra didesnis už 15 metų, 1111,32 Lt - už 20 metų ir 1427,49 Lt - už 30 metų paskolos įnašą. Kitaip 30 metų paskolos įmoka yra beveik 15% mažesnė nei 20 metų, 26,6% mažesnė nei 15 metų ir net 44,25% - nei 10 metų paskolos įmoka. Tad žvelgiant iš skolininko pozicijos, kas mėnesį mokėti 44,25% didesnę sumą gali būti per daug sunki finansinė našta, ypač pirmaisiais paskolos termino periodais.

Palyginkime pirmo mėnesio palūkanas kiekvienu atveju. Pasinaudoję (9) formule, tūrėsime, kad 30 metų paskolos su 6% metine palūkanų norma atveju sumokėsime

$$I_1^{30} = 0,005 \cdot 300000 = 1500,00 \text{ Lt}$$

20 metų paskolos pirmojo mėnesio palūkanos yra

$$I_1^{20} = 300000 \cdot 0,0048 = 1450,00 \text{ Lt}$$

Tuo tarpu 15 metų paskolos pirmojo mėnesio palūkanos sumažėja iki

$$I_1^{15} = 300000 \cdot 0,0046 = 1375,00 \text{ Lt}$$

o 10 metų iki

$$I_1^{10} = 300000 \cdot 0,0044 = 1325,00 \text{ Lt}$$

Taigi kuo ilgesnis paskolos terminas tuo didesnė pirmuoju paskolos periodu sumokama palūkanų suma. 30 metų paskolos pirmojo mėnesio palūkanos sudaro mėnesinio įnašo dalį lygią

$$\frac{I_1^{30}}{R^{30}} \cdot 100\% = \frac{1500}{1798,65} \cdot 100\% = 83,40\%$$

20 metų paskolos atveju pirmojo periodo palūkanos sudaro $\frac{\mathrm{I}_1^{20}}{R^{20}} \cdot 100\% = 68,56\%$. Atitinkamai 15 metų paskolos pirmo periodo palūkanos sudaro $\frac{\mathrm{I}_1^{15}}{\mathrm{R}^{15}} \cdot 100\% = 56,09\%$ mėnesinės įmokos, o 10 metų paskolos atveju jau tik $\frac{I_1^{10}}{R^{10}} \cdot 100\% = 41,07\%$. 30 metų paskolos atveju beveik visas pirmasis įnašas yra skirtas padengti palūkanoms, kadangi pirmuoju mėnesiu grąžinamos skolos suma įnaše tesudarys tik 16,60%. 10 metų paskolos atveju didesnioji pirmojo įnašo dalis yra skirta dengti skolai, kadangi pirmą mėnesį grąžinamos skolos suma sudaro 58,93% mėnesinės įmokos. Aišku, kad kuo mažesnę periodo įmokos dalį sudaro palūkanų suma, tuo didesnė skolos suma bus grąžinama per vieną periodą, t. y. tokiu atveju trumpėjant paskolos terminui greitėja skolos padengimas. Tuo pačiu mažėja skolos negrąžinimo rizika, t. y. mažėja tikimybė, kad skolininkas negrąžins skolos. Šiuo atžvilgiu trumpesnės trukmės ir mažesnės palūkanų normos paskola yra patraukli skolintojui.

Palyginkime sumokamas palūkanų suma per pirmuosius paskolos termino metus. Panaudoję (13) formulę, paėmę p lygų nuliui, o q - dvylikai, gausime, kad per pirmuosius 30 metų paskolos metus sumokėsime

$$\mathrm{I}_1^{12,30} = 1798,65 \cdot \left(12 - 1,005^{-348} \cdot \frac{1-1,005^{-12}}{0,005} \right) = 17899,78 \text{ Lt}$$

20 metų paskolos atveju pirmų metų palūkanų suma $I_1^{12,20} = 17184,47$ Lt, 15 metų paskolos atveju sumokama suma sumažėja iki $I_1^{12,15} = 16169,41$ Lt, o 10 metų atveju net iki $I_1^{12,10} = 15337,58$ Lt. Jeigu grąžintume skolą ne per 30 metų, o per 20 metų, tai per pirmuosius metus sutaupytume 715,31 Lt, 15 metų paskolos atveju sutaupytume jau 1730,37 Lt, o 10 metų paskolos atveju 2562,20 Lt.

Panašiai galime apskaičiuoti, kad po pirmųjų penkių paskolos termino metų sumokamų palūkanų suma 30 metų paskolos atveju yra

$$I_1^{60,30} = 87082,16 \text{ Lt},$$

o 10 metų paskolos atveju tik

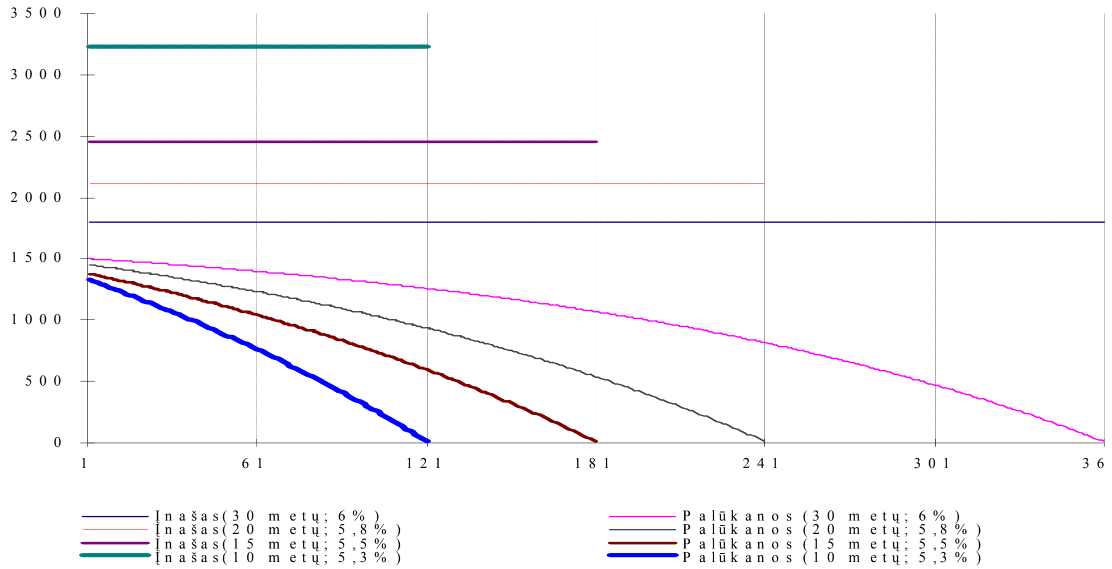
$$I_1^{60,10} = 63284,82 \text{ Lt}$$

Matome, kad trumpesnio paskolos termino ir šiek tiek žemesnės palūkanų normos atveju sumokama mažiau palūkanų. 10 metų paskolos su metine 5,3% palūkanų norma sumokame 23797,34 Lt mažiau per pirmuosius penkis paskolos termino metus. Apskaičiavę iš viso per visą paskolos terminą sumokamas palūkanas, pagal (18), gausime, kad per 30 metų sumokėsime

$$I^{30} = 1798,65 \cdot \left(360 - \frac{1-1,005^{-360}}{0,005} \right) = 347514,57 \text{ Lt}$$

Per 20 metų su 5,8% metine palūkanų norma $I^{20} = 207557,50$ Lt arba 13995,07 Lt mažiau nei 30 metų paskolos atveju. 15 metų paskolos su 5,5% palūkanų norma atveju palūkanos bus $I^{15} = 141225,07$ Lt. Grąžindami 300000,00 Lt skolą per 10 metų su 5,3% metine palūkanų norma priskaičiuota bus tik $I^{10} = 87136,61$ Lt. Taigi sutrumpėjus paskolos terminui per pusę, iki 15 metų, skolininkas sutaupytų 206289,50 Lt, o iki 10 metų sutrumpėjus paskolos terminui net 338800,96 Lt, lyginant su 30 metų paskola.

Šio pavyzdžio paskolų situacija 36 paveiksle, kuriame pavaizduoti periodo įnašų ir palūkanų sumų dydžiai.



36 pav. Vieno periodo sumokamų palūkanų ir įnašų sumų palyginimas 30, 20, 15 ir 10 metų paskolų su atitinkamomis metinėmis 6%, 5,8%, 5,5% ir 5,3% palūkanų normomis, atvejais.

Paveiksle matome, kad 10 metų paskolos įnašo dydis stipriai skiriasi nuo kitų atvejų, o 30 metų palūkanų sumos yra didesnės nei atitinkamo periodo kitų paskolų palūkanos.

Tad, jeigu skolininkas finansiškai yra pajėgus mokėti didesnius įnašus, tai imdamas trumpesnio termino paskolą su šiek tiek žemesne palūkanų norma jis sutaupytų nemažą sumą. Per pusę sutrumpinus paskolos terminą, o metinę palūkanų normą sumažinus tik 0,5%, sumokama palūkanų suma sumažėja 59,36%.

Skolintojas siūlydamas trumpesnio termino paskolą su nedaug žemesne palūkanų norma visų pirma greitina skolos grąžinimą, t. y. mažina skolos negrąžinimo riziką. Dėl mažesnio atitinkamo paskolos periodo skolos likučio, trumpesnio termino atveju, mažės ir palūkanų normos rizika. Kadangi rinkos palūkanų normoms pakilus, ilgesnio paskolos termino atveju, dėl likusio didesnio skolos likučio, paskolos vertė nukris daugiau. Dėl didesnių periodo įnašų ir trumpesnio paskolos termino mažėja nuokrypio problema.

Tokia pat situaciją panagrinėkime ir kintamų anuitetų atveju.

17 pavyzdys. 300000,00 Lt skola grąžinama vienodomis skolos dalimis kas mėnesį mokant įnašus

a) per 30 metų su 6% metine palūkanų norma;
b) per 20 metų su 5,8% metine palūkanų norma;
c) per 15 metų su 5,5% metine palūkanų norma;
d) per 10 metų su 5,3% metine palūkanų norma.

Skaičiuojant periodu grąžinamos skolos sumos dydį svarbi yra tik paskolos trukmė. Pasinaudoję (46) formule, gausime, kad 30 metų paskolos su metine 6% palūkanų norma atveju, vienu periodu grąžinsime

$$P^{30} = \frac{300000}{360} = 833{,}33 \text{ Lt}$$

20 metų paskolos vienu periodu grąžinama skolos suma

$$P^{20}=\frac{300000}{240}=1250{,}00\ \text{Lt}$$

Paskolos terminui sutrumpėjus iki 15 metų, o metinei palūkanų normai iki 5,5% grąžinamos vienu periodu skolos suma išauga iki

$$P^{15}=1666{,}67\ \text{Lt}$$

10 metų paskolos atveju kiekvieną mėnesį grąžinsime po

$$P^{10}=2500{,}00\ \text{Lt}$$

Grąžinamos per vieną periodą skolos suma didėja trumpėjant terminui. 10 metų paskolos atveju, lyginant su 30 metų paskolą, grąžinama vienu periodu suma padidėja 1666,67 Lt.

Kaip ir pastoviųjų anuitetų metodo atveju apskaičiuosime pirmojo mėnesio įmokos dydį. Pasinaudoję (48) (pastebėsime, kad pirmo mėnesio palūkanų sumų dydžiai sutaps su atitinkamais pastoviųjų anuitetų palūkanų sumų dydžiais), gausime, kad 30 metų paskolos su 6% metine palūkanų norma pirmojo mėnesio įmoka bus

$$R_1^{30}=P^{30}+I_1^{30}=833{,}33+1500{,}00=2333{,}33\ \text{Lt}$$

20 metų paskolos su 5,8% metine norma atveju% metine norma

$$R_1^{20}=2700{,}00\ \text{Lt}$$

15 metų paskolos pirmasis įnašas išaugs iki

$$R_1^{15}=3041{,}67\ \text{Lt},$$

o 10 metų iki

$$R_1^{10}=3825{,}00\ \text{Lt}$$

Matome, kad šiuo atveju skirtumai tarp pirmųjų įmokų nėra tokie ryškūs kaip pastoviųjų anuitetų metode. 10 metų paskolos pirmasis įnašas yra tik 20,48% didesnis nei 15 metų paskolos, 29,41% - nei 20 metų ir tik 39% didesnis už 30 metų paskolos pirmąjį įnašą. Kadangi pirmosios įmokos yra apylygės, t. y. palyginus nedaug skiriasi viena nuo kitos, tai skolininkui nebūtų labai sunki finansinė našta imti paskolą su trumpesniu terminu ir šiek tiek žemesne palūkanų norma ir termino pradžioje mokėti palyginus nedaug didesnius įnašus. Pastoviųjų anuitetų metode, matėme, kad periodo įmokų dydžiai daug skiriasi tarpusavyje. Paskolos terminui sutrumpėjus iki 10 metų periodo įmoka padidėja net 44,25%, kai linijinio metodo pirmasis įnašas padidės tik 39%. Todėl pastoviųjų anuitetų metode, dėl trumpesnio termino, daugiau padidėję periodo įmokų dydžiai gali būti per sunki finansinė našta.

Apskaičiuosime, kokia dalis pirmosios įmokos yra pirmojo periodo palūkanos. 30 metų paskolos atveju pirmojo periodo palūkanų suma sudaro

$$\frac{I_1^{30}}{R_1^{30}}\cdot 100\%=64{,}29\%$$

pirmosios įmokos, 20 metų paskolos atveju palūkanos sudarys

$$\frac{I_1^{20}}{R_1^{20}}\cdot 100\%=53{,}70\%$$

15 metų paskolos atveju

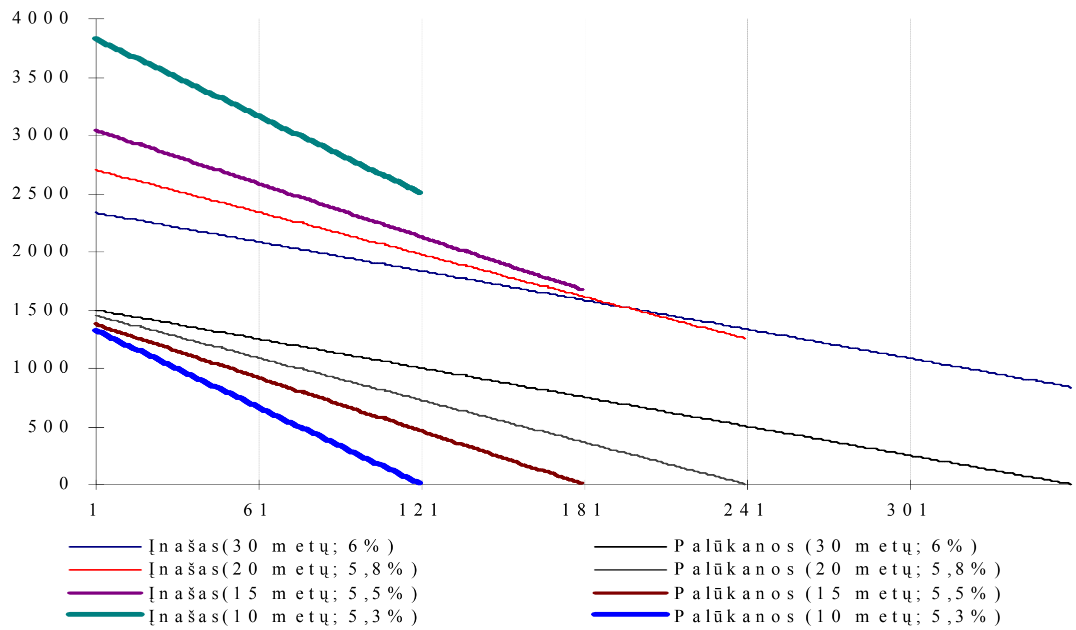
$$\frac{I_1^{15}}{R_1^{15}}\cdot 100\%=45{,}21\%$$

o 10 metų paskolos atveju tik

$$\frac{I_1^{10}}{R_1^{10}}\cdot 100\%=34{,}64\%$$

Kaip ir pastoviųjų anuitetų metode, trumpėjant paskolos terminui, palūkanų suma pirmojoje įmokoje sudarys vis mažesnę dalį, taigi vis didesnė įmokos dalis bus skirta padengti skolai. Matome, kad 10 metų paskolos atveju, net 65,36% pirmojo įnašo yra skirta padengti skolai.

Toliau įmokas skaičiuojame naudojantis (50) išraiška, imdami k=2,…,360 30 metų paskolos atveju, k=2,..,240 20 metų paskolos atveju, k=2,…,180 15 metų paskolos ir k=2,…, 120 10 metų paskolos atveju. Rezultatus pavaizduosime grafiškai.



37 pav. Vieno periodo sumokamų palūkanų ir įnašų sumų palyginimas 30, 20, 15 ir 10 metų paskolų su atitinkamomis metinėmis 6%, 5,8%, 5,5% ir 5,3% palūkanų normomis, atvejais.

Matome, kad laikui bėgant skirtumai tarp periodo įnašų mažėja, pavyzdžiui 14 metų pabaigoje periodo įmokų dydžiai labai nedaug skiriasi vienas nuo kito. Praėjus nuo paskolos termino pradžios 16 metų ir 4 mėnesiams 20 metų paskolos įmokos tampa mažesnės nei atitinkamos 30 metų paskolos įmokos.

Periodinės sumokamų palūkanų sumos, kaip matome paveiksle, laikui bėgant vis labiau skirsis nuo atitinkamos kitos paskolos palūkanų sumos.

Apskaičiuosime pasinaudoję (52) formule, paėmę joje p lygų nuliu, o q lygų šešiasdešimt, palūkanų sumokamų per pirmuosius penkis paskolos termino metus sumą grąžinant skolą linijiniu metodu. 30 metų paskolos atveju, per pirmuosius penkis metus sumokėsime

$$\mathrm{I}_1^{60,30} = \frac{0{,}005 \cdot 300000 \cdot 60 \cdot (720 - 60 + 1)}{720} = 150250{,}00 \text{ Lt}$$

20 metų paskolos atveju

$$I_1^{60,20} = 76306{,}25 \text{ Lt}$$

15 metų paskolos atveju sumokama palūkanų suma sumažėja iki

$$I_1^{60,15} = 68979{,}17 \text{ Lt}$$

o 10 metų - iki

$$I_1^{60,10} = 59956{,}25 \text{ Lt}$$

Matome, kad per pirmuosius penkis paskolos termino metus 10 metų paskolos atveju sutaupome

9022,92 Lt lyginant su 15 metų paskolą, 16350,00 Lt lyginant su 20 metų ir 22668,75 Lt - su 30 metų paskolomis.

Pasinaudoję (55) išraiška, gausime, kad iš viso per visą 30 metų paskolos terminą sumokame palūkanų

$$I^{30} = \frac{0{,}005 \cdot 300000 \cdot 361}{2} = 270750{,}00\,\text{Lt}$$

Per 20 metų grąžindami 300000,00 Lt skolą su 5,8% metine palūkanų norma, sumokėsime

$$I^{20} = 174725{,}00\ \text{Lt}$$

arba 96025,00 Lt mažiau nei 30 metų paskolos atveju. Paskolos terminui sutrumpėjus pusiau, arba iki 15 metų sumokamos palūkanos sumažėja iki

$$I^{15} = 124437{,}50\ \text{Lt}$$

t. y. 146312,50 Lt mažiau lyginant su 30 metų paskolą. 10 metų skola su 5,3% metine palūkanų norma pareikalaus iš skolininko tik

$$I^{10} = 80162{,}50\ \text{Lt}$$

palūkanų sumos. Taigi 10 metų paskola sutaupo 190587,50 Lt sumą skolininkui lyginant su 30 metų paskolą.

Pastebėsime, kad linijinio metodo atveju, dėl trumpesnio termino ir žemesnės palūkanų normos skolininkas sutaupytų mažesnę palūkanų sumą nei pastoviųjų anuitetų metode.

Imdamas trumpesnio termino paskolą su šiek tiek žemesne palūkanų norma skolininkas sutaupytų ne mažą pinigų sumą, ypač didelė suma būtų sutaupyta pastoviųjų anuitetų atveju, tačiau jam tektų mokėti didesnius mėnesiniu įnašus (žymiai daugiau mėnesinis įnašas padidėja pastovių anuitetų atveju sutrumpėjus paskolos terminui).

Trumpesnio termino ir žemesnės palūkanų normos paskolos privalumai skolintojui būtų mažesnės palūkanų ir skolos negrąžinimo rizikos, greitesnis skolos padengimas, mažesnė nuokrypio problema.

IŠVADOS

Pastovių anuitetų metodo pagrindinis bruožas yra tas, kad periodinės įmokos yra vienodo dydžio visą paskolos terminą. Palūkanos yra skaičiuojamos nuo mažėjančio skolos likučio, todėl jų dalis, laikui bėgant, periodo įmokoje mažėja, bet didėja grąžinamos skolos dalys. Grąžinamos skolos dalis kiekvieną periodą padidėja geometrine progresija su vardikliu (1+i), kur i - periodo palūkanų norma.

Pastovių anuitetų metodo atveju, kuo aukštesnė sutarties palūkanų norma, tuo mažesnis skirtumas bus tarp periodo įmokų dydžių, ilgėjant paskolos terminui. Kuo ilgesnis skolos grąžinimo terminas, tuo daugiau padidės periodo įnašas didėjant sutarties palūkanų normai.

Kintamų anuitetų metodo pagrindinis bruožas yra tas, kad kiekvieną periodą grąžinama vienodo dydžio skolos dalis. Palūkanos yra skaičiuojamos nuo mažėjančio skolos likučio, todėl jų dalis periodo įmokoje mažėja, tuo pačiu mažėja ir periodinės įmokos. Įnašai, laikui bėgant, mažėja aritmetine progresija, kurios vardiklis yra -i·P, kur i - periodo palūkanų norma, o P - vieno periodo grąžinamos skolos dalis.

Grąžinant paskolą lygiomis skolos dalimis, per fiksuotą paskolos termino laikotarpį sumokėtų palūkanų dalis priklauso tik nuo šio laikotarpio trukmės ir paskolos termino, bet nepriklauso nuo palūkanų normos. Kai paskolos terminas pakankamai ilgas, fiksuoto laikotarpio palūkanų dalis beveik nepriklauso nuo paskolos termino.

Grąžindami tokio pat dydžio skolą, per tokį pat paskolos terminą su tokio pat dydžio palūkanų norma, daugiau už paskolą sumokėsime pastovių anuitetų metodo atveju lyginant su linijiniu metodu, nors pradiniai įnašai ir yra mažesni nei kintamų anuitetų atitinkami įnašai. Tad neigiamas kintamų anuitetų paskolos bruožas skolininkui yra palyginus dideli pradiniai įnašai, tai gali būti per sunki finansinė našta, pirmaisiais paskolos termino metais.

Linijinio metodo privalumas skolintojui yra tas, kad šiuo atveju yra spartesnis skolos padengimas - per visą paskolos terminą po vienodą dalį (kurios dydis priklauso tik nuo paskolos termino), tuo tarpu pastovių anuitetų atveju didžiausia dalis padengiama antroje paskolos termino pusėje. Dėl to atitinkamas skolos likutis pastovių anuitetų atveju yra didesnis, nei kintamų, savo ruožtu bus didesnė ir skolos negrąžinimo rizika.

Tiek kintamų, tiek ir pastovių anuitetų atveju iš viso už paskolą sumokama palūkanų suma prikalauso nuo dviejų parametrų, kai fiksuota paskolos suma - paskolos termino ir palūkanų normos. Palūkanų suma jautriau reaguoja į palūkanų normos, nei paskolos termino kitimą. Palūkanų normos padidėjimas daugiau padidina palūkanų sumą, nei paskolos termino pailgėjimas. Ilgesnio termino (aukštenės palūkanų normos) atveju palūkanų suma išaugs labiau, nei trumpesnio (žemesnės normos) atveju, didėjant sutarties palūkanų normai (ilgėjant sutarties terminui).

Pastovių anuitetų iš viso už paskolą sumokama palūkanų suma jautresnė palūkanų normos padidėjimui, nei kintamų anuitetų.

Sulyginę 30 metų kintamų anuitetų su 20 metų pastovių anuitetų, bei 50 metų linijinio su 30 metų pastovių anuitetų metodų iš viso už paskolą sumokamas palūkanas, esant skirtingoms sutarties palūkanų normoms, pastebėsime, kad šios sumos nedaug viena nuo kitos skirsis. Kuo aukštesnė sutarties palūkanų norma, tuo skirtumas bus mažesnis.

Ilgėjant paskolos terminui, didėja skirtumas tarp abiem metodais sumokamų palūkanų sumų.

Abiejų metodų atveju, už paskolą sumokamų sumų dydžiui palyginti nedidelę įtaką daro procentų priskaičiavimo metuose kartų skaičius. Dažnesnis procentų priskaičiavimas tik nedaug sumažina už paskolą sumokamą sumą. Todėl apsisprendimas ar mokėti po mažesnę sumą, bet dažniau, ar po didesnę, bet rečiau už paskolą sumokamos sumos dydžiui didelės įtakos neturi.

Abiejų metodų atveju, didėjant metinei sutarties palūkanų normai, skirtumai tarp periodo palūkanų yra ryškūs paskolos termino pradžioje, tuo tarpu pabaigoje - palūkanų sumos yra apylygės.

Dėl infliacijos, abiejų metodų atveju yra susiduriama su nuokrypio problema, kai dėl infliacijos mažėja reali gaunamų įmokų vertė. Nors pastovių anuitetų atveju nominali įmokų vertė nekinta per visą paskolos terminą, tuo tarpu reali vertė mažėja. Pirmo ir paskutinio įnašų realios vertės skirtingos, paskutiniojo - daug mažesnė. Linijinio metodo atveju nominalūs įnašai mažėja, todėl realūs mažėja dar labiau. Paskutinio mokėjimo reali vertė kntamų anuitetų atveju yra mažesnė ir už pastovių anuitetų paskutinio mokėjimo realią vertę. Tad linijinio metodo atveju nuokrypio problema yra aštresnė skolintojui.Todėl, pradiniai įnašai turi būti pakankamai dideli, kad kompesuotų paskutinių įmokų perkamosios galios praradimą. Nuokrypio laipsnis didės, didėjant sutarties palūkanų normai, kurią apsprendžia infliacijos tempas.

Dėl infliacijos skolininkui vėlesnieji mokėjimai tampa vis „pigesni", bet tuo pačiu, pradiniai yra „brangūs".

Nuokrypio problemos galima nepaisyti, kai infliacija yra žema.

Abiejų metodų atveju, ilgėjant paskolos terminui arba didėjant palūkanų normai, tolsta paskolos termino momentas, pradedant kuriuo periodo palūkanų suma tampa mažesnė, nei grąžinamos skolos dalis periodo įmokoje.

Ilgėjant paskolos terminui arba didėjant palūkanų normai pastovių anuitetų atveju lėtėja skolos padengimas. Kintamų anuitetų atveju, skolos padengimo greitis nepriklauso nuo sutarties palūkanų normos, o priklauso tik nuo paskolos termino. Ilgėjant paskolos terminui skolos padengimas lėtėja.

Pirmų mokėjimų naštą skolininkui palengvina lengvatinės paskolos, o skolintojui jos sumažina nuokrypio problemą, kadangi pradinia įnašai yra mažesni, o vėlesnieji (kai tikimasi, kad skolininko pajamos jau bus išaugusios) didesni, nei standartinių metodų atvejais. Tačiau lengvatinės paskolos reikalauja iš skolininko didesnių finansinių lėšų.

Lengvatinės pastovių anuitetų paskolos atveju gali būti susiduriama su neigiamu skolos padengimu paskolos termino pradžioje, kas padidina skolos negrąžinimo riziką, nes turime skolos likučio didėjimą. Tačiau specialiai parinkus pradinę įmoką taip, kad ji būtų nemažesnė už pirmo periodo palūkanas, neigiamo skolos padengimo galima išvengti.

Nagrinėjamos lengvatinės kintamų anuitetų paskolos pagrindinis bruožas yra tas, kad lengvatinio laikotarpio vieno peroido grąžinamos skolos sumos dydis yra skaičiuojamas ne nuo visos skolos sumos, o tik nuo pusės. Todėl periodo grąžinamos skolos dydžiui lengvatinio laikotarpio trukmė neturės įtakos.

Nors nagrinėtos lengvatinės pastovių anuitetų paskolos atveju, per lengvatinį periodą įmokos didėja, tačiau šis didėjimas skolininkui yra ne toks skaudus, nes tikimasi, kad drauge auga ir jo pajamos. Lengvatinio periodo paskolas derėtų rinktis žmonėms, kurie tikisi, kad jų pajamos ateityje didės.

Dėl lengvatinio periodo lėtėja skolos padengimas, didėja skolos negrąžinimo rizika.

Paskolos su kintama palūkanų norma pasirinkimas susijęs su rizika. Nors sudarant paskolos sutartį kintama palūkanų norma yra žemesnė nei atitinkama pastovi, tačiau niekas nežino kaip ji elgsis per visą paskolos laikotarpį, t. y. ar didės, ar mažės. Tuo tarpu pastovios palūkanų normos atveju, skolininkas apsisuogo nuo palūkanų normos padidėjimo.

Siekdamas sutaupyti, skolininkas gali imti trumpesnio termino paskolą su šiek tiek žemesne palūkanų norma, tačiau tokiu atveju tektų mokėti didesnius įnašus. Linijinio metodo atveju pradinių įmokų padidėjimas nėra toks ženklus kaip pastovių anuitetų atveju, sutrumpėjus paskolos terminui, tačiau linijinio metodo atveju ir sutaupoma mažesnė lėšų suma, nei pastovių anuitetų atveju.

Vienareikšmiškai teigti kuris paskolos grąžinimo metodas yra geresnis negalima, tai priklauso nuo kiekvieno žmogaus prioritetų, kam jis teikia pirmenybę, kokios jo finansinės galimybės.

SUMMARY

HOME LOANS COMPARISON

Some of loans amortization methods are being examined in this work. Every payment on any loan consists of two parts: periodic return of principal and interest on the outstanding principal balance (so the part of interest becomes smaller every period).

Under an fixed – rate loan, the interest rate is „locked in“ when the loan is originated and it remains fixed throughout the loans life. Such loans offer some assurances to borrowers. He‘ll have the same interest rate till the end of his loan.

Constant payment method gives an oppourtunity for borrower to return the loan by paying constant payment every returning period. The mechanics of this method are such that each of the unchanging payments consists of differing proportion of the interest and principal. Because every further period the sum of interest becomes smaller, the part of principal rises.

Constant amortization loans gives an oppourtunity to return the loan by paying smaller payments every next period. In this case every payment cosists of constant principal sum and interest.

From a financial point of view the constant amortization method is better than the constant payment for borrower, because finnally the whole sum of interest that borrover has to pay is smaller.

More detail examination has showed that longer term as well as higer interest rate leads to bigger sum of interest.

In both method because of infliation is faced with the tilt problem (it means that the real value of payment tilts to some degree from the nominal). On constant debt service method the tilt problem is more severe than in constant payment method. And unfortunate acompanying rezult is that the borrower faces relatively high costs during the loans first several years. The essence of the tilt problem is that the real payments in the early years must be high enough to offset the lost of the purchasing power to the lender of payments that will be made at the end of the loan.

Because of the bigger outstanding principal balance, the risk that borrower will fail is greater on constant payment method, than in constant amortization.

To reduce the tilt effect and to lower first payments could help graduate payment loan. In this case payments during the first year of the loan term are smaller than on standard loan, but later become bigger. The same effect gives constant amortization method, on which first years principal sums are twice smaller than on standard, but later becomes bigger. In both cases it leads to the bigger risk that borrower will fail and bigger sum of interest.

There was examined and the loan with shorter term and lower interest rate. In such case borrower saves lump sum of interest, but has to pay bigger payments wich can be enconvinient for him.

The case of non fixed – rate loan was also mentioned. Usually non fixed interest rate is smaller than fixed when loan is originated. But there is some risk, because you never know whatever the interest rate will fall or rise.

LITERATŪROS SĄRAŠAS

1. P. Katauskis „Finansiniai skaičiavimai“, Vilnius, VU leidykla, 1995
2. S. Girdzijauskas „Finansiniai skaičiavimai“, Kaunas, Technologija, 1997
3. m
4. P.C Cartledge, „A Handbook of Financial Mathematics“, Euromoney Books, London, 1992
5. E. Buškevičiūtė, I Mačerinskienė, „Finansų analizė“, Tecnologija, Kaunas, 2005
6. В.В. Ковалев, В.А. Уланов „Курс финансовых вычислений. Финансы и статистика“, Москва, 1999
7. В. Б. Кутуков „Основы финансовой и страховой математики. Дело“, Москва, 1998
8. А.А. Первозванский, Т. Н. Первозванская „Финансовои рынок расчет и риск, цыфра – М“, Москва, 1984
9. Е. М. Четыркин „Финансовая математика. Дело“, Москва, 2000
10. Я. С. Мелкумов, В. Н. Румянцев “Кредитные ресурсы: расчеты и анализ”, Москва, 1996
11. http://www.financialplan.about.com
12. http://www.eurofakultetas.puslapiai.lt/III%20dalis.htm
13. http://www.business.uiuc.edu/orer/V10-2-2.pdf
14. http://www.business.uiuc.edu/orer/V11-1-5.pdf
15. http://www.business.uiuc.edu/orer/V11-4-4.pdf
16. http://www.money.howstuffworks.com/mortgage5.htm
17. http://www.money.howstuffworks.com/mortgage24.htm
18. http://www.parex.lt
19. http://www.vb.lt
20. http://www.hansa.lt
21. http://www.sampo.lt
22. http://www.bpd.lt/skaiciuokles_men_im.html
23. http://www.finansai.tripod.com/infliacija.htm
24. http://www.takas.lt/nt/?st=news&msg_id=1093
25. http://www.lbank.lt/lt/leidiniai/frinka/fr2003.pdf
26. http://www.amcredit.lt/lt/for-individuals/loan-conditions/interest-rates/
27. „Lietuvos ryto“ priedas „Vartai“, Nr. 16, 2006 05 02, 1 psl, 11 psl
28. „City24.lt“, Nr 3, 2006 balandis, 8 – 10 psl