VILNIAUS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

Rasa Asanavičiūtė

GERBER-SHIU DISKONTUOTA BAUDOS FUNKCIJA ŽALOMS PASISKIRSČIUSIOMS PAGAL PARETO DĖSNĮ

Magistro darbas

VILNIUS 2006

Matematinės analizės katedra

Darbo vadovas **doc. J. Šiaulys** ____________________
(parašas)

Darbas apgintas *2006 m. birželio mėn. 1 d.* ______
Gynimo posėdžio protokolo Nr. ____________________

Registravimo Nr. _________________
2006-05-20 ______________________

TURINYS

ABSTRACT

The asymptotic of the Gerber-Shiu discounted penalty function in Poisson model with Pareto distributed claims is obtained. The asymptotic is obtained as initial surplus x tends to infinity. The main term of discounted penalty function $\psi(x,\delta)$ has different expression in case when interest rate $\delta \neq 0$ and when $\delta = 0$. The graphs of the Gerber-Shiu discounted penalty function in the case of Pareto claims are examined for various parameter choices.

SANTRAUKA

Darbe gauta Gerber-Shiu diskontuotos baudos funkcijos asimptotika, kai žalos pasiskirsčiusios pagal Pareto dėsnį ir pradinis kapitalas $x \to \infty$. Pagrindinė išraiška $\psi(x, \delta)$ išskaidyta į du atvejus, kai palūkanų norma $\delta \neq 0$ ir $\delta = 0$. Darbe pateikti grafikai rodo diskontuotos baudos funkcijos priklausomybę nuo įvairių Puasono modelio parametrų.

ĮVADAS. PAGRINDINIS REZULTATAS.

1957 metais Sparre Andersen [1] pasiūlė lygtį, kuri aprašo draudimo kompanijos turtą U(t) momentu t:

$$U(t) = x + ct - \sum_{n=1}^{N(t)} Y_n \qquad (1),$$

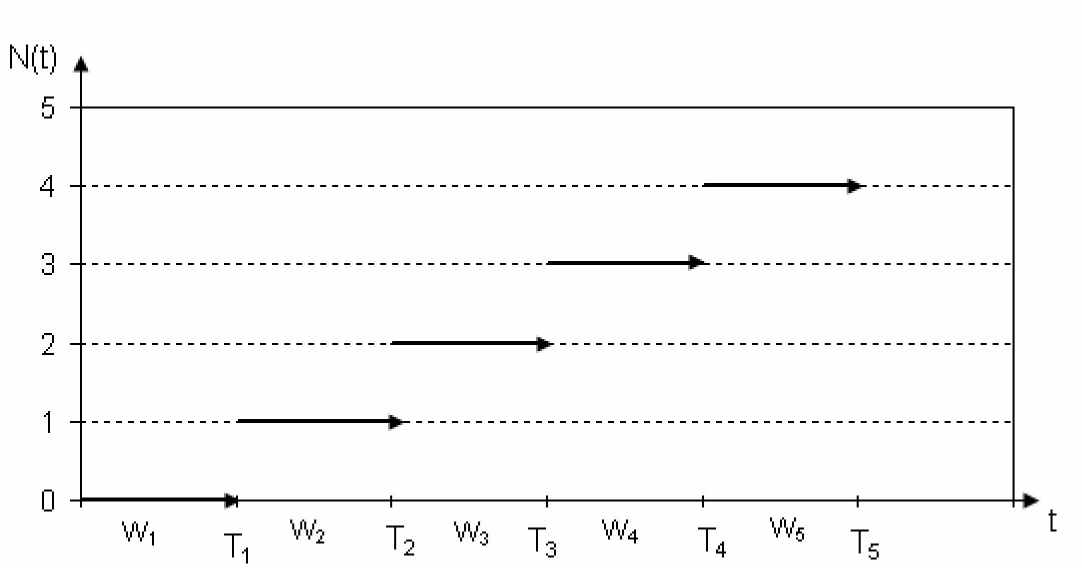
čia t - laikas, c – premijų surinkimo greitis, x – pradinis turtas, Y_1, Y_2, Y_3… - individualios žalos, N(t) – paraiškų skaičius intervale [0,t].

Laikoma, kad žalos Y_1, Y_2, Y_3,…yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę absoliučiai tolydūs neneigiami atsitiktiniai dydžiai. Paraiškų skaičius N(t) yra atstatymo procesas, t.y.

$$N(t) = \{n \geq 1 : T_n = W_1 + W_2 + ... + W_n \leq t\} \qquad (2),$$

čia W_1, W_2, W_3,…nepriklausomi vienodai pasiskirstę teigiami atsitiktiniai dydžiai.

Paraiškų skaičiaus N(t) grafikas:



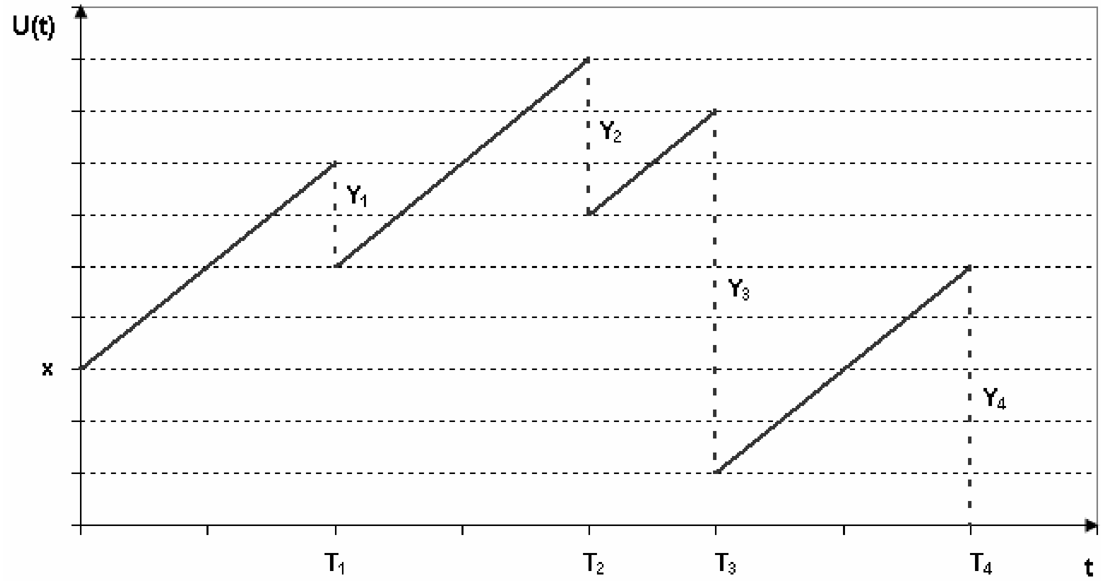
Be to Y_1, Y_2, Y_3,… yra nepriklausomi nuo W_1, W_2, W_3,…. Jeigu visi W_i turi eksponentinį skirstinį su parametru λ:

$$P(W < y) = \begin{cases} 0, \; jei \; y < 0, \\ 1 - e^{-\lambda y}, \; jei \; y \geq 0, \end{cases}$$

tai N(t) yra Puasono procesas. Šiuo atveju visas aprašytas modelis dažniausiai vadinamas klasikiniu arba Puasono.

Iš lygties (2) išplaukia, taip pat paraiškų skaičiaus N(t) grafike galime matyti, kad žalų atėjimo momentai yra T_1, T_2, T_3…, kur $T_n = W_1 + W_2 + … + W_n$.

Kompanijos turimo turto kitimą laiko atžvilgiu apibūdina tokia kreive:



Draudimo kompanija pradeda veiklą su tam tikru pradiniu kapitalu x. Tuomet kreivė tiesiškai auga su krypties koeficientu c iki laiko momento $T_1 = W_1$, kai atsitinka pirma žala. Kreivė nukrenta per dydį Y_1 (pirma žala). Intervale $[T_1,T_2]$ U(t) kreivė vėl didėja iki antros žalos atėjimo momento T_2, kur nukrenta dydžiu Y_2 ir t.t.

Sakykime, tam tikrą laiką U(t) yra teigiamas, o laiko momentu t = T procesas nukrenta žemiau nulio. Šis laikas T vadinamas kompanijos žlugimo laiku. Aišku, kad

$$T = \inf\{t \geq 0 : U(t) < 0\}.$$

Tuomet $P(T < \infty)$ yra kompanijos žlugimo tikimybė. Aišku, ši tikimybė priklauso nuo x, c, žalų pasiskirstymo, Puasono proceso N(t) parametro λ. Yra žinoma, kad ši tikimybė mažesnė už 1, kai

$$EY - cEW = EY - \frac{c}{\lambda} < 0.$$

Jei $EY - cEW \geq 0$, tai $P(T < \infty)=1$ kiekvienam fiksuotam pradiniam kapitalui x. Taigi premijų surinkimo greitis turi būti $c=\lambda\ EY(1+\theta)$, kur $\theta>0$ yra santykinė apsauginė draudimo priemoka.

1998 m Gerber ir Shiu [2] vietoj bankroto tikimybės pasiūlė nagrinėti dydį

$$E\left(e^{-\delta T} \mathrm{I}_{(T<\infty)}\right),$$

ir pavadino jį diskontuota baudos funkcija. Ši funkcija priklauso nuo x, c, δ (palūkanų normos), žalų pasiskirstymo Y, Puasono proceso parametro λ. Pažymėkime

$$\psi(x) = \psi(x,\delta) = E\left(e^{-\delta T} \mathrm{I}_{(T<\infty)}\right).$$

Jei į Gerber-Shiu diskontuotą baudos funkciją įstatytume δ = 0, gautume bankroto tikimybę

$$\psi(x,0) = E\left(\mathrm{I}_{(T<\infty)}\right) = P(T < \infty).$$

Sakykime, individualios žalos Y_1, Y_2, Y_3…Sparre Andersen modelyje turi absoliučiai tolydžią pasiskirstymo funkciją H(y). Tada

$$EY = \int_0^\infty \overline{H(y)}dy < \infty \qquad (3).$$

Sakykime, be to N(t) – Puasono procesas su parametru λ ir c=λ EY(1+θ), θ>0. Darbuose [2], [3] ir [4] parodyta, kad šiuo atveju Gerber-Shiu diskontuota baudos funkciją galime išreikšti begaline eilute:

$$\psi(x,\delta) = \sum_{n=1}^{\infty} (1-\phi)\phi^n \overline{F}^{*n}(x) \qquad (4),$$

čia: F(x) yra nauja pasiskirstymo funkcija apibrėžiama lygybe

$$\overline{F}(x) = \frac{\int_0^\infty e^{-\rho y}\overline{H}(y+x)dy}{\int_0^\infty e^{-\rho y}\overline{H}(y)dy} \qquad (5),$$

ϕ yra konstanta, kurią galima apskaičiuoti iš lygybės

$$\phi = \frac{\int_0^\infty e^{-\rho y}\overline{H}(y)dy}{(1+\theta)EY} \quad (6),$$

o ρ>0 yra Lunbergo lygties sprendinys

$$\lambda\int_0^\infty e^{-\rho y}dH(y) = \lambda + \delta - c\rho \qquad (7).$$

2001 m Willmot ir Lin [3] užrašė diskontuotos baudos funkcijos išraišką žaloms pasiskirsčiusioms pagal eksponentinį dėsnį su parametru μ. Šiuo atveju

$$\psi(x,\delta) = e^{-\mu x}\sum_{n=0}^{\infty}\phi^{n+1}\frac{(\mu x)^n}{n!} = \phi e^{-\mu x(1-\phi)},$$

kur:

$$\phi = \frac{\mu}{(1+\theta)(\mu+\rho)},$$

$$\rho = \frac{\lambda+\delta-c\mu+\sqrt{(\lambda+\delta+c\mu)^2-4\lambda c\mu}}{2c},$$

$$c = \frac{\lambda}{\mu}(1+\theta).$$

Darbe [8] užrašyta funkcijos $\psi(x,\delta)$ išraiška, kai žalos Y_1, Y_2, Y_3,…Puasono modelyje pasiskirsčiusios pagal Erlang(2, μ) skirstinį. Šiuo atveju tankio funkcija yra

$$h(y) = \begin{cases} 0, \; kai \; y < 0, \\ \mu^2 y e^{-\mu y}, \; kai \; y \geq 0. \end{cases}$$

Minėtame darbe parodyta, kad Gerber-Shiu diskontuota baudos funkcija

$$\psi(x,\delta) = e^{-\mu x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu x)^n}{n!} \phi^{[n/2]} B_n \; ,$$

kur:

$$B_n = \begin{cases} A^m (1-\phi) \sum_{k=1}^{m} (\phi A)^k \sum_{j=0}^{2k-1} \binom{m+k}{j} \left(\frac{1-A}{A} \right)^j + \phi^{m+1}, \; jei \; n = 2m, \\ A^m (1-\phi) \sum_{k=1}^{m+1} (\phi A)^k \sum_{j=0}^{2k-2} \binom{m+k}{j} \left(\frac{1-A}{A} \right)^j + \phi^{m+2}, \; jei \; n = 2m+1, \end{cases}$$

$$\phi = \frac{\lambda}{c} \frac{\rho + 2\mu}{(\rho+\mu)^2} = \frac{\mu}{2(1+\theta)} \frac{\rho+2\mu}{(\rho+\mu)^2},$$

$$A = \frac{\rho+\mu}{\rho+2\mu}$$

ir

$$\rho = \frac{1}{6c} \sqrt[3]{D + 12\mu c\sqrt{E}} + \frac{2\left((\lambda+\delta)(\lambda+\delta+2\mu c) + \mu^2 c^2\right)}{3c\sqrt[3]{D+12\mu c\sqrt{E}}} + \frac{\lambda+\delta-2\mu c}{3c}$$

su

$$D = 4\left(3\mu c\lambda(2\lambda + 4\delta - 7\mu c) + 6\mu c\delta(\delta + \mu c) + 2\mu^3 c^3 + 2(\lambda+\delta)^3\right),$$

$$E = -3\lambda\left(12\lambda\delta(\lambda+\delta) + 12\mu c(\lambda+\delta)^2 + 3\mu^2 c^2 (4\delta - 5\lambda) + 4\mu^3 c^3 + 4(\delta^3 + \lambda^3)\right),$$

$$c = \frac{2\lambda}{\mu}(1+\theta).$$

Pareto, Lognormalus, Veibulo(su parametru 0<τ<1) ir panašūs skirstiniai dažnai vadinami skirstiniai turinčiais sunkias uodegas. Tokiems skirstiniams $\psi(x,\delta)$ elgesys nėra tirtas. Tačiau atskiram atvejui $\psi(x) = \psi(x,0)$ yra nemažai gautų rezultatų. Pateikiame vieną iš stipriausių. Tai Embrechts ir Veraverbeke 1982 metais įrodyta teorema (žr. [6] arba [7]).

1. Teorema. Sakykime, turime Puasono modelį su θ>0. Tuomet sekantys teiginiai yra ekvivalentūs:

(a) $H_I \in S$,

(b) $1-\psi(x) \in S$,

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\psi(x)}{\overline{H_I}(x)} = \theta^{-1}$.

Čia $\psi(x) = \psi(x,0)$ – žlugimo tikimybė,

$$H_I(u) = \frac{1}{EY}\int_0^u \overline{H}(y)dy\,,\ \overline{H}(u) = 1 - H(u),\ u \ge 0\,,$$

o simbolis S žymi subeksponentinių skirstinių klasę.

Apibrėžimas. Pasiskirstymo funkcija H intervale (0, ∞) yra subeksponentinė, jei teisinga lygybė

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{H^{*2}}(x)}{\overline{H}(x)} = 2\,.$$

Visų tokių skirstinių klasė žymima S.

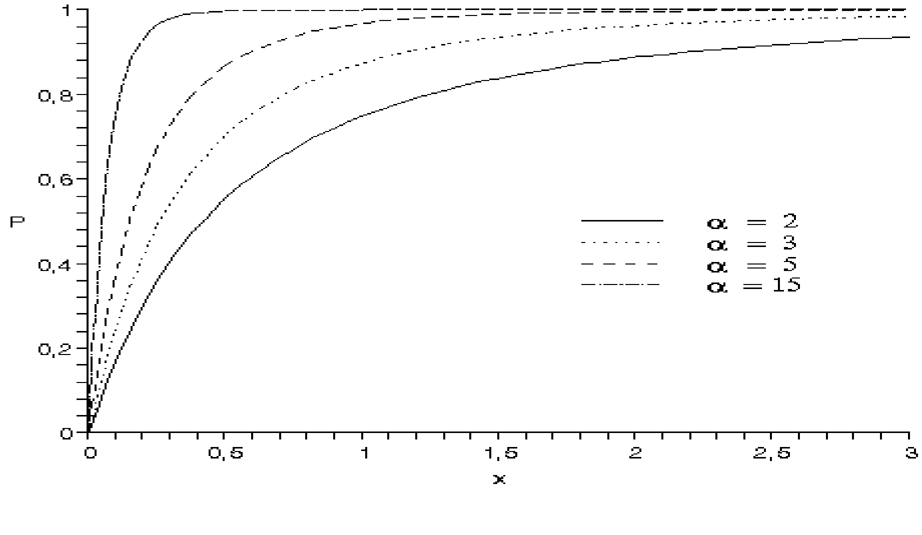
Galima nesunkiai patikrinti, kad Pareto, lognormalus ir Veibulo (su parametru 0<τ<1) skirstiniai priklauso klasei S, t.y. subeksponentiniai.

Šio darbo tikslas gauti Gerber-Shiu diskontuotos baudos funkcijos asimptotiką, kai žalos pasiskirsčiusios pagal Pareto dėsnį. Nagrinėjamu atveju pasiskirstymo funkcija yra

$$H(y) = 1 - \left(\frac{1}{1+y}\right)^{\alpha},\ \ y \ge 0,$$

o Pareto parametras $\alpha > 1$.

Pareto pasiskirstymo funkcijos grafikas atrodo taip:



2. Teorema. Sakykime, Puasono modelyje santykinė apsauginė draudimo priemoka θ>0, žalos Y_1, Y_2, Y_3,… pasiskirsčiusios pagal Pareto skirstinį su parametru $\alpha > 1$. Tada Gerber – Shiu diskontuota baudos funkcija:

$$\psi(x,\delta) \sim \begin{cases} \dfrac{\lambda}{\delta} \dfrac{1}{(1+x)^{\alpha}}, & jei\ \delta > 0, \\ \dfrac{1}{\theta} \dfrac{1}{(1+x)^{\alpha-1}}, & jei \delta = 0, \end{cases} \tag{8}$$

kai $x \to \infty$.

Nesunku pastebėti, kad esant δ=0 mūsų tvirtinimas sutampa su 1. Teorema (c) dalimi. O atveju kai δ>0, $\psi(x,\delta)$ pagrindinis narys visa eile greičiau artėja į 0 lyginant su $\psi(x,0)$ pagrindiniu nariu.

2. TEOREMOS ĮRODYMAS.

Iš (3) gauname:

$$h = EY = \int_0^\infty \frac{1}{(1+y)^\alpha} dy = \left. \frac{(y+1)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right|_0^\infty = \frac{1}{\alpha-1}.$$

Pradžioje tiriame $\overline{F}(x)$ aprėžtą (5) lygybe elgesį. Suintegravę dalimis skaitiklyje esantį integralą, gauname:

$$\int_0^\infty e^{-\rho y} \frac{1}{(1+x+y)^\alpha} dy = \int_0^\infty \frac{1}{(1+x+y)^\alpha} d\left(\frac{e^{-\rho y}}{-\rho}\right) = \left. \frac{-e^{-\rho y}}{\rho(1+x+y)^\alpha} \right|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{-\rho y}}{\rho} \left((1+x+y)^{-\alpha}\right)' dy =$$

$$= \frac{1}{\rho(1+x)^\alpha} - \frac{\alpha}{\rho} \int_0^\infty \frac{e^{-\rho y}}{(1+x+y)^{\alpha+1}} dy = \frac{1}{\rho(1+x)^\alpha} \left(1 - \alpha(1+x)^\alpha \int_0^\infty \frac{e^{-\rho y}}{(1+x+y)^{\alpha+1}} dy\right).$$

Analogiškai pertvarkome (5) lygybės vardiklį

$$\int_0^\infty e^{-\rho y} \frac{1}{(1+y)^\alpha} dy = \int_0^\infty \frac{1}{(1+y)^\alpha} d\left(\frac{e^{-\rho y}}{-\rho}\right) = \left. \frac{e^{-\rho y}}{-\rho(1+y)^\alpha} \right|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{\rho} e^{-\rho y} d\left(\frac{1}{(1+y)^\alpha}\right) =$$

$$= \frac{1}{\rho}\left(1 - \alpha \int_0^\infty e^{-\rho y} \frac{1}{(1+y)^{\alpha+1}} dy\right).$$

Vadinasi,

$$\overline{F}(x) = \frac{1}{(1+x)^\alpha} \left(\frac{1 - \alpha(1+x)^\alpha \int_0^\infty \frac{e^{-\rho y}}{(1+x+y)^{\alpha+1}} dy}{1 - \alpha \int_0^\infty \frac{e^{-\rho y}}{(1+y)^{\alpha+1}} dy} \right).$$

Skliausteliuose esantį reiškinį pažymėkime L(x).

- Kiekvienam $x \geq 0$, funkcija L(x) aprėžta.
- L(x)>0, kai $x \geq 0$.
- L(0)=1.

Be to

$$L(\infty) = \frac{1}{1 - \alpha \int_0^\infty \frac{e^{-\rho y}}{(1+y)^{\alpha+1}} dy} = \frac{1}{\rho \int_0^\infty e^{-\rho y} \overline{H}(y) dy} = \frac{1}{\rho \int_0^\infty \overline{H}(y) d\left(\frac{e^{-\rho y}}{-\rho}\right)} =$$

$$=\frac{1}{\rho\left(\frac{e^{-\rho y}}{-\rho}\overline{H}(y)\Big|_0^{\infty}+\frac{1}{\rho}\int_0^{\infty}e^{-\rho y}d\overline{H}(y)\right)}=\frac{1}{1-\int_0^{\infty}e^{-\rho y}dH(y)}=\frac{1}{1-\frac{\lambda+\delta-c\rho}{\lambda}}=\frac{\lambda}{c\rho-\delta}.$$

Iš Lunbergo (7) lygties

$$c\rho-\delta=\lambda\left(1-\int_0^{\infty}e^{-\rho y}dH(y)\right), \text{ todėl}$$

$$c\rho-\delta>0.$$

Vadinasi,

$$\overline{F}(x)=\frac{\lambda}{c\rho-\delta}\frac{1}{(1+x)^{\alpha}}\left(1-\alpha(1+x)^{\alpha}\int_0^{\infty}\frac{e^{-\rho y}}{(1+x+y)^{\alpha+1}}dy\right).$$

Aišku, kad visiems $x\geq 0$

$$0\leq\alpha(1+x)^{\alpha}\int_0^{\infty}\frac{e^{-\rho y}}{(1+x+y)^{\alpha+1}}dy\leq\alpha\frac{(1+x)^{\alpha}}{(1+x)^{\alpha+1}}\int_0^{\infty}e^{-\rho y}dy=\frac{\alpha}{\rho(1+x)}.$$

Taigi,

$$\overline{F}(x)=\frac{\lambda}{c\rho-\delta}\frac{1}{(1+x)^{\alpha}}\left(1-\frac{\alpha\,\Delta(x)}{\rho(1+x)}\right)$$

visiems $x\geq 0$, čia $0\leq\Delta(x)\leq 1$. Kadangi bet kuriam t>0 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\overline{F}(tx)}{\overline{F}(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1+x)^{\alpha}}{(1+tx)^{\alpha}}=t^{-\alpha}$, tai $\overline{F}\in R_{-\alpha}$.reguliariai kintančių funkcijų klasei. Vadinasi, mūsų tiriama funkcija priklauso subeksponentinių funkcijų klasei, t.y. $\overline{F}\in S$, nes $R_{-\alpha}\subset S$. Remiantis subeksponentinės funkcijos savybe (žr. [6] 39p), mūsų funkcija tenkina lygybę :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\overline{F}^{*n}(x)}{\overline{F}(x)}=n.$$

Antra vertus, $\forall\varepsilon>0$ $\exists$ konstanta $K(\varepsilon)$ tokia, kad $\overline{F}^{*n}(x)\leq K(\varepsilon)\overline{F}(x)(1+\varepsilon)^{n}$ $\forall x\geq 0$ (žr. [6] 41p).

Kadangi

$$\phi=\frac{\int_0^{\infty}e^{-\rho y}\overline{H}(y)dy}{(1+\theta)h}<\frac{\int_0^{\infty}\overline{H}(y)dy}{(1+\theta)h}=\frac{1}{1+\theta}<1, \ \theta>0,$$

tai visiems x, tenkinama tokia nelygybė $\dfrac{\phi^n \overline{F}^{*n}(x)}{\overline{F}(x)} \le K(\varepsilon)(\phi(1+\varepsilon))^n$, kiekvienai laisvai parinktai konstantai ε.

Vadinasi, eilutė

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\phi)\phi^n \frac{\overline{F}^{*n}(x)}{\overline{F}(x)}$$

konverguoja tolygiai visiems $x \ge 0$, nes galima parinkti ε taip, kad $\phi(1+\varepsilon) < 1$.

Pasinaudoję (4) lygybe gauname

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\psi(x,\delta)}{\overline{F}(x)} = \lim_{x\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(1-\phi)\phi^n \frac{\overline{F}^{*n}(x)}{\overline{F}(x)} = \sum_{n=1}^{\infty}(1-\phi)\phi^n \lim_{x\to\infty}\frac{\overline{F}^{*n}(x)}{\overline{F}(x)} = \sum_{n=1}^{\infty}(1-\phi)\phi^n n =$$

$$= (1-\phi)\phi\sum_{n=1}^{\infty} n\phi^{n-1} = (1-\phi)\phi\frac{1}{(1-\phi)^2} = \frac{\phi}{1-\phi},$$

nes $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\phi^{n-1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} ny^{n-1} = \varphi(y)$, $\int\limits_0^u \sum\limits_{n=1}^{\infty} ny^{n-1}dy = \int\limits_0^u \varphi(y)dy$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left.\dfrac{ny^n}{n}\right|_0^u = \int\limits_0^u \varphi(y)dy$,

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u^n = \int\limits_0^u \varphi(y)dy$, $\dfrac{u}{1-u} = \int\limits_0^u \varphi(y)dy$, $\dfrac{1}{(1-u)^2} = \varphi(u)$, taigi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\phi^{n-1} = \dfrac{1}{(1-\phi)^2}$, bet kokiam $0 < \phi < 1$.

Tuo tarpu

$$\phi = \frac{\int\limits_0^{\infty} e^{-\rho y}\overline{H}(y)dy}{(1+\theta)h} = \frac{1}{(1+\theta)h}\int\limits_0^{\infty}\overline{H}(y)d\left(\frac{e^{-\rho y}}{-\rho}\right) = \frac{1}{(1+\theta)h}\left(-\left.\frac{e^{-\rho y}}{\rho}\overline{H}(y)\right|_0^{\infty} + \frac{1}{\rho}\int\limits_0^{\infty} e^{-\rho y}d\overline{H}(y)\right) =$$

$$= \frac{1}{(1+\theta)h}\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho}\int\limits_0^{\infty} e^{-\rho y}d(1-H(y))\right) = \frac{1}{\rho(1+\theta)h}\left(1 - \int\limits_0^{\infty} e^{-\rho y}dH(y)\right) = \frac{1}{\rho(1+\theta)h}\left(1 - \frac{\lambda+\delta-c\rho}{\lambda}\right) =$$

$$= \frac{1}{\rho(1+\theta)h}\frac{\lambda-\lambda-\delta+c\rho}{\lambda} = \frac{c\rho-\delta}{\lambda\rho h(1+\theta)} = \frac{c\rho-\delta}{c\rho}.$$

Vadinasi,

$$\frac{\phi}{1-\phi} = \frac{\dfrac{c\rho-\delta}{c\rho}}{1-\dfrac{c\rho-\delta}{c\rho}} = \frac{c\rho-\delta}{\delta}.$$

Todėl dideliems x

$$\psi(x,\delta) \sim \frac{\phi}{1-\phi}\overline{F}(x) = \frac{c\rho-\delta}{\delta}\overline{F}(x) = \frac{c\rho-\delta}{\delta}\frac{\lambda}{c\rho-\delta}\frac{1}{(1+x)^{\alpha}}.$$

Gavome $\psi(x,\delta) \sim \frac{\lambda}{\delta}\frac{1}{(1+x)^{\alpha}}$, kai $x \to \infty,\ \delta > 0$.

Kai δ=0 iš Lundbergo lygties turime rasti ρ=ρ(0). Lunbergo lygtis šiuo atveju tokia :

$$\lambda\int_0^{\infty} dH(y) = \lambda + 0 - c\rho,$$

Iš jos gauname ρ(0)=0.

Tada iš (5) lygybės

$$\overline{F}(x) = \frac{\int_0^{\infty}\overline{H}(x+y)dy}{\int_0^{\infty}\overline{H}(y)dy} = \frac{\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+x+y)^{\alpha}}dy}{\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+y)^{\alpha}}dy} = (\alpha-1)\frac{(1+x+y)^{\alpha+1}}{-\alpha+1}\Bigg|_0^{\infty} =$$

$$= (\alpha-1)\frac{1}{(\alpha-1)}\frac{1}{(x+1)^{\alpha-1}} = \frac{1}{(x+1)^{\alpha-1}}.$$

Pasiskirstymo funkcija $\overline{F}(x)$ tenkina tuos pačius reikalavimus kaip ir δ>0 atveju. Vadinasi kaip ir δ>0 atveju gaunam

$$\psi(x,0) \sim \frac{\phi}{1-\phi}\overline{F}(x).$$

Kai δ=0 iš (6) lygties išplaukia, kad:

$$\phi = \frac{1}{1+\theta}.$$

Todėl

$$\frac{\phi}{1-\phi} = \frac{\frac{1}{1+\theta}}{1-\frac{1}{1+\theta}} = \frac{1}{1+\theta}\frac{1+\theta}{\theta} = \frac{1}{\theta}.$$

Vadinasi kai δ=0 Gerber-Shiu diskontuotos baudos funkcijos asimptotika tokia:

$$\psi(x,0) \sim \frac{1}{\theta}\frac{1}{(x+1)^{\alpha-1}}.$$

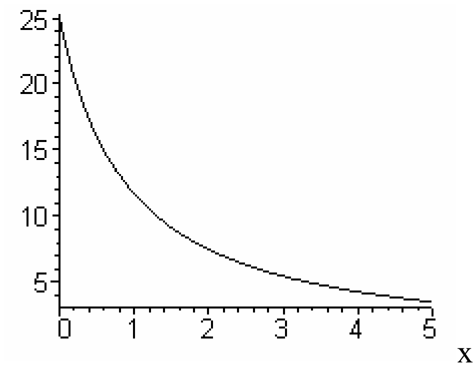
Taigi Gerber-Shiu diskontuotos baudos funkcija žaloms pasiskirsčiusioms pagal Pareto dėsnį tenkina sąryšį:

$$\psi(x,\delta) \sim \begin{cases} \frac{\lambda}{\delta}\frac{1}{(1+x)^{\alpha}}, & jei\ \delta > 0, \\ \frac{1}{\theta}\frac{1}{(1+x)^{\alpha-1}}, & jei \delta = 0. \end{cases}$$

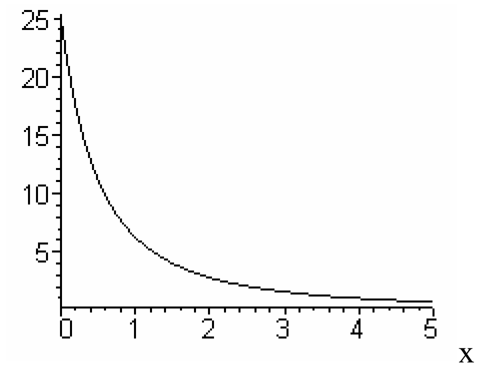
GERBER-SHIU DISKONTUOTOS BAUDOS FUNKCIJOS GRAFIKAI

Šiame skyriuje pateikiami grafikai, kurie parodo diskontuotos baudos funkcijos (8) priklausomybę nuo įvairių parametrų.

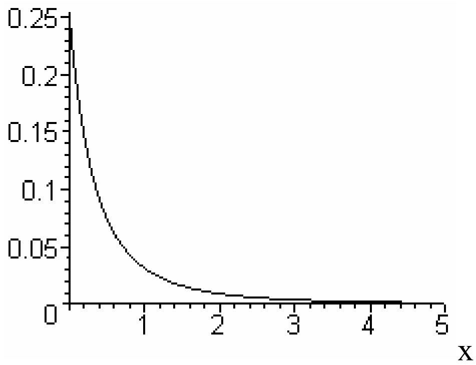
$\psi(x,\delta)$ δ=0.04, λ=1, α=1.1



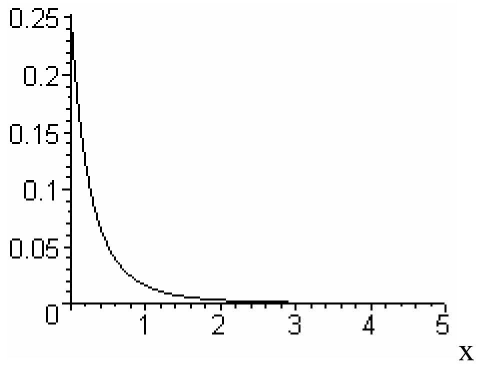
$\psi(x,\delta)$ δ=0.04, λ=1, α=2



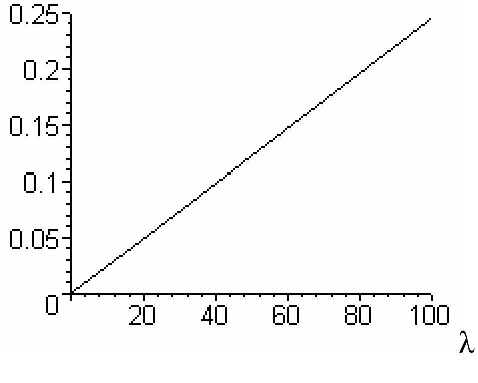
$\psi(x,\delta)$ δ=0.04, λ=0.01, α=3

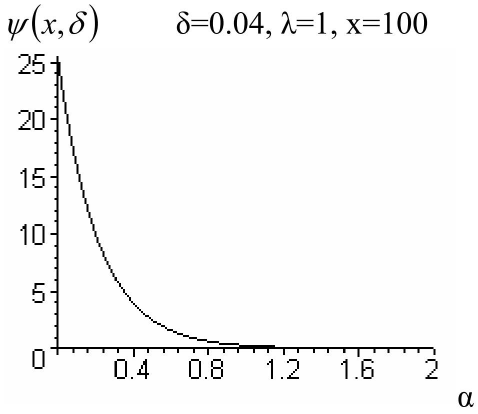


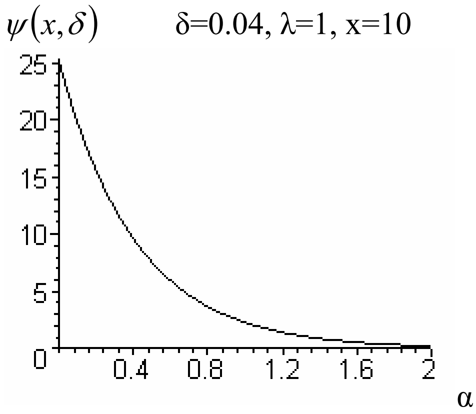
$\psi(x,\delta)$ δ=0.04, λ=0.01, α=4

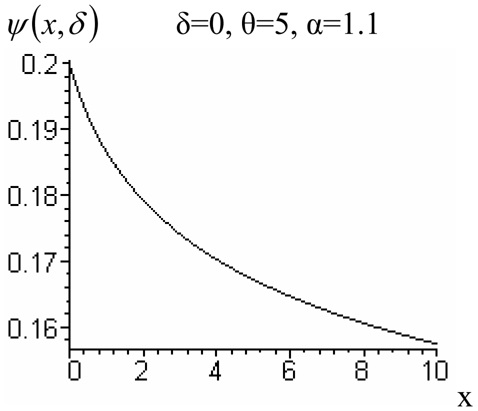


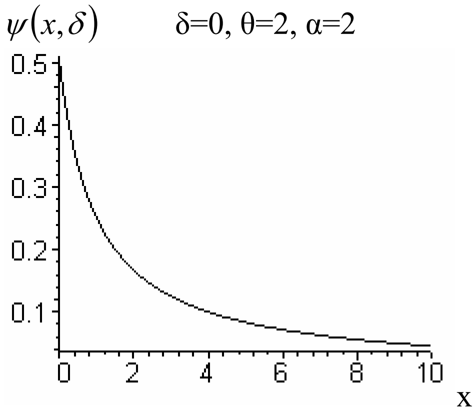
$\psi(x,\delta)$ δ=0.04, x=100, α=2

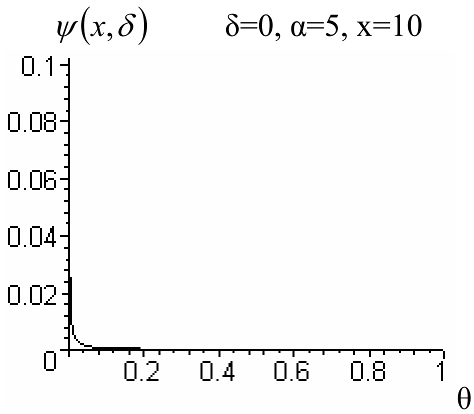


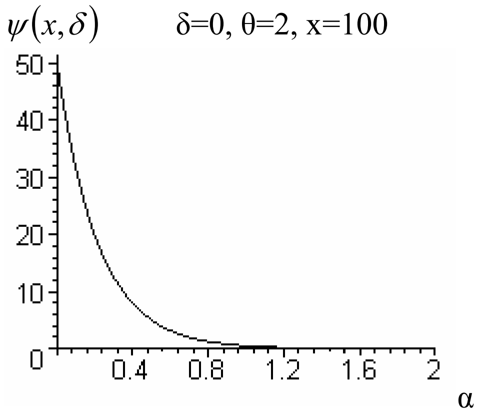

ψ(x,δ) δ=0.04, λ=1, x=100
25
20
15
10
5
0
0.4 0.8 1.2 1.6 2
α

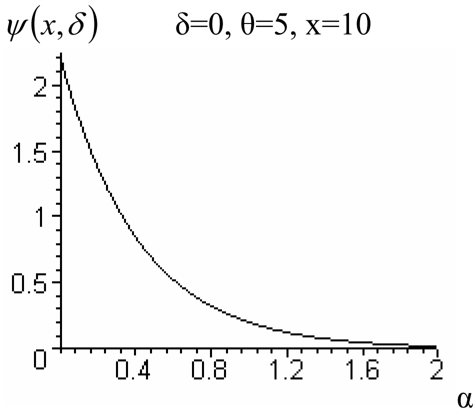

ψ(x,δ) δ=0.04, λ=1, x=10
25
20
15
10
5
0
0.4 0.8 1.2 1.6 2
α


ψ(x,δ) δ=0, θ=5, α=1.1
0.2
0.19
0.18
0.17
0.16
0 2 4 6 8 10
x

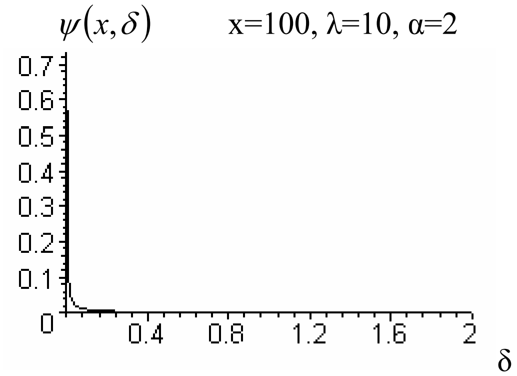

ψ(x,δ) δ=0, θ=2, α=2
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0 2 4 6 8 10
x


ψ(x,δ) δ=0, α=5, x=10
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
0.2 0.4 0.6 0.8 1
θ


ψ(x,δ) δ=0, θ=2, x=100
50
40
30
20
10
0
0.4 0.8 1.2 1.6 2
α


ψ(x,δ) δ=0, θ=5, x=10
2
1.5
1
0.5
0
0.4 0.8 1.2 1.6 2
α

Paskutinis grafikas rodo diskontuotos baudos funkcijos priklausomybę nuo palūkanų normos δ.



IŠVADOS

Remiantis darbe gauta Gerber-Shiu diskontuotos baudos funkcijos asimptotika

$$\psi(x,\delta) \sim \begin{cases} \dfrac{\lambda}{\delta} \dfrac{1}{(1+x)^{\alpha}}, & jei\ \delta > 0, \\ \dfrac{1}{\theta} \dfrac{1}{(1+x)^{\alpha-1}}, & jei \delta = 0, \end{cases}$$

kai žalos pasiskirsčiusios pagal Pareto dėsnį

$$H(x) = 1 - \left(\frac{1}{1+x} \right)^{\alpha}, \; x \geq 0,$$

su parametru $\alpha > 1$, galima daryti prielaidą, kad bendresniu atveju, kai žalų pasiskirstymo funkcija $H \in D$, vidurkis $h = EY$ yra baigtinis ir santykinė apsauginė draudimo priemoka θ>0, Gerber-Shiu diskontuotos baudos funkcijos asimptotika, kai $x \to \infty$ yra:

$$\psi(x,\delta) \sim \begin{cases} \dfrac{\lambda}{\delta} \overline{H}(x), & jei\ \delta > 0, \\ \dfrac{1}{\theta h} \displaystyle\int_x^{\infty} \overline{H}(y) dy, & jei \delta = 0. \end{cases}$$

D žymi skirstinių klasę intervale (0, ∞), kurie tenkina nelygybę: $\limsup_{x \to \infty} \overline{H}(x/2)/\overline{H}(x) < \infty$.

LITERATŪROS SĄRAŠAS:

[1] E. S. Anderson, On the collective theory at risk in the case of contagion between the claims, Transaction XVth international congress of Actuaries, II, New York, 219-229 (1957).

[2] H. Gerber, E. S. W. Shiu, On the time value of ruin, North American Actuarial journal, 2(1), 48-78 (1998).

[3] G. E. Willmot, X. S. Lin, Lundberg approximations for compound distributions with insurance applications, New York, Springer-Verlag (2001).

[4] G. E. Willmot, D. C. M. Dickson, The Gerber-Shiu discounted penalty function in the stacionary renewal risk model, Insurance: Mathematics and Economics, 32, 403-411 (2003).

[5] S. Drekic, G. E. Willmot, On the density and moments of the time of ruin with exponential claims, ASTIN Bulletin, 33(1), 11-21 (2003).

[6] P. Embrechts, C. Klūppelberg, Th. Mikosch, Applications of mathematics stochastic modeling and applied probability, Berlin, Springer-Velag (1997).

[7] P. Embrechts, N. Veraverbeke. Estimates for the probability of ruin with special emphases on the possibility of large claims. Insurance: Mathematics and Economics 1.(1) 55-72p

[8] Rita Bortnik and J. Šiaulys, The Gerber-Shiu discounted penalty function for Erlang distributed claims, ProcFPM, 2005, 8, 126-142.