VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ IR SKAIČIAVIMO MATEMATIKOS KATEDRA

Gintaras Venskus

SKOLŲ GRĄŽINIMO PLANŲ SUDARYMAS

Magistro baigiamasis darbas

Darbo vadovas: doc. dr. Kazimieras Navickis

VILNIUS, 2006

TURINYS

ĮVADAS

Planuojant paimti paskolą, svarbu iš keleto variantų pasirinkti tinkamiausią būdą paskolos grąžinimui. Bankai siūlo įvairias paskolos skaičiuokles, kurios suskaičiuoja ir išdėsto paskolos grąžinimą per visą paskolos grąžinimo laikotarpį. Darbe yra nagrinėjami paskolos grąžinimo metodai: amortizacinis metodas ir fondo kaupimo metodas. Pirmame skyriuje yra išdėstytos pagrindinės sąvokos ir formulės kurios yra naudojamos sudarant paskolos amortizacinį planą bei fondo kaupimo planą. Antrame ir trečiame skyriuje sudaromi skolos grąžinimo planai, išvedamos rekurentinės formulės paskolos planų sudarymui, pateikiami išnagrinėti pavyzdžiai. Kiekvienas paskolos grąžinimo metodas yra išnagrinėtas praktiškai naudojant Microsoft Excel programą. Antrame ir trečiame skyriuje yra detalizuojama kaip susidaryti paskolos grąžinimo planus naudojantis Microsoft Excel programa.

1. SKOLOS APTARNAVIMO IŠLAIDOS

Kreditas arba paskola – lėšos, grąžintinai gautos iš kito juridinio ar fizinio asmens (iš kitų asmenų) sutartyje aptartomis sąlygomis, mokant skolinimosi palūkanas skolintojui (skolintojams).

Palūkanos yra mokestis, kurį paskolos gavėjas moka kreditoriui (skolintojui) už jo pinigų panaudojimą.

Palūkanų norma – pinigų skolinimosi kaina, išreikšta procentais kaip metinių palūkanų ir pradinės skolos santykis.

Kai palūkanos yra už kiekvieną periodą yra pastovus dydis ir apskaičiuojamos nuo paskolos dydžio periodo pabaigoje, tai sakoma, kad priskaičiuojamos **paprastos palūkanos.**

Sakoma, kad priskaičiuojamos **sudėtinės palūkanos**, jei palūkanos apskaičiuojamos kiekvieno periodo pabaigoje nuo vertės, esančios periodo pradžioje.

Periodiniai mokėjimai yra eilė mokėjimų, kai tarp gretimų mokėjimų laiko intervalai vienodi.

Norint grąžinti paskolą arba sukaupti lėšų banke, periodiškai mokamos įmokos kurias vadinsime skolos aptarnavimo išlaidomis. **Skolos aptarnavimo išlaidos** yra periodiniai mokėjimai dažniausiai atliekami apibrėžtu laiku, kuris turi mokėjimų pradžią ir pabaigą. Rasime formulę skolos aptarnavimo išlaidų būsimai vertei rasti, kai įmokos yra vienodo dydžio R.

Tarkime kiekvieno periodo pabaigoje į sąskaitą įmokama įmoka R. Tada po pirmojo periodo įmokėta bus R, už pirmąjį mokėjimą palūkanos nemokamos. Po antrojo mokėjimo bus įmokėta $R+R$ prie šios įmokos dar prisidės dar palūkanos už įmoką R. Po trečiojo periodo bus įmokėta $R+R+R$ bei palūkanos už $R+R$ ir t. t.

Tuo atveju, kai turime sudėtines palūkanas i, palūkanos už pirmąją įmoka R bus paskaičiuojamos už $n-1$ periodą. Remiantis tuo galima teigti, kad pirmosios įmokos būsimoji vertė yra $R(1+i)^{n-1}$. Po antros įmokos turėsim, kad palūkanos bus apskaičiuojamo už periodą $n-2$, o įmokos būsimoji vertė - $R(1+i)^{n-2}$. Tęsiame šį procesą. Už priešpaskutinį mokėjimą palūkanos priskaičiuojamos tik vieną kartą, todėl būsimoji įmokos vertė $R(1+i)$. Kadangi palūkanos mokamos periodo pabaigoje, todėl už paskutinį mokėjimą palūkanos nėra mokamos. Pažymėkime visų n mokėjimų būsimąją vertę S ir ji yra lygi

$$S = R + R(1+i) + R(1+i)^2 + ... + R(1+i)^{n-2} + R(1+i)^{n-1}.$$

Nesunku pastebėti kad šios sumos nariai yra geometrinės progresijos nariai, kurios vardiklis $q = 1 + i$, o pirmasis narys yra $b_1 = R$. Pagal geometrinės progresijos sumos formulę randame visų n mokėjimų būsimąją vertę

$$S = \frac{R(1-(1+i)^n)}{1-(1+i)} = R\left(\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right).$$

Pasižymėkime

$$s_{n;i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \qquad (1.1)$$

Tada visų n mokėjimų būsimoji vertė yra

$$S = Rs_{n;i}\,. \qquad (1.2)$$

Šioje dalyje rasime periodinių skolos aptarnavimo išlaidų esamąsias vertes. Periodinių mokėjimų **esamoji (diskontuota)** vertė yra visų mokėjimų esamųjų verčių suma.

Tarkime, kad periodinės įmokos R yra mokamos kiekvieno periodo pabaigoje, o palūkanų norma už periodą yra lygi i. Rasime šių įmokų esamąsias vertes. Šių įmokų esamąsias vertes pažymėkime $x_1, x_2, ..., x_n$. Kitaip nei mokant įmokas R periodo pabaigoje, pirmojo periodo pradžioje pakanka įmokėti mažesnę sumą x_1, kadangi per pirmąjį periodą kartu su palūkanomis ta suma išaugs iki R.

Todėl

$$x_1(1+i) = R\,, \qquad x_1 = \frac{R}{(1+i)}\,.$$

Įmokant antrąją įmoką x_2 antrojo periodo pradžioje, per antrą periodą ta suma su palūkanomis išaugs iki R

$$x_2(1+i)^2 = R\,, \qquad x_2 = \frac{R}{(1+i)^2}\,.$$

Ir t. t.

Paskutinio periodo pabaigoje turėsim

$$x_n(1+i)^n = R\,, \qquad x_n = \frac{R}{(1+i)^n}\,.$$

Pažymėkime visų tų n periodų esamąją vertę P ir ji bus lygi

$$P = x_1 + x_2 + ... + x_n = \frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + ... + \frac{R}{(1+i)^n} = R\left(\frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + ... + \frac{1}{(1+i)^n}\right).$$

Pažymėkime

$$a_{n;i} = \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + ... + \frac{1}{(1+i)^n}.$$

Šios sumos nariai sudaro geometrinę progresiją, todėl

$$a_{n;i} = \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + ... + \frac{1}{(1+i)^n} = \frac{1}{1+i}\left(1 + \frac{1}{1+i} + ... + \frac{1}{(1+i)^{n-1}}\right) = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \qquad (1.3)$$

Tegul $v = (1+i)^{-1}$ yra diskontinis daugiklis, tada (1.3) formulė atrodys taip

$$a_{n;i} = \frac{1-v^n}{i}. \qquad (1.4)$$

Todėl visų periodinių mokėjimų dabartinė vertė bus lygi

$$P = Ra_{n;i}. \qquad (1.5)$$

Tarkime į banką padedame B dydžio indėlį. Rasime pradinės sumos B sukauptą vertę po n metų, esant palūkanų normai i. Kadangi sudėtinės palūkanos apskaičiuojamos nuo vertės esančios periodo pradžioje, todėl pirmo periodo pabaigoje pradinė suma B su palūkanomis bus lygi $S_1 = B(1+i)$. Antro periodo pradžioje esamoji vertė yra S_1, todėl antro periodo pabaigoje ta suma su palūkanomis bus lygi $S_2 = B(1+i)i + B(1+i) = B(1+i)^2$. Trečiojo periodo pabaigoje turėsim, kad bendra suma su palūkanomis bus lygi $S_3 = B(1+i)^3$. Tęsdami šį procesą gausime, kad po n metų pradinės sumos B su palūkanom i *sukauptoji vertė* bus

$$S_n = B(1+i)^n. \qquad (1.6)$$

Šiame skyriuje išvestomis formulėmis pasinaudosime sudarant skolų grąžinimo planus.

2. SKOLOS GRĄŽINIMAS VIENODAIS TERMINUOTAIS MOKĖJIMAIS

Šiame skyriuje aptarsime paskolos grąžinimo atvejį, kai yra mokamos vienodo dydžio įmokas, o paskola yra grąžinama amortizaciniu būdu (angliškai - amortization method).

Paskolos amortizacija yra paskolos grąžinimas (padengimas) vienodomis įmokomis per visą paskolos išdavimo laikotarpį. Grąžinant kreditą amortizaciniu būdu, pagrindinė paskolos dalis laipsniškai grąžinama per visą kredito galiojimo terminą. Mokėjimai atliekami reguliariai, lygiomis dalimis (dažniausiai kas mėnesį, ketvirtį arba pusmetį) ir juos sudaro tam tikra paskolos dalis bei palūkanos. Kartu su paskutine įmoka padengiama visa kredito suma. Šis būdas naudojamas grąžinant paskolas nekilnojamam turtui įsigyti.

Amortizacinis planas (angliškai – amortization schedule) yra lentelė, kurioje yra nurodyta detali informacija apie paskolos: įmokas, grąžinamas skolos dalis, mokamas palūkanas, bei apie skolos likutį.

Tarkime, kad t metams yra paimama B dydžio paskola, esant palūkanų normai i, paskolą reikia grąžinti per $n = m \cdot t$ periodų, kai palūkanos skaičiuojamos m kartų per metus. Laikysime, kad paskola yra grąžinama vienodomis įmokomis $R_1 = R_2 = ... = R_n = R$.

Per n periodų paskola B išaugs iki

$$B(1+i)^n,\ i = \frac{i^{(m)}}{m}.$$

Mokėdami kiekvieno periodo gale vienodas įmokas, t. y. $R_1 = R_2 = ... = R_n = R$, po n įmokų sukaupsime būsimąją visų mokėjimų vertę, kurios vertė pagal (1.2) formulę bus lygi:

$$S = Rs_{n;i}.$$

Paskola bus grąžinta, kai visų mokėjimų būsimoji vertė S bus lygi kredito sukauptai vertei:

$$Rs_{n;i} = B(1+i)^n.$$

Kadangi

$$\frac{s_{n;i}}{(1+i)^n} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = a_{n;i},$$

tai įmokos dydis bus:

$$R = \frac{B}{a_{n;i}}. \qquad (2.1)$$

Sudarykime amortizacinį planą B dydžio paskolai, kai yra mokamos pastovios įmokos R kiekvieno periodo pabaigoje. Tarkime, kad paskolą B reikia grąžinti per n periodų, esant palūkanų normai i.

Amortizacinio plano sudarymui naudosime formulę:

$$a_{n;i} - v^n = a_{n-1;i}, \; v = \frac{1}{1+i}. \qquad (2.2)$$

Ši formulė gaunama taip:

$$a_{n;i} - v^n = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - (1+i)^{-n} = \frac{1-(1+i)^{-n}(1+i)}{i} = \frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i} = a_{n-1;i}.$$

Pastovias įmokas R surandame pagal (2.1) formulę. Remiantis šia formule gauname, kad paimtas kreditas yra lygus

$$B = Ra_{n;i}.$$

Kiekviena įmoka susideda iš dalies grąžinamos paskolos ir palūkanų už dar nesugrąžintą paskolos dalį per praėjusį periodą. Santykis tarp grąžinamos skolos ir sumokėtų palūkanų keičiasi: palūkanų dalis mažėja, kadangi mažėja skolos likutis, o grąžinamos skolos dalis didėja. Pirmojo periodo pabaigoje už praėjusį periodą reikia sumokėti palūkanas už visą paimtą paskolą, t. y. $Bi = Ria_{n;i}$, todėl pasibaigus pirmajam periodui sugrąžinta paskolos dalis bus lygi

$$R - Ria_{n;i} = R(1 - ia_{n;i}) = \frac{R}{(1+i)^n} = Rv^n.$$

Skolos likutis bus

$$B - Rv^n = Ra_{n;i} - Rv^n = R(a_{n;i} - v^n).$$

Remiantis (2.2) formule, skolos likutis po pirmos įmokos bus lygus $B_1 = Ra_{n-1;i}$.

Vadovaujantis šias skaičiavimais po pirmos įmokos paskola bus apmokėta taip:

- įmokėta - R,
- sumokėta palūkanų - $Ria_{n;i} = R(1-v^n)$,
- grąžinta paskolos - Rv^n,
- skolos likutis - $Ra_{n-1;i}$.

Pasibaigus antrajam periodu, bus įmokėta įmoka R . Palūkanos už tą periodą mokamos už skolos likutį ir yra lygios

$$Ra_{n-1;i} \cdot i = R - Rv^{n-1} = R(1-v^{n-1}),$$

todėl po antros įmokos R sugrąžinta paskolos dalis yra lygi

$$R - R(1-v^{n-1}) = R \cdot v^{n-1}.$$

Skolos likutis po antros įmokos bus

$$Ra_{n-1;i} - Rv^{n-1} = R\left(\frac{1-(1+i)^{-(n-2)}}{i}\right) = Ra_{n-2;i}.$$

Ir t. t.

Vadovaujantis šias skaičiavimais galima sudaryti tokį amortizacinį planą:

Periodas	Įmoka	Grąžinta skolos	Sumokėta palūkanų	Skolos likutis
0				B
1	R	Rv^n	$R(1-v^n)$	$Ra_{n-1;i}$
2	R	Rv^{n-1}	$R(1-v^{n-1})$	$Ra_{n-2;i}$
......	......	.....	.....	.....
l	R	Rv^{n-l+1}	$R(1-v^{n-l+1})$	$Ra_{n-l;i}$
......	......	.....	.....	.....
$n-1$		Rv^2	$R(1-v^2)$	$Ra_{1;i}$
n		Rv	$R(1-v)$	$Ra_{0;i}$
Iš viso	$n \cdot R$	$Ra_{n;i}$	$R(n-a_{n;i})$	

2.1 lentelė.

Parodysime, kad sumokėtų palūkanų suma yra $R(n-a_{n;i})$. Pažymėję I_k - sumokėtų palūkanų suma, gausim

$$I_k = R((1-v^n)+(1-v^{n-1})+...+(1-v)) = R(n-(v^n+v^{n-1}+...+v)) = R(n-a_{n;i}).$$

Amortizacinius planus patogu sudaryti naudojantis programa Microsoft Excel (toliau – Programa). Aprašysime būdą, kaip amortizacinį planą sudaryti naudojantis Programa.

Laikydami, kad visos įmokos yra vienodos $R_1 = R_2 = ... = R_n = R$, įmokos dydį R susirandame naudodamiesi kreipiniu PMT(rate,nper,pv,fv,type), kur

- rate – paskolos palūkanų norma i ,

- nper – bendras periodų skaičius n,
- pv – paskolos dydis B,
- fv – skolos likutis grąžinus visą kreditą, todėl fv = 0,
- type - kredito grąžinimo būdas (type=0, kai įmokos mokamos periodo pabaigoje, type=1, kai įmokos mokamos periodo pradžioje).

Dėl apvalinimo paklaidos įmoką apvaliname 2 skaičių po kablelio tikslumu, tam naudojame kreipinį ROUNDUP(number,num_digits), kur

- number – įmoka - R,
- num_digits – skaitmenų skaičius po kablelio, 2.

Lentelę Programoje galima užpildyti pagal tokius 2.1 lentelėje esančius santykius tarp stulpelių elementų:

- $I_k = i \cdot B_{k-1}$, kur i palūkanų norma, o B_k, skolos likutis, $k = 1,...,n$ - periodas, $B_0 = B$,
- $P_k = R_k - I_k$, grąžinamos paskolos dalis, $R_1 = R_2 = ... = R_n = R$,
- $B_k = B_{k-1} - P_k$, skolos likutis.

Amortizacinis planas, sudarytas 2.1 lentelėje, sudarytas Programoje atrodys taip:

Periodas k	Įmoka R_k	Sumokėta palūkanų I_k	Grąžinta skolos P_k	Skolos likutis B_k
0				B_0
1	R_1	$I_1 = B_0 \cdot i$	$P_1 = R_1 - I_1$	$B_1 = B_0 - P_1$
2	R_2	$I_2 = B_1 \cdot i$	$P_2 = R_2 - I_2$	$B_2 = B_1 - P_2$
......	......	......	......	.....
k	R_k	$I_k = B_{k-1} \cdot i$	$P_k = R_k - I_k$	$B_k = B_{k-1} - P_k$
......	......	......	......	.....
n	R_n	$I_n = B_{n-1} \cdot i$	$P_n = R_n - I_n$	$B_n = B_{n-1} - P_n$

2.2 lentelė.

Atliekant skaičiavimus Programa, pastebėta, kad dėl apvalinimo paklaidų grąžinamos paskolos dalių suma ne visada lygi visos paskolos dydžiui. Todėl paskutinės įmokos grąžinama paskolos dalis turėtų būti lygi skolos likučiui po paskutinio mokėjimo.

Pasitaiko atvejų kai skolos likutį reikia rasti praėjus tam tikram laikui nuo paskolos paėmimo. Tam nebūtina skaičiuoti visas įmokas iš eilės, iki to laiko kurį reikia surasti. Panagrinėsime du ekvivalenčius būdus skolos likučiui apskaičiuoti: *perspektyvinį* ir *retrospektyvinį*. Ieškant skolos likučio perspektyviniu būdu, skolos likutis tam tikru momentu būna lygus likusių mokėjimų diskontuotajai vertei. Skaičiuojant retroperspektyviniu būdu, skolos likutis yra lygus skirtumui tarp pradinės skolos sumos sukauptos vertės ir sumokėtų įmokų perskaičiuotos vertės tuo momentu.

Tarkime, kad skolos likutis bus skaičiuojamas praėjus k periodų nuo paskolos paėmimo. Skaičiuojant likutį perspektyviniu būdu, jis yra lygus

$$B_k = Ra_{n-k;i} \qquad (2.3)$$

čia $n-k$ likusių mokėjimų skaičius. Skaičiuojant likutį retroperspektyviniu būdu jis yra lygus

$$B_k = B(1+i)^k - Rs_{k;i}, \qquad (2.4)$$

čia $B(1+i)^k$ yra paskolos B sukaupta vertė po k periodų, o $Rs_{k;i}$ - pirmųjų k įmokų perskaičiuota vertė po k periodų.

Parodysime, kad abiem metodais skolos likučių vertė yra vienoda. Pertvarkykime (2.4) formulės dešinę pusę.

Paėmę, kad

$$B = Ra_{n;i}$$

gausim

$$R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\cdot(1+i)^k - R\frac{(1+i)^k-1}{i} = R\left(\frac{(1+i)^k-(1+i)^{-(n-k)}-(1+i)^k+1}{i}\right) = R\frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{i} =$$
$$= Ra_{n-k;i}$$

O t. y. (2.3) formulės dešinė pusė. Vadinasi perspektyvinis metodas yra ekvivalentus retroperspektyviniam metodui, nes gaunama ta pati likučio vertė.

Perspektyvinio būdo formulė yra paprastesnė, todėl ji yra naudojama dažniau. Trūkumas šio būdo formulės yra toks, kad ne visada galima apskaičiuoti skolos likutį, tada kai nėra žinomas bendras mokėjimų skaičius. Tuo tarpu skaičiuojant retrospektyviniu būdu, galima skaičiuoti ir nežinant bendro mokėjimų skaičiaus.

Apibendrinant retrospektyvinio būdo formulę galima užrašyti paprastesnę jos išraišką:

$$B_k = Ra_{n;i}(1+i)^k - Rs_{k;i},$$

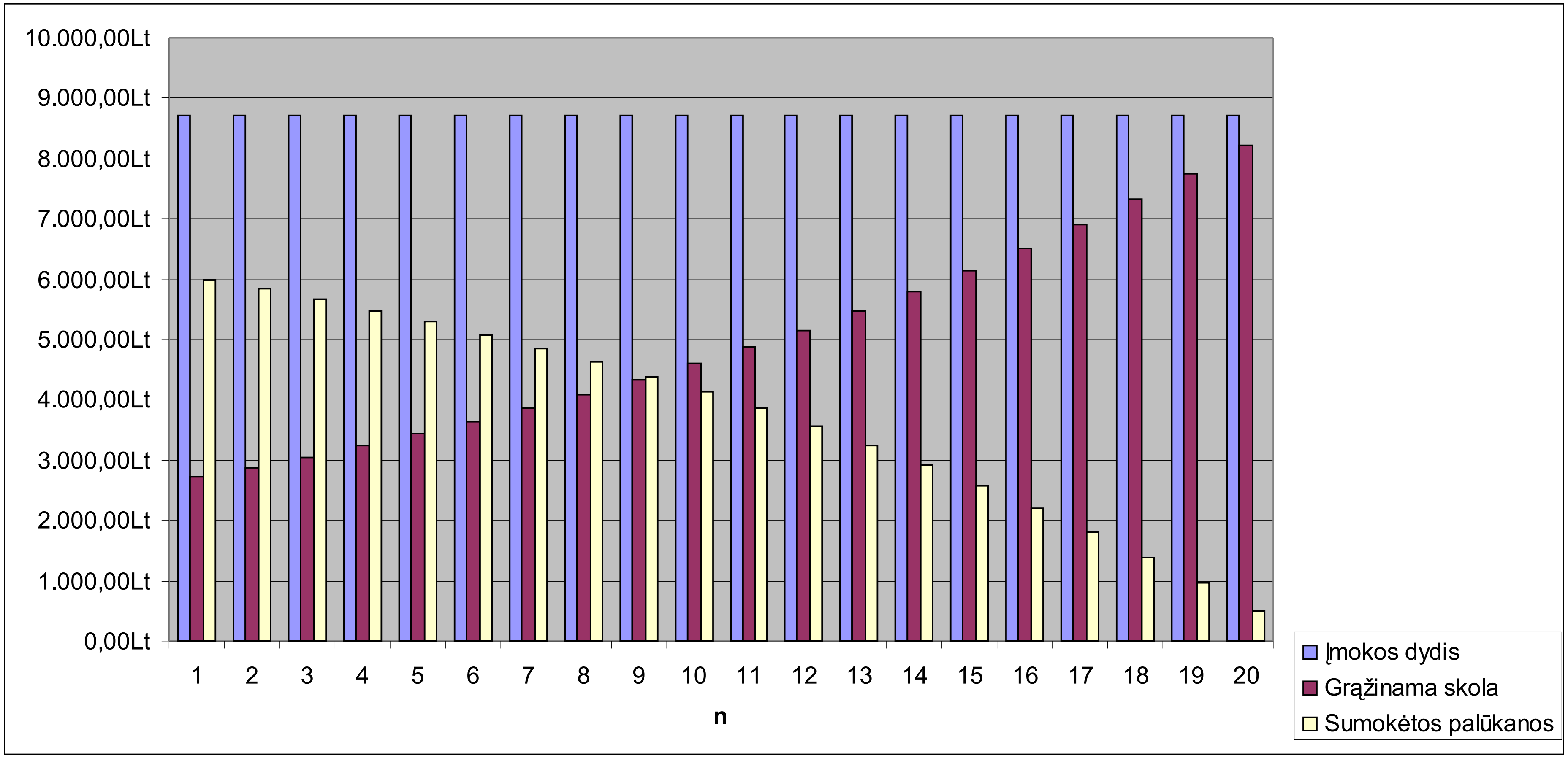
kur $Ra_{n;i}$ - pradinė paskolos suma.

Panagrinėkime pavyzdžius .

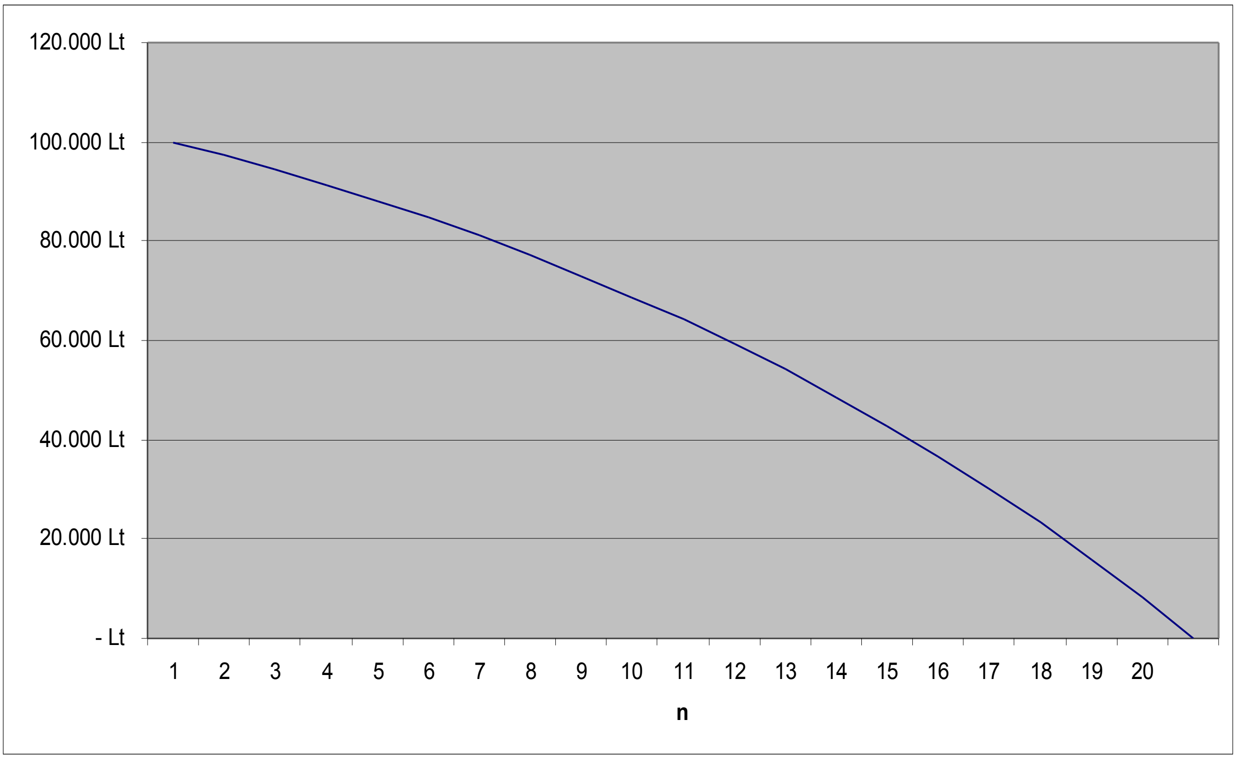
1.1 pavyzdys. Sudarykime 100 000 Lt paskolos amortizacinį planą, kai nominalioji palūkanų norma yra 6 %. Kreditą lygiomis įmokomis reikia grąžinti per 20 metų, mokant įmokas kiekvienų metų pabaigoje.

Amortizacinis planas sudarytas Excel programa yra kompiuterinėje laikmenoje.

Brėžinyje 1.1 pavaizduota: grąžinamos paskolos dalis, įmokos dydis ir sumokėtos palūkanos per 20 metų.



1.1 brėžinys. 1.1 pavyzdžio diagrama.



1.2 brėžinys. 1.1 pavyzdžio likučio kitimas.

1.2 brėžinyje pavaizduota 1.1 pavyzdžio funkcija $f(n) = \frac{100000}{a_{20;i}} a_{20-n;i}$, $n = 1,...,20$ arba kitaip tariant kaip kinta paskolos likutis.

1.2. pavyzdys. Sudarykime 100 000 Lt paskolos amortizacinį planą, kai nominalioji palūkanų norma yra 6 %. Kreditą lygiomis įmokomis reikia grąžinti per 20 metų, mokant įmokas kiekvieno mėnesio pabaigoje.

Amortizacinis planas yra sudarytas Excel programos pagalba yra kompiuterinėje laikmenoje.

3. FONDO FORMAVIMAS

Suėjus paskolos terminui, paskola grąžinama, o palūkanos mokamos periodiškai, kiekvieno periodo pabaigoje. Skolininkas per paskolos laikotarpį turi sukaupti sumą, lygią pradinei paskolos sumai. Paprastai ta suma sukaupiama įnašais į sąskaitą, dažnai vadinamą **padengimo, arba grąžinimo**, **fondu** (angliškai – sinking - fund), gaunant palūkanas.

Panagrinėsime atvejį, kai įmokos į fondą sudaro periodinius mokėjimus. Tarkime, kad B dydžio paskolą reika grąžinti per $n = m \cdot t$ (čia m - palūkanų skaičiavimas per metus, t - metai) periodų, kiekvieną periodą mokant paprastąsias palūkanas, kurių norma už periodą lygi j. Kiekvieną įmoką sudaro dvi dalys: $I = Bj$ - palūkanos už paskolą ir C įmokos į grąžinimo fondą, $I + C$. Vieno periodo palūkanų norma už sukauptas fonde lėšas yra i. Paprastai laikoma $i \le j$. Įmokomis ir už jas gautomis palūkanomis fonde reikia sukaupti kredito dydžio sumą B. Pagal visų periodinių n mokėjimų būsimosios vertės formulę (1.2)

$$B = Cs_{n;i} .$$

Iš čia išplaukia, kad periodinės įmokos į grąžinimo fondą lygios

$$C = \frac{B}{s_{n;i}} .$$

Todėl kiekvieną įmoką yra lygi

$$I + C = Bj + \frac{B}{s_{n;i}}, \quad j = \frac{j^{(m)}}{m}, \quad i = \frac{i^{(m)}}{m} .$$

Sudarykime paskolos grąžinimo planą fondo kaupimo metodu, imdami, kad palūkanos I ir įmoka C yra pastovūs dydžiai. Planą sudarysime tuo pačiu principu, kaip ir amortizacinį planą, nurodydami: grąžinimo fondo kaupiamąsias palūkanas, grąžinimo fondo augimą ir skolos likutį, kuris yra lygus gautos paskolos B dydžiui ir sukaupto grąžinimo fondo skirtumui.

Jei kiekvieno periodo pabaigoje į grąžinimo fondą įmokama po $B / s_{n;i}$ tai l - ojo periodo pabaigoje pagal formulę (1.2) fonde bus sukaupta

$$S_l = \frac{B}{s_{n;i}} s_{l;i}, \quad l = 1,2,....,n . \qquad (3.1)$$

Dalis šios sumos yra fondo palūkanos.

Remiantis (3.1) formule pirmo periodo pabaigoje fonde bus sukaupta lėšų

$$S_1 = \frac{B}{s_{n;i}} \cdot s_{1;i}. \qquad (3.2)$$

Fondo palūkanos apskaičiuojamos kaip procentai nuo prieš tai buvusios grąžinimo į fondą sumos. Remiantis tuo palūkanos už pirmąjį periodą yra lygios 0. Rasime skolos likutį po pirmojo periodo. Pagal (3.2) formulę pirmojo periodo pabaigoje fonde bus sukaupta lėšų S_1, todėl skolos likutis bus lygus

$$B - S_1 = B - \frac{B}{s_{n;i}} \cdot s_{1;i} = B\left(1 - \frac{s_{1;i}}{s_{n;i}}\right).$$

Vadinasi po pirmojo įnašo turėsime tokią situaciją:

- sukaupta lėšų suma fonde - $S_1 = \frac{B}{s_{n;i}} \cdot s_{1;i}$,
- fondo palūkanos – 0,
- skolos likutis - $B\left(1 - \frac{s_{1;i}}{s_{n;i}}\right)$
- sumokėta palūkanų Bj.

Pasibaigus antąjam periodui įmoka į fondą bus lygi $B / s_{n;i}$, o sukaupta fonde lėšų suma po antro periodo yra

$$S_2 = \frac{B}{s_{n;i}} \cdot s_{2;i}$$

Kadangi fondo palūkanos apskaičiuojamos nuo praėjusios grąžinimo į fondą sumos, todėl palūkanos už antrąjį periodą bus lygios

$$\frac{B}{s_{n;i}} \cdot s_{1;i} \cdot i = \frac{Bis_{1;i}}{s_{n;i}}.$$

Rasime skolos likutį antrojo periodo pabaigoje

$$B - S_2 = B - \frac{B \cdot s_{2;i}}{s_{n;i}} = B\left(1 - \frac{s_{2;i}}{s_{n;i}}\right).$$

Remiantis šiais skaičiavimais galime surasti dydžius l - tojo periodo pabaigoje:

- įmokėta į fondą - $\frac{B}{s_{n;i}}$,

- sukaupta lėšų suma fonde - $S_l = \frac{B}{s_{n;i}} \cdot s_{l;i}$, $\qquad l = 1,...,n$,

- fondo palūkanos - $\frac{Bis_{l-1;i}}{s_{n;i}}$,

- skolos likutis - $B - S_l = B\left(1 - \frac{s_{l;i}}{s_{n;i}}\right)$,

- sumokėta palūkanų Bj.

Pagal šiuos atliktus skaičiavimus galime sudaryti tokį grąžinimo fondo kaupimo planą:

Periodas	Palūkanos	Įmoka į fondą	Fondo palūkanos	Grąžinimo fondas	Skolos likutis
0					B
1	Bj	$\frac{B}{s_{n;i}}$	0	$\frac{Bs_{1;i}}{s_{n;i}}$	$B\left(1-\frac{s_{1;i}}{s_{n;i}}\right)$
2	Bj	$\frac{B}{s_{n;i}}$	$\frac{Bis_{1;i}}{s_{n;i}}$	$\frac{Bs_{2;i}}{s_{n;i}}$	$B\left(1-\frac{s_{2;i}}{s_{n;i}}\right)$
......	......	......	......	......	......
l	Bj	$\frac{B}{s_{n;i}}$	$\frac{Bis_{l-1;i}}{s_{n;i}}$	$\frac{Bs_{l;i}}{s_{n;i}}$	$B\left(1-\frac{s_{l;i}}{s_{n;i}}\right)$
......	......	......	......	......	......
$n-1$	Bj	$\frac{B}{s_{n;i}}$	$\frac{Bis_{n-2;i}}{s_{n;i}}$	$\frac{Bs_{n-1;i}}{s_{n;i}}$	$B\left(1-\frac{s_{n-1;i}}{s_{n;i}}\right)$
n	Bj	$\frac{B}{s_{n;i}}$	$\frac{Bis_{n-1;i}}{s_{n;i}}$	B	0
Iš viso:	nBj	$n \cdot \frac{B}{s_{n;i}}$	$B\left(1-\frac{n}{s_{n;i}}\right)$		

3.1 lentelė.

Parodysime, kad iš viso priskaičiuotų fondo palūkanų suma yra $B\left(1-\frac{n}{s_{n;i}}\right)$.

Pažymėkime:

$$s_{1;i} + s_{2;i} + ... + s_{n-1;i} = P_n$$

Išsikėlę $\frac{1}{i}$ prieš skliaustus gausime

$$\frac{1}{i}\left(i+(2+i)i+........+((1+i)^{n-1}-1)\right)=P_n$$

Atlikę nesudėtingus veiksmus pertvarkome šią sumą taip:

$$\frac{1}{i}\left(1+(1+i)+(1+i)^2+......+(1+i)^{n-1}-n\right)=P_n$$

Kadangi suma:

$$1+(1+i)+(1+i)^2+.....+(1+i)^{n-1}=s_{n;i}\,,$$

todėl gauname, kad

$$P_n=\frac{1}{i}\left(s_{n;i}-n\right)$$

Vadinasi

$$s_{1;i}+s_{2;i}+...+s_{n-1;i}=\frac{1}{i}(s_{n;i}-n)$$

Todėl iš viso priskaičiuota fondo palūkanų suma yra lygi

$$\frac{Bis_{1;i}}{s_{n;i}}+\frac{Bis_{2;i}}{s_{n;i}}+...+\frac{Bis_{n-1;i}}{s_{n;i}}=\frac{Bi}{s_{n;i}}\cdot\frac{1}{i}(s_{n;i}-n)=B\left(1-\frac{n}{s_{n;i}}\right).$$

Pastebėsime, kad grąžinimo fondą galima apskaičiuoti imant prieš tai buvusio periodo grąžinimo fondą, įmokos į fondą ir fondo palūkanų už einamąjį periodą sumą. Pavyzdžiui grąžinimo fondas po pirmos įmokos

$$0+\frac{B}{s_{n;i}}+0=\frac{B}{s_{n;i}}1=\frac{Bs_{1;i}}{s_{n;i}}.$$

Grąžinimo fondas po 2 – os įmokos bus lygus

$$\frac{Bs_{1;i}}{s_{n;i}}+\frac{B}{s_{n;i}}+\frac{Bis_{1;i}}{s_{n;i}}=\frac{B}{s_{n;i}}\left(2+i\right)=\frac{Bs_{2;i}}{s_{n;i}}.$$

Tęsdami šį procesą po l - os įmokos į fondą, fondas bus lygus

$$\frac{Bs_{l-1;i}}{s_{n;i}}+\frac{B}{s_{n;i}}+\frac{Bis_{l-1;i}}{s_{n;i}}=\frac{B}{s_{n;i}}\left(s_{l-1;i}(1+i)+1\right)=\frac{B}{s_{n;i}}\frac{(1+i)^l-1}{i}=\frac{B}{s_{n;i}}s_{l;i}\,,\ l=1,2,....,n$$

O t. y. (3.1) formulės dešinė pusė.

Fondo kaupimo planus, kaip ir amortizacinius planus, galima sudaryti naudojantis programa Microsoft Excel (toliau - Programa). Aprašysime būdą, kaip sudaryti fondo kaupimo planą Programa.

Dydį $s_{n;i}$ susirandame naudodamiesi kreipiniu FV(rate,nper,pmt,pv,type), kur

- rate – periodo palūkanų norma už fonde sukauptas lėšas, i
- nper – bendras periodų skaičius n,
- pmt – periodinės įmokos dydis,
- pv – paskolos dydis B,
- type – kredito grąžinimo būdas (type=0, kai įmokos mokamos periodo pabaigoje, type=1, kai įmokos mokamos periodo pradžioje).

Kadangi mums reikia susirasti periodinės įmokos dydį *C*, tai paskolos būsimosios vertės daugikliui $s_{n;i}$ surasti yra naudojamos tokios funkcijos **FV** reikšmės $s_{n;i}$ = FV(i,n,-1,0,0). Suradus daugiklį $s_{n;i}$, nesudėtinga rasti įmokos į grąžinimo fondą dydį $C = B / s_{n;i}$. Lentelę programoje galima užpildyti pagal tokius 3.1 lentelėje esančius santykius tarp stulpelių elementų:

- $I_k = Bj$, čia B paskolos dydis, $j = \dfrac{j^{(m)}}{m}$ paskolos palūkanų norma, $k = 1,.....,n$. Kadangi palūkanos už paskolą yra pastovios, todėl žymėsim $I_1 = I_2 = ... = I_n = I$,
- $C_k = B / s_{n;i}$, įmokos į fondą taip pat yra pastovios, todėl žymėsim $C_1 = C_2 = ... = C_n = C$,
- $SI_k = S_{k-1} \cdot i$, fondo palūkanos, $i = \dfrac{i^{(m)}}{m}$, $S_0 = 0$,
- $S_k = S_{k-1} + C_k + SI_k$, grąžinimo fondas,
- $B_k = B_0 - S_k$, skolos likutis, $B_0 = B$.

Grąžinimo fondo kaupimo planas, sudarytas 3.1 lentelėje programoje atrodys taip:

Periodas k	Palūkanos I_k	Įmoka į fondą C_k	Fondo palūkanos SI_k	Grąžinimo fondas S_k	Skolos likutis B_k
0				$S_0 = 0$	B_0
1	I_1	C_1	$SI_1 = S_0 \cdot i$	$S_1 = S_0 + C_1 + SI_1$	$B_1 = B_0 - S_1$
2	I_2	C_2	$SI_2 = S_1 \cdot i$	$S_2 = S_1 + C_2 + SI_2$	$B_2 = B_0 - S_2$

......	......	......	......	......	......
k	I_k	C_k	$SI_k = S_{k-1} \cdot i$	$S_k = S_{k-1} + C_k + SI_k$	$B_k = B_0 - S_k$
......	......	......	......	......	......
$n-1$	I_{n-1}	C_{n-1}	$SI_{n-1} = S_{n-2} \cdot i$	$S_{n-1} = S_{n-2} + C_{n-1} + SI_{n-1}$	$B_{n-1} = B_0 - S_{n-1}$
n	I_n	C_n	$SI_n = S_{n-1} \cdot i$	$S_n = S_{n-1} + C_n + SI_n$	$B_n = B_0 - S_n$

3.2 lentelė.

Panagrinėsime atvejus kas yra bendro kai paskola grąžinama amortizaciniu būdu ir fondo kaupimo metodu.

Tarkime, kad paskolos *B*, kurios palūkanų norma yra j, įmokos į fondą sudaro periodinių mokėjimų eilę, o i palūkanų norma už sukauptas fonde lėšas. Panagrinėsime atvejį, kai palūkanos j, mokamos už paskolą lygios palūkanoms už sukauptas fonde lėšas i. Kaip ir buvo minėta skyrelio pradžioje, kiekvieną įmoką sudaro dvi dalys: I - palūkanos, mokamos už paskolą ir C įmokos į grąžinimo fondą, $I + C$. Remiantis amortizaciniu metodu, kiekvienos įmokos dydis yra $R = \frac{B}{a_{n;i}}$. Grąžinant paskolą padengimo fondo metodu, kiekvieno periodo pabaigoje yra sumokamos palūkanos už paskolą $I = Bj$, o įmoka į padengimo fondą yra lygi $C = \frac{B}{s_{n;i}}$.

Iš formulės

$$B\left(\frac{1}{s_{n;i}} + i\right) = B\left(\frac{i}{(1+i)^n - 1} + i\right) = B\left(\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right) = \frac{B}{a_{n;i}},$$

arba

$$\frac{1}{s_{n;i}} + i = \frac{i}{(1+i)^n - 1} + i = \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{1}{a_{n;i}} \qquad (3.5)$$

išplaukia, kad $R = I + C$.

Vadinasi paskolos grąžinimas amortizaciniu būdu bus ekvivalentus paskolos grąžinimui fondo kaupimo metodu, kai padengimo fondo palūkanų norma bus lygi paskolos palūkanų normai $i = j$.

Panagrinėkime atvejį, kai palūkanų norma j už paskolą B skiriasi nuo vieno periodo palūkanų normos i už sukauptas lėšas fonde. Paprastai priimta laikyti, kad $i \le j$.

Kiekvieną įmoką sudaro: $I = Bj$ - kredito palūkanos ir $C = \frac{B}{s_{n;i}}$ - įmokos į grąžinimo fondą. Suma abiejų dalių yra lygi:

$$I + C = Bj + \frac{B}{s_{n;i}} = B\left(j + \frac{1}{s_{n;i}}\right).$$

Pažymėkime $a_{n;i\&j}$ esamąją vertę tokių n periodinių mokėjimų, kai mokama kiekvieno periodo pabaigoje.

Tarkime, kad periodinės įmokos dydis yra $\frac{B}{a_{n;i\&j}}$.

Tada

$$\frac{B}{a_{n;i\&j}} = B\left(\frac{1}{s_{n;i}} + j\right),$$

arba

$$\frac{1}{a_{n;i\&j}} = \frac{1}{s_{n;i}} + j, \qquad (3.6)$$

arba

$$a_{n;i\&j} = \frac{s_{n;i}}{1 + js_{n;i}}. \qquad (3.7)$$

Pagal (3.5) formulę gauname

$$\frac{1}{s_{n;i}} + j = \frac{1}{a_{n;i}} + (i - j). \qquad (3.8)$$

Iš šios lygybės ir (3.6) gauname, kad

$$a_{n;i\&j} = \frac{a_{n;i}}{1 + (i - j)a_{n;i}}. \qquad (3.10)$$

(3.10) formulėje matosi, kad kai $i = j$, gauname, kad $a_{n;i\&j} = a_{n;i}$.

Kadangi grąžinant paskolą fondo padengimo metodu kiekvieną periodą už paskolą reikia sumokėti Bj palūkanų, todėl B dydžio paskola skolininkui pagal padengimo fondo metodą atsieina

$$nBj+\frac{nB}{s_{n;i}}=nB\left(j+\frac{1}{s_{n;i}}\right).$$

Grąžinant paskolą amortizaciniu būdu, kai mokamos vienodos įmokos R, B dydžio kreditas skolininkui atsieina

$$nR=\frac{nB}{a_{n;i}}$$

Skirtumas tarp skolininko išlaidų grąžinant kreditą padengimo fondo metodu bei amortizaciniu metodu yra

$$\Delta=nB\left(j+\frac{1}{s_{n;i}}\right)-\frac{nB}{a_{n;i}}=nB(j-i)+nB\left(i+\frac{1}{s_{n;i}}-\frac{1}{a_{n;i}}\right).$$

Remiantis (3.5) formule gauname, kad

$$\Delta=nB(j-i)$$

Iš čia išplaukia, kad skolininkui paskolos grąžinimas kaupimo fondo metodu atsieina daugiau kai $i<j$ (paskolos palūkanų norma didesnė už fondo palūkanų normą), kai $i=j$ (paskolos palūkanų norma lygi fondo palūkanų normai) išlaidos abiem būdais yra vienodos, kai $i>j$ (fondo palūkanų norma didesnė už paskolos palūkanų normą) išlaidos grąžinimo fondo metodu yra mažesnės, nei grąžinant paskolą amortizaciniu metodu.

Panagrinėkime pavyzdžius.

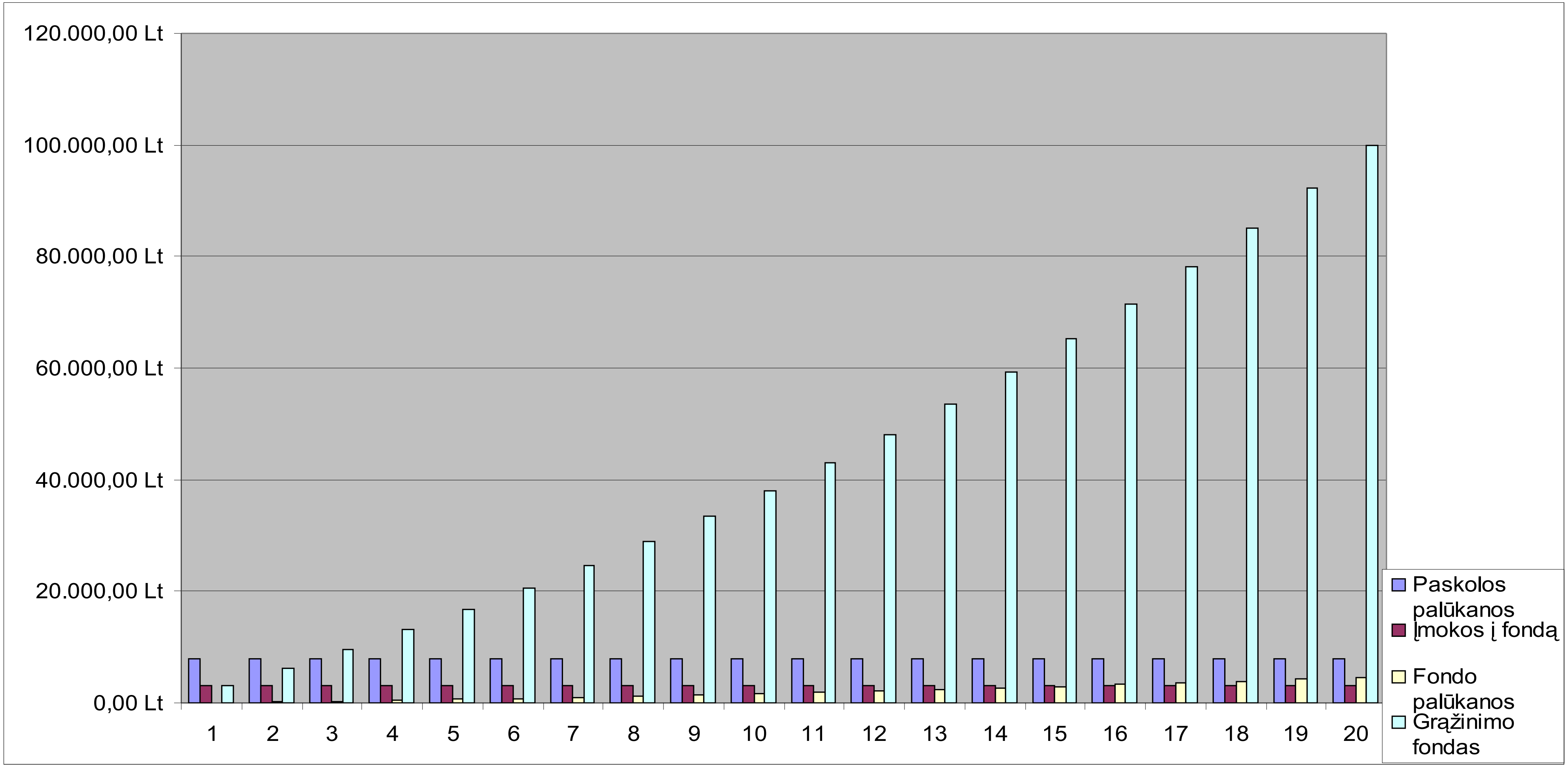
3.1 pavyzdys. Sudarykime fondo kaupimo planą, kai paskolos dydis yra 100 000 Lt, kredito palūkanų norma yra 8 %, o įnašų į grąžinimo fondą palūkanų norma yra lygi 5 %. Paskolą reikia grąžinti per 20 metų, mokant įmokas kiekvienų metų pabaigoje.

Fondo kaupimo planas yra sudarytas Excel programa yra kompiuterinėje laikmenoje.

Brėžinio 3.1 diagramoje pavaizduota: mokamos palūkanos už paskolą, įmokos į fondą, kaip kinta fondo palūkanos, grąžinimo fondas.

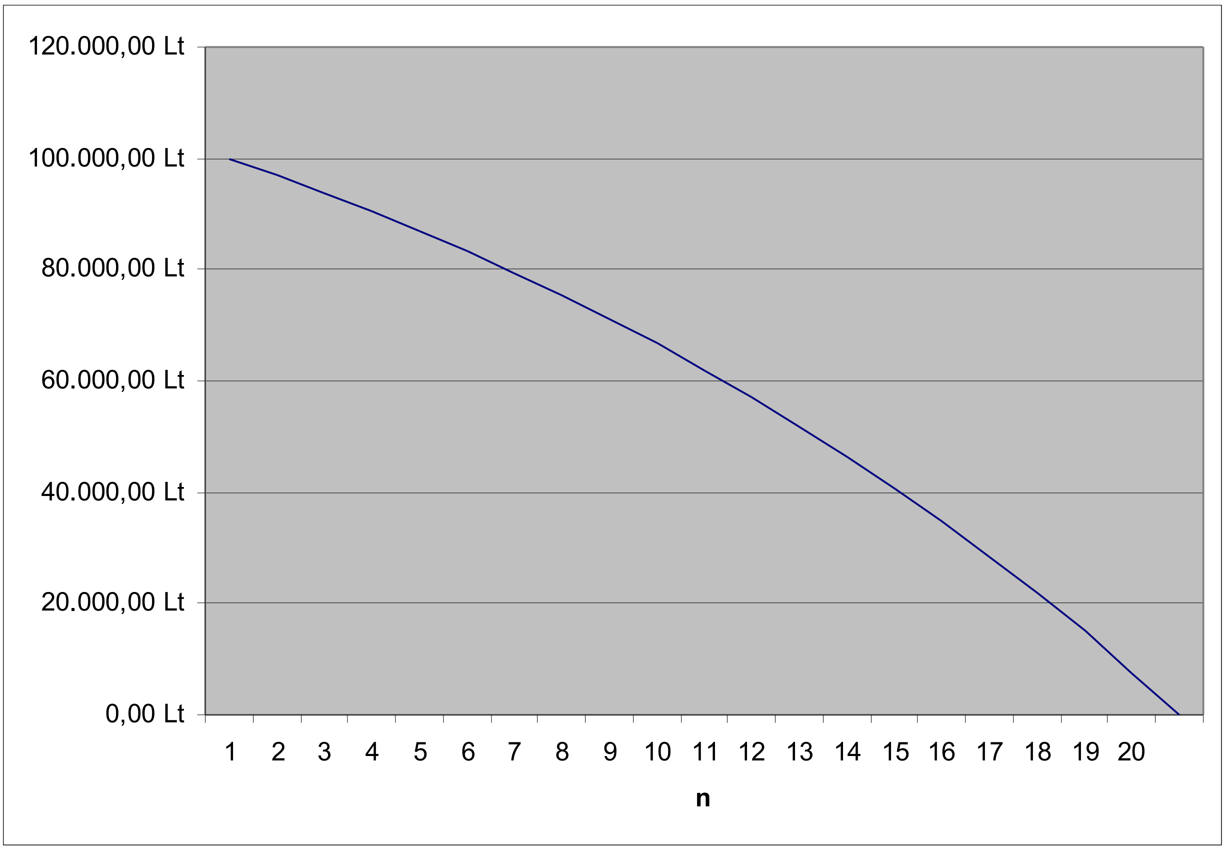
3.2 pavyzdys. Sudarykime fondo kaupimo planą 3.1 pavyzdžiui, kai paskolą reikia grąžinti per 20 m., mokant įmokas kiekvieno mėnesio pabaigoje.

Fondo kaupimo planas sudarytas Excel programa yra kompiuterinėje laikmenoje.



3.1 pavyzdžio 3.1 brėžinys.

Panagrinėkime 3.1 pavyzdžio likučio kitimo funkciją $f(n) = 100.000\left(1 - \frac{s_{n;i}}{s_{20}}\right)$, $n = 1,...,20$.



3.1 pavyzdžio 3.2 brėžinys.

IŠVADOS

Darbe išnagrinėti du paskolų grąžinimo metodai: paskolos grąžinimas amortizaciniu metodu ir fondo kaupimo metodu. Formulės išvestos rekurentiškai, sudaryti paskolos grąžinimo planai, nurodyta kaip susidaryti paskolos grąžinimo planus programa Microsoft Excel.

Grąžindamas paskolą skolininkas daugiausiai išlaidų patiria fondo kaupimo metodu, kai paskolos palūkanų norma yra didesnė už palūkanų normą už fonde sukauptas lėšas. Kai paskolos palūkanų norma yra lygi palūkanų normai už fonde sukauptas lėšas, tada išlaidos tiek fondo kaupimo metodu tiek amortizaciniu metodu yra vienodos. Kai fondo palūkanų norma yra didesnė už paskolos palūkanų normą, tada išlaidos grąžinant paskolą fondo kaupimo metodu yra mažesnės.

SUMMARY

Thesis. „Construction of loan amortization schedule“
Author. Gintaras Venskus

Two methods of returning the loan were being explored: the sinking - fund method and the amortization method. The formulas of constructing the schedules were being deduced recurrently. At the end of two sectors were indicated how to construct loan schedules in simple way by using the Microsoft Excel program.

The borrower loses more expenditure by sinking - fund method, when the interest rate being paid on the loan is greater than the interest rate of sinking fund. If the interest rate of sinking – fund is equal to the loan rate, then the size of total payment per period under either scheme is identical and, moreover, the amortization schedule is the same as sinking – fund schedule. When the interest of sinking - fund is greater than the interest being paid on the loan the borrower’s expenditures returning the loan by sinking - fund method are lesser than by amortization schedule.

LITERATŪROS SĄRAŠAS

1. P. Katauskis, Finansų matematika, Bankininkystės, draudimo ir finansų institutas, Vilnius, 1997, p. 86 - 100.

2. E. Kočovič, Finansovaja matematika, Teorija i praktika finansovo – bankovskih pasčiotov, „Finansi i statistika“, Maskva, 1994, p. 142 - 174.

3. Stephen G. Kellison, The theory of interest. Second edition, Boston: Irvin, 1991, p. 166 - 181.

4. P. Katauskis, Finansiniai skaičiavimai, Vilniaus universiteto leidykla, Vilnius, 1995, p. 51 - 63.