Turinys

ĮVADAS

Skaičių teorija, tai matematikos šaka, tirianti sveikųjų skaičių savybes. Jos vystymasis, įvairiose pasaulio vietose prasidėjo skirtingais laikotarpiais ir davė matematikos mokslui daugybę naujų uždavinių ir sprendimų metodų. Jau apie 600 metus prieš mūsų erą graikų matematikai Euklidas Aleksandrietis (Εὔκλείδης, 325 – 265 pr. m. e.), Pitagoras Samietis (Πυθαγόρας , 582 – 496pr. m. e.), Diofantas Aleksandrietis (Διόφαντος, apie 200/214 – 284/298 pr. m. e.) sprendė skaičių teorijos uždavinius. Šią matematikos šaką Europoje XVI ir XVII amžiuje pradėjo plėtoti F. Vietas (F. Viète, 1540 – 1603) ir ypač P. Ferma (P. de Fermat, 1601 – 1665). XVIII amžiuje į skaičių teorijos plėtojimą ypač svarbus buvo Oilerio (L. Euler, 1707 – 1783) ir Lagranžo (J. L. Lagrange, 1736 – 1813) įnašas. Oileris paskelbė keletą svarbių darbų, susijusių su analizine skaičių teorija. Jis, kartu su Lagranžu, naudodamas grandinines trupmenas išsprendė Pelo lygtį. XIX amžiaus pradžioje pirmąkart Europoje Ležandro (A. M. Legendre, 1752 – 1833) ir Gauso (C. F. Gauss, 1777 – 1855) knygose ši teorija buvo susisteminta. Gauso veikalas „Disquisitiones Arithmeticae“ (1801) gali būti laikomas šiuolaikinės skaičių teorijos pradžia.

Skaičių teorijos taikymuose dažnai naudojamos natūraliojo argumento funkcijos, kitaip sakant, – kompleksinių skaičių sekos, kurios vadinamos aritmetinėmis funkcijomis. Darbe nagrinėtos dažniausiai naudojamos skaičių teorijoje aritmetinės funkcijos ir jų savybės.

Yra pastebėta, kad aritmetinių funkcijų reikšmės natūraliųjų skaičių aibėje yra išsibarsčiusios be regimos tvarkos, tačiau tokių funkcijų reikšmių vidurkius galima apskaičiuoti gana tiksliai. Pagrindinis darbo tikslas – konkrečiais matematiniais skaičiavimais patvirtinti kai kurias aritmetinių funkcijų vidurkių teoremas.

Visi skaičiavimai buvo atlikti su kompiuterinės algebros paketu *Mathematica*. Ši kompiuterinės matematikos sistema, kaip ir daugelis kitų, yra skirtos įvairių matematikos uždavinių sprendimui. Su šia sistema buvo susipažinta rašant bakalauro darbą „Matematika su *Mathematica*“, todėl matematinės temos, susijusios su aritmetinėmis funkcijomis, nagrinėjimas, naudojantis kompiuterinės algebros paketu *Mathematica,* suteikia progą dar plačiau išstudijuoti šios sistemos galimybes.

Darbas sudarytas iš įvado, teorinės dalies, kurioje pateikta bendroji teorija susijusi su aritmetinėmis funkcijomis, praktinės dalies, kurioje nagrinėjamos kompiuterinės sistemos *Mathematica* galimybės tiriant aritmetines funkcijas. Pateikiami skaičiavimo rezultatai, o prieduose – ir pačios programos.

1. ARITMETINĖS FUNKCIJOS

1.1. Simboliai O ir o

Apibrėžimas. Sakykime, $E \subset \mathbb{R}$, taškas a yra ribinis aibės E taškas, $f, g: E \to \mathbb{R}$, ir $\exists M \in \mathbb{R}_+ : |f| \leqslant M\,|g|$ taško a aplinkoje. Tada funkcija f yra vadinama *aprėžta funkcijos* g atžvilgiu taško a aplinkoje ir žymima:

$$f = O(g),\ x \to a \quad \text{arba} \quad f(x) = O(g(x)),\ x \to a\,.$$

Užrašas skaitomas „funkcija f yra O didžioji nuo funkcijos g, kai $x \to a$ “.

Jeigu $f = O(g)$ ir $g = O(f),\ x \to a$, tai tokios funkcijos yra vadinamos *vienodai aprėžtomis funkcijomis*, kai $x \to a$.

Sąryšio O savybės.

1. Sakykime, $E \subset \mathbb{R},\ f, g: E \to \mathbb{R}$ ir $\exists \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f}{g}(x) \in \mathbb{R}$. Tada $f = O(g),\ x \to a$.

Įrodymas. Tarkime, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f}{g}(x) = A$.

Kadangi $\lim\limits_{x \to a} \left|\dfrac{f}{g}\right|(x) = |A|$, tai taško a aplinkoje $|f|(x) < (|A|+1)|g|(x)$.

2. $O(O(h)) = O(h),\ x \to a$.

Įrodymas. Sakykime $f = O(g),\ g = O(h),\ x \to a$, t.y. $\exists\, \mathrm{M}, \mathrm{L} \in \mathbb{R}_+$:

$$|f| \leqslant M\,|g|,\ |g| \leqslant L|h|,$$

taško a aplinkoje. Todėl $|f| \leqslant ML|h|$, toje aplinkoje.

3. $O(h) + O(h) = O(h),\ x \to a$.

Įrodymas. Sakykime, $f = O(h),\ g = O(h),\ x \to a$, t.y.

$$\exists\, M, L \in \mathbb{R}_+ : |f| \leqslant M\,|h|,\ |g| \leqslant L|h|,$$

taško a aplinkoje. Tada $|f+g| \leqslant |f| + |g| \leqslant (M+L)|h|$ toje aplinkoje.

4. $O(g_1) \cdot O(g_2) = O(g_1 \cdot g_2),\ x \to a$.

Įrodymas. Sakykime, $f_i = O(g_i),\ x \to a,\ i \in \{1; 2\}$, t.y. $\exists\, M_i \in \mathbb{R}_+$:

$$|f_i| \leqslant M_i|g_i|,\ i \in \{1; 2\},$$

taško a aplinkoje. Tada $|f_1 \cdot f_2| \leqslant M_1 \cdot M_2 |g_1 \cdot g_2|$ toje aplinkoje.

5. $c \cdot O(g) = O(g),\ x \to a,$ čia $c \in \mathbb{R}$ – konstanta.

Įrodymas. Sakykime, $f = O(g),\ x \to a,$ t.y.

$$\exists\ M \in \mathbb{R}_+ : |f| \leqslant M|g| \text{ taško } a \text{ aplinkoje.}$$

Imkime teigiamą skaičių $c_1 > |c|$. Tada $|cf| \leqslant |c| M |g| < c_1 M |g|$ taško a aplinkoje.

Apibrėžimas. Sakykime, $E \subset \mathbb{R},$ taškas a yra ribinis aibės E taškas,

$$f,\ g : E \to \mathbb{R}, \text{ ir } \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall\ x \in \dot{U}_E(a;\delta) : |f|(x) \leqslant \varepsilon\ |g|(x)\ .$$

Tada sakoma, kad funkcija f yra nykstama *funkcijos* g atžvilgiu, kai $x \to a,$ žymima

$$f = o(g),\ x \to a \text{ arba } f(x) = o(g(x)),\ x \to a\ .$$

Užrašas skaitomas „funkcija f yra o mažoji nuo funkcijos $g,$ kai $x \to a$ “.

Sąryšio o savybės.

1. Jeigu $f = o(g),\ x \to a,$ tai $f = O(g),\ x \to a$.

Įrodymas. Ši savybė išplaukia iš O ir o apibrėžimų.

2. $o(O(h)) = O(o(h)) = o(h),\ x \to a$.

Įrodymas. Sakykime $f = o(g),\ g = O(h),\ x \to a,$ t.y. $\exists\ M \in \mathbb{R}_+ : |g| \leqslant M|h|$

taško a aplinkoje ir

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall\ x \in \dot{U}_E(a;\delta) : |f|(x) \leqslant \varepsilon\ |g|(x)\ .$$

Todėl $\forall\ x \in \dot{U}_E(a;\delta) : |f|(x) \leqslant \varepsilon M \cdot |h|(x),$ t.y. $o(O(h)) = o(h),\ x \to a$.

Analogiškai įrodytume, kad $O(o(h)) = o(h),\ x \to a$.

3. $o(g) + o(g) = o(g),\ x \to a$.

Įrodymas. Ši savybė išplaukia iš apibrėžimo.

4. $o(g_1) \cdot O(g_2) = o(g_1 \cdot g_2),\ x \to a$.

Įrodymas. Sakykime, $f_1 = o(g_1),\ f_2 = O(g_2),\ x \to a,$ t.y.

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_1 > 0\ \forall\ x \in \dot{U}_E(a;\delta_1) : |f_1|(x) \leqslant \varepsilon |g_1|(x), \text{ ir}$$

$$\exists\ L \in \mathbb{R}_+\ \exists\ \delta_2 > 0\ \forall\ x \in \dot{U}_E(a;\delta_2) : |f_2| \leqslant L|g_2|(x)\ .$$

Todėl

$$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta=min\{\delta_1,\delta_2\}\ \forall\ x\in\dot{U}_E(a;\delta):|f_1\cdot f_2|(x)\leqslant L\varepsilon|g_1\cdot g_2|(x),$$

t.y. teisinga 4 savybė.

5. Jeigu $f-g=o(f),\ x\to a,$ tai $f-g=o(g),\ x\to a$.

Įrodymas. Remiantis apibrėžimu, $\exists\ \delta>0\ \forall\ x\in\dot{U}_E(a;\delta):|f-g|(x)\leqslant\frac{1}{2}|f|(x),$ tai

$$\forall\ x\in\dot{U}_E(a;\delta):|f|(x)\leqslant 2|g|(x),\ \text{ t.y. }\ f=O(g),\ x\to a\ .$$

Remiantis 2 savybe, $f-g=o(f)=o(O(g))=o(g),\ x\to a$.

Apibrėžimas. Sakykime, $E\subset\mathbb{R},\ f,\ g:E\to\mathbb{R},$ ir $f-g=o(f),\ x\to a$.

Tada funkcija f yra vadinama *ekvivalenčia* funkcijai g, kai $x\to a$, ir žymima

$$f\sim g,\ x\to a\ \text{ arba }\ f(x)\to g(x),\ x\to a\ .$$

Ekvivalentumo sąryšio savybės.

1. $f\sim f,\ x\to a$.

2. Jeigu $f\sim g,\ x\to a,$ tai $g\sim f,\ x\to a$.

3. Jeigu $f\sim g,\ g\sim h,\ x\to a,$ tai $f\sim h,\ x\to a$.

4. Jeigu $f\sim g,\ x\to a\Leftrightarrow\exists\lim\limits_{x\to a}\frac{f}{g}(x)=1$.

5. Jeigu $f_i\sim g_i,\ x\to a,\ i\in\{1;2\},$ tai $f_1\cdot f_2\sim g_1\cdot g_2,\ x\to a$.

6. Sakykime, $f\sim g,\ x\to a,$ ir $h:E\to\mathbb{R}$. Tada abi ribos

$$\lim_{x\to a}(f\cdot h)(x),\ \lim_{x\to a}(g\cdot h)(x)$$

arba abi neegzistuoja, arba abi egzistuoja ir tuomet yra lygios.

1.2. Aritmetinės funkcijos apibrėžimas

Funkcijos, kurių apibrėžimo sritis yra natūraliųjų skaičių aibė, vadinamos *aritmetinėmis funkcijomis.* Šių funkcijų savybės yra ne tik įdomios, bet ir naudojamos kitiems svarbiems skaičių teorijos uždaviniams spręsti. Žinant šias savybes aritmetinių funkcijų tyrinėjimas, tame tarpe ir jų reikšmių apskaičiavimas, pasidaro gerokai lengvesnis. Vieną tokią savybę ir panagrinėsime.

Aritmetinė funkcija $f(n)$ vadinama *multiplikatyviąja*, jeigu ji apibrėžta su sveikosiomis argumento reikšmėms ir

1. $f(1)=1;$
2. $f(mn)=f(m)f(n),$ kai $(m,n)=1.$

Apibrėžimas. Skaičiaus išraiška $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k},$ kurioje visi laipsnių pagrindai yra skirtingi pirminiai skaičiai, o rodikliai natūralieji skaičiai yra vadinama *kanoniniu skaidiniu.*

Jei funkcija $f(n)$ yra multiplikatyvi ir žinome skaičiaus n kanoninį skaidinį t.y., $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k},$ tai iš multiplikatyvumo apibrėžimo išplaukia, kad

$$f(n)=f(p_1^{\alpha_1})f(p_2^{\alpha_2})f(p_3^{\alpha_3})\ldots f(p_r^{\alpha_r}) .$$

Taigi, jei funkcija yra multiplikatyvi, užtenka žinoti jos reikšmes su pirminių skaičių laipsniais.

Atitinkamai aritmetinė funkcija $f(n)$ vadinama *adityviąja*, jei

1. $f(1)=1;$
2. $f(mn)=f(m)+f(n),$ kai $(m,n)=1.$

Daugelis aritmetinių funkcijų elgiasi nedėsningai, todėl natūralu nagrinėti aritmetinių funkcijų reikšmių sumas, t.y.

$$F(N)=\sum_{n=1}^{N} f(n),$$

o ne pačias funkcijas.

1.3. Pagrindinės aritmetinės funkcijos

1.3.1. Funkcija r(n)

Aritmetinė funkcija $r(n)$ apibrėžiama kaip lygties $x^2+y^2=n$ sveikųjų sprendinių skaičius. Sprendiniai, kurie vienas nuo kito skiriasi tvarka arba ženklu, laikomi skirtingais.

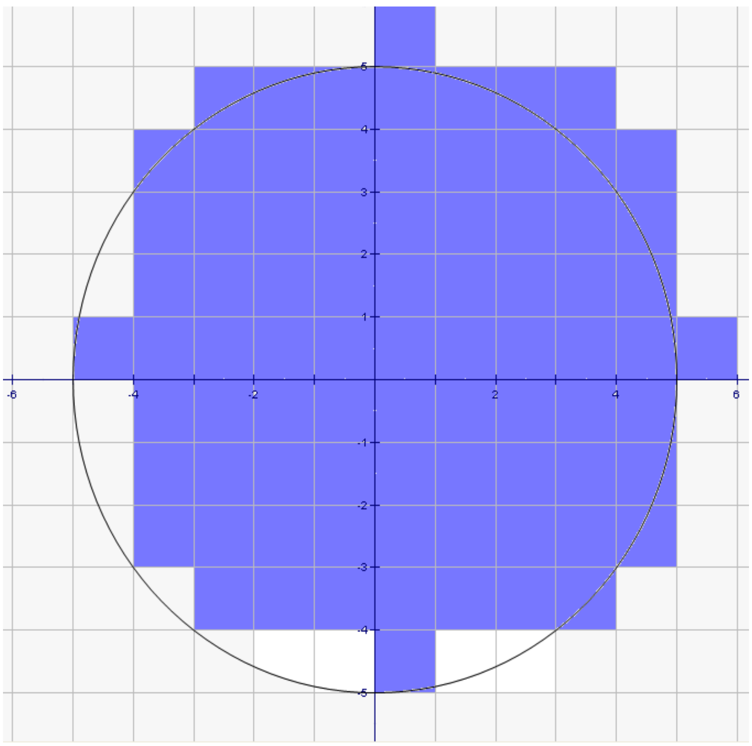
Pavyzdžiui, $r(1)=4$, nes $1=1^2+0^2$; $1=(-1)^2+0^2$; $1=0^2+1^2$; $1=0^2+(-1)^2$.

Šios aritmetinės funkcijos reikšmių sumą žymėsime $R(N)$:

$$R(N)=\sum_{n=0}^{N} r(n),\ r(0)=1.$$

Geometrinė $R(N)$ interpretacija būtų tokia. $R(N)$ – tai skaičius taškų su sveikosiomis koordinatėmis, esančių plokštumoje apribotoje apskritimu $x^2+y^2\leqslant N$. Aritmetinės funkcijos reikšmių suma $R(N)$ apytiksliai lygi skritulio $x^2+y^2\leqslant N$ plotui. Šis teiginys išplaukia iš Gauso teoremos [11].

1 teorema (Gauso). $R(N)=\pi N+O(\sqrt{N})$.



1 pav.

Įrodymas. Plokštuma suskirstyta į kvadratus su kraštine 1. Joje nubrėžtas apskritimas $x^2+y^2=N$. Kiekvieno kvadrato kampe esantis taškas turi koordinates sudarytas iš sveikųjų skaičių. Tikrinsime ir spalvinsime kvadratėlius, kurių “pietvakarinis” kampas guli plokštumoje $x^2+y^2\leqslant N$. Nuspalvinę visus tokius kvadratėlius matome, kad dalis apskritimo ploto nėra uždengta ir taip pat dalis nuspalvintų kvadratėlių dengia plotą esantį už apskritimo ribų (žr. 1 pav.).

Kiekvieno kvadrato įstrižainė lygi $\sqrt{2}$ ir visi kvadratai esantys apskritimo $x^2+y^2\leqslant\pi(\sqrt{N}+\sqrt{2})^2$ viduje sudaro $R(N)$, kuris

$$R(N)<\pi(\sqrt{N}+\sqrt{2})^2 . \qquad \textbf{(1)}$$

Tokiu pat principu visi šie kvadratai pilnai padengia mažesnįjį apskritimą su spinduliu $(\sqrt{N}-\sqrt{2})$, taip kad

$$R(N)>\pi(\sqrt{N}-\sqrt{2})^2,\ N\geqslant 2 . \qquad \textbf{(2)}$$

Remiantis (1) ir (2) nelygybe gauname:

$$\pi(N-2\sqrt{2\mathrm{N}}+2)<R(N)<\pi(N+2\sqrt{2\mathrm{N}}+2)$$
$$R(N)=\pi N+O(\sqrt{N}).$$

1.3.2. Funkcija d(n)

Aritmetinė funkcija $d(n)$ apibrėžiama kaip sveikojo skaičiaus n natūraliųjų daliklių skaičius.

2 teorema. Funkcija $d(n)$ yra multiplikatyvi.

Įrodymas. Tarkime, kad $(m,n)=1$. Bet kurį skaičiaus $m\,n$ daliklį k galima užrašyti sandauga $k=k_1k_2$, čia $k_1/m,\ k_2/n$. Skaičius m turi $d(m)$, skaičius n – $d(n)$ skirtingų natūraliųjų daliklių. Parinkdami vis kitus skaičių m ir n daliklius, gausime $d(m)\cdot d(n)$ skirtingų k_1k_2 pavidalo skaičių; čia $k_1/m,\ k_2/n$. Jie visi bus $m\,n$ dalikliai. Taigi $d(mn)=d(m)\cdot d(n)$.

Žinodami skaičiaus n kanoninį skaidinį, nesunku apskaičiuoti $d(n)$.

3 teorema. Jeigu $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}$, tai

$$d(n)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\dots(\alpha_k+1) . \qquad \textbf{(3)}$$

Įrodymas. Iš $d(n)$ multiplikatyvumo išplaukia, kad

$$d(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k})=d(p_1^{\alpha_1})d(p_2^{\alpha_2})\dots d(p_k^{\alpha_k}) . \qquad \textbf{(4)}$$

Skaičiaus p^{α} dalikliai yra tik šie p laipsniai:

$$1,\ p,\ p^2,\ \dots,\ p^{\alpha-1},\ p^{\alpha}$$

Tokiu būdu $d(p^{\alpha})=(\alpha+1)$. Iš čia ir iš (4) lygybės gauname (3) formulę.

Pavyzdžiui, rasime skaičiaus $n=2800$ daliklių skaičių. Kadangi $n=2800$ kanoninis skaidinys $2800=2^4\cdot 5^2\cdot 7$, tai

$$d(2800)=(4+1)(2+1)(1+1)=30.$$

Pirminiai skaičiai p išsiskiria iš kitų natūraliųjų skaičių savybe

$$d(p)=2.$$

Visų sudėtinių skaičių n daliklių skaičius $d(n)>2$, o $d(1)=1$.

Aritmetinės funkcijos $d(n)$ reikšmių suma žymima $D(N)$:

$$D(N)=\sum_{n=1}^{N} d(n).$$

Kai $d(n)=\sum_{t/n} 1=\sum_{xy=n} 1$, tai gauname

$$D(N)=\sum_{n=1}^{N} d(n)=\sum_{1\leqslant n\leqslant N}\ \sum_{xy=n} 1 \quad \text{arba} \quad D(N)=\sum_{1\leqslant xy\leqslant N} 1\ .$$

Funkcijos $d(n)$ reikšmių vidurkiai intervale $[1,N]$ apibrėžti tokiomis teoremomis [11].

4 teorema. $D(N)=N\ \ln\ N+O(N)$.

Iš 4 teoremos matome, kad funkcijos $d(n)$ reikšmių vidurkis apytiksliai lygus $\ln\ N$.

5 teorema (Dirichlė). $D(N)=N\ \ln\ N+(2\gamma-1)N+O(\sqrt{N})$, kur

$\gamma=0{,}57721566...$ – Oilerio konstanta.

1.3.3. Funkcija σ(n)

Dar viena aritmetinė funkcija, kuri apibrėžia visų skaičiaus n daliklių d a - ųjų laipsnių sumą. Ta suma žymima

$$\sigma_a(n)=\sum_{d/n} d^a,\ a=0,\ 1,\ 2,\ \dots, \quad \text{ir} \quad \sigma_0(n)=d(n),\ \sigma(n)=\sigma_1(n).$$

6 teorema. Funkcija $\sigma_a(n)$ yra multiplikatyvi.

Įrodymas. Jeigu $(m,n)=1$, tai kiekvieną sandaugos $m\,n$ daliklį d galima išreikšti sandauga $d=d_1 d_2$, čia $d_1/m,\ d_2/n.$ Įrašę tą d išraišką į funkciją $\sigma_a(n)$, turime:

$$\sigma_a(mn)=\sum_{\substack{d_1/m\\ d_2/n}} (d_1 d_2)^a=\sum_{d_1/m}\sum_{d_2/n} d_1^a d_2^a=\sum_{d_1/m} d_1^a \sum_{d_2/n} d_2^a=\sigma_a(m)\sigma_a(n)\ .$$

Taigi, jei d_1 įgyja visų skaičiaus m daliklių reikšmes, d_2 – visų skaičiaus n daliklių reikšmes, tai sandauga $d_1 d_2$ įgyja visų sandaugos $m\,n$ daliklių reikšmes.

7 teorema. Tegul $n=\prod_{p/n} p^{\alpha}$ kanoninis skaičiaus $n>1$ skaidinys. Tada

$$\sigma_a(n)=\prod_{p/n} \frac{p^{(\alpha+1)\cdot a}-1}{p^a-1} .$$

Įrodymas. Kadangi $\sigma_a(n)$ - multiplikatyvi funkcija, tai

$$\sigma_a=\sigma_a(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k})=\sigma_a(p_1^{\alpha_1})\,\sigma_a(p_2^{\alpha_2}) \dots \sigma_a(p_k^{\alpha_k})=\prod_{p/n} \sigma_a(p^{\alpha}) .$$

Tačiau $\sigma_a(p^{\alpha})=1+p^{\alpha}+p^{2\alpha}+\dots+p^{(\alpha-1)a}+p^{\alpha a}=\dfrac{p^{(\alpha+1)a}-1}{p^a-1}$.

Išvada. Kai $a=1$, pažymėję skaičiaus $n=\prod p^{\alpha}$ daliklių sumą $\sigma_1(n)=\sigma(n),$ turime

$$\sigma(n)=\prod_{p/n} \frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1} . \qquad \textbf{(5)}$$

Pavyzdžiui, rasime skaičiaus 24 daliklių kvadratų sumą. Kai $a=2$:

$$\sigma_2(24)=\sigma(2^3\cdot 3)=\frac{2^{4\cdot 2}-1}{2^2-1}\cdot\frac{3^{2\cdot 2}-1}{3^2-1}=85\cdot 10=850 .$$

Su funkcija $\sigma(n)$ susijusi sena tobulųjų skaičių problema.

Apibrėžimas. Teigiamas skaičius N vadinamas *tobuluoju skaičiumi*, jeigu $\sigma(N)=2\mathrm{N}$ tai yra N lygus sumai visų savo daliklių, mažesnių už juos pačius.

Pavyzdžiui, 6 ir 28 – tobulieji skaičiai, nes

$$\sigma(6)=1+2+3=6,\ \sigma(28)=1+2+4+7+14=28 .$$

Apibrėžimas. Skaičiai, kurių išraiška 2^n-1 vadinami *Merseno skaičiais*, o pirminiai, tokio pavidalo skaičiai vadinami *pirminiais Merseno skaičiais*.

Ryšys tarp pirminių Merseno skaičių ir tobulųjų skaičių pateikiamas šiomis teoremomis.

8 teorema. Jeigu $2^{n+1}-1$ yra pirminis skaičius, tai $2^n(2^{n+1}-1)$ – tobulasis skaičius.

Įrodymas. Tegul $N=2^n(2^{n+1}-1)=2^n p,$ kur p – pirminis. Tada, remiantis (5) formule: $\sigma(N)=(2^{n+1}-1)(p+1)=(2^{n+1}-1)2^{n+1}=2\mathrm{N},\ N$ – tobulasis skaičius.

Kiekvieną Merseno pirminį skaičių atitinka vienas tobulasis skaičius, tai teigia sekanti teorema.

9 teorema (Oilerio). Kiekvienas lyginis tobulasis skaičius užrašomas tokia išraiška

$$2^n p ,$$

kur $p=2^{n+1}-1$ – pirminis Merseno skaičius.

Įrodymas. Tegul $N=2^n N'$ – tobulasis skaičius, kur $n\geqslant 1$, ir N' – nelyginis skaičius.

Tada

$$\sigma(N)=2N=2^{n+1}N^{'}.$$

Kadangi σ multiplikatyvi, tai

$$\sigma(N)=2N=\sigma(2^{n+1})\sigma(N^{'}) .$$

Remiantis (5) formule:

$$\sigma(2^{n})=2^{n+1}-1 \quad \Rightarrow \quad (2^{n+1}-1)\sigma(N^{'})=2^{n+1}N^{'} .$$

Taigi,

$$\frac{2^{n+1}-1}{N^{'}} .$$

Jeigu mes teigsime, kad $N^{'}=(2^{n+1}-1)N^{''}$, tai $\sigma(N^{'})=2^{n+1}N^{''}$, kur $N^{''}<N^{'}$. Bet $N^{'}+N^{''}=2^{n+1}N^{''}=\sigma(N^{'})$. Taigi ir $N^{'}$ ir $N^{''}$ dalija $N^{'}$ ir jų suma lygi $N^{'}+N^{''}=\sigma(N^{'})$. Tai reiškia, kas skaičius $N^{'}$ negali turėti kitų daliklių ir dėl to jis yra pirminis. Kadangi žinome, kad $N^{'}=(2^{n+1}-1)N^{''}$, tai iš to seka, kad $N^{'}=(2^{n+1}-1)$, $N^{''}=1$. Teorema įrodyta.

Neaišku ar lyginių tobulųjų skaičių aibė bus begalinė (t.y. pirminių skaičių aibė, kurių išraiška $2^{n}-1$) , taip pat nėra žinoma ar egzistuoja nelyginiai tobulieji skaičiai. 1973 m. nustatyta, kad tokie skaičiai, jeigu jie yra, turi būti didesni už 10^{50} .

Aritmetinės funkcijos $\sigma(n)$, kai skaičiaus n daliklių laipsnis $a=1$ reikšmių suma žymima $\Sigma(N)$:

$$\Sigma(N)=\sum_{n=1}^{N}\sigma(n) .$$

Funkcijos $\sigma(n)$ daliklių sumos vidurkis intervale $[1,N]$ yra [3]:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\sigma(n)=\frac{\pi^{2}}{12}N+O(\ln N) .$$

1.3.4. Funkcija φ(n)

Aritmetinė funkcija $\varphi(n)$ vadinama *Oilerio* funkcija ir ji lygi skaičiui natūraliųjų skaičių, ne didesnių už n ir tarpusavyje pirminių su n .

Pavyzdžiui, $\varphi(4)=2$, nes tik 1 ir 3 tarpusavyje pirminiai su n

$$(4,1)=1,(4,3)=1 .$$

Oilerio funkcija $\varphi(n)$ yra multiplikatyvi.

Įrodysime teoremą, kuria remdamiesi galėsime apskaičiuoti Oilerio funkcijos reikšmes, kai argumentas yra pirminis skaičius arba jo laipsnis.

10 teorema. Jeigu p^{α} yra pirminio skaičiaus natūralusis laipsnis, tai

$$\varphi(p^{\alpha})=p^{\alpha}(1-\frac{1}{p}),\ \varphi(p)=p-1 .$$

Įrodymas. Iš visų skaičių

$$1, 2, ..., p, p+1, ..., p^{\alpha}-1, p^{\alpha}$$

išbraukiame tuos, kurie turi bendrus daliklius su moduliu $n=p^{\alpha}$. Modulio dalikliai yra tik p laipsniai. Taigi įrodymo pradžioje pateiktoje skaičių sekoje reikia išbraukti visus p kartotinius, nes tik jie turi bendrų daliklių su p^{α}. Tokių kartotinių yra

$$[\frac{p^{\alpha}}{p}]=p^{\alpha-1} .$$

Juos išbraukę, gauname

$$p^{\alpha}-p^{\alpha-1}=p^{\alpha}(1-\frac{1}{p})$$

skaičių, ne didesnių už p^{α} ir tarpusavyje pirminių su p^{α}. Antroji teoremos formulė gaunama, kai $\alpha=1$.

Pavyzdžiui, rasime $\varphi(5)$. Kadangi $5=5^1$, tai

$$\varphi(5^1)=5^1(1-\frac{1}{5})=4 .$$

Skaičiai 1, 2, 3, 4 yra tarpusavyje pirminiai su 5, t.y. $(5,1)=1, (5,2)=1, (5,3)=1, (5,4)=1$.

Jeigu n nėra pirminio skaičiaus laipsnis, tai Oilerio funkcijos reikšmės apskaičiuojamos remiantis sekančia teorema.

11 teorema. Jeigu $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$, tai

$$\varphi(n)=n(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})...(1-\frac{1}{p_k})=n\prod_{p/n}(1-\frac{1}{p}) .$$

Įrodymas. Remdamiesi 108 teorema ir funkcijos $\varphi(n)$ multiplikatyvumu, gauname

$$\varphi=\varphi(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k})=\varphi(p_1^{\alpha_1})\varphi(p_2^{\alpha_2})...\varphi(p_k^{\alpha_k}) .$$

Teorema įrodyta.

Iš Oilerio funkcijos apibrėžimo taip pat išplaukia, kad $\varphi(1)=1$.

Pavyzdžiui, rasime $\varphi(100)$. Kadangi $100=2^2\cdot5^2$, tai

$$\varphi(100)=100(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{5})=40.$$

12 teorema.

$$\sum_{d/n} \varphi(d) = n \ .$$

Įrodymas. Pritaikysime Oilerio funkcijai multiplikatyvumo tapatybę

$$\sum_{d/n} f(d) = \prod_{p/n} \sum_{\beta=0}^{\alpha} f(p^{\beta})$$

čia α – pirminio p laipsnio rodiklis skaičiaus n kanoniniame skaidinyje.

Turime:

$$\sum_{\beta=0}^{\alpha} f(p^{\beta}) = \varphi(1) + \varphi(p) + \ldots + \varphi(p^{\alpha}) \ .$$

Taikydami 10 teoremos formules, gauname

$$\sum_{\beta=0}^{\alpha} \varphi(p^{\beta}) = 1 + (p-1) + (p^2 - p) + \ldots + (p^{\alpha} - p^{\alpha-1}) = p^{\alpha} \ .$$

Taigi, jei $n = \prod_{p/n} p^{\alpha}$, tai

$$\prod_{p/n} \sum_{\beta=0}^{\alpha} \varphi(p^{\beta}) = \prod_{p/n} p^{\alpha} = n \ .$$

Teorema įrodyta.

Aritmetinės funkcijos $\varphi(n)$ reikšmių suma žymima $\Phi(N)$:

$$\Phi(N) = \sum_{n=1}^{N} \varphi(n) \ .$$

Oilerio funkcijos reikšmių suma intervale $[1, N]$ didėja apibrėžta tvarka [11].

13 teorema.

$$\Phi(N) = \frac{3}{\pi^2} N^2 + O(N \ \ln \ N) \ .$$

Padaliję pastarąją lygybę iš N gauname, kad funkcijos $\varphi(n)$ vidurkis išreiškiamas formule:

$$\frac{\Phi(N)}{N} = \frac{3}{\pi^2} N + O(\ln \ N) \ .$$

1.3.5. Funkcija μ(n)

Skaičių teorijoje svarbią vietą užima aritmetinė funkcija, kuri vadinama vokiečių geometro *Miobiuso* (A. F. Möbius, 1790 – 1868) vardu. Ji žymima $\mu(n)$ ir apibrėžiama šitaip.

1. $\mu(1)=1$.
2. Jeigu n yra k skirtingų pirminių daugiklių sandauga, tai $\mu(n)=(-1)^k$.
3. Jeigu n skaidinyje yra daugiklis $d=t^2>1$, tai $\mu(n)=0$.

Pavyzdžiui,

$$\mu(10)=\mu(2\cdot5)=(-1)^2=1,\ \mu(11)=(-1)^1=-1\ ,\ \mu(12)=\mu(3\cdot2^2)=0\ .$$

14 teorema. Teisingas reiškinys

$$\sum_{d/n}\mu(d)=\begin{cases}1, & jeigu\ n=1\\ 0, & jeigu\ n>1\end{cases}$$

Įrodymas. Tegul $n=\prod_{i=1}^{m}p_i^{\alpha_i}$ – kanoninė skaičiaus $n>1$ išraiška. Skaičiaus n dalikliai d , kuriems $\mu(d)\neq0$, išreiškiami

$$1,\ p_1,\ p_2,\ \ldots p_m,\ p_i\,p_j(i\neq j),\ p_i\,p_j\,p_k\ (i\neq j\neq k),\ \ldots,\ p_1\,p_2\ldots p_m\ .$$

Tada

$$\sum_{d/n}\mu(d)=\mu(1)+\sum_{i}\mu(p_i)+\sum_{i<j}\mu(p_i\,p_j)+\ldots+\mu(p_1\,p_2\ldots p_m)\ .$$

Iš to seka, kad

$$\sum_{d/n}\mu(d)=1-\binom{m}{1}+\binom{m}{2}-\binom{m}{3}+\ldots=(1-1)^m=0\ .$$

15 teorema (Miobiuso 1 – oji). Tegul f - aritmetinė funkcija ir $g(n)\neq\sum_{d/n}f(d)$. Tada

$$f(n)=\sum_{d/n}\mu(d)\,g(\frac{n}{d})\ .$$

Įrodymas. Mes turime

$$\sum_{d/n}\mu(d)\,g(\frac{n}{d})=\sum_{d/n}\mu(d)\sum_{d'/\frac{n}{d}}f(d')=\sum_{dd'/n}\mu(d)\,f(d')=\sum_{d'/n}f(d')\sum_{d/\frac{n}{d'}}\mu(d)\ .$$

Remiantis 14 teorema

$$\sum_{d/n}\mu(d)\,g(\frac{n}{d})=f(n)\ .$$

Teisingas ir atvirkštinis teiginys:

16 teorema. Jeigu

$$h(n)=\sum_{d/n}\mu(d)\,f(\frac{n}{d})=\sum_{d/n}\mu(\frac{n}{d})\,f(d),$$

tai

$$f(n)=\sum_{d/n}h(d)\ .$$

Įrodymas. Remiantis 14 teorema:

$$\sum_{d/n} h(d)=\sum_{d/n} h(\frac{n}{d})=\sum_{d/n}\sum_{d'/\frac{n}{d}} \mu(\frac{n}{dd'}) f(d')=\sum_{dd'/n} \mu(\frac{n}{dd'}) f(d')=\sum_{d'/n} f(d')\sum_{d/\frac{n}{d'}} \mu(\frac{n}{dd'})=f(n)$$

Pagal 15 teoremą turime tokį sąryšį

$$\sum_{d/n} \varphi(d)=n,\ \varphi(n)=\sum_{d/n} \mu(d)\frac{n}{d}=n\sum_{d/n} \frac{\mu(d)}{d} .$$

Teorema įrodyta.

Šios teoremos papildymas susijęs su *Mangoldto funkcija*, kuri turi tokią išraišką:

$$\Lambda(n)=\begin{cases} \ln p,\ \ jeigu\ n=p^m,\ p - pirminis,\ m>0, \\ 0, \qquad jeigu\ n\neq p^m . \end{cases}$$

17 teorema. $\sum_{d/n} \Lambda(d)=\ln n$.

Įrodymas. Tegul $n=\prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$ – skaičiaus $n>1$ kanoninis skaidinys. Tada pagal Λ apibrėžimą turime

$$\sum_{d/n} \Lambda(d)=\sum_{i=1}^{r}\sum_{\alpha=1}^{\alpha_1} \Lambda(p_i^{\alpha})=\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \ln p_i=\ln n .$$

Teorema įrodyta.

Apjungę Miobiuso pirmosios teoremos formulę ir 17 teoremą, gauname

$$\Lambda(n)=\sum_{d/n} \mu(d) \ln\frac{n}{d},$$

ir iš 14 teoremos žinodami, kad $\sum_{d/n} \mu(d)=0$, kai $n>1$ ir $\ln 1=0$ seka išvada, kad

$$\Lambda(n)=-\sum_{d/n} \mu(d) \ln d .$$

18 teorema (Miobiuso 2 – oji). Tegul funkcija f apibrėta visiems $x\geqslant 1$ ir

$$g(x)=\sum_{n\leqslant x} f(\frac{x}{n}) .$$

Tada kiekvienam $x\geqslant 1$

$$f(x)=\sum_{n\leqslant x} \mu(n) g(\frac{x}{n}),$$

ir atvirkščiai.

Suma $\sum_{n\leqslant x} f$ interpretuojama kaip $\sum_{n=1}^{[x]} f$, o suma neturinti narių prilyginama 0 .

Įrodymas. Remiantis funkcijos g apibrėžimu, kiekvienam $x\geqslant 1$ turime:

$$\sum_{n\leqslant x}\mu(n)\,g\left(\frac{x}{n}\right)=\sum_{n\leqslant x}\mu(n)\sum_{m\leqslant\frac{x}{n}}f\left(\frac{x}{mn}\right)=\sum_{1\leqslant mn\leqslant x}\mu(n)\,f\left(\frac{x}{mn}\right).$$

Grupuojant paskutinės sumos narius, kuriems $m\,n=r$, $1\leqslant r\leqslant x$, gauname

$$\sum_{1\leqslant mn\leqslant x}\mu(n)\,f\left(\frac{x}{mn}\right)=\sum_{1\leqslant r\leqslant x}f\left(\frac{x}{r}\right)\sum_{n/r}\mu(n)=f(x).$$

Pirma teoremos dalis įrodyta.

Norėdami įrodyti atvirkštinį teiginį, kiekvienam $x\geqslant 1$ teigsime, kad

$$f(x)=\sum_{n\leqslant x}\mu(n)\,g\left(\frac{n}{x}\right).$$

Tada

$$\sum_{m\leqslant x}f\left(\frac{x}{m}\right)=\sum_{m\leqslant x}\sum_{n\leqslant\frac{x}{m}}\mu(n)\,g\left(\frac{x}{mn}\right)=\sum_{1\leqslant mn\leqslant x}\mu(n)\,g\left(\frac{x}{mn}\right)$$

ir taip , kaip anksčiau buvo įrodyta, paskutinė suma gali būti užrašyta taip:

$$\sum_{1\leqslant r\leqslant x}g\left(\frac{x}{r}\right)\sum_{n/r}\mu(n)=g(x).$$

Dar vienas įdomus sąryšis tarp aritmetinių funkcijų $\mu(n)$ ir $\varphi(n)$.

19 teorema.

$$\sum_{d/n}\frac{n}{d}\mu(d)=\varphi(n).$$

Aritmetinės funkcijos $\mu(n)$ reikšmių suma žymima $M(N)$:

$$M(N)=\sum_{n=1}^{N}\mu(n).$$

Funkcijos $\mu(n)$ daliklių sumos vidurkis intervale $[1,N]$ yra [1]:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mu(n)=O\left(e^{-c(\ln N)^{\alpha}}\right).$$

2. ARITMETINIŲ FUNKCIJŲ ANALIZĖ SU KOMPIUTERINĖS MATEMATIKOS SISTEMA *MATHEMATICA*

2.1. Pagrindinės funkcijos

Bendrieji darbo principai su kompiuterinės algebros sistema *Mathematica* buvo aprašyti baigiamajame bakalauro darbe „Matematika su *Mathematica*". Šiame skyrelyje supažindinama tik su pagrindinėmis kompiuterinės sistemos funkcijomis, kurios leidžia tyrinėti aritmetines funkcijas.

Mod[k,n]	Skaičius **k** moduliu **n** (liekana skaičių **k** dalinant iš **n**)

Skaičių $k=18$ padalijus iš $n=5$ gausime liekaną 3.

```
In[1]:= Mod[18, 5]

Out[1]= 3
```

Quotient[m,n]	Sveikoji dalis skaičių **m** dalinant iš **n**

Skaičių $k=18$ padalijus iš $n=5$ gauta sveikoji dalis bus 3.

```
In[2]:= Quotient[18, 5]

Out[2]= 3
```

GCD[$n_1, n_2, \ldots$ **]**	Didžiausias bendras daliklis

Skaičių 24, 15 didžiausias bendras daliklis yra 3.

```
In[3]:= GCD[24, 15]

Out[3]= 3
```

LCM[$n_1, n_2, \ldots$ **]**	Mažiausias bendras kartotinis

Skaičių 10, 15 mažiausias bendras kartotinis yra 30.

```
In[5]:= LCM[10, 15]

Out[5]= 30
```

FactorInteger[n]	Skaičiaus **n** kanoninis skaidinys

Pavyzdžiui, skaičiaus 24 kanoninis skaidinys $24=2^3 3^1$.

```
In[1]:= FactorInteger[24]

Out[1]= {{2, 3}, {3, 1}}
```

Divisors[n]	Skaičiaus **n** dalikliai

Pavyzdžiui, skaičiaus $n=10$ dalikliai:

```
In[2]:= Divisors[10]
Out[2]= {1, 2, 5, 10}
```

Prime[k]	**k** – tasis pirminis skaičius

Pavyzdžiui, $k=5$ - asis pirminis skaičius:

```
In[3]:= Prime[5]
Out[3]= 11
```

PrimePi[x]	Pirminių skaičių, kurie mažesni arba lygūs **x**, skaičius

Pavyzdžiui, pirminių skaičių iki skaičiaus $x=30$ ir $x=29$ imtinai yra 10.

```
In[4]:= PrimePi[30]
Out[4]= 10
```

```
In[5]:= PrimePi[29]
Out[5]= 10
```

PrimeQ[n]	Išveda rezultatą *True*, jei **n** – pirminis ir *False*, jei **n** nėra pirminis

Pavyzdžiui, skaičius $n=29$ yra pirminis, o $n=30$ – ne.

```
In[6]:= PrimeQ[29]
Out[6]= True
In[7]:= PrimeQ[30]
Out[7]= False
```

Table[Prime[n], {n, k}]	Sąrašas **k** pirminių skaičių

```
In[9]:= Table[Prime[n], {n, 100}]
Out[9]= {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59,
  61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127,
  131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191,
  193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257,
  263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317,
  331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389,
  397, 401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457,
  461, 463, 467, 479, 487, 491, 499, 503, 509, 521, 523, 541}
```

PowerMod [a, b, n]	Skaičiaus **a** pakelto laipsniu **b** liekana padalijus iš **n**

Pavyzdžiui, $2^4 \equiv 2 (mod\, 7)$, taip pat galime skaičiuoti, kai laipsnis yra neigiamas $2^{-4} \equiv 4 (mod\, 7)$.

```
In[15]:= PowerMod[2, 4, 7]
Out[15]= 2
In[16]:= PowerMod[2, -4, 7]
Out[16]= 4
```

EulerPhi [n]	Oilerio funkcija $\varphi(n)$, tai skaičius natūraliųjų skaičių, ne didesnių už n ir tarpusavyje pirminių su n

Pavyzdžiui, pirminiams n, $\varphi(n)=n-1$.

```
In[17]:= EulerPhi[17]
Out[17]= 16
```

```
In[18]:= EulerPhi[6]
Out[18]= 2
```

MoebiusMu [n]	Miobiuso funkcija $\mu(n)$

Pavyzdžiui, $\mu(10)=1,\ \mu(11)=-1,\ \mu(12)=0$.

```
In[20]:= MoebiusMu[10]
Out[20]= 1
In[21]:= MoebiusMu[11]
Out[21]= -1
In[22]:= MoebiusMu[12]
Out[22]= 0
```

DivisorSigma [k, n]	Miobiuso funkcija $\mu(n)$, tai skaičiaus n daliklių a - ųjų laipsnių suma

Pavyzdžiui, skaičiaus $n=10$ dalikliai:

```
In[2]:= Divisors[10]
Out[2]= {1, 2, 5, 10}
```

kai $k=0$, tai $\mu(10)=1^0+2^0+5^0+10^0=4$

```
In[23]:= DivisorSigma[0, 10]
Out[23]= 4
```

kai $k=2$, tai $\mu(10)=1^2+2^2+5^2+10^2=1+4+25+100=130$

```
In[24]:= DivisorSigma[2, 10]
Out[24]= 130
```

Sudėtingesniems skaičių teorijos uždaviniams spręsti naudojamas specializuotas sistemos

Mathematica paketas. Norint dirbti su šio paketo funkcijomis, jį reikia išsikviesti. Iškvietimas užrašomas taip:

<<katalogo pavadinimas \`standartinio paketo pavadinimas\`

```
In[6]:= << NumberTheory`NumberTheoryFunctions`
```

SquareFreeQ[n]	Funkcija nustato ar skaičiaus n kanoninis skaidinys sudarytas iš pirminių skaičių su laipsniu 1

Pavyzdžiui, $10=2\cdot5$, kur 2 ir 5 yra pirminiai su laipsniu 1,

```
In[7]:= SquareFreeQ[10]
Out[7]= True
In[11]:= FactorInteger[10]
Out[11]= {{2, 1}, {5, 1}}
```

bet skaičius $60=2^2\cdot3^1\cdot5^1=4\cdot3\cdot5$ nėra lygus pirminių skaičių sandaugai:

```
In[2]:= SquareFreeQ[60]
Out[2]= False
In[3]:= FactorInteger[60]
Out[3]= {{2, 2}, {3, 1}, {5, 1}}
```

NextPrime[n]	Funkcija pateikia sekantį pirminį skaičių einantį po n

Pavyzdžiui, $n=17$ sekantis pirminis po 17 yra 19.

```
In[4]:= NextPrime[17]
Out[4]= 19
```

Daugiau informacijos apie programos specializuotus paketus galima rasti pasinaudojus komandų seka: *Help* → *Add-ons* → *Standard Packages*. Skaičių teorijos specializuoto paketo funkcijas galima rasti praplečiant komandų seką: *Help* → *Add-ons* → *Standard Packages* → *NumberTheory* → *NumberTheoryFunctions*.

Visi tolesni skaičiavimai atlikti naudojantis kompiuterinės algebros sistemos *Mathematica* funkcijomis. Sprendimų algoritmai pateikti darbo pabaigoje esančiuose prieduose.

2.2. Funkcijos r(n) reikšmių vidurkis

1 lentelė. Funkcijos $r(n)$ reikšmių sumų $R(N)=\sum_{n=0}^{N} r(n)=\pi N+O(\sqrt{N}),\ r(0)=1$ skaičiavimo rezultatai.

N	$R(N)$	πN	$R(N)-\pi N$	$\sqrt{N}$	$O(1)=\dfrac{R(N)-\pi N}{\sqrt{N}}$
1000	3148	3141,6	6,4	31,62	0,2024
5000	15704	15708	-4	70,71	-0,0566
10000	31416	31416	0	100,00	0,0000
20000	62844	62832	12	141,42	0,0849
100000	314196	314160	36	316,23	0,1138
200000	628324	628320	4	447,21	0,0089
300000	942440	942480	-40	547,72	-0,0730
400000	1256670	1256640	30	632,46	0,0474
500000	1570800	1570800	0	707,11	0,0000
1000000	3141550	3141600	-50	1000,00	-0,0500

2 lentelė. Funkcijos $r(n)$ reikšmių sumų vidurkių $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} r(n)\approx\pi$ skaičiavimo rezultatai.

N	$R(N)$	$\dfrac{R(N)}{N}$	π	$\dfrac{R(N)}{N}-\pi \Rightarrow O(\dfrac{1}{\sqrt{N}})$	
1000	3148	3,1480	3,1416	0,0064	0,0064
5000	15704	3,1408	3,1416	-0,0008	-0,0008
10000	31416	3,1416	3,1416	0,0000	0,0000
20000	62844	3,1422	3,1416	0,0006	0,0006
100000	314196	3,1420	3,1416	0,0004	0,0004
200000	628324	3,1416	3,1416	0,0000	0,0000
300000	942440	3,1415	3,1416	-0,0001	-0,0001
400000	1256670	3,1417	3,1416	0,0001	0,0001
500000	1570800	3,1416	3,1416	0,0000	0,0000
1000000	3141550	3,14155	3,1416	-0,00005	-0,0001

2.3. Funkcijos d(n) reikšmių vidurkis

3 lentelė. Funkcijos $d(n)$ reikšmių sumų $D(N)=\sum_{n=1}^{N} d(n)=N \ln N+O(N)$ skaičiavimo rezultatai.

N	$D(N)$	$\ln N$	$N \cdot \ln N$	$D(N)-N \cdot \ln N$	$O(1)=\frac{D(N)-N \cdot \ln N}{N}$
1000	***7069***	***6,9078***	***6907,80***	***161,20***	***0,1612***
5000	***43376***	***8,5172***	***42586***	***790***	***0,1580***
10000	***93668***	***9,2103***	***92103***	***1565***	***0,1565***
20000	***201177***	***9,9035***	***198070***	***3107***	***0,1554***
100000	***1166750***	***11,5129***	***1151290***	***15460***	***0,1546***
200000	***2472110***	***12,2061***	***2441220***	***30890***	***0,1545***
300000	***3829830***	***12,6115***	***3783450***	***46380***	***0,1546***
400000	***5221470***	***12,8992***	***5159680***	***61790***	***0,1545***
500000	***6638450***	***13,1224***	***6561200***	***77250***	***0,1545***
1000000	***13970000***	***13,8155***	***13815500***	***154500***	***0,1545***

4 lentelė. Funkcijos $d(n)$ reikšmių sumų vidurkių $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} d(n) \approx \ln N$ skaičiavimo rezultatai.

N	$D(N)$	$\frac{D(N)}{N}$	$\ln N$	$\frac{D(N)}{N}-\ln N \Rightarrow O(1)$
1000	***7069***	***7,0690***	***6,9078***	***0,1612***
5000	***43376***	***8,6752***	***8,5172***	***0,1580***
10000	***93668***	***9,3668***	***9,2103***	***0,1565***
20000	***201177***	***10,0589***	***9,9035***	***0,1554***
100000	***1166750***	***11,6675***	***11,5129***	***0,1546***
200000	***2472110***	***12,3606***	***12,2061***	***0,1545***
300000	***3829830***	***12,7661***	***12,6115***	***0,1546***
400000	***5221470***	***13,0537***	***12,8992***	***0,1545***
500000	***6638450***	***13,2769***	***13,1224***	***0,1545***
1000000	***13970000***	***13,9700***	***13,8155***	***0,1545***

5 lentelė. Funkcijos $d(n)$ reikšmių sumų

$$D(N)=\sum_{n=1}^{N} d(n)=N\ln N+(2\gamma-1)N+O(\sqrt{N}),$$

kur $\gamma=0{,}57721566...$ - Oilerio konstanta, skaičiavimo rezultatai.

N	$D(N)$	$\ln N$	$N\cdot\ln N$	$(2\cdot\gamma-1)$	$(2\cdot\gamma-1)\cdot N$
1000	***7069***	***6,9078***	***6907,80***	***0,1544***	***154,40***
5000	***43376***	***8,5172***	***42586***	***0,1544***	***772,00***
10000	***93668***	***9,2103***	***92103***	***0,1544***	***1544,00***
20000	***201177***	***9,9035***	***198070***	***0,1544***	***3088,00***
100000	***1166750***	***11,5129***	***1151290***	***0,1544***	***15440,00***

N	$\sqrt{N}$	$O(1)=\dfrac{D(N)-N\ln N-(2\gamma-1)N}{\sqrt{N}}$
1000	***31,6228***	***0,2150***
5000	***70,7107***	***0,2546***
10000	***100,0000***	***0,2100***
20000	***141,4214***	***0,1344***
100000	***316,2278***	***0,0632***

2.4. Funkcijos σ(n) reikšmių vidurkis

6 lentelė. Funkcijos $\sigma(n)$ reikšmių sumų

$$\Sigma(N)=\sum_{n=1}^{n}\sigma(n)=\frac{\pi^2}{12}N^2+O(N\ln N)$$

skaičiavimo rezultatai.

N	$\Sigma(N)$	$\frac{\pi^2}{12}$	N^2	$\frac{\pi^2}{12}N^2$	$\ln N$
1000	***823081***	***0,8225***	***1000000***	***822500***	***6,9078***
5000	***20565804***	***0,8225***	***25000000***	***20562500***	***8,5172***
10000	***82256014***	***0,8225***	***100000000***	***82250000***	***9,2103***
20000	***329004151***	***0,8225***	***400000000***	***329000000***	***9,9035***
100000	***8224740835***	***0,8225***	***10000000000***	***8225000000***	***11,5129***
200000	***32898811231***	***0,8225***	***40000000000***	***32900000000***	***12,2061***
300000	***74022392498***	***0,8225***	***90000000000***	***74025000000***	***12,6115***
400000	***131595016213***	***0,8225***	***160000000000***	***131600000000***	***12,8992***

500000	***205617099435***	***0,8225***	***250000000000***	***205625000000***	***13,1224***
1000000	***822468118437***	***0,8225***	***1000000000000***	***822500000000***	***13,8155***
N	$N \ln N$	$O(1)=\dfrac{\Sigma(N)-\dfrac{\pi^2}{12}N^2}{N \ln N}$			
1000	***6907,80***	***0,0841***			
5000	***42586,00***	***0,0776***			
10000	***92103,00***	***0,0653***			
20000	***198070,00***	***0,0210***			
100000	***1151290,00***	***-0,2251***			
200000	***2441220,00***	***-0,4870***			
300000	***3783450,00***	***-0,6892***			
400000	***5159680,00***	***-0,9659***			
500000	***6561200,00***	***-1,2041***			
1000000	***13815500,00***	***-2,3077***			

7 lentelė. Funkcijos $\sigma(n)$ reikšmių sumų $\Sigma(N)=\sum_{n=1}^{n}\sigma(n)$ vidurkių

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\sigma(n)\approx\frac{\pi^2}{12}N$$

skaičiavimo rezultatai.

N	$\Sigma(N)$	$\dfrac{\Sigma(N)}{N}$	$\dfrac{\pi^2}{12}$	$\dfrac{\pi^2}{12}N$	$\dfrac{\Sigma(N)}{N}-\dfrac{\pi^2}{12}N \Rightarrow O(\ln N)$
1000	***823081***	***823,0810***	***0,8225***	***822,50***	***0,5810***
5000	***20565804***	***4113,1608***	***0,8225***	***4112,50***	***0,6608***
10000	***82256014***	***8225,6014***	***0,8225***	***8225,00***	***0,6014***
20000	***329004151***	***16450,2076***	***0,8225***	***16450,00***	***0,2075***
100000	***8224740835***	***82247,4084***	***0,8225***	***82250,00***	***-2,5917***
200000	***32898811231***	***164494,0562***	***0,8225***	***164500,00***	***-5,9438***
300000	***74022392498***	***246741,3083***	***0,8225***	***246750,00***	***-8,6917***
400000	***131595016213***	***328987,5405***	***0,8225***	***329000,00***	***-12,4595***
500000	***205617099435***	***411234,1989***	***0,8225***	***411250,00***	***-15,8011***
1000000	***822468118437***	***822468,1184***	***0,8225***	***822500,00***	***-31,8816***

2.5. Funkcijos φ(n) reikšmių vidurkis

8 lentelė. Funkcijos $\varphi(n)$ reikšmių sumų $\Phi(N)=\sum_{n=1}^{N}\varphi(n)=\frac{3}{\pi^2}N^2+O(N\ \ln\ N)$ skaičiavimo rezultatai.

N	$\Phi(N)$	$\frac{3}{\pi^2}$	N^2	$\frac{3}{\pi^2}N^2$	$\ln\ N$	$N\cdot\ln\ N$
1000	***304192***	***0,3040***	***1000000***	***304000***	***6,9078***	***6907,80***
5000	***7600458***	***0,3040***	***25000000***	***7600000***	***8,5172***	***42586***
10000	***30397486***	***0,3040***	***100000000***	***30400000***	***9,2103***	***92103***
20000	***121590396***	***0,3040***	***400000000***	***121600000***	***9,9035***	***198070***
100000	***3039650754***	***0,3040***	***10000000000***	***3040000000***	***11,5129***	***1151290***

N	$\Phi(N)-\frac{3}{\pi^2}N^2$	$O(1)=\frac{\Phi(N)-\frac{3}{\pi^2}N^2}{N\ln\ N}$
1000	***192***	***0,0278***
5000	***458***	***0,0108***
10000	***-2514***	***-0,0273***
20000	***-9604***	***-0,0485***
100000	***-349246***	***-0,303***

9 lentelė. Funkcijos $\varphi(n)$ reikšmių sumų vidurkių $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\varphi(n)\approx\frac{3}{\pi^2}N$ skaičiavimo rezultatai.

N	$\Phi(N)$	$\frac{\Phi(N)}{N}$	$\frac{3}{\pi^2}$	$\frac{3}{\pi^2}N$	$\frac{\Phi(N)}{N}-\frac{3}{\pi^2}N\Rightarrow O(\ln N)$
1000	***304192***	***304,19***	***0,3040***	***304***	***0,1920***
5000	***7600458***	***1520,09***	***0,3040***	***1520***	***0,0916***
10000	***30397486***	***3039,75***	***0,3040***	***3040***	***-0,2514***
20000	***121590396***	***6079,52***	***0,3040***	***6080***	***-0,4802***
100000	***3039650754***	***30396,51***	***0,3040***	***30400***	***-3,4925***
200000	***12158598918***	***60792,99***	***0,3040***	***60800***	***-7,0054***
300000	***27356748484***	***91189,16***	***0,3040***	***91200***	***-10,8384***

N	$\Phi(N)$	$\frac{\Phi(N)}{N}$	$\frac{3}{\pi^2}$	$\frac{3}{\pi^2}N$	$\frac{\Phi(N)}{N}-\frac{3}{\pi^2}N \Rightarrow O(\ln N)$
400000	***48634207310***	***121585,52***	***0,3040***	***121600***	***-14,4817***
500000	***75991039676***	***151982,08***	***0,3040***	***152000***	***-17,9206***
1000000	***303963552392***	***303963,55***	***0,3040***	***304000***	***-36,4476***

Straipsnyje „On the Euler function $\varphi(n)$ with n in arithmetical progressions“ [7] buvo nagrinėjama aritmetinė Oilerio funkcija. Siekiant patikrinti kai kurias teorines išvadas, publikacijoje pateikti matematiniai skaičiavimai. Norint patikrinti ir sulyginti gautus rezultatus, reiškinių argumentų aibė šiame darbe praplėsta.

20 teorema. $A(x)=\sum_{\varphi(n)\leqslant x} 1$. Tegul $n\equiv l\ (mod\ k)$ su kuriuo $\varphi(n)=m$ ir

$$P(x;k,l)=\sum_{\substack{\varphi(n)\leqslant x \\ n\equiv l(mod\ k)}} 1 .$$

Tada reiškinio $P(x;k,l)$ skaitiniai rezultatai, kai $k=3$, $k=5$, $k=6$, $k=7$ leidžia teigti, kad santykis $\frac{P(x;k,l)}{x}$ su kiekvienu $l\leqslant k$ yra stabilus, kai $x\rightarrow\infty$ (žr. lenteles Nr. 10, 11, 12, 13).

10 lentelė. Skaičiavimo rezultatai, kai $k=3$, $P(x;3,l)$.

x	*500*	*1000*	*2000*	*5000*	*10000*	*150000*
$P(x;3,1)$	***278***	***555***	***1111***	***2780***	***5564***	***83332***
$\frac{P(x;3,1)}{x}$	***0,556***	***0,555***	***0,5555***	***0,556***	***0,5564***	***0,555547***
$P(x;3,2)$	***277***	***555***	***1109***	***2780***	***5555***	***83314***
$\frac{P(x;3,2)}{x}$	***0,554***	***0,555***	***0,5545***	***0,556***	***0,5555***	***0,555427***
$P(x;3,3)$	***416***	***831***	***1664***	***4164***	***8333***	***124970***
$\frac{P(x;3,3)}{x}$	***0,832***	***0,831***	***0,832***	***0,8328***	***0,8333***	***0,833133***
$A(x)$	***971***	***1941***	***3884***	***9724***	***19452***	***291616***

11 lentelė. Skaičiavimo rezultatai, kai $k=5,\ P(x;5,l)$.

x	500	1000	2000	5000	10000	150000
$P(x;5,1)$	**184**	**369**	**740**	**1854**	**3704**	**55540**
$\frac{P(x;5,1)}{x}$	**0,368**	**0,369**	**0,37**	**0,3708**	**0,3704**	**0,370267**
$P(x;5,2)$	**185**	**370**	**743**	**1854**	**3707**	**55529**
$\frac{P(x;5,2)}{x}$	**0,37**	**0,37**	**0,3715**	**0,3708**	**0,3707**	**0,370193**
$P(x;5,3)$	**183**	**370**	**736**	**1853**	**3709**	**55546**
$\frac{P(x;5,3)}{x}$	**0,366**	**0,37**	**0,368**	**0,3706**	**0,3709**	**0,370307**
$P(x;5,4)$	**185**	**370**	**740**	**1854**	**3710**	**55543**
$\frac{P(x;5,4)}{x}$	**0,37**	**0,37**	**0,37**	**0,3708**	**0,371**	**0,370287**
$P(x;5,5)$	**234**	**462**	**925**	**2309**	**4622**	**69458**
$\frac{P(x;5,5)}{x}$	**0,468**	**0,462**	**0,4625**	**0,4618**	**0,4622**	**0,463053**
$A(x)$	**971**	**1941**	**3884**	**9724**	**19452**	**291616**

12 lentelė. Skaičiavimo rezultatai, kai $k=6,\ P(x;6,l)$.

x	500	1000	2000	5000	10000	150000
$P(x;6,1)$	**93**	**186**	**371**	**931**	**1859**	**27782**
$\frac{P(x;6,1)}{x}$	**0,186**	**0,186**	**0,1855**	**0,1862**	**0,1859**	**0,185213**
$P(x;6,2)$	**185**	**371**	**740**	**1858**	**3708**	**55552**
$\frac{P(x;6,2)}{x}$	**0,37**	**0,371**	**0,37**	**0,3716**	**0,3708**	**0,370347**
$P(x;6,3)$	**139**	**277**	**555**	**1389**	**2779**	**41650**
$\frac{P(x;6,3)}{x}$	**0,278**	**0,277**	**0,2775**	**0,2778**	**0,2779**	**0,277667**
$P(x;6,4)$	**185**	**369**	**740**	**1849**	**3705**	**55550**
$\frac{P(x;6,4)}{x}$	**0,37**	**0,369**	**0,37**	**0,3698**	**0,3705**	**0,370333**
$P(x;6,5)$	**92**	**184**	**369**	**922**	**1847**	**27762**
$\frac{P(x;6,5)}{x}$	**0,184**	**0,184**	**0,1845**	**0,1844**	**0,1847**	**0,18508**

x	500	1000	2000	5000	10000	150000
$P(x;6,6)$	**277**	**554**	**1109**	**2775**	**5554**	**83320**
$\frac{P(x;6,6)}{x}$	**0,554**	**0,554**	**0,5545**	**0,555**	**0,5554**	**0,555467**
$A(x)$	**971**	**1941**	**3884**	**9724**	**19452**	**291616**

13 lentelė. Skaičiavimo rezultatai, kai $k=7,\ P(x;7,l)$.

x	500	1000	2000	5000	10000	150000
$P(x;7,1)$	**137**	**269**	**540**	**1360**	**2719**	**40675**
$\frac{P(x;7,1)}{x}$	**0,274**	**0,269**	**0,27**	**0,272**	**0,2719**	**0,271167**
$P(x;7,2)$	**137**	**269**	**542**	**1360**	**2719**	**40693**
$\frac{P(x;7,2)}{x}$	**0,274**	**0,269**	**0,271**	**0,272**	**0,2719**	**0,271287**
$P(x;7,3)$	**135**	**274**	**547**	**1354**	**2714**	**40685**
$\frac{P(x;7,3)}{x}$	**0,27**	**0,274**	**0,2735**	**0,2708**	**0,2714**	**0,271233**
$P(x;7,4)$	**136**	**269**	**538**	**1361**	**2718**	**40697**
$\frac{P(x;7,4)}{x}$	**0,272**	**0,269**	**0,269**	**0,2722**	**0,2718**	**0,271313**
$P(x;7,5)$	**133**	**271**	**544**	**1358**	**2711**	**40696**
$\frac{P(x;7,5)}{x}$	**0,266**	**0,271**	**0,272**	**0,2716**	**0,2711**	**0,271307**
$P(x;7,6)$	**134**	**273**	**542**	**1358**	**2711**	**40707**
$\frac{P(x;7,6)}{x}$	**0,268**	**0,273**	**0,271**	**0,2716**	**0,2711**	**0,27138**
$P(x;7,7)$	**159**	**316**	**631**	**1573**	**3160**	**47463**
$\frac{P(x;7,7)}{x}$	**0,318**	**0,316**	**0,3155**	**0,3146**	**0,316**	**0,31642**
$A(x)$	**971**	**1941**	**3884**	**9724**	**19452**	**291616**

21 teorema. Kai $k\geqslant 2$ ir $(l,\,k)=1$, lygybė

$$P(x;\,k,\,l)=b_k x+O(k\ x\ e^{-(1+\frac{c_2\log_3(x)}{\log_2(x)})(\frac{1}{2}\log(x)\log_2(x))^{\frac{1}{2}}})$$

yra teisinga, kai $x\to\infty$. Čia c_2 – teigiama konstanta, $b_k=\frac{a}{k}\prod_{p|k}(1+\frac{1}{p(p-1)})^{-1}$,

$a=1{,}943596434...$.

Skaičiavimais patikrinsime lygybę

$$P(x;\ k,\ l) \approx b_k x,$$

išplaukusią iš 21 teoremos.

14 lentelė. Reiškinio $P(x;\ k,\ l) \approx b_k x$ skaičiavimo rezultatai, kai $k=3$, $k=5$, $k=6$, $k=7$.

$k=3,\ x$	b_3	*500*	$b_3 500$	*1000*	$b_3 1000$	*2000*	$b_3 2000$
$P(x;3,1)$	***0,555313***	***278***	***277,66***	***555***	***555,31***	***1111***	***1110,63***
$P(x;3,2)$		***277***		***555***		***1109***	
$k=5,\ x$	b_5	*500*	$b_5 500$	*1000*	$b_5 1000$	*2000*	$b_5 2000$
$P(x;5,1)$	***0,370209***	***184***	***185,10***	***369***	***370,21***	***740***	***740,42***
$P(x;5,2)$		***185***		***370***		***743***	
$P(x;5,3)$		***183***		***370***		***736***	
$P(x;5,4)$		***185***		***370***		***740***	
$k=6,\ x$	b_6	*500*	$b_6 500$	*1000*	$b_6 1000$	*2000*	$b_6 2000$
$P(x;6,1)$	***0,185104***	***93***	***92,55***	***186***	***185,1***	***371***	***370,21***
$P(x;6,5)$		***92***		***184***		***369***	
$k=7,\ x$	b_7	*500*	$b_7 500$	*1000*	$b_7 1000$	*2000*	$b_7 2000$
$P(x;7,1)$	***0,271199***	***137***	***135,6***	***269***	***271,2***	***540***	***542,4***
$P(x;7,2)$		***137***		***269***		***542***	
$P(x;7,3)$		***135***		***274***		***547***	
$P(x;7,4)$		***136***		***269***		***538***	
$P(x;7,5)$		***133***		***271***		***544***	
$P(x;7,6)$		***134***		***273***		***542***	
$k=3,\ x$	b_3	*5000*	$b_3 5000$	*10000*	$b_3 10000$	*150000*	$b_3 150000$
$P(x;3,1)$	***0,555313***	***2780***	***2776,57***	***5564***	***5553,13***	***83332***	***83296,95***
$P(x;3,2)$		***2780***		***5555***		***83314***	
$k=5,\ x$	b_5	*5000*	$b_5 5000$	*10000*	$b_5 10000$	*150000*	$b_5 150000$
$P(x;5,1)$	***0,370209***	***1854***	***1851,05***	***3704***	***3702,09***	***55540***	***55531,35***
$P(x;5,2)$		***1854***		***3707***		***55529***	
$P(x;5,3)$		***1853***		***3709***		***55546***	
$P(x;5,4)$		***1854***		***3710***		***55543***	
$k=6,\ x$	b_6	*5000*	$b_6 5000$	*10000*	$b_6 10000$	*150000*	$b_6 150000$
$P(x;6,1)$	***0,185104***	***931***	***925,52***	***1859***	***1851,04***	***27782***	***27765,60***
$P(x;6,5)$		***922***		***1847***		***27762***	

$k=7,\ x$	b_7	*5000*	$b_7 5000$	*10000*	$b_7 10000$	*150000*	$b_7 150000$
$P(x;7,1)$	***0,271199***	***1360***	***1356***	***2719***	***2711,99***	***40675***	***40679,85***
$P(x;7,2)$		***1360***		***2719***		***40693***	
$P(x;7,3)$		***1354***		***2714***		***40685***	
$P(x;7,4)$		***1361***		***2718***		***40697***	
$P(x;7,5)$		***1358***		***2711***		***40696***	
$P(x;7,6)$		***1358***		***2711***		***40707***	

2.6. Funkcijos μ(n) reikšmių vidurkis

15 lentelė. Funkcijos $\mu(n)$ reikšmių sumų $M(N)=\sum_{n=1}^{N}\mu(n)$ vidurkių $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mu(n)$ skaičiavimo rezultatai.

N	$M(N)$	$\frac{M(N)}{N}$
1000	***2***	***0,0020000000***
5000	***2***	***0,0004000000***
10000	***-23***	***-0,0023000000***
20000	***26***	***0,0013000000***
100000	***-48***	***-0,0004800000***
200000	***-48***	***-0,0002400000***
300000	***220***	***0,0007333333***
400000	***11***	***0,0000275000***
500000	***-6***	***-0,0000120000***
1000000	***212***	***0,0002120000***

IŠVADOS

Aritmetinės funkcijos elgiasi gana chaotiškai, tačiau jų vidurkiai didinant dėmenų skaičių lieka stabilūs. Darbe skaičiavimais analizuotos kai kurios aritmetinių funkcijų sumų asimptotinės formulės. Gauti atitinkamų simbolio O konstantų galimi įverčiai, patvirtinantys teorinius rezultatus.

SUMMARY

Sums of arithmetical functions

Aurelija Barčaitė

Functions that have range of definition equal to the set of natural numbers are called arithmetical functions. Values of such functions are spread chaotically in the set of natural numbers, however, mean value can be calculated precisely enough. The goal of this thesis is to approve some of the theorems about arithmetical functions by certain mathematical calculations using *Mathematica* software suite.

LITERATŪROS SĄRAŠAS

1. Ayoub R. An introduction to the analytic theory of numbers. U.S.A, American Mathematical Society, 1963.
2. Bulota K., Survila P. Algebra ir skaičių teorija. II d. Vilnius, Mokslas, 1977.
3. Hardy G. H., Wright E. M. An introduction to the theory of numbers. Oxford at the clarendon press, 1979.
4. Misevičius E. Matematinė analizė. I d. Vilnius, TEV, 1998.
5. Misevičius G., Pincevičius A., Rakauskas R. J., Eidukevičius R. Aukštoji matematika. Vilnius, TEV, 1999.
6. Skrabutėnas R., Survila P. Algebros ir skaičių teorijos uždavinynas. Vilnius, Mokslo ir enciklopedijų leidykla, 1995.
7. Stankus E. On the Euler function $\varphi(n)$ with n in arithmetical progressions. Vilnius, 2001.
8. Wolfram S. The Mathematica Book. Cambridge University Press, 1996.
9. Виноградов И. М. Основы теории чисел. Москва, Наука, 1981.
10. Прахар К. Распределение простых чисел. Москва, Мир, 1967.
11. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. Москва, Мир, 1974.

PRIEDAI

1 lentelė. Skaičiavimo algoritmai. Dėl kai kurių sistemos ypatumų raidė N, keičima į *K*.

<table>
<tr><th>N</th><th>$R(N)$</th><th>πN</th><th>$\sqrt{N}$</th></tr>
<tr><td>1000</td><td colspan="3">In[1]:= << NumberTheory`NumberTheoryFunctions`
In[2]:= K = 1000; pi = 3.1416
Out[2]= 3.1416
In[3]:= Sum[N[SumOfSquaresR[2, M]], {M, K}]
Out[3]= 3148.
In[4]:= pi * K
Out[4]= 3141.6
In[5]:= $\text{sakn}_1 = N[\sqrt[2]{K}, 5]$
Out[5]= 31.623</td></tr>
<tr><td>5000</td><td colspan="3">In[1]:= << NumberTheory`NumberTheoryFunctions`
In[6]:= K = 5000; pi = 3.1416
Out[6]= 3.1416
In[7]:= Sum[N[SumOfSquaresR[2, M]], {M, K}]
Out[7]= 15704.
In[8]:= pi * K
Out[8]= 15708.
In[9]:= $\text{sakn}_1 = N[\sqrt[2]{K}, 5]$
Out[9]= 70.711</td></tr>
</table>

10000	In[1]:= << NumberTheory`NumberTheoryFunctions` In[10]:= K = 10000; pi = 3.1416 Out[10]= 3.1416 In[11]:= Sum[N[SumOfSquaresR[2, M]], {M, K}] Out[11]= 31416. In[12]:= pi * K Out[12]= 31416. In[13]:= $sakn_1 = N[\sqrt[2]{K}, 5]$ Out[13]= 100.
20000	In[1]:= << NumberTheory`NumberTheoryFunctions` In[14]:= K = 20000; pi = 3.1416 Out[14]= 3.1416 In[15]:= Sum[N[SumOfSquaresR[2, M]], {M, K}] Out[15]= 62844. In[16]:= pi * K Out[16]= 62832. In[17]:= $sakn_1 = N[\sqrt[2]{K}, 5]$ Out[17]= 141.42
100000	In[1]:= << NumberTheory`NumberTheoryFunctions` In[18]:= K = 100000; pi = 3.1416 Out[18]= 3.1416 In[19]:= Sum[N[SumOfSquaresR[2, M]], {M, K}] Out[19]= 314196. In[20]:= pi * K Out[20]= 314160. In[21]:= $sakn_1 = N[\sqrt[2]{K}, 5]$ Out[21]= 316.23

4 lentelė. Skaičiavimo algoritmai. Dėl kai kurių sistemos ypatumų raidė N, keičima į K.

N	$D(N)$	$\ln(N)$
1000	In[1]:= K = 1000 Out[1]= 1000 In[2]:= D_N = N[Sum[DivisorSigma[0, M], {M, K}]] Out[2]= 7069.	In[3]:= Log_N = N[Log[K]] Out[3]= 6.90776
5000	In[4]:= K = 5000 Out[4]= 5000 In[5]:= D_N = N[Sum[DivisorSigma[0, M], {M, K}]] Out[5]= 43376.	In[6]:= Log_N = N[Log[K]] Out[6]= 8.51719
10000	In[7]:= K = 10000 Out[7]= 10000 In[8]:= D_N = N[Sum[DivisorSigma[0, M], {M, K}]] Out[8]= 93668.	In[9]:= Log_N = N[Log[K]] Out[9]= 9.21034
20000	In[11]:= K = 20000 Out[11]= 20000 In[12]:= D_N = N[Sum[DivisorSigma[0, M], {M, K}]] Out[12]= 201177.	In[13]:= Log_N = N[Log[K]] Out[13]= 9.90349
100000	In[14]:= K = 100000 Out[14]= 100000 In[19]:= D_N = N[Sum[DivisorSigma[0, M], {M, K}]] Out[19]= 1.16675×10^6	In[20]:= Log_N = N[Log[K]] Out[20]= 11.5129
200000	In[21]:= K = 200000 Out[21]= 200000 In[22]:= D_N = N[Sum[DivisorSigma[0, M], {M, K}]] Out[22]= 2.47211×10^6	In[23]:= Log_N = N[Log[K]] Out[23]= 12.2061

300000	In[24]:= **K = 300000** Out[24]= 300000 In[25]:= **D_N = N[Sum[DivisorSigma[0, M], {M, K}]]** Out[25]= 3.82983×10^{6}	In[26]:= **Log_N = N[Log[K]]** Out[26]= 12.6115
400000	In[27]:= **K = 400000** Out[27]= 400000 In[28]:= **D_N = N[Sum[DivisorSigma[0, M], {M, K}]]** Out[28]= 5.22147×10^{6}	In[29]:= **Log_N = N[Log[K]]** Out[29]= 12.8992
500000	In[30]:= **K = 500000** Out[30]= 500000 In[31]:= **D_N = N[Sum[DivisorSigma[0, M], {M, K}]]** Out[31]= 6.63845×10^{6}	In[32]:= **Log_N = N[Log[K]]** Out[32]= 13.1224
1000000	In[33]:= **K = 1000000** Out[33]= 1000000 In[34]:= **D_N = N[Sum[DivisorSigma[0, M], {M, K}]]** Out[34]= 1.397×10^{7}	In[35]:= **Log_N = N[Log[K]]** Out[35]= 13.8155

7 lentelė. Skaičiavimo algoritmai. Dėl kai kurių sistemos ypatumų raidė N, keičima į K.

N	$\Sigma(N)$
1000	In[1]:= **K = 1000** Out[1]= 1000 In[2]:= **$Sigma_N$ = N[Sum[DivisorSigma[1, M], {M, K}]]** Out[2]= 823081.

5000	In[3]:= $K = 5000$ Out[3]= 5000 In[4]:= $Sigma_N = N[Sum[DivisorSigma[1, M], \{M, K\}], 15]$ Out[4]= 2.0565804×10^7
10000	In[5]:= $K = 10000$ Out[5]= 10000 In[6]:= $Sigma_N = N[Sum[DivisorSigma[1, M], \{M, K\}], 15]$ Out[6]= 8.2256014×10^7
20000	In[7]:= $K = 20000$ Out[7]= 20000 In[8]:= $Sigma_N = N[Sum[DivisorSigma[1, M], \{M, K\}], 15]$ Out[8]= 3.29004151×10^8
100000	In[9]:= $K = 100000$ Out[9]= 100000 In[10]:= $Sigma_N = N[Sum[DivisorSigma[1, M], \{M, K\}], 15]$ Out[10]= 8.224740835×10^9
200000	In[11]:= $K = 200000$ Out[11]= 200000 In[12]:= $Sigma_N = N[Sum[DivisorSigma[1, M], \{M, K\}], 15]$ Out[12]= $3.2898811231 \times 10^{10}$
300000	In[13]:= $K = 300000$ Out[13]= 300000 In[14]:= $Sigma_N = N[Sum[DivisorSigma[1, M], \{M, K\}], 15]$ Out[14]= $7.4022392498 \times 10^{10}$

400000	In[15]:= `K = 400000` Out[15]= 400000 In[16]:= `Sigma_N = N[Sum[DivisorSigma[1, M], {M, K}], 15]` Out[16]= $1.31595016213 \times 10^{11}$
500000	In[17]:= `K = 500000` Out[17]= 500000 In[18]:= `Sigma_N = N[Sum[DivisorSigma[1, M], {M, K}], 15]` Out[18]= $2.05617099435 \times 10^{11}$
1000000	In[19]:= `K = 1000000` Out[19]= 1000000 In[20]:= `Sigma_N = N[Sum[DivisorSigma[1, M], {M, K}], 15]` Out[20]= $8.22468118437 \times 10^{11}$

9 lentelė. Skaičiavimo algoritmai. Dėl kai kurių sistemos ypatumų raidė N, keičima į *K*.

N	$\Phi(N)$	
1000	In[1]:= `K = 1000` Out[1]= 1000	In[2]:= `N[Sum[EulerPhi[M], {M, K}], 15]` Out[2]= 304192.
5000	In[3]:= `K = 5000` Out[3]= 5000	In[4]:= `N[Sum[EulerPhi[M], {M, K}], 15]` Out[4]= 7.600458×10^{6}
10000	In[5]:= `K = 10000` Out[5]= 10000	In[6]:= `N[Sum[EulerPhi[M], {M, K}], 15]` Out[6]= 3.0397486×10^{7}
20000	In[7]:= `K = 20000` Out[7]= 20000	In[8]:= `N[Sum[EulerPhi[M], {M, K}], 15]` Out[8]= 1.21590396×10^{8}
100000	In[9]:= `K = 100000` Out[9]= 100000	In[10]:= `N[Sum[EulerPhi[M], {M, K}], 15]` Out[10]= $3.039650754 \times 10^{9}$

N	$\Phi(N)$	
200000	In[11]:= **K = 200000** Out[11]= 200000	In[12]:= **N[Sum[EulerPhi[M], {M, K}], 15]** Out[12]= $1.2158598918\times10^{10}$
30000	In[13]:= **K = 300000** Out[13]= 300000	In[14]:= **N[Sum[EulerPhi[M], {M, K}], 15]** Out[14]= $2.7356748484\times10^{10}$
400000	In[15]:= **K = 400000** Out[15]= 400000	In[16]:= **N[Sum[EulerPhi[M], {M, K}], 15]** Out[16]= 4.863420731×10^{10}
500000	In[17]:= **K = 500000** Out[17]= 500000	In[18]:= **N[Sum[EulerPhi[M], {M, K}], 15]** Out[18]= $7.5991039676\times10^{10}$
1000000	In[19]:= **K = 1000000** Out[19]= 1000000	In[20]:= **N[Sum[EulerPhi[M], {M, K}], 15]** Out[20]= $3.03963552392\times10^{11}$

10 lentelė. Skaičiavimo algoritmai.

$P(x;3,1)$	$P(x;3,1)/x$
$x=500$	
In[1]:= **r = 0; k = 0; x = 500;** **While[r <= 1000000, n = 3 * r + 1;** **If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++]** **k** Out[2]= 278	In[3]:= **N[k / x]** Out[3]= 0.556
$x=1000$	
In[4]:= **r = 0; k = 0; x = 1000;** **While[r <= 1000000, n = 3 * r + 1;** **If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++]** **k** Out[5]= 555	In[6]:= **N[k / x]** Out[6]= 0.555

<table>
<tr><td colspan="2">$x = 2000$</td></tr>
<tr><td>In[7]:= r = 0; k = 0; x = 2000;
While[r <= 1000000, n = 3 * r + 1;
If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++]
k

Out[8]= 1111</td><td>In[9]:= N[k / x]

Out[9]= 0.5555</td></tr>
<tr><td colspan="2">$x = 5000$</td></tr>
<tr><td>In[10]:= r = 0; k = 0; x = 5000;
While[r <= 1000000, n = 3 * r + 1;
If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++]
k

Out[11]= 2780</td><td>In[12]:= N[k / x]

Out[12]= 0.556</td></tr>
<tr><td colspan="2">$x = 10000$</td></tr>
<tr><td>In[13]:= r = 0; k = 0; x = 10000;
While[r <= 1000000, n = 3 * r + 1;
If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++]
k

Out[14]= 5564</td><td>In[15]:= N[k / x]

Out[15]= 0.5564</td></tr>
<tr><td colspan="2">$x = 150000$</td></tr>
<tr><td>In[16]:= r = 0; k = 0; x = 150000;
While[r <= 1000000, n = 3 * r + 1;
If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++]
k

Out[17]= 83332</td><td>In[18]:= N[k / x]

Out[18]= 0.555547</td></tr>
<tr><td>$P(x;3,2)$</td><td>$P(x;3,2)/x$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$x = 500$</td></tr>
<tr><td>In[19]:= r = 0; k = 0; x = 500;
While[r <= 1000000, n = 3 * r + 2;
If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++]
k

Out[20]= 277</td><td>In[21]:= N[k / x]

Out[21]= 0.554</td></tr>
</table>

$x=1000$	
In[22]:= r = 0; k = 0; x = 1000; While[r <= 1000000, n = 3 * r + 2; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[23]= 555	In[24]:= N[k / x] Out[24]= 0.555
$x=2000$	
In[25]:= r = 0; k = 0; x = 2000; While[r <= 1000000, n = 3 * r + 2; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[26]= 1109	In[27]:= N[k / x] Out[27]= 0.5545
$x=5000$	
In[28]:= r = 0; k = 0; x = 5000; While[r <= 1000000, n = 3 * r + 2; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[29]= 2780	In[30]:= N[k / x] Out[30]= 0.556
$x=10000$	
In[31]:= r = 0; k = 0; x = 10000; While[r <= 1000000, n = 3 * r + 2; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[32]= 5555	In[33]:= N[k / x] Out[33]= 0.5555
$x=150000$	
In[34]:= r = 0; k = 0; x = 150000; While[r <= 1000000, n = 3 * r + 2; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[35]= 83314	In[36]:= N[k / x] Out[36]= 0.555427

<table>
<tr><th>$P(x;3,3)$</th><th>$P(x;3,3)/x$</th></tr>
<tr><td colspan="2">$x=500$</td></tr>
<tr><td>In[37]:= r = 0; k = 0; x = 500;
While[r <= 1000000, n = 3 * r + 3;
If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++]
k
Out[38]= 416</td><td>In[39]:= N[k / x]
Out[39]= 0.832</td></tr>
<tr><td colspan="2">$x=1000$</td></tr>
<tr><td>In[40]:= r = 0; k = 0; x = 1000;
While[r <= 1000000, n = 3 * r + 3;
If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++]
k
Out[41]= 831</td><td>In[42]:= N[k / x]
Out[42]= 0.831</td></tr>
<tr><td colspan="2">$x=2000$</td></tr>
<tr><td>In[43]:= r = 0; k = 0; x = 2000;
While[r <= 1000000, n = 3 * r + 3;
If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++]
k
Out[44]= 1664</td><td>In[45]:= N[k / x]
Out[45]= 0.832</td></tr>
<tr><td colspan="2">$x=5000$</td></tr>
<tr><td>In[46]:= r = 0; k = 0; x = 5000;
While[r <= 1000000, n = 3 * r + 3;
If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++]
k
Out[47]= 4164</td><td>In[48]:= N[k / x]
Out[48]= 0.8328</td></tr>
<tr><td colspan="2">$x=10000$</td></tr>
<tr><td>In[49]:= r = 0; k = 0; x = 10000;
While[r <= 1000000, n = 3 * r + 3;
If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++]
k
Out[50]= 8333</td><td>In[51]:= N[k / x]
Out[51]= 0.8333</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">$x = 150000$</td></tr>
<tr><td>

```
In[52]:= r = 0; k = 0; x = 150000;
   While[r <= 1000000, n = 3*r + 3;
    If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++]
   k

Out[53]= 124970
```

</td><td>

```
In[54]:= N[k / x]

Out[54]= 0.833133
```

</td></tr>
<tr><td colspan="2">$A(x)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$x = 500$</td></tr>
<tr><td colspan="2">

```
In[55]:= n = 1; k = 0; x = 500;
   While[n ≤ 1000000, If [EulerPhi[n] ≤ x, k =
   k + 1, l = k + 0]; n++]
   k

Out[56]= 971
```

</td></tr>
<tr><td colspan="2">$x = 1000$</td></tr>
<tr><td colspan="2">

```
In[57]:= n = 1; k = 0; x = 1000;
   While[n ≤ 1000000, If [EulerPhi[n] ≤ x, k =
   k + 1, l = k + 0]; n++]
   k

Out[58]= 1941
```

</td></tr>
<tr><td colspan="2">$x = 2000$</td></tr>
<tr><td colspan="2">

```
In[59]:= n = 1; k = 0; x = 2000;
   While[n ≤ 1000000, If [EulerPhi[n] ≤ x, k =
   k + 1, l = k + 0]; n++]
   k

Out[60]= 3884
```

</td></tr>
</table>

$x=5000$
In[61]:= n = 1; k = 0; x = 5000; While[n ≤ 1000000, If [EulerPhi[n] ≤ x, k = k + 1, l = k + 0]; n++] k Out[62]= 9724
$x=10000$
In[63]:= n = 1; k = 0; x = 10000; While[n ≤ 1000000, If [EulerPhi[n] ≤ x, k = k + 1, l = k + 0]; n++] k Out[64]= 19452
$x=150000$
In[65]:= n = 1; k = 0; x = 150000; While[n ≤ 1000000, If [EulerPhi[n] ≤ x, k = k + 1, l = k + 0]; n++] k Out[66]= 291616

11 lentelė. Skaičiavimo algoritmai.

$P(x;5,1)$	$P(x;5,1)/x$
$x=500$	
In[1]:= r = 0; k = 0; x = 500; While[r <= 1000000, n = 5 * r + 1; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[2]= 184	In[3]:= N[k / x] Out[3]= 0.368

$x=1000$

```
In[4]:= r = 0; k = 0; x = 1000;
        While[r <= 1000000, n = 5 * r + 1;
         If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++]
        k

Out[5]= 369
```

```
In[6]:= N[k / x]

Out[6]= 0.369
```

$x=2000$

```
In[7]:= r = 0; k = 0; x = 2000;
        While[r <= 1000000, n = 5 * r + 1;
         If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++]
        k

Out[8]= 740
```

```
In[9]:= N[k / x]

Out[9]= 0.37
```

$x=5000$

```
In[10]:= r = 0; k = 0; x = 5000;
         While[r <= 1000000, n = 5 * r + 1;
          If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++]
         k

Out[11]= 1854
```

```
In[12]:= N[k / x]

Out[12]= 0.3708
```

$x=10000$

```
In[13]:= r = 0; k = 0; x = 10000;
         While[r <= 1000000, n = 5 * r + 1;
          If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++]
         k

Out[14]= 3704
```

```
In[15]:= N[k / x]

Out[15]= 0.3704
```

$x=150000$

```
In[16]:= r = 0; k = 0; x = 150000;
         While[r <= 1000000, n = 5 * r + 1;
          If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++]
         k

Out[17]= 55540
```

```
In[18]:= N[k / x]

Out[18]= 0.370267
```

$P(x;5,2)$	$P(x;5,2)/x$
$x=500$	
In[19]:= r = 0; k = 0; x = 500; While[r <= 1000000, n = 5*r + 2; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[20]= 185	In[21]:= N[k / x] Out[21]= 0.37
$x=1000$	
In[22]:= r = 0; k = 0; x = 1000; While[r <= 1000000, n = 5*r + 2; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[23]= 370	In[24]:= N[k / x] Out[24]= 0.37
$x=2000$	
In[25]:= r = 0; k = 0; x = 2000; While[r <= 1000000, n = 5*r + 2; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[26]= 743	In[27]:= N[k / x] Out[27]= 0.3715
$x=5000$	
In[28]:= r = 0; k = 0; x = 5000; While[r <= 1000000, n = 5*r + 2; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[29]= 1854	In[30]:= N[k / x] Out[30]= 0.3708
$x=10000$	
In[31]:= r = 0; k = 0; x = 10000; While[r <= 1000000, n = 5*r + 2; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[32]= 3707	In[33]:= N[k / x] Out[33]= 0.3707

$x=150000$	
In[34]:= r = 0; k = 0; x = 150000; While[r <= 1000000, n = 5 * r + 2; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[35]= 55529	In[36]:= N[k / x] Out[36]= 0.370193
$P(x;5,3)$	$P(x;5,3)/x$
$x=500$	
In[37]:= r = 0; k = 0; x = 500; While[r <= 1000000, n = 5 * r + 3; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[38]= 183	In[39]:= N[k / x] Out[39]= 0.366
$x=1000$	
In[40]:= r = 0; k = 0; x = 1000; While[r <= 1000000, n = 5 * r + 3; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[41]= 370	In[42]:= N[k / x] Out[42]= 0.37
$x=2000$	
In[43]:= r = 0; k = 0; x = 2000; While[r <= 1000000, n = 5 * r + 3; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[44]= 736	In[45]:= N[k / x] Out[45]= 0.368
$x=5000$	
In[46]:= r = 0; k = 0; x = 5000; While[r <= 1000000, n = 5 * r + 3; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[47]= 1853	In[48]:= N[k / x] Out[48]= 0.3706

$x=10000$	
In[49]:= r = 0; k = 0; x = 10000; While[r <= 1000000, n = 5 * r + 3; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[50]= 3709	In[51]:= N[k / x] Out[51]= 0.3709
$x=150000$	
In[117]:= r = 0; k = 0; x = 150000; While[r <= 1000000, n = 5 * r + 3; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[118]= 55546	In[119]:= N[k / x] Out[119]= 0.370307
$P(x;5,4)$	$P(x;5,4)/x$
$x=500$	
In[57]:= r = 0; k = 0; x = 500; While[r <= 1000000, n = 5 * r + 4; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[58]= 185	In[59]:= N[k / x] Out[59]= 0.37
$x=1000$	
In[60]:= r = 0; k = 0; x = 1000; While[r <= 1000000, n = 5 * r + 4; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[61]= 370	In[62]:= N[k / x] Out[62]= 0.37
$x=2000$	
In[63]:= r = 0; k = 0; x = 2000; While[r <= 1000000, n = 5 * r + 4; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[64]= 740	In[65]:= N[k / x] Out[65]= 0.37

$x=5000$	
In[66]:= r = 0; k = 0; x = 5000; While[r <= 1000000, n = 5*r + 4; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[67]= 1854	In[68]:= N[k / x] Out[68]= 0.3708
$x=10000$	
In[69]:= r = 0; k = 0; x = 10000; While[r <= 1000000, n = 5*r + 4; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[70]= 3710	In[71]:= N[k / x] Out[71]= 0.371
$x=150000$	
In[72]:= r = 0; k = 0; x = 150000; While[r <= 1000000, n = 5*r + 4; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[73]= 55543	In[74]:= N[k / x] Out[74]= 0.370287
$P(x;5,5)$	$P(x;5,5)/x$
$x=500$	
In[75]:= r = 0; k = 0; x = 500; While[r <= 1000000, n = 5*r + 5; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[76]= 234	In[77]:= N[k / x] Out[77]= 0.468
$x=1000$	
In[78]:= r = 0; k = 0; x = 1000; While[r <= 1000000, n = 5*r + 5; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[79]= 462	In[80]:= N[k / x] Out[80]= 0.462

$x = 2000$	
In[81]:= r = 0; k = 0; x = 2000; While[r <= 1000000, n = 5*r + 5; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[82]= 925	In[83]:= N[k / x] Out[83]= 0.4625
$x = 5000$	
In[84]:= r = 0; k = 0; x = 5000; While[r <= 1000000, n = 5*r + 5; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[85]= 2309	In[86]:= N[k / x] Out[86]= 0.4618
$x = 10000$	
In[87]:= r = 0; k = 0; x = 10000; While[r <= 1000000, n = 5*r + 5; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[88]= 4622	In[89]:= N[k / x] Out[89]= 0.4622
$x = 150000$	
In[90]:= r = 0; k = 0; x = 150000; While[r <= 1000000, n = 5*r + 5; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[91]= 69458	In[92]:= N[k / x] Out[92]= 0.463053

12 lentelė. Skaičiavimo algoritmai.

$P(x;6,1)$	$P(x;6,1)/x$
$x = 500$	
In[1]:= r = 0; k = 0; x = 500; While[r <= 1000000, n = 6*r + 1; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[2]= 93	In[3]:= N[k / x] Out[3]= 0.186

$x=1000$	
In[4]:= r = 0; k = 0; x = 1000; While[r <= 1000000, n = 6*r + 1; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[5]= 186	In[6]:= N[k / x] Out[6]= 0.186
$x=2000$	
In[7]:= r = 0; k = 0; x = 2000; While[r <= 1000000, n = 6*r + 1; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[8]= 371	In[9]:= N[k / x] Out[9]= 0.1855
$x=5000$	
In[10]:= r = 0; k = 0; x = 5000; While[r <= 1000000, n = 6*r + 1; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[11]= 931	In[12]:= N[k / x] Out[12]= 0.1862
$x=10000$	
In[13]:= r = 0; k = 0; x = 10000; While[r <= 1000000, n = 6*r + 1; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[14]= 1859	In[15]:= N[k / x] Out[15]= 0.1859
$x=150000$	
In[16]:= r = 0; k = 0; x = 150000; While[r <= 1000000, n = 6*r + 1; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[17]= 27782	In[18]:= N[k / x] Out[18]= 0.185213

$P(x;6,2)$	$P(x;6,2)/x$
$x=500$	

In[19]:= `r = 0; k = 0; x = 500;`
`While[r <= 1000000, n = 6*r + 2;`
`If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++]`
`k`
Out[20]= 185
	In[21]:= `N[k / x]`
	Out[21]= 0.37

$x=1000$	

In[22]:= `r = 0; k = 0; x = 1000;`
`While[r <= 1000000, n = 6*r + 2;`
`If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++]`
`k`
Out[23]= 371
	In[24]:= `N[k / x]`
	Out[24]= 0.371

$x=2000$	

In[25]:= `r = 0; k = 0; x = 2000;`
`While[r <= 1000000, n = 6*r + 2;`
`If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++]`
`k`
Out[26]= 740
	In[27]:= `N[k / x]`
	Out[27]= 0.37

$x=5000$	

In[28]:= `r = 0; k = 0; x = 5000;`
`While[r <= 1000000, n = 6*r + 2;`
`If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++]`
`k`
Out[29]= 1858
	In[30]:= `N[k / x]`
	Out[30]= 0.3716

$x=10000$	

In[31]:= `r = 0; k = 0; x = 10000;`
`While[r <= 1000000, n = 6*r + 2;`
`If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++]`
`k`
Out[32]= 3708
	In[33]:= `N[k / x]`
	Out[33]= 0.3708

$x = 150000$	
In[34]:= r = 0; k = 0; x = 150000; While[r <= 1000000, n = 6*r + 2; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[35]= 55552	In[36]:= N[k / x] Out[36]= 0.370347
$P(x;6,3)$	$P(x;6,3)/x$
$x = 500$	
In[37]:= r = 0; k = 0; x = 500; While[r <= 1000000, n = 6*r + 3; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[38]= 139	In[39]:= N[k / x] Out[39]= 0.278
$x = 1000$	
In[40]:= r = 0; k = 0; x = 1000; While[r <= 1000000, n = 6*r + 3; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[41]= 277	In[42]:= N[k / x] Out[42]= 0.277
$x = 2000$	
In[43]:= r = 0; k = 0; x = 2000; While[r <= 1000000, n = 6*r + 3; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[44]= 555	In[45]:= N[k / x] Out[45]= 0.2775
$x = 5000$	
In[46]:= r = 0; k = 0; x = 5000; While[r <= 1000000, n = 6*r + 3; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[47]= 1389	In[48]:= N[k / x] Out[48]= 0.2778

<table>
<tr><td colspan="2" align="center">$x=10000$</td></tr>
<tr><td>

```
In[49]:= r = 0; k = 0; x = 10000;
  While[r <= 1000000, n = 6*r + 3;
   If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++]
  k
Out[50]= 2779
```

</td><td>

```
In[51]:= N[k / x]
Out[51]= 0.2779
```

</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">$x=150000$</td></tr>
<tr><td>

```
In[52]:= r = 0; k = 0; x = 150000;
  While[r <= 1000000, n = 6*r + 3;
   If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++]
  k
Out[53]= 41650
```

</td><td>

```
In[54]:= N[k / x]
Out[54]= 0.277667
```

</td></tr>
<tr><td align="center">$P(x;6,4)$</td><td align="center">$P(x;6,4)/x$</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">$x=500$</td></tr>
<tr><td>

```
In[55]:= r = 0; k = 0; x = 500;
  While[r <= 1000000, n = 6*r + 4;
   If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++]
  k
Out[56]= 185
```

</td><td>

```
In[57]:= N[k / x]
Out[57]= 0.37
```

</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">$x=1000$</td></tr>
<tr><td>

```
In[58]:= r = 0; k = 0; x = 1000;
  While[r <= 1000000, n = 6*r + 4;
   If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++]
  k
Out[59]= 369
```

</td><td>

```
In[60]:= N[k / x]
Out[60]= 0.369
```

</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">$x=2000$</td></tr>
<tr><td>

```
In[61]:= r = 0; k = 0; x = 2000;
  While[r <= 1000000, n = 6*r + 4;
   If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++]
  k
Out[62]= 740
```

</td><td>

```
In[63]:= N[k / x]
Out[63]= 0.37
```

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">$x=5000$</td></tr>
<tr><td>In[64]:= r = 0; k = 0; x = 5000;
While[r <= 1000000, n = 6*r+4;
If[EulerPhi[n] <= x, k = k+1, l = k+0]; r++]
k

Out[65]= 1849</td><td>In[66]:= N[k / x]

Out[66]= 0.3698</td></tr>
<tr><td colspan="2">$x=10000$</td></tr>
<tr><td>In[67]:= r = 0; k = 0; x = 10000;
While[r <= 1000000, n = 6*r+4;
If[EulerPhi[n] <= x, k = k+1, l = k+0]; r++]
k

Out[68]= 3705</td><td>In[69]:= N[k / x]

Out[69]= 0.3705</td></tr>
<tr><td colspan="2">$x=150000$</td></tr>
<tr><td>In[70]:= r = 0; k = 0; x = 150000;
While[r <= 1000000, n = 6*r+4;
If[EulerPhi[n] <= x, k = k+1, l = k+0]; r++]
k

Out[71]= 55550</td><td>In[72]:= N[k / x]

Out[72]= 0.370333</td></tr>
<tr><td>$P(x;6,5)$</td><td>$P(x;6,5)/x$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$x=500$</td></tr>
<tr><td>In[73]:= r = 0; k = 0; x = 500;
While[r <= 1000000, n = 6*r+5;
If[EulerPhi[n] <= x, k = k+1, l = k+0]; r++]
k

Out[74]= 92</td><td>In[75]:= N[k / x]

Out[75]= 0.184</td></tr>
<tr><td colspan="2">$x=1000$</td></tr>
<tr><td>In[76]:= r = 0; k = 0; x = 1000;
While[r <= 1000000, n = 6*r+5;
If[EulerPhi[n] <= x, k = k+1, l = k+0]; r++]
k

Out[77]= 184</td><td>In[78]:= N[k / x]

Out[78]= 0.184</td></tr>
</table>

$x=2000$	
In[79]:= r = 0; k = 0; x = 2000; While[r <= 1000000, n = 6 * r + 5; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[80]= 369	In[81]:= N[k / x] Out[81]= 0.1845
$x=5000$	
In[82]:= r = 0; k = 0; x = 5000; While[r <= 1000000, n = 6 * r + 5; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[83]= 922	In[84]:= N[k / x] Out[84]= 0.1844
$x=10000$	
In[85]:= r = 0; k = 0; x = 10000; While[r <= 1000000, n = 6 * r + 5; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[86]= 1847	In[87]:= N[k / x] Out[87]= 0.1847
$x=150000$	
In[88]:= r = 0; k = 0; x = 150000; While[r <= 1000000, n = 6 * r + 5; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[89]= 27762	In[90]:= N[k / x] Out[90]= 0.18508
$P(x;6,6)$	$P(x;6,6)/x$
$x=500$	
In[91]:= r = 0; k = 0; x = 500; While[r <= 1000000, n = 6 * r + 6; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[92]= 277	In[93]:= N[k / x] Out[93]= 0.554

$x=1000$	
In[94]:= r = 0; k = 0; x = 1000; While[r <= 1000000, n = 6*r + 6; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[95]= 554	In[96]:= N[k / x] Out[96]= 0.554
$x=2000$	
In[97]:= r = 0; k = 0; x = 2000; While[r <= 1000000, n = 6*r + 6; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[98]= 1109	In[99]:= N[k / x] Out[99]= 0.5545
$x=5000$	
In[100]:= r = 0; k = 0; x = 5000; While[r <= 1000000, n = 6*r + 6; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[101]= 2775	In[102]:= N[k / x] Out[102]= 0.555
$x=10000$	
In[103]:= r = 0; k = 0; x = 10000; While[r <= 1000000, n = 6*r + 6; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[104]= 5554	In[105]:= N[k / x] Out[105]= 0.5554
$x=150000$	
In[106]:= r = 0; k = 0; x = 150000; While[r <= 1000000, n = 6*r + 6; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[107]= 83320	In[108]:= N[k / x] Out[108]= 0.555467

13 lentelė. Skaičiavimo algoritmai.

$P(x;7,1)$	$P(x;7,1)/x$
$x=500$	
In[1]:= r = 0; k = 0; x = 500; While[r <= 1000000, n = 7 * r + 1; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[2]= 137	In[3]:= N[k / x] Out[3]= 0.274
$x=1000$	
In[4]:= r = 0; k = 0; x = 1000; While[r <= 1000000, n = 7 * r + 1; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[5]= 269	In[6]:= N[k / x] Out[6]= 0.269
$x=2000$	
In[7]:= r = 0; k = 0; x = 2000; While[r <= 1000000, n = 7 * r + 1; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[8]= 540	In[9]:= N[k / x] Out[9]= 0.27
$x=5000$	
In[10]:= r = 0; k = 0; x = 5000; While[r <= 1000000, n = 7 * r + 1; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[11]= 1360	In[12]:= N[k / x] Out[12]= 0.272
$x=10000$	
In[13]:= r = 0; k = 0; x = 10000; While[r <= 1000000, n = 7 * r + 1; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[14]= 2719	In[15]:= N[k / x] Out[15]= 0.2719

$x=150000$	
In[16]:= r = 0; k = 0; x = 150000; While[r <= 1000000, n = 7 * r + 1; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[17]= 40675	In[18]:= N[k / x] Out[18]= 0.271167
$P(x;7,2)$	$P(x;7,2)/x$
$x=500$	
In[19]:= r = 0; k = 0; x = 500; While[r <= 1000000, n = 7 * r + 2; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[20]= 137	In[21]:= N[k / x] Out[21]= 0.274
$x=1000$	
In[22]:= r = 0; k = 0; x = 1000; While[r <= 1000000, n = 7 * r + 2; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[23]= 269	In[24]:= N[k / x] Out[24]= 0.269
$x=2000$	
In[25]:= r = 0; k = 0; x = 2000; While[r <= 1000000, n = 7 * r + 2; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[26]= 542	In[27]:= N[k / x] Out[27]= 0.271
$x=5000$	
In[28]:= r = 0; k = 0; x = 5000; While[r <= 1000000, n = 7 * r + 2; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[29]= 1360	In[30]:= N[k / x] Out[30]= 0.272

<table>
<tr><td colspan="2">$x=10000$</td></tr>
<tr><td>In[31]:= r = 0; k = 0; x = 10000;
While[r <= 1000000, n = 7 * r + 2;
If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++]
k

Out[32]= 2719</td><td>In[33]:= N[k / x]

Out[33]= 0.2719</td></tr>
<tr><td colspan="2">$x=150000$</td></tr>
<tr><td>In[34]:= r = 0; k = 0; x = 150000;
While[r <= 1000000, n = 7 * r + 2;
If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++]
k

Out[35]= 40693</td><td>In[36]:= N[k / x]

Out[36]= 0.271287</td></tr>
<tr><td>$P(x;7,3)$</td><td>$P(x;7,3)/x$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$x=500$</td></tr>
<tr><td>In[37]:= r = 0; k = 0; x = 500;
While[r <= 1000000, n = 7 * r + 3;
If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++]
k

Out[38]= 135</td><td>In[39]:= N[k / x]

Out[39]= 0.27</td></tr>
<tr><td colspan="2">$x=1000$</td></tr>
<tr><td>In[40]:= r = 0; k = 0; x = 1000;
While[r <= 1000000, n = 7 * r + 3;
If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++]
k

Out[41]= 274</td><td>In[42]:= N[k / x]

Out[42]= 0.274</td></tr>
<tr><td colspan="2">$x=2000$</td></tr>
<tr><td>In[43]:= r = 0; k = 0; x = 2000;
While[r <= 1000000, n = 7 * r + 3;
If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++]
k

Out[44]= 547</td><td>In[45]:= N[k / x]

Out[45]= 0.2735</td></tr>
</table>

$x=5000$	
In[46]:= r = 0; k = 0; x = 5000; While[r <= 1000000, n = 7*r + 3; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[47]= 1354	In[48]:= N[k / x] Out[48]= 0.2708
$x=10000$	
In[49]:= r = 0; k = 0; x = 10000; While[r <= 1000000, n = 7*r + 3; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[50]= 2714	In[51]:= N[k / x] Out[51]= 0.2714
$x=150000$	
In[52]:= r = 0; k = 0; x = 150000; While[r <= 1000000, n = 7*r + 3; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[53]= 40685	In[54]:= N[k / x] Out[54]= 0.271233
$P(x;7,4)$	$P(x;7,4)/x$
$x=500$	
In[55]:= r = 0; k = 0; x = 500; While[r <= 1000000, n = 7*r + 4; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[56]= 136	In[57]:= N[k / x] Out[57]= 0.272
$x=1000$	
In[58]:= r = 0; k = 0; x = 1000; While[r <= 1000000, n = 7*r + 4; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[59]= 269	In[60]:= N[k / x] Out[60]= 0.269

<table>
<tr><td colspan="2">$x = 2000$</td></tr>
<tr><td>In[61]:= r = 0; k = 0; x = 2000;
While[r <= 1000000, n = 7*r+4;
If[EulerPhi[n] <= x, k = k+1, l = k+0]; r++]
k
Out[62]= 538</td><td>In[63]:= N[k/x]
Out[63]= 0.269</td></tr>
<tr><td colspan="2">$x = 5000$</td></tr>
<tr><td>In[64]:= r = 0; k = 0; x = 5000;
While[r <= 1000000, n = 7*r+4;
If[EulerPhi[n] <= x, k = k+1, l = k+0]; r++]
k
Out[65]= 1361</td><td>In[66]:= N[k/x]
Out[66]= 0.2722</td></tr>
<tr><td colspan="2">$x = 10000$</td></tr>
<tr><td>In[67]:= r = 0; k = 0; x = 10000;
While[r <= 1000000, n = 7*r+4;
If[EulerPhi[n] <= x, k = k+1, l = k+0]; r++]
k
Out[68]= 2718</td><td>In[69]:= N[k/x]
Out[69]= 0.2718</td></tr>
<tr><td colspan="2">$x = 150000$</td></tr>
<tr><td>In[70]:= r = 0; k = 0; x = 150000;
While[r <= 1000000, n = 7*r+4;
If[EulerPhi[n] <= x, k = k+1, l = k+0]; r++]
k
Out[71]= 40697</td><td>In[72]:= N[k/x]
Out[72]= 0.271313</td></tr>
<tr><td>$P(x;7,5)$</td><td>$P(x;7,5)/x$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$x = 500$</td></tr>
<tr><td>In[73]:= r = 0; k = 0; x = 500;
While[r <= 1000000, n = 7*r+5;
If[EulerPhi[n] <= x, k = k+1, l = k+0]; r++]
k
Out[74]= 133</td><td>In[75]:= N[k/x]
Out[75]= 0.266</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">$x = 1000$</th></tr>
<tr><td>In[76]:= r = 0; k = 0; x = 1000;
While[r <= 1000000, n = 7 * r + 5;
If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++]
k

Out[77]= 271</td><td>In[78]:= N[k / x]

Out[78]= 0.271</td></tr>
<tr><th colspan="2">$x = 2000$</th></tr>
<tr><td>In[79]:= r = 0; k = 0; x = 2000;
While[r <= 1000000, n = 7 * r + 5;
If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++]
k

Out[80]= 544</td><td>In[81]:= N[k / x]

Out[81]= 0.272</td></tr>
<tr><th colspan="2">$x = 5000$</th></tr>
<tr><td>In[82]:= r = 0; k = 0; x = 5000;
While[r <= 1000000, n = 7 * r + 5;
If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++]
k

Out[83]= 1358</td><td>In[84]:= N[k / x]

Out[84]= 0.2716</td></tr>
<tr><th colspan="2">$x = 10000$</th></tr>
<tr><td>In[85]:= r = 0; k = 0; x = 10000;
While[r <= 1000000, n = 7 * r + 5;
If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++]
k

Out[86]= 2711</td><td>In[87]:= N[k / x]

Out[87]= 0.2711</td></tr>
<tr><th colspan="2">$x = 150000$</th></tr>
<tr><td>In[88]:= r = 0; k = 0; x = 150000;
While[r <= 1000000, n = 7 * r + 5;
If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++]
k

Out[89]= 40696</td><td>In[90]:= N[k / x]

Out[90]= 0.271307</td></tr>
</table>

$P(x;7,6)$	$P(x;7,6)/x$
$x=500$	
In[91]:= r = 0; k = 0; x = 500; While[r <= 1000000, n = 7 * r + 6; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[92]= 134	In[93]:= N[k / x] Out[93]= 0.268
$x=1000$	
In[94]:= r = 0; k = 0; x = 1000; While[r <= 1000000, n = 7 * r + 6; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[95]= 273	In[96]:= N[k / x] Out[96]= 0.273
$x=2000$	
In[97]:= r = 0; k = 0; x = 2000; While[r <= 1000000, n = 7 * r + 6; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[98]= 542	In[99]:= N[k / x] Out[99]= 0.271
$x=5000$	
In[100]:= r = 0; k = 0; x = 5000; While[r <= 1000000, n = 7 * r + 6; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[101]= 1358	In[102]:= N[k / x] Out[102]= 0.2716
$x=10000$	
In[103]:= r = 0; k = 0; x = 10000; While[r <= 1000000, n = 7 * r + 6; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[104]= 2711	In[105]:= N[k / x] Out[105]= 0.2711

$x=150000$	
In[106]:= r = 0; k = 0; x = 150000; While[r <= 1000000, n = 7*r + 6; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[107]= 40707	In[108]:= N[k / x] Out[108]= 0.27138
$P(x;7,7)$	$P(x;7,7)/x$
$x=500$	
In[109]:= r = 0; k = 0; x = 500; While[r <= 1000000, n = 7*r + 7; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[110]= 159	In[111]:= N[k / x] Out[111]= 0.318
$x=1000$	
In[112]:= r = 0; k = 0; x = 1000; While[r <= 1000000, n = 7*r + 7; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[113]= 316	In[114]:= N[k / x] Out[114]= 0.316
$x=2000$	
In[115]:= r = 0; k = 0; x = 2000; While[r <= 1000000, n = 7*r + 7; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[116]= 631	In[117]:= N[k / x] Out[117]= 0.3155
$x=5000$	
In[118]:= r = 0; k = 0; x = 5000; While[r <= 1000000, n = 7*r + 7; If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++] k Out[119]= 1573	In[120]:= N[k / x] Out[120]= 0.3146

<table>
<tr><td colspan="2">$x=10000$</td></tr>
<tr><td>In[121]:= r = 0; k = 0; x = 10000;
While[r <= 1000000, n = 7*r + 7;
If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++]
k

Out[122]= 3160</td><td>In[123]:= N[k / x]

Out[123]= 0.316</td></tr>
<tr><td colspan="2">$x=150000$</td></tr>
<tr><td>In[124]:= r = 0; k = 0; x = 150000;
While[r <= 1000000, n = 7*r + 7;
If[EulerPhi[n] <= x, k = k + 1, l = k + 0]; r++]
k

Out[125]= 47463</td><td>In[126]:= N[k / x]

Out[126]= 0.31642</td></tr>
</table>

14 lentelė. Reiškinio b_k skaičiavimo algoritmai, kai $k=3$, $k=5$, $k=6$, $k=7$.

<table>
<tr><td></td><td>b_k</td></tr>
<tr><td>$k=3$</td><td>In[1]:= k = 3

Out[1]= 3

In[2]:= FactorInteger[k]

Out[2]= {{3, 1}}

In[3]:=
$N\left[\frac{1.943596}{k} \times \left(1 + \frac{1}{3\,(3-1)}\right)^{-1}\right]$

Out[3]= 0.555313</td></tr>
<tr><td>$k=5$</td><td>In[4]:= k = 5

Out[4]= 5

In[5]:= FactorInteger[k]

Out[5]= {{5, 1}}

In[6]:=
$N\left[\frac{1.943596}{k} \times \left(1 + \frac{1}{5\,(5-1)}\right)^{-1}\right]$

Out[6]= 0.370209</td></tr>
</table>

$k=6$	In[7]:= **k = 6** Out[7]= 6 In[8]:= **FactorInteger[k]** Out[8]= {{2, 1}, {3, 1}} In[9]:= $N\left[\frac{1.943596}{k} \times \left(1+\frac{1}{2\,(2-1)}\right)^{-1} \times \left(1+\frac{1}{3\,(3-1)}\right)^{-1}\right]$ Out[9]= 0.185104
$k=7$	In[10]:= **k = 7** Out[10]= 7 In[11]:= **FactorInteger[k]** Out[11]= {{7, 1}} In[12]:= $N\left[\frac{1.943596}{k} \times \left(1+\frac{1}{7\,(7-1)}\right)^{-1}\right]$ Out[12]= 0.271199

15 lentelė. Skaičiavimo algoritmai. Dėl kai kurių sistemos ypatumų raidė N, keičima į *K*.

N	$M(N)$	
1000	In[1]:= **K = 1000** Out[1]= 1000	In[2]:= **D_N = N[Sum[MoebiusMu[M], {M, K}]]** Out[2]= 2.
5000	In[3]:= **K = 5000** Out[3]= 5000	In[4]:= **D_N = N[Sum[MoebiusMu[M], {M, K}]]** Out[4]= 2.
10000	In[5]:= **K = 10000** Out[5]= 10000	In[6]:= **D_N = N[Sum[MoebiusMu[M], {M, K}]]** Out[6]= -23.
20000	In[7]:= **K = 20000** Out[7]= 20000	In[8]:= **D_N = N[Sum[MoebiusMu[M], {M, K}]]** Out[8]= 26.

100000	In[9]:= $K = 100000$ Out[9]= 100000	In[10]:= $D_N = N[Sum[MoebiusMu[M], \{M, K\}]]$ Out[10]= -48.
200000	In[13]:= $K = 200000$ Out[13]= 200000	In[14]:= $D_N = N[Sum[MoebiusMu[M], \{M, K\}]]$ Out[12]= -48.
300000	In[17]:= $K = 300000$ Out[17]= 300000	In[18]:= $D_N = N[Sum[MoebiusMu[M], \{M, K\}]]$ Out[18]= 220.
400000	In[19]:= $K = 400000$ Out[19]= 400000	In[20]:= $D_N = N[Sum[MoebiusMu[M], \{M, K\}]]$ Out[20]= 11.
500000	In[21]:= $K = 500000$ Out[21]= 500000	In[22]:= $D_N = N[Sum[MoebiusMu[M], \{M, K\}]]$ Out[22]= -6.
1000000	In[23]:= $K = 1000000$ Out[23]= 1000000	In[24]:= $D_N = N[Sum[MoebiusMu[M], \{M, K\}]]$ Out[24]= 212.