VILNIAUS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

Giedrė Grušienė

GERBER-SHIU BAUDOS FUNKCIJA VEIBULO ŽALOMS

Magistro darbas

VILNIUS 2006

Matematinės analizės katedra

Darbo vadovas **doc. J. Šiaulys** ________________________
(parašas)

Darbas apgintas ________*2006 m. birželio mėn. 1 d.*________
Gynimo posėdžio protokolo Nr. ________________________

Registravimo Nr. ________________
2006-05-20________________________

Turinys.

SUMMARY

In this work the main member of the Gerber-Shiu discounted penalty function in a classic collective risk model with Weibull distribution (parameters $\eta = const$, $0 < \eta < 1$ and $\sigma = 1$) is calculated. The expression of the main member is obtained by making use of properties of subexponential distribution functions. In the graphs a dependence of the main member of the Gerber-Shiu discounted penalty function on various parameters of classic collective risk model is represented.

REZIUMĖ

Darbe apskaičiuotas Gerber-Shiu diskontuotos baudos funkcijos pagrindinis narys klasikiniame kolektyvinės rizikos modelyje, kai draudimo kompanijos žalos pasiskirsčiusios pagal Veibulo skirstinį su parametrais $\eta = const$, $0 < \eta < 1$ ir $\sigma = 1$, o pradinis kompanijos turtas $x \to \infty$. Minėtojo nario asimptotika gauta pasinaudojus subeksponentinių pasiskirstymo funkcijų savybėmis. Darbe pateiktuose grafikuose pavaizduota diskontuotos baudos funkcijos pagrindinio nario priklausomybė nuo įvairių klasikinio kolektyvinės rizikos modelio parametrų.

1. Įvadas.

Tarkime, kad yra nagrinėjamas draudimo kompanijos stabilumas laikotarpiu $t \in [0, \infty)$. Paraiškų išmokėti žalas atėjimo laiko momentus žymėsime $T_1, T_2, ...$, o atėjusių paraiškų žalų dydžius – atitinkamai $Y_1, Y_2, ...$, t.y. laiko momentu T_1 atėjusios paraiškos žalos dydis Y_1, laiko momentu T_2 atėjusios paraiškos žalos dydis T_2 ir t.t.

Tegul $N(t)$ - paraiškų skaičius intervale [0,t]. Laikysime, kad $N(t) \sim P(\lambda t)$, $\lambda > 0$. Aišku, kad

$$Y(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} Y_n$$

yra bendras laikotarpiu [0,t] išmokėtų žalų dydis. Laikysime, kad $Y_1, Y_2, Y_3, ...$ - nepriklausomi vienodai pasiskirstę neneigiami absoliučiai tolydūs atsitiktiniai dydžiai (žalos), be to $Y_1, Y_2, Y_3, ...$ ir $N(t)$ yra tarpusavy nepriklausomi. Sakysime, kad W_i yra laiko intervalas tarp žalos Y_{i-1} atėjimo laiko momento T_{i-1} ir žalos Y_i atėjimo laiko momento T_i. Gerai žinoma (žr. [6]), kad $W_1, W_2, W_3, ...$ - nepriklausomi vienodai pasiskirstę teigiami atsitiktiniai dydžiai, pasiskirstę pagal eksponentinį skirstinį su parametru λ, t.y.

$$P(W < w) = \begin{cases} 0, w < 0, \\ 1 - e^{-\lambda w}, w \geq 0, \end{cases}$$

be to

$$N(t) = \{n \geq 1 : T_n = W_1 + W_2 + ... + W_n \leq t\}.$$

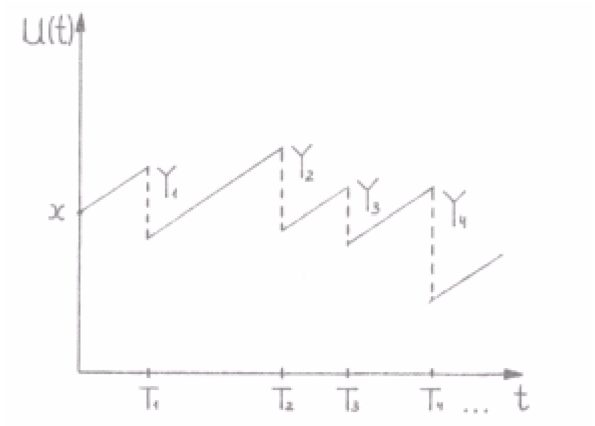
Aprašytasis draudimo kompanijos veiklos kolektyvinės rizikos modelis vadinamas *klasikiniu* arba *Puasono*, arba *Lundbergo modeliu*.

Kai pateiktos aukščiau aprašytos sąlygos, dydis

$$U(t) = x + ct - Y(t)$$

yra draudimo kompanijos valdomas turtas laiko momentu t. Čia:
$U(0) = x$ - pradinis kompanijos turtas (pradinis kapitalas),
c – premijų, gaunamų už pasirašytus draudimo polisus, surinkimo greitis, t.y. per laikotarpį Δt įplaukia $c\Delta t$ suma.

Šį draudimo kompanijos gyvavimo ciklą galima pavaizduoti ir grafiškai:



1 pav. draudimo kompanijos valdomas turtas

Jei laiko momentu t valdomas turtas $U(t) \geq 0$, tai kompanija gyvuoja, jei $U(t) < 0$, tai laiko momentu t jos išlaidos yra didesnės nei pajamos, kompanija yra priversta bankrutuoti. Žlugimo ar bankroto laiko momentu vadinamas laiko momentas T, kai kompanijos valdomas turtas U(t) pirmą kartą tampa neigiamas, todėl:

$$T = \inf\{t \geq 0 : U(t) < 0\},$$

be to, jeigu $U(t) > 0, \forall t \in [0, \infty)$, tai sutarta laikyti, kad $T = \infty$.

Kompanijos bankroto (žlugimo) tikimybė yra $P(T < \infty)$. Ji priklauso nuo: pradinio kompanijos turto *x*, premijų įplaukų greičio c, žalų $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ pasiskirstymo, paraiškų skaičiaus N(t) pasiskirstymo (t.y. parametro λ). Dažnai labiausiai bankroto tikimybę įtakoja kompanijos pradinis turtas *x*.

Gerai žinoma (žr. [6]), kad jei $EY - cEW \geq 0$, tai $P(T < \infty) = 1$ prie bet kokio pradinio kapitalo *x*, o

$$(P(T < \infty) < 1) \Leftrightarrow (EY - cEW = EY - \frac{c}{\lambda} < 0).$$

Kadangi tam, kad būtų $P(T < \infty) < 1$, būtina sąlyga yra $c > \lambda EY$, norėdama išsilaikyti draudimo kompanija vietoj grynosios (NET'o) premijos už draudimo paslaugas turi imti papildomą apsidraudimo sumą, t.y. $c = (1 + \theta)\lambda EY$. Dydis $\theta > 0$ vadinimas apsaugine draudimo priemoka, garantuojančia bankroto tikimybę mažesnę nei vienetas.

1998 m. matematikai Gerber ir Shiu (žr. [1]) pasiūlė dydį

$$E(e^{-\delta T} 1_{(T < \infty)})$$

nagrinėti Puasono modelio kontekste. Čia $\delta = \ln(1 + i)$ - tolydžioji metinė palūkanų norma (*i* – metinė palūkanų norma), o *T* – draudimo kompanijos bankroto laiko momentas. Laikysime, kad $\delta > 0$.

Minėtasis dydis (funkcija) priklauso nuo pradinio kompanijos turto *x*, premijų įplaukų greičio *c*, tolydžiosios metinės palūkanų normos δ, žalų $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ pasiskirstymo, paraiškų skaičiaus *N(t)* pasiskirstymo (t.y. parametro λ). Pagrindiniais šios funkcijos kintamaisiais laikomi pradinis turtas *x* ir palūkanų norma δ. Todėl paprastai žymime

$$\psi(x,\delta) := E(e^{-\delta T} 1_{(T<\infty)}) .$$

Funkcija $\psi(x,\delta)$ dažnai vadinama *Gerber-Shiu diskontuota baudos funkcija*.

Akivaizdu, kad kai $\delta = 0$, tai

$$\psi(x,0) = E(1_{(T<\infty)}) = 1 \cdot P(T < \infty) + 0 \cdot P(T = \infty) = P(T < \infty) ,$$

t.y. diskontuota baudos funkcija yra lygi bankroto tikimybei.

2. Pagrindinis rezultatas.

Teorema. Tarkime, kad klasikiniame kolektyvinės rizikos modelyje žalos $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai, pasiskirstę pagal Veibulo skirstinį su parametrais $\eta = const$, $0 < \eta < 1$ ir $\sigma = 1$. Tuomet:

$$\psi(x,\delta) \sim \begin{cases} \dfrac{\lambda}{\delta} e^{-x^{\eta}}, \delta \neq 0, \\ \dfrac{1}{\theta\Gamma(\frac{1}{\eta})} x^{1-\eta} e^{-x^{\eta}}, \delta = 0, \end{cases}$$

kai $x \to \infty$.

3. Veibulo skirstinys.

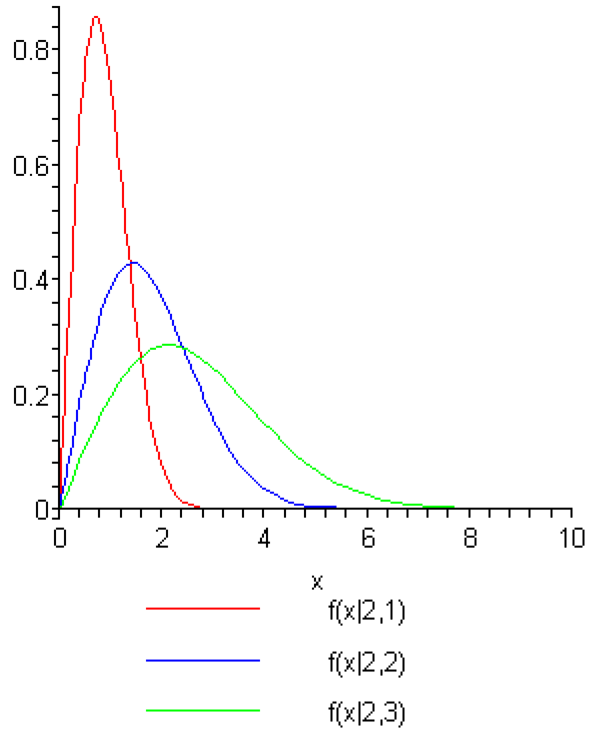
Veibulo skirstinys yra vienas iš tikimybinių skirstinių, kuriais dažnai aproksimuojami skirstiniai, pasitaikantys sprendžiant masinio aptarnavimo ar patikimumo teorijos uždavinius. Būtent patikimumo teorijoje dažnai taikomas Veibulo skirstinys.

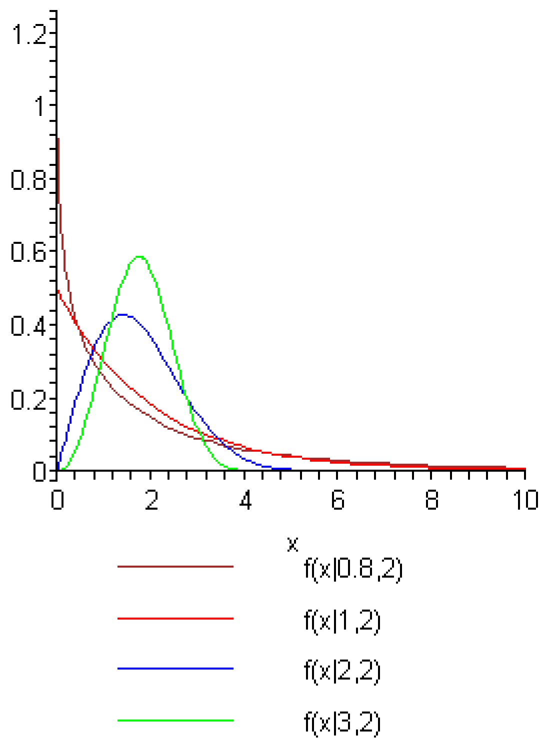
Atsitiktinio dydžio *X*, pasiskirsčiusio pagal Veibulo dėsnį, galimų reikšmių sritis yra $(0,+\infty)$, o tankis

$$f(x \mid \eta,\sigma) = \frac{\eta}{\sigma}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\eta-1} e^{-(x/\sigma)^{\eta}} ,$$

kai x>0.

Matome, kad tankis priklauso nuo dviejų parametrų $\eta > 0$ ir $\sigma > 0$. Kintant parametrams, tankis įgyja įvairias formas. 1 paveiksle pavaizduoti tankio grafikai su keliomis parametrų reikšmėmis.





2 pav. Veibulo skirstinio tankis

Matome, kad kintant parametrui σ, kreivių forma nekinta, kinta tik mastelis. O kintant parametrui η, kinta ir kreivių forma: kai $\eta \leq 1$, tankis monotoniškai mažėja, kai $\eta > 1$, tankis monotoniškai didėja iki

$$x = \sigma\left(\frac{\eta-1}{\eta}\right)^{\frac{1}{\eta}},$$

o toliau monotoniškai mažėja.

Atsitiktinio dydžio *X*, pasiskirsčiusio pagal Veibulo dėsnį, ir vidurkis, ir dispersija yra išreiškiami per Gama funkcijos reikšmes.

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = \frac{\eta}{\sigma}\int_{0}^{+\infty} x\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\eta-1} e^{-(\frac{x}{\sigma})^{\eta}}dx = \int_{0}^{+\infty} x e^{-(\frac{x}{\sigma})^{\eta}} d(\tfrac{x}{\sigma})^{\eta}$$

jei $(\frac{x}{\sigma})^{\eta} := y$, tai $x = \sigma y^{\frac{1}{\eta}}$, tada

$$= \sigma\int_{0}^{+\infty} y^{\frac{1}{\eta}} e^{-y}dy = \sigma\Gamma(1+\tfrac{1}{\eta}).$$

$$EX^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 dF(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \frac{\eta}{\sigma}\int_{0}^{+\infty} x^2\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\eta-1} e^{-(\frac{x}{\sigma})^{\eta}}dx = \int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-(\frac{x}{\sigma})^{\eta}} d(\tfrac{x}{\sigma})^{\eta}$$

jei $(\frac{x}{\sigma})^{\eta} := y$, tai $x = \sigma y^{\frac{1}{\eta}}$, $x^2 = \sigma^2 y^{\frac{2}{\eta}}$, tada

$$= \sigma^2\int_{0}^{+\infty} y^{\frac{2}{\eta}} e^{-y}dy = \sigma^2\Gamma(1+\tfrac{2}{\eta}).$$

Tuomet

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \sigma^2\Gamma(1+\tfrac{2}{\eta}) - (\sigma\Gamma(1+\tfrac{1}{\eta}))^2 = \sigma^2\left(\Gamma(1+\tfrac{2}{\eta}) - (\Gamma(1+\tfrac{1}{\eta}))^2\right).$$

4. Pagrindinės teoremos įrodymas.

Mūsų teoremos įrodymui iš esmės naudosime žemiau suformuluotas dvi teoremas.

Teorema 1. (žr. [1], [2], [4]) *Tarkim individualios žalos klasikiniame kolektyvinės rizikos modelyje turi absoliučiai tolydžią pasiskirstymo funkciją H(y). Tegu*

$$EY = \int_{0}^{\infty} \overline{H}(y)dy < \infty,$$

$N(t)$ *Puasono atsitiktinis procesas su parametru* λ *ir* $c = \lambda EY(1+\theta)$, *kur* $\theta > 0$.
Tada

$$\psi(x,\delta) = \phi\int_0^x \psi(x-y)dF(y) + \phi\overline{F}(x), \tag{1}$$

kur

$$\overline{F}(x) = \frac{\int_0^\infty e^{-\rho y}\overline{H}(y+x)dy}{\int_0^\infty e^{-\rho y}\overline{H}(y)dy}, \tag{2}$$

$$\phi = \frac{\int_0^\infty e^{-\rho y}\overline{H}(y)dy}{(1+\theta)EY} \tag{3}$$

ir ρ *yra neneigiamas Lundbergo lygties*

$$\lambda\int_0^\infty e^{-\rho y}dH(y) = \lambda + \delta - c\rho \tag{4}$$

sprendinys.

Teorema 2. (žr. [3], [4]) *Tarkim* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su pasiskirstymo funkcija* $F(x)$, *apibrėžta (2) lygybe. Tegu M yra diskretus geometrinis pasiskirstymas:*

$$P(M = n) = \phi^n(1-\phi), n = 0,1,2,\ldots,$$

kur ϕ *apibrėžtas (3) lygybe.*
Tada

$$\psi(x,\delta) = \sum_{n=1}^\infty (1-\phi)\phi^n \overline{F}^{*n}(x) \tag{5}$$

yra (1) lygties sprendinys.

Taigi, tarkime, kad klasikiniame kolektyvinės rizikos modelyje žalos $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, pasiskirstę pagal Veibulo dėsnį, t.y. turintys tankio funkciją

$$h(y) = \begin{cases} 0, y \le 0, \\ \frac{\eta}{\sigma}\left(\frac{y}{\sigma}\right)^{\eta-1} e^{-(y/\sigma)^\eta}, y > 0 \end{cases}.$$

Nagrinėsim atvejį, kai η - konstanta, o $\sigma = 1$. Tuomet žalų tankio funkcija bus tokia:

$$h(y) = \begin{cases} 0, \; y \le 0, \\ \eta y^{\eta-1} e^{-y^{\eta}}, \; y > 0 \end{cases}, \tag{6}$$

o pasiskirstymo funkcija:

$$H(y) = 1 - e^{-y^{\eta}}, \; y > 0. \tag{7}$$

Pastaroji lygybė gaunama taip:

$$\int dH(y) = \int h(y)dy = \int \eta y^{\eta-1} e^{-y^{\eta}} dy = \int e^{-y^{\eta}} dy^{\eta} \; ,$$

$$H(y) = -e^{-y^{\eta}} + c \; ,$$

$$H(+\infty) = 1 \;\Rightarrow\; \lim_{y \to +\infty} (c - e^{-y^{\eta}}) = 1 \;\Rightarrow\; c = 1 \, .$$

Tam, kad iš (5) išraiškos gautume diskontuotos baudos funkcijos $\psi(x,\delta)$ asimptotiką, turime rasti funkcijos $\overline{F}$ n-tąją sąsuką. Tuo tikslu pasinaudosime subeksponentinių pasiskirstymo funkcijų savybėmis.

Apibrėžimas (žr. [6]). *Pasiskirstymo funkcija F, turinti apibrėžimo sritį* $(0,\infty)$, *yra vadinama subeksponentine, jei visiems* $n \ge 2$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\overline{F^{n*}}(x)}{\overline{F}(x)} = n. \tag{8}$$

Subeksponentinių pasiskirstymo funkcijų klasė žymima raide S.

Teorema 3. (Klasės S charakteristinė teorema) (žr. [7]) *Tarkime, kad F yra absoliučiai tolydi pasiskirstymo funkcija su tankiu f ir rizikos norma* $q(x) := (-\ln \overline{F}(x))' = \dfrac{f(x)}{\overline{F}(x)}$, *artėjančia į 0. Tada:*

a) $F \in S$ *tada ir tik tada, kai*

$$\lim_{x \to \infty} \int_0^x e^{yq(x)} f(y)dy = 1;$$

b) Jei funkcija $e^{xq(x)} f(x)$ *yra integruojama intervale* $[0,\infty)$, *tai* $F \in S$.

Pasinaudojant šia teorema nesunku įsitikinti, kad Veibulo pasiskirstymas su parametrais $0 < \eta < 1$ ir $\sigma > 0$ priklauso subeksponentinių pasiskirstymo funkcijų klasei S. Kadangi

$$Q(x) := \int_0^x q(y)dy = -\ln \overline{F}(x),$$

tai nagrinėjamu atveju gauname:

$$\overline{F}(x) = e^{-\sigma x^{\eta}}, x > 0,$$

$$f(x) = \sigma\eta x^{\eta-1} e^{-\sigma x^{\eta}},$$

$$Q(x) = \sigma x^{\eta} \text{ ir } q(x) = \sigma\eta x^{\eta-1}.$$

Nesunku pastebėti, kad kai x artėja į $+\infty$, tai $q(x)$ artėja į 0, nes $\eta < 1$. Be to funkcija

$$e^{xq(x)} f(x) = e^{\sigma(\eta-1)x^{\eta}} \sigma\eta x^{\eta-1}$$

yra integruojama intervale $(0,\infty)$ visiems $0 < \eta < 1$. Iš 3 teoremos išplaukia, kad $F \in S$.

Taigi, kai $0 < \eta < 1$, Veibulo skirstinys priklauso subeksponentinių pasiskirstymo funkcijų klasei S. Vadinasi, ieškodami funkcijos $\overline{F}$ n-tosios sąsukos galime pasinaudoti (8) lygybe ir dideliems x imti aproksimaciją:

$$\overline{F}^{*n}(x) \sim n\overline{F}(x). \tag{9}$$

Tuomet diskontuota baudos funkcija

$$\psi(x,\delta) = \sum_{n=1}^{\infty}(1-\phi)\phi^n \overline{F}^{*n}(x) \sim \overline{F}(x)\sum_{n=1}^{\infty}(1-\phi)\phi^n n = \overline{F}(x)(1-\phi)\sum_{n=1}^{\infty}\phi^n n \tag{10}$$

dideliems x.

Pasinaudodami (3) lygybe ir tuo, kad $\theta > 0$ gauname, kad

$$\phi = \frac{\int_0^{\infty} e^{-\rho y}\overline{H}(y)dy}{(1+\theta)EY} \le \frac{\int_0^{\infty}\overline{H}(y)dy}{(1+\theta)EY} = \frac{1}{1+\theta} < 1,$$

be to

$$\phi = \frac{\int_0^{\infty} e^{-\rho y}\overline{H}(y)dy}{(1+\theta)EY} \ge 0,$$

nes

$$EY > 0$$

ir

$$e^{-\rho y}\overline{H}(y) > 0 \;\Rightarrow\; \int_0^{\infty} e^{-\rho y}\overline{H}(y)dy > 0 .$$

Vadinasi, eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} n\phi^n$ konverguoja absoliučiai intervale (0;1) ir todėl visiems $\phi \in (0;1)$ turime

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\phi^n = \phi\sum_{n=1}^{\infty} n\phi^{n-1} = \phi\sum_{n=1}^{\infty}(\phi^n)' = \phi(\sum_{n=1}^{\infty}\phi^n)' = \phi\cdot(\frac{\phi}{1-\phi})' = \frac{\phi}{(1-\phi)^2} .$$

Taigi pratęsdami (10) išraišką, gauname, kad dideliems x diskontuota baudos funkcija

$$\psi(x,\delta) \sim \frac{\phi}{1-\phi}\cdot\overline{F}(x) . \tag{11}$$

Pasinaudoję (4) lygtimi gauname

$$I_2 := \int_0^{\infty} e^{-\rho y}\overline{H}(y)dy = \int_0^{\infty} e^{-\rho y}(1-H(y))dy = -\frac{1}{\rho}\int_0^{\infty}(1-H(y))de^{-\rho y} = \frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho}\int_0^{\infty} e^{-\rho y}dH(y)$$
$$= \frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\lambda+\delta-c\rho}{\lambda} = \frac{c\rho-\delta}{\lambda\rho}.$$

Taigi

$$I_2 = \frac{c\rho-\delta}{\lambda\rho}. \tag{12}$$

Vadinasi,

$$\phi = \frac{c\rho-\delta}{\lambda\rho(1+\theta)EY} . \tag{13}$$

Dabar įvertinsime funkcijos $\overline{F}(x)$ elgesį dideliems *x*. Aišku, kad

$$I_1(x) := \int_0^{\infty} e^{-\rho y}\overline{H}(y+x)dy = \int_0^{\infty} e^{-\rho y}e^{-(y+x)^{\eta}}dy = -\frac{1}{\rho}\int_0^{\infty} e^{-(y+x)^{\eta}}de^{-\rho y} = \frac{1}{\rho}e^{-x^{\eta}} + \frac{1}{\rho}\int_0^{\infty} e^{-\rho y}de^{-(y+x)^{\eta}}$$
$$= \frac{1}{\rho}e^{-x^{\eta}} - \frac{\eta}{\rho}\int_0^{\infty} e^{-\rho y}e^{-(y+x)^{\eta}}(y+x)^{\eta-1}dy.$$

Tegul

$$I(x) := \int_0^{\infty} e^{-\rho y} e^{-(y+x)^{\eta}} (y+x)^{\eta-1} dy .$$

Akivaizdu, kad $I(x) \geq 0$, visiems $x \geq 0$. Be to

$$I(x) = \int_0^{\infty} e^{-\rho y} e^{-(y+x)^{\eta}} (y+x)^{\eta-1} dy \leq e^{-x^{\eta}} \int_0^{\infty} e^{-\rho y} (y+x)^{\eta-1} dy = e^{-x^{\eta}} \int_0^{\infty} e^{-\rho y} \frac{1}{(y+x)^{1-\eta}} dy$$
$$\leq e^{-x^{\eta}} \int_0^{\infty} e^{-\rho y} \frac{1}{x^{1-\eta}} dy = \frac{e^{-x^{\eta}}}{x^{1-\eta}} \int_0^{\infty} e^{-\rho y} dy = \frac{e^{-x^{\eta}}}{\rho x^{1-\eta}} \cdot$$

Vadinasi,

$$I(x) = \frac{e^{-x^{\eta}}}{\rho x^{1-\eta}} \Delta_1, \ \Delta_1 \in [0;1] .$$

Tuomet

$$I_1(x) = \frac{1}{\rho} e^{-x^{\eta}} - \frac{\eta}{\rho} I(x) = \frac{e^{-x^{\eta}}}{\rho} - \frac{\eta}{\rho} \frac{e^{-x^{\eta}}}{\rho x^{1-\eta}} \Delta_1 = \frac{e^{-x^{\eta}}}{\rho} (1 - \frac{\eta}{\rho x^{1-\eta}} \Delta_1), \ \Delta_1 \in [0;1] . \qquad (14)$$

Iš (12), (14) ir (2) gauname, kad

$$\overline{F}(x) = \frac{I_1}{I_2} = \frac{\frac{e^{-x^{\eta}}}{\rho} (1 - \frac{\eta}{\rho x^{1-\eta}} \Delta_1)}{\frac{c\rho - \delta}{\lambda \rho}} = \frac{\lambda}{c\rho - \delta} e^{-x^{\eta}} (1 - \frac{\eta}{\rho x^{1-\eta}} \Delta_1).$$

Tai yra

$$\overline{F}(x) = \frac{\lambda}{c\rho - \delta} e^{-x^{\eta}} (1 - O(x^{1-\eta})). \qquad (15)$$

Kadangi

$$EY = \int_0^{\infty} \overline{H}(y) dy = \int_0^{\infty} e^{-y^{\eta}} dy = y e^{-y^{\eta}} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} y d e^{-y^{\eta}} = \int_0^{\infty} y e^{-y^{\eta}} dy^{\eta}$$

jei $x := y^{\eta}$, tai $y = x^{\frac{1}{\eta}}$ ir $dx = dy^{\eta}$, tada

$$= \int_0^{\infty} x^{\frac{1}{\eta}} e^{-x} dx = \Gamma(1 + \frac{1}{\eta}) .$$

Tuomet pasinaudoję (13) lygybe ir lygybe

$$c = (1+\theta)\lambda EY,$$

gauname, kad

$$\phi = \frac{c\rho - \delta}{\lambda\rho(1+\theta)EY} = \frac{c\rho - \delta}{\lambda\rho(1+\theta)\Gamma(1+\frac{1}{\eta})} = \frac{c\rho - \delta}{\rho c} = 1 - \frac{\delta}{c\rho}. \tag{16}$$

Iš (11), (15) ir (16) gauname:

$$\psi(x,\delta) \sim \frac{1-\frac{\delta}{c\rho}}{\frac{\delta}{c\rho}} \frac{\lambda}{c\rho - \delta} e^{-x^\eta} = \frac{\lambda}{\delta} e^{-x^\eta},$$

t.y. dideliems x

$$\psi(x,\delta) = \frac{\lambda}{\delta} e^{-x^\eta}(1+o(1)), \tag{17}$$

kai $0 < \eta < 1$ ir $\delta \neq 0$.

Dabar išnagrinėsime atvejį, kai $0 < \eta < 1$ ir $\delta = 0$.

Iš Lundbergo lygties (4) pavidalo išplaukia, kad $\rho(\delta)\big|_{\delta=0} = 0$ (žr. [1]). Tuomet iš (3) ir (2) lygybių gauname

$$\phi = \frac{\int_0^\infty \overline{H}(y)dy}{(1+\theta)EY} = \frac{1}{1+\theta}, \tag{18}$$

$$\overline{F}(x) = \frac{\int_0^\infty \overline{H}(y+x)dy}{\int_0^\infty \overline{H}(y)dy} = \frac{\int_0^\infty \overline{H}(y+x)dy}{EY}.$$

Integralą

$$J := \int_0^\infty \overline{H}(y+x)dy$$

įsivertinsime atskirai:

$$J=\int_0^\infty e^{-(y+x)^\eta}dy=\int_0^\infty e^{-(y+x)^\eta}d(y+x)=\int_x^\infty e^{-t^\eta}dt$$

jei $t^\eta =: s$, tai $t=s^{\frac{1}{\eta}}$ ir $dt=\frac{1}{\eta}s^{\frac{1}{\eta}-1}ds$, tada

$$=\frac{1}{\eta}\int_{x^\eta}^\infty e^{-s}s^{\frac{1}{\eta}-1}ds=-\frac{1}{\eta}\int_{x^\eta}^\infty s^{\frac{1}{\eta}-1}de^{-s}=\frac{1}{\eta}x^{1-\eta}e^{-x^\eta}+\frac{1}{\eta}\int_{x^\eta}^\infty e^{-s}(\frac{1}{\eta}-1)s^{\frac{1}{\eta}-2}ds$$
$$=\frac{1}{\eta}x^{1-\eta}e^{-x^\eta}+\frac{1}{\eta}(\frac{1}{\eta}-1)\int_{x^\eta}^\infty e^{-s}s^{\frac{1}{\eta}-2}ds=\frac{1}{\eta}x^{1-\eta}e^{-x^\eta}-\frac{1}{\eta}(\frac{1}{\eta}-1)\int_{x^\eta}^\infty s^{\frac{1}{\eta}-2}de^{-s}$$
$$=\frac{1}{\eta}x^{1-\eta}e^{-x^\eta}+\frac{1}{\eta}(\frac{1}{\eta}-1)x^{1-2\eta}e^{-x^\eta}+\frac{1}{\eta}(\frac{1}{\eta}-1)(\frac{1}{\eta}-2)\int_{x^\eta}^\infty e^{-s}s^{\frac{1}{\eta}-3}ds$$
$$=\frac{1}{\eta}x^{1-\eta}e^{-x^\eta}+\frac{1}{\eta}(\frac{1}{\eta}-1)x^{1-2\eta}e^{-x^\eta}+\frac{1}{\eta}(\frac{1}{\eta}-1)(\frac{1}{\eta}-2)x^{1-3\eta}e^{-x^\eta}+$$
$$+\frac{1}{\eta}(\frac{1}{\eta}-1)(\frac{1}{\eta}-2)(\frac{1}{\eta}-3)\int_{x^\eta}^\infty e^{-s}s^{\frac{1}{\eta}-4}ds=\ldots$$
$$=\frac{1}{\eta}x^{1-\eta}e^{-x^\eta}+\frac{1}{\eta}(\frac{1}{\eta}-1)x^{1-2\eta}e^{-x^\eta}+\frac{1}{\eta}(\frac{1}{\eta}-1)(\frac{1}{\eta}-2)x^{1-3\eta}e^{-x^\eta}+\ldots$$
$$+\frac{1}{\eta}(\frac{1}{\eta}-1)(\frac{1}{\eta}-2)\cdot\ldots\cdot(\frac{1}{\eta}-\left[\frac{1}{\eta}\right]+1)x^{1-\left[\frac{1}{\eta}\right]\eta}e^{-x^\eta}+\frac{1}{\eta}(\frac{1}{\eta}-1)(\frac{1}{\eta}-2)\cdot\ldots\cdot(\frac{1}{\eta}-\left[\frac{1}{\eta}\right])\int_{x^\eta}^\infty e^{-s}s^{\frac{1}{\eta}-\left[\frac{1}{\eta}\right]-1}ds.$$

Paskutinis integralas

$$H:=\int_{x^\eta}^\infty e^{-s}s^{\frac{1}{\eta}-\left[\frac{1}{\eta}\right]-1}ds\geq 0.$$

Be to, kadangi

$$\frac{1}{\eta}-\left[\frac{1}{\eta}\right]-1\in[-1;0),\ s\in[x^\eta;\infty),$$

tai

$$H\leq\int_{x^\eta}^\infty e^{-s}x^{\eta(\frac{1}{\eta}-\left[\frac{1}{\eta}\right]-1)}ds=x^{\eta(\frac{1}{\eta}-\left[\frac{1}{\eta}\right]-1)}\int_{x^\eta}^\infty e^{-s}ds=x^{1-\eta\left[\frac{1}{\eta}\right]-\eta}e^{-x^\eta}.$$

Vadinasi,

$$H=x^{1-\eta\left[\frac{1}{\eta}\right]-\eta}e^{-x^\eta}\Delta_2,\ \Delta_2\in[0,1].$$

Tuomet

$$J = \frac{1}{\eta} x^{1-\eta} e^{-x^{\eta}} + \frac{1}{\eta}(\frac{1}{\eta} - 1) x^{1-2\eta} e^{-x^{\eta}} + \frac{1}{\eta}(\frac{1}{\eta} - 1)(\frac{1}{\eta} - 2) x^{1-3\eta} e^{-x^{\eta}} + \ldots$$

$$+ \frac{1}{\eta}(\frac{1}{\eta} - 1)(\frac{1}{\eta} - 2) \cdot \ldots \cdot (\frac{1}{\eta} - \left[\frac{1}{\eta}\right] + 1) x^{1-\left[\frac{1}{\eta}\right]\eta} e^{-x^{\eta}} + \frac{1}{\eta}(\frac{1}{\eta} - 1)(\frac{1}{\eta} - 2) \cdot \ldots \cdot (\frac{1}{\eta} - \left[\frac{1}{\eta}\right]) x^{1-\eta\left[\frac{1}{\eta}\right]-\eta} e^{-x^{\eta}} \Delta_2$$

$$= \frac{1}{\eta} x^{1-\eta} e^{-x^{\eta}} (1 + (\frac{1}{\eta} - 1) x^{-\eta} + (\frac{1}{\eta} - 1)(\frac{1}{\eta} - 2) x^{-2\eta} + \ldots$$

$$+ (\frac{1}{\eta} - 1)(\frac{1}{\eta} - 2) \cdot \ldots \cdot (\frac{1}{\eta} - \left[\frac{1}{\eta}\right] + 1) x^{-\eta\left(\left[\frac{1}{\eta}\right]+1\right)} + (\frac{1}{\eta} - 1)(\frac{1}{\eta} - 2) \cdot \ldots \cdot (\frac{1}{\eta} - \left[\frac{1}{\eta}\right]) x^{-\eta\left[\frac{1}{\eta}\right]} \Delta_2)$$

$$= \frac{1}{\eta} x^{1-\eta} e^{-x^{\eta}} (1 + O(x^{-\eta})).$$

Taigi nagrinėjamu atveju

$$\overline{F}(x) = \frac{J}{EY} = \frac{1}{\eta\Gamma(1+\frac{1}{\eta})} x^{1-\eta} e^{-x^{\eta}} (1 + O(x^{-\eta})). \tag{19}$$

(18) ir (19) išraiškas įsistatę į (11) gauname:

$$\psi(x,0) \sim \frac{\phi}{1-\phi} \cdot \overline{F}(x) = \frac{\frac{1}{1+\theta}}{1 - \frac{1}{1+\theta}} \frac{1}{\eta\Gamma(1+\frac{1}{\eta})} x^{1-\eta} e^{-x^{\eta}} = \frac{1}{\theta\eta\Gamma(1+\frac{1}{\eta})} x^{1-\eta} e^{-x^{\eta}} = \frac{1}{\theta\Gamma(\frac{1}{\eta})} x^{1-\eta} e^{-x^{\eta}}.$$

Čia pasinaudojome Gama funkcijos savybe:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Taigi, dideliems x

$$\psi(x,0) = \frac{1}{\theta\Gamma(\frac{1}{\eta})} x^{1-\eta} e^{-x^{\eta}} (1 + o(1)), \tag{20}$$

kai $0 < \eta < 1$.

Iš (17) ir (20) gauname, kad žaloms, pasiskirsčiusioms pagal Veibulo skirstinį su parametrais $\eta = const$, $0 < \eta < 1$ ir $\sigma = 1$, diskontuotos baudos funkcijos pagrindinio nario išraiška priklauso nuo tolydžiosios palūkanų normos δ, t.y.:

$$\psi(x,\delta) \sim \begin{cases} \dfrac{\lambda}{\delta} e^{-x^{\eta}}, \delta \neq 0, \\ \dfrac{1}{\theta\Gamma(\frac{1}{\eta})} x^{1-\eta} e^{-x^{\eta}}, \delta = 0, \end{cases}$$

kai $x \to \infty$.

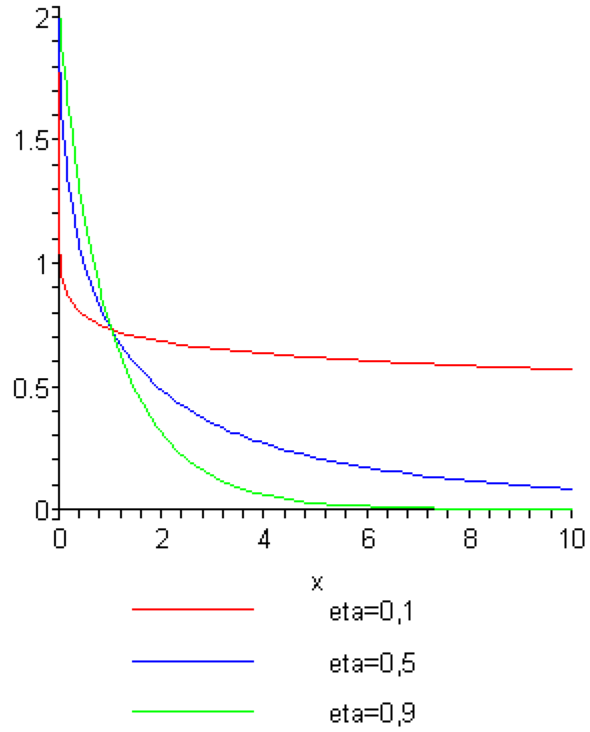
Teorema įrodyta.

5. Pastabos.

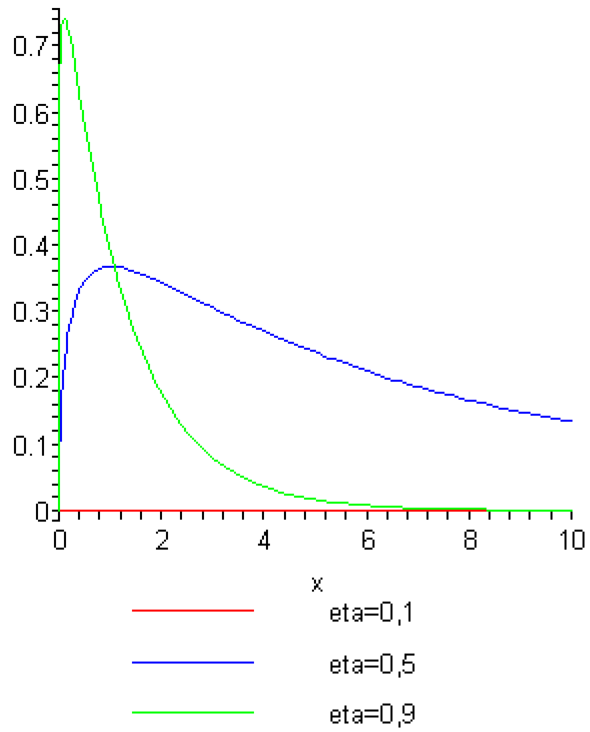
Matome, kad tuo atveju, kai tolydžioji metinė palūkanų norma $\delta \neq 0$, baudos funkcijos pagrindinis narys priklauso nuo Puasono modelio parametrų: λ, δ ir x, o tuo atveju, kai $\delta = 0$ - nuo x ir θ. Galima sakyti, kad kai kompanija savo veiklą pradeda su dideliu pradiniu kapitalu (pradiniu valdomu turtu), baudos funkcijos pagrindinio nario elgesys, kai modelyje taikoma nenulinė tolydžioji palūkanų norma, nepriklauso nuo draudimo priemokos θ. Baudos funkciją įtakoja žalų skaičiaus $N(t)$ pasiskirstymas, pati palūkanų norma δ bei pradinis turtas x. Tuo atveju, kai kompanija savo veiklą pradeda su dideliu pradiniu kapitalu, tačiau modelyje taikoma nulinė tolydžioji palūkanų norma, pati baudos funkcija tampa kompanijos bankroto tikimybe. Ji priklauso nuo draudimo priemokos dydžio θ ir nepriklauso nuo žalų skaičiaus $N(t)$ pasiskirstymo.

Verta pastebėti, kad tuo atveju, kai Veibulo skirstinio parametras $\eta > 1$, Gerber-Shiu diskontuotos baudos funkcijos elgesio šiuo metodu, t.y. pasinaudojant subeksponentinių pasiskirstymo funkcijų savybėmis, nustatyti neįmanoma ir norint įvertinti pagrindinį šios funkcijos narį reikia ieškoti kitų metodų.

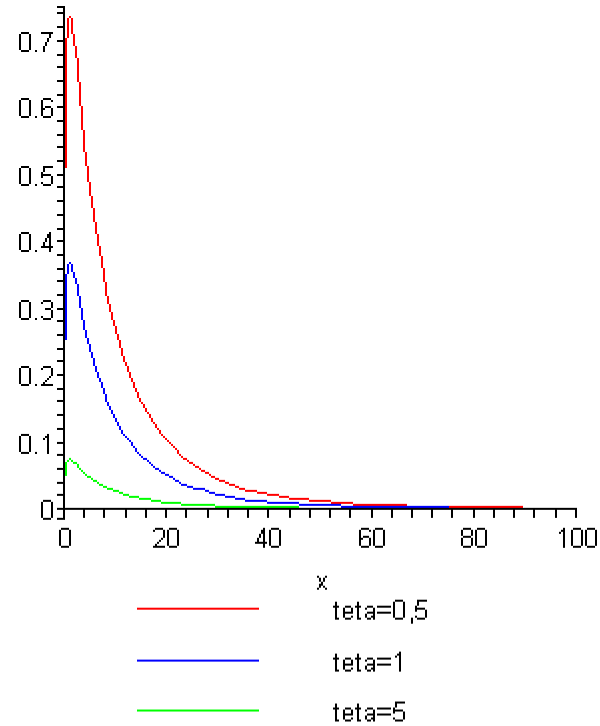
Žemiau pateiktuose grafikuose pavaizduota, kaip atrodo funkcijos $\psi(x,\delta)$ pagrindinis narys. Atvejis, kai $\delta \neq 0$, pavaizduotas 3 ir 6 paveiksluose. Atvejis, kai $\delta = 0$, pavaizduotas 4, 5 ir 7 paveiksluose.



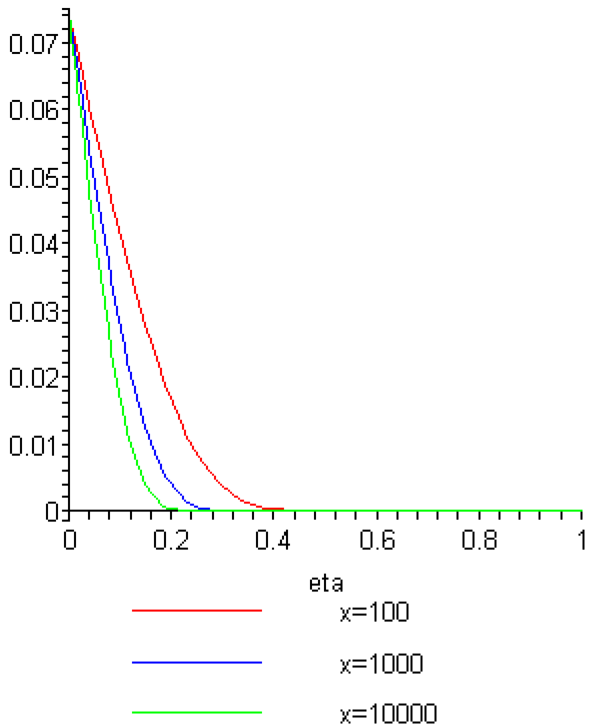
3 pav. Funkcijos $\psi(x,\delta)$ pagrindinis narys, kai $\delta = 0{,}05$, $\lambda = 0{,}1$.



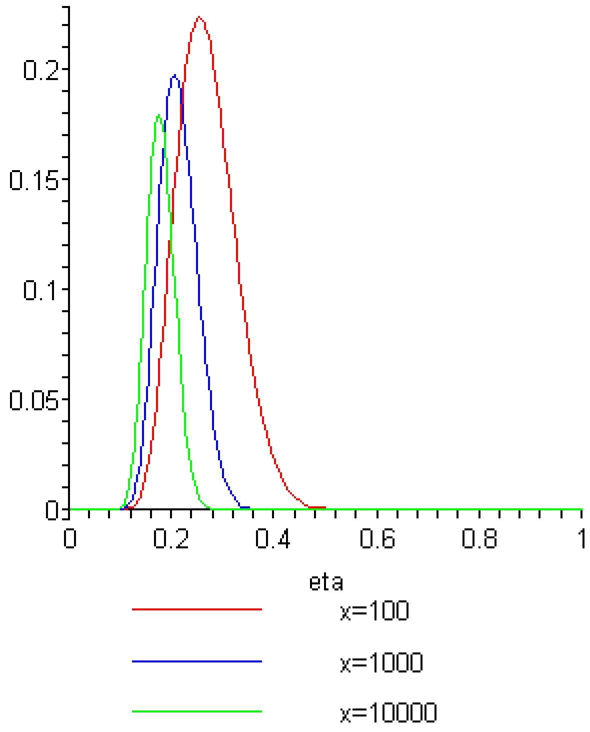
4 pav. Funkcijos $\psi(x,\delta)$ pagrindinis narys, kai $\delta = 0$, $\theta = 1$.



5 pav. Funkcijos $\psi(x,\delta)$ pagrindinis narys, kai $\delta = 0$, $\eta = 0{,}5$.



6 pav. Funkcijos $\psi(x,\delta)$ pagrindinis narys, kai $\delta = 0{,}5$, $\lambda = 0{,}1$.



7 pav. Funkcijos $\psi(x,\delta)$ pagrindinis narys, kai $\delta = 0$, $\theta = 1$.

LITERATŪRA

1. H. Gerber, E. S. W. Shiu, On the time value of ruin, *North American Actuarial Journal*, **2**(1), 45-78 (1998).
2. G. E. Willmot, D. C. M. Dickson, The Gerber – Shiu discounted penalty function in the stacionary renewal risk model, *Insurance: Mathematics and Economics*, **32**, 403-411 (2003).
3. S. Drekic, G. E. Willmot, On the density and moments of the time of ruin with exponential claims, *ASTIN Bulletin*, **33**(1), 11-21 (2003).
4. G. E. Willmot, X. S. Lin, *Lundberg approximations for compound distributions with insurance applications*, Springer – Verlag, New York (2001).
5. J. Šiaulys, R. Bortnik, The Gerber – Shiu discounted penalty function for Erlang distributed claims, *ProcFPM*, **8**, 126-142 (2005).
6. T. Mikosch, *Non-Life Insurance Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (2004).
7. P. Embrechts, C. Kluppelberg, T. Mikosch, *Modeling External Events*, Springer (1997).