1 Įvadas

Per pastaruosius du dešimtmečius nagrinėjant finasines eilutes jų modeliavimui buvo įvestos dvi procesų klasės: auto regresive conditional heteroskedastic (toliau ARCH) ir heterogeneous auto regresive conditional heteroskedastic (toliau HARCH). ARCH(k) procesas apibrėžiamas tokiomis lygybėmis:

$$x_n = \sigma_n \varepsilon_n, \tag{1.1}$$

$$\sigma_n^2 = c_0 + \sum_{j=1}^{k} c_j x_{n-j}^2, \tag{1.2}$$

o HARCH(k) procesas — tokiomis:

$$x_n = \sigma_n \varepsilon_n, \tag{1.3}$$

$$\sigma_n^2 = c_0 + \sum_{j=1}^{k} c_j \Big(\sum_{i=1}^{j} x_{n-i} \Big)^2, \tag{1.4}$$

Čia $x_0, \ldots, x_{k-1}$ yra bet kokius skirstinius turintys atsitiktiniai dydžiai, ε_n — nepriklausomi, vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su nuliniu vidurkiu, nepriklausantys nuo $x_0, \ldots, x_{k-1}$, $c_0 > 0$, $c_k > 0$ ir $c_j \geqslant 0$, $j = 1, \ldots, k-1$. Praktikoje modeliai naudingi tik tuo atveju, kai žinomos jų bazinės savybės, t.y. žinoma, kokias sąlygas turi tenkinti koeficientai $c_n, n = 0, \ldots, k$ ir a.d. $(\varepsilon_n, n \geqslant k)$, kad egzistuotų invariantinis (stacionarus) proceso skirstinys.

Darbe nagrinėjamas atskiras HARCH(k) proceso atvejis kai $k = 2$ ir suformuluotos hipotetinės invariantinio šio proceso skirstinio egzistavimo sąlygos.

2 Pagrindinės sąvokos ir naudojamos teoremos

Šiame skyrelyje pateikiamos pagrindinės darbe naudojamos sąvokos bei suformuluotos taikomos teoremos.

2.1 Markovo grandines

Tegu $(E, \mathfrak{F})$ yra mati erdvė. *Stochastiniu branduoliu* toje erdvėje vadiname funkciją $\mathrm{P}(x, A) : E \times \mathfrak{F} \mapsto [0; 1]$, tenkinančią sąlygas:

1) fiksuotoms pirmojo argumento x reikšmėms funkcija $\mathrm{P}(x, \cdot)$ yra tikimybinis matas $(E, \mathfrak{F})$ erdvėje;

2) fiksuotoms antrojo argumento A reikšmėms funkcija $\mathrm{P}(\cdot, A)$ yra $\mathfrak{F}$-mati.

Stochastinė seka $(X_n, n \geqslant 0)$ vadinama *homogenine* Markovo grandine (visur toliau laikysime, kad $(X_n, n \geqslant 0)$ žymi homogeninę Markovo grandinę), jei

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X_{n+1} \in A \mid X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x) &= \mathrm{P}(X_{n+1} \in A \mid X_n = x) \\ &= \mathrm{P}(x, A)\end{aligned}$$

su $x \in E, n \geqslant 0$ ir $A \in \mathfrak{F}$.

Stochastinis branduolys $\mathrm{P}(x, A)$ vadinamas šios grandinės *perėjimo tikimybe*.

Dažnai homogeninės Markovo grandinės apibrėžiamos taip. Tegu $f : E \times \mathbb{R} \mapsto E$ — mati funkcija, X_0 — kažkokį skirstinį turintis a.d., o $(\varepsilon_n, n \geqslant 0)$

— n.v.p.a.d. seka, nepriklausanti nuo X_0. Tada homogeninė Markovo seka apibrėžiama rekurentiškai:

$$X_{n+1} = f(X_n, \varepsilon_n) \ . \tag{2.1}$$

Nesunku matyti, kad šiuo atveju $\mathrm{P}(x, A) = \mathrm{P}\{f(x, \varepsilon_n) \in A\}$.

Tarkime, kad $\mathfrak{L}(X_0) = \pi$. Skirstinys π vadinamas *stacionariu*, jei $\pi(A) = \int \pi(dy)\, \mathrm{P}(y, A)$. Iš čia turime, kad $\mathfrak{L}(X_n) = \pi$, jei π — stacionarus.

Grandinė $(X_n, n \geqslant 0)$ vadinama *stacionaria siaurąja prasme (stacionaria)*, jei $\forall k \geqslant 0$ vektoriaus $(X_n, \ldots, X_{n+k}), n \geqslant 0$, skirstinys nuo n nepriklauso. Pastebėsime, kad jei π — stacionarus grandinės $(X_n, n \geqslant 0)$ skirstinys ir $\mathfrak{L}(X_0) = \pi$, tai grandinė stacionari, nes $\mathrm{P}(X_n \in B_0, \ldots, X_{n+k} \in B_k) = \int_{B_0} \pi(dx_0) \int_{B_1} \mathrm{P}(x_0, dx_1) \ldots \int_{B_k} \mathrm{P}(x_{k-1}, dx_k)$

2.2 Pasiekiamumas, neskaidumas, mažumas

Tegu turime homogeninę Markovo grandinę $(X_n, n \geqslant 0)$. Aibė A vadinama *pasiekiama*, jei

$$\forall x \in E \ \exists n \geqslant 1 \ \ \mathrm{P}(X_n \in A \mid X_0 = x) = \mathrm{P}_x(X_n \in A) > 0 \ . \tag{2.2}$$

Grandinė vadinama *ψ-neskaidžia*, jei egzistuoja toks netrivialus matas ψ, kad

$$\psi(A) > 0 \Leftrightarrow A \text{ pasiekiama.} \tag{2.3}$$

Aibė C vadinama *m_0-maža*, jei egzistuoja toks tikimybinis matas ν, realus skaičius $\delta > 0$ ir sveikas skaičius $m_0 \geqslant 1$, kad

$$\mathrm{P}(X_{n+m_0} \in A \mid X_n = x) = \mathrm{P}^{m_0}(x, A) \geqslant \delta \nu(A) \tag{2.4}$$

su $n \geqslant 0$, $A \in \mathfrak{F}$ ir $x \in C$.

Aibė C vadinama *ν_a-maža*, jei egzistuoja tikimybinis matas a, sukoncentruotas natūralių skaičių aibėje, netrivialus matas ν_a ir $\delta > 0$, kad

$$\sum_{n \geqslant 0} \mathrm{P}^n(x, A) a(n) \geqslant \delta \nu_a(A) \tag{2.5}$$

su $A \in \mathfrak{F}$ ir $x \in C$.

Aibė α vadinama *atomu*, jei $\mathrm{P}(x, A) = \mathrm{P}(y, A)$ su bet kokiais $x, y \in \alpha$ ir $A \in \mathfrak{F}$.

Neskaidi grandinė vadinama *Hariso grandine*, jei bet kokiai pasiekiamai aibei A teisinga

$$\forall x \in A \ \ \mathrm{P}_x\{\exists n \geqslant 1 \ X_n \in A\} = 1.$$

Kiekviena Hariso grandinė turi vienintelį (multiplikatyvios konstantos tikslumu) invariantinį σ-baigtinį matą. Jei invariantinis matas baigtinis, grandinė vadinama *teigiama*.

Grandinė vadinama Felerio (silpnai), jei kiekvienai aprėžtai tolydžiai funkcijai $h : E \mapsto \mathbb{R}$ funkcija $\mathrm{P}\, h(x) = \int \mathrm{P}(x, dy) h(y)$ yra tolydi aprėžta funkcija.

2.3 Teoremos

Po kiekvienos teoremos pateikiama originalioje literatūroje naudota numeracija. Kai kurios teoremos pateikiamos nepilna formuluote.

2.1 teorema. *Jei ψ-neskaidi grandinė $(X_n, n \geqslant 0)$ yra silpnai Felerio ir mato ψ atramos vidus netuščias, tai kiekviena kompaktiška aibė yra ν_a-maža [2, Theorem 6.0.1].*

2.2 teorema. *Jei* (2.1) *modelyje funkcija f yra tolydi, tai $(X_n, n \geqslant 0)$ yra silpnai Felerio [2, Theorem 6.1.2].*

2.3 teorema. *Tegu $(X_n, n \geqslant 0)$ yra neskaidi aperiodinė Hariso grandinė. Tokie teiginiai ekvivalentūs.*

(i) Grandinė yra teigiama (t.y. invariantinis matas baigtinis).

(ii) Egzistuoja tokia m_0-maža pasiekiama aibė C ir skaičius $\mathrm{P}^\infty(C) > 0$, kad $\forall x \in C$

$$\mathrm{P}^n(x, C) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{P}^\infty(C) \ .$$

(iii) Egzistuoja tokia ν_a-maža aibė C, kad

$$\sup_{x \in C} \mathrm{E}_x\big[\tau_C\big] < \infty \ ;$$

kur $\tau_C = \inf\{n \geqslant 1 \mid X_n \in C\}$.

(iv) Egzistuoja tokia ν_a-maža aibė C, skaičius $b < \infty$ ir funkcija $V : E \mapsto [0; \infty)$, kad su visais $x \in E$

$$\Delta V(x) = \mathrm{E}_x\big[V(X_1)\big] - V(x) \leqslant -1 + b\mathbf{1}_C(x) \ . \tag{2.6}$$

Bet kuri šių sąlygų ekvivalenti egzistavimui invariantinio mato π, tenkinačio sąlygą

$$\sup_{A \in \mathfrak{F}} |\mathrm{P}^n(x, A) - \pi(A)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \ \forall x \in E$$

[2, Theorem 13.0.1].

3 Kitokia ARCH(2) modelio charakterizacija

Nagrinėkime atskirą ARCH modelio atvejį, kai $k = 2$. Apibrėžkime Markovo procesą $(X_n, n \geqslant 0)$ lygybėmis

$$X_n = \begin{pmatrix} x_{n+1}^2 \\ x_n^2 \end{pmatrix} \ . \tag{3.1}$$

Iš (1.1) ir (1.2) gauname, kad modelis (3.1) gali būti užrašytas tokiu pavidalu

$$\begin{aligned} X_n &= \begin{pmatrix} c_0\varepsilon_{n+1}^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1\varepsilon_{n+1}^2 & c_2\varepsilon_{n+1}^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n^2 \\ x_{n-1}^2 \end{pmatrix} \\ &= a_n + A_n X_{n-1} \\ &= a_n + \sum_{i=1}^{n-1} A_n \dots A_{n-i+1} a_{n-i} + A_{n-j} \dots A_1 X_0 \ , \end{aligned} \tag{3.2}$$

kur

$$a_n = \begin{pmatrix} c_0\varepsilon_{n+1}^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ A_n = \begin{pmatrix} c_1\varepsilon_{n+1}^2 & c_2\varepsilon_{n+1}^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Darbe [1] parodyta, kad stacionarumo sąlyga HARCH(2) procesui gali būti suformuluota naudojantis matrica

$$B_n = A_n \dots A_1 \ . \tag{3.3}$$

Jei $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln\|B_n\| = \gamma$, tai ARCH(2) procesas turi stacionarų sprendinį tuo atveju, kai $\gamma < 0$, ir neturi stacionaraus sprendinio, kai $\gamma > 0$. Naudodamiesi šiuo faktu parodysime, kad ji gali būti performuluota kitaip. Nauja formuluotė skirta tam, kad naudojantis analogija suformuluoti hipotetines stacionaraus HARCH(2) proceso egzistavimo sąlygas.

3.1 skyrelyje įsivesime pagalbinį procesą ir nurodysime sąlygas, kada jis stacionarus.

3.2 skyrelyje naudodamiesi pagalbiniu procesu gausime naują ARCH(2) stacionarumo formuluotę.

3.1 Pagalbinis procesas

Nagrinėkime procesą $(y_n, n \geqslant 0)$, apibrėžiamą lygybe

$$y_n = \Big(c_1 + \frac{c_2}{y_{n-1}}\Big)\varepsilon_{n+1}^2 \ , \tag{3.4}$$

kur y_0 yra fiksuotą skirstinį turintis a.d., tenkinantis sąlygą $\mathrm{P}(y_0 > 0) = 1$, c_1, c_2 — teigiamos konstantos, o $(\varepsilon_n, n \geqslant 2)$ — n.v.p.a.d. seka, nepriklausanti nuo y_0. Parodysime, kad teisingas

3.1 teiginys. *Tarkime, kad tenkinamos sąlygos*

S1) $\mathrm{E}|\ln \varepsilon_n^2| < \infty$;

S2) ε_n *turi absoliučiai tolydžią komponentę, kuri teigiama intervale* $(0, \infty)$.

Tada egzistuoja stacionarus sekos (y_n) *skirstinys.*

Įrodymas. Pasirėmę S2, gauname, kad grandinė (y_n) yra Hariso, neskaidi ir aperiodinė. Pasirėmę 2.2 teorema, gauname, kad grandinė yra Felerio. Iš 2.1 teoremos išplaukia, kad kiekviena kompaktiška aibė yra ν_a-maža, todėl pakanka rasti kompaktą ir testinę funkciją V, kuriems būtų teisinga 2.3 teoremos (iv) nelygybė. Imkime funkciją

$$V(y) = \begin{cases} \ln y, & \text{kai } y > 1 \ ; \\ 2\ln y^{-1}, & \text{kai } 0 < y \leqslant 1 \ ; \\ 0, & \text{kitais atvejais} \ ; \end{cases} \tag{3.5}$$

ir skaičiuokime $\Delta V(y)$.

Jei $y > a > 1$, tai

$$\begin{aligned}
\Delta V(y) &= \mathrm{E}\Big[\Big(\mathbf{1}_{\{\varepsilon^2 > y(c_2+yc_1)^{-1}\}} - \mathbf{1}_{\{\varepsilon^2 \leqslant y(c_2+yc_1)^{-1}\}}2\Big)\ln\Big[\Big(c_1 + \frac{c_2}{y}\Big)\varepsilon^2\Big]\Big] - \ln y \\
&= \ln\Big(c_1 + \frac{c_2}{y}\Big)\Big(\mathrm{P}\{\varepsilon^2 > y(c_2+yc_1)^{-1}\} - 2\,\mathrm{P}\{\varepsilon^2 \leqslant y(c_2+yc_1)^{-1}\}\Big) \\
&\quad + \mathrm{E}\Big[\Big(1_{\{\varepsilon^2 > y(c_2+yc_1)^{-1}\}} - 1_{\{\varepsilon^2 \leqslant y(c_2+yc_1)^{-1}\}}2\Big)\ln\varepsilon^2\Big] - \ln y \\
&\leqslant \max\Big(\ln\Big(c_1 + \frac{c_2}{a}\Big), -2\ln c_1\Big) + 2\,\mathrm{E}|\ln\varepsilon^2| - \ln a \\
&\leqslant -1\ ,
\end{aligned}$$

kai a pakankamai didelis.

Jei $0 < y < b < 1$, tai

$$\begin{aligned}
\Delta V(y) &= \mathrm{E}\Big[\Big(\mathbf{1}_{\{\varepsilon^2 > y(c_2+yc_1)^{-1}\}} - \mathbf{1}_{\{\varepsilon^2 \leqslant y(c_2+yc_1)^{-1}\}}2\Big)\ln\Big[\Big(c_1 + \frac{c_2}{y}\Big)\varepsilon^2\Big]\Big] + 2\ln y \\
&\leqslant \ln(c_1 y + c_2)\big(\mathrm{P}\{\varepsilon^2 > y(c_2+yc_1)^{-1}\} - 2\,\mathrm{P}\{\varepsilon^2 \leqslant y(c_2+yc_1)^{-1}\}\big) \\
&\quad + \mathrm{E}\big[\ln\varepsilon^2\big(1_{\{\varepsilon^2 > y(c_2+yc_1)^{-1}\}} - 1_{\{\varepsilon^2 \leqslant y(c_2+yc_1)^{-1}\}}2\big)\big] + \ln y \\
&\leqslant \max\big(\ln(c_1 b + c_2), -2\ln c_2\big) + 2\,\mathrm{E}|\ln\varepsilon^2| + \ln b \\
&\leqslant -1\ ,
\end{aligned}$$

kai b pakankamai mažas.

Taigi, už intervalo $[b, a]$ ribų turime, kad $\Delta V(y) \leqslant -1$. Pačiame intervale $\Delta V(y)$ yra aprėžta. $\square$

3.2 Nauja formuluotė

Šiame skyrelyje įrodysime teiginį, susiejantį 3.1 skyrelyje įvestą pagalbinį procesą (y_n) ir ARCH(2) modelį.

3.2 teiginys. *Tarkime, kad 3.2 modelis tenkina tokias sąlygas*

S1) $\mathrm{P}(X_0 > 0) = 1$;

S2) $c_1 > 0$;

S3) ε_n *turi absoliučiai tolydžią komponentę, kuri teigiama intervale* $(0, \infty)$;

S4) $\mathrm{E}|\ln\varepsilon_n^2| < \infty$.

Tada teisingas sąryšis

$$\frac{1}{n}\ln\|B_n\| \xrightarrow{P} \gamma \Leftrightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\ln y_i \xrightarrow{P} \gamma\ ,$$

kur B_n yra matrica, apibrėžiama 3.3 lygybe, o seka $(y_n, n \geqslant 0)$ gaunama pagal 3.4 formulę, imant konstantas c_1, c_2 ir seką $(\varepsilon_n, n \geqslant 2)$ tokius pat, kaip ir nagrinėjamame 3.2 modelyje, bei apibrėžiant pradinę būseną tapatybe $y_0 = \frac{x_0^2}{x_1^2}$.

Įrodymas. Tegu (3.2) modelyje koeficientas $c_0 = 0$. Patogumo dėlei žymėkime šią seką $(V_n, n \geqslant 0)$, laikydami, kad V_0 yra lygus fiksuotam X_0. Parodysime, kad teisinga implikacija

$$\min_i X_{0i} > 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{n}\ln\|B_n\| \xrightarrow{P} \gamma \Leftrightarrow \frac{1}{n}\ln\|B_n X_0\| = \frac{1}{n}\ln\|V_n\| \xrightarrow{P} \gamma\right) \qquad (3.6)$$

Kadangi baigtiniamatėse erdvėse visos normos ekvivalenčios, tai pakaks įrodyti implikacijos teisingumą su konkrečia norma.

Tarkime, kad matricos $A_{k\times l}$ norma apibrėžiama formule

$$\|A\| = \max_{1\leqslant i\leqslant k}\sum_{j=1}^{l}|a_{ij}| \ . \tag{3.7}$$

Tegu $m \in \mathbb{N}$ yra toks, kad

$$\frac{1}{m} < \min_{1\leqslant i\leqslant 2} X_{0i} \ .$$

Kadangi matricos B_n koordinatės teigiamos, tai

$$\begin{aligned}\|B_nX_0\| &= \max\Big(\sum_{j=1}^{2} b_{n1j}X_{0j}, \sum_{j=1}^{2} b_{n2j}X_{0j}\Big)\\ &\geqslant \max\Big(\sum_{j=1}^{2} b_{n1j}\frac{1}{m}, \sum_{j=1}^{2} b_{n2j}\frac{1}{m}\Big)\\ &= \frac{1}{m}\|B_n\|\end{aligned}$$

ir

$$\frac{1}{n}\ln\|B_nX_0\| \geqslant \frac{1}{n}\ln\|B_n\| - \frac{1}{n}\ln m \ .$$

Antra vertus

$$\|B_nX_0\| \leqslant \|B_n\|\|X_0\| \ ,$$

todėl

$$\frac{1}{n}\ln\|B_nX_0\| \leqslant \frac{1}{n}\ln\|B_n\| + \frac{1}{n}\ln\|X_0\|$$

Pasirėmę šiomis nelygybėmis gauname (3.6).

Dabar nagrinėkime

$$\frac{1}{n}\ln\|V_n\| \ . \tag{3.8}$$

Imkime atskirą

$$V_n = \begin{pmatrix} v_{n+1}^2 \\ v_n^2 \end{pmatrix}$$

koordinatę $v_{n+1}^2 = (c_1v_n^2 + c_2v_{n-1}^2)\varepsilon_{n+1}^2$. Padalinę abi šios lygybės puses iš v_n^2 ir pažymėję $y_n = \frac{v_{n+1}^2}{v_n^2}$ gausime, kad

$$\begin{aligned}y_0 &= \frac{x_1^2}{x_0^2},\\ y_n &= \left(c_1 + \frac{c_2}{y_{n-1}}\right)\varepsilon_{n+1}^2\end{aligned}$$

su $n \geqslant 1$. Be to, $v_{n+1}^2 = y_n \dots y_0x_0^2$. Remdamiesi šia lygybe perrašykime (3.8) tokiu būdu

$$\frac{1}{n}\ln\|V_n\| = \frac{1}{2n}\ln(v_{n+1}^4 + v_n^4) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\ln y_i + \frac{1}{2n}(\ln x_0^4 + \ln(1+y_n^2))$$

Pasirėmę sąlygomis $S1, \ldots, S4$ ir 3.1 teiginiu, gauname, kad (y_n) seka turi stacionarų skirstinį π ir kad (3.6) gali būti performuluota taip

$$\min_i X_{0i} > 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{n} \ln\|B_n\| \xrightarrow{P} \gamma \Leftrightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln y_i \xrightarrow{P} \gamma \right) \tag{3.9}$$

nes $\frac{1}{2n}(\ln x_0^4 + \ln(1+y_n^2)) \xrightarrow{P} 0$, kai $n \to \infty$. $\square$

Pastaba 1. Iš didžiųjų skaičių dėsnio stacionarioms Markovo grandinėms išplaukia, kad $\gamma = \mathrm{E}_\pi\big[\ln y_0\big]$.

Pastaba 2. Jei netenkinama sąlyga S2, tai charakterizacija naudojant seką (y_n) netenka prasmės dėl dviejų priežasčių.

Visų pirma, jei $c_1 = 0$, tai iš 3.4 gauname, kad

$$y_n = \frac{c_2}{y_{n-1}} \varepsilon_{n+1}^2 = y_{n-2} \frac{\varepsilon_{n+1}^2}{\varepsilon_n^2} \ .$$

Iš kur

$$\ln y_n = \ln y_{n-2} + \ln \frac{\varepsilon_{n+1}^2}{\varepsilon_n^2} \ .$$

Pažymėjus $\delta_n = \ln \frac{\varepsilon_{n+1}^2}{\varepsilon_n^2}$ gauname, kad

$$\ln y_{2k} = \ln y_{2(k-1)} + \delta_{2k} \ . \tag{3.10}$$

Seka $(\delta_{2k}, k \geqslant 1)$ yra sudaryta iš n.v.p.a.d., t.y. procesas $(\ln y_{2k}, k \geqslant 0)$ yra atsitiktinis klaidžiojimas ant tiesės. Analogiškai gauname, kad $(\ln y_{2k+1}, k \geqslant 0)$ yra klaidžiojimas ant tiesės. Todėl pradinis uždavinys šiuo atveju susivestų į atsitiktinio klaidžiojimo ant tiesės stacionarumo tyrimą.

Antra vertus, jei $c_1 = 0$, tai ARCH(2) stacionarumo sąlygą galima gauti išreikštiniu pavidalu tiesiogiai paskaičiavus ribą $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln\|B_n\|$. Iš tikrųjų, indukcijos būdu nesunku patikrinti, kad šiuo atveju (3.3) matricos išraiška yra

$$B_{2k} = \begin{pmatrix} c_2^k \prod_{i=1}^k \varepsilon_{2i+1}^2 & 0 \\ 0 & c_2^k \prod_{i=1}^k \varepsilon_{2i}^2 \end{pmatrix}$$
$$B_{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & c_2^{k+1} \prod_{i=1}^{k+1} \varepsilon_{2i}^2 \\ c_2^k \prod_{i=1}^k \varepsilon_{2i+1}^2 & 0 \end{pmatrix}$$

su $k \geqslant 1$. Jei matricos $A_{k\times l}$ norma apibrėžiama lygybe 3.7, tai, pasirėmus tolydaus atvaizdžio principu (žr. [3]) ir didžiųjų skaičių dėsniu, gauname, kad

$$\begin{aligned} \frac{1}{2k} \ln\|B_{2k}\| &= \frac{1}{2k} \ln \max\Big(c_2^k \prod_{i=1}^k \varepsilon_{2i+1}^2, c_2^k \prod_{i=1}^k \varepsilon_{2i}^2 \Big) \\ &= \max\Big(\frac{1}{2k} \ln c_2^k \prod_{i=1}^k \varepsilon_{2i+1}^2, \frac{1}{2k} \ln c_2^k \prod_{i=1}^k \varepsilon_{2i}^2 \Big) \\ &\xrightarrow{P} \frac{1}{2}(\ln c_2 + \ln \varepsilon^2) \ , \end{aligned}$$

kai $k \to \infty$. Visiškai analogiškai gauname, kad

$$\frac{1}{2k+1} \ln\|B_{2k+1}\| \xrightarrow{P} \frac{1}{2}(\ln c_2 + \ln \varepsilon^2) \ .$$

4 HARCH(2) procesas

Pagrindinis šio skyrelio tikslas — sukonstruoti pagalbinį procesą, kurio pagalba galbūt galima charakterizuoti HARCH(2) stacionarumą.

Nagrinėkime HARCH(2) modelį, apibrėžiamą (1.3) ir (1.4) lygtimis. Tarkime, kad $\mathrm{P}(x_0 = 0) = \mathrm{P}(x_1 = 0) = 0$ ir su $n \geqslant 0$ apibrėžkime naują seką

$$V_n = \begin{pmatrix} v_{n+1} \\ v_n \end{pmatrix} , \tag{4.1}$$

kurios koordinatės gaunamos iš HARCH(2), paėmus $c_0 = 0$. Tiksliau —

$$v_{n+1} = \sqrt{c_1 v_n^2 + c_2(v_{n-1} + v_n)^2}\varepsilon_{n+1}, \tag{4.2}$$

kai $n \geqslant 1$ ir $v_i = x_i, i = 0, 1$. Pažymėkime $y_n = \frac{v_{n+1}}{v_n}$. Tada turime, kad $y_0 = \frac{v_1}{v_0}$ ir

$$\begin{aligned} y_n &= \frac{v_{n+1}}{v_n} \\ &= \frac{1}{v_n}\sqrt{c_1 v_n^2 + c_2(v_{n-1} + v_n)^2}\varepsilon_{n+1} \\ &= \frac{\mathrm{sign}(v_n) v_n}{v_n}\sqrt{c_1 + c_2\Big(1 + \frac{v_{n-1}}{v_n}\Big)^2}\varepsilon_{n+1} \\ &= \mathrm{sign}(v_n)\sqrt{c_1 + c_2\Big(1 + \frac{1}{y_{n-1}}\Big)^2}\varepsilon_{n+1} , \end{aligned} \tag{4.3}$$

kai $n \geqslant 1$. Pastebėsime, kad $\mathrm{sign}(v_n) = \mathrm{sign}(\varepsilon_n)$ su $n \geqslant 2$.

4.1 teiginys. *Tegu tenkinamos sąlygos*

S1) $\mathrm{E}|\ln \varepsilon_n^2| < \infty$;

S2) ε_n *turi absoliučiai tolydžią komponentę, kuri teigiama intervale* $(-\infty, \infty)$;

S3) $c_1 > 0$.

Tada $(Y_n, n \geqslant 0)$, *apibrėžiamas lygybėmis*

$$\begin{aligned} Y_0 &= \begin{pmatrix} \mathrm{sign}(v_1) \\ y_0 \end{pmatrix}, \\ Y_n &= \begin{pmatrix} \mathrm{sign}(\varepsilon_{n+1}) \\ y_n \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.4}$$

turi stacionarų sprendinį.

Įrodymas. Kaip ir 3.1 teiginio įrodyme, pasirėmę teoremomis 2.1, 2.2 bei S2 sąlyga, gauname, kad grandinė (Y_n) yra Hariso, neskaidi ir aperiodinė. Todėl vėl gi belieka sukonstruoti kompaktą ir testinę funkciją V, kuriems būtų teisinga 2.3 teoremos (iv) nelygybė.

Tegu

$$V(u, y) = \begin{cases} \ln y^2, & \text{kai } |y| > 1 \ ; \\ 2\ln y^{-2}, & \text{kai } 0 < |y| \leqslant 1 \ ; \\ 0, & \text{kai } y = 0 \ . \end{cases} \tag{4.5}$$

Tada, jei $|y| > a > 1$, tai

$$\begin{aligned}\Delta V(Y) = \mathrm{E}\big[&(\mathbf{1}_{\{\varepsilon^2(c_1+c_2(1+y^{-1})^2)>1\}} - \mathbf{1}_{\{\varepsilon^2(c_1+c_2(1+y^{-1})^2)\leqslant 1\}}2)\\ &\times \ln\big((c_1+c_2(1+y^{-1})^2)\varepsilon^2\big)\big] - \ln y^2\\ = {}&\ln\big(c_1+c_2(1+y^{-1})^2\big)\\ &\times\big(\mathrm{P}\big\{\varepsilon^2(c_1+c_2(1+y^{-1})^2)>1\big\} - 2\,\mathrm{P}\big\{\varepsilon^2(c_1+c_2(1+y^{-1})^2)\leqslant 1\big\}\big)\\ &+\mathrm{E}\big[(\mathbf{1}_{\{\varepsilon^2(c_1+c_2(1+y^{-1})^2)>1\}} - \mathbf{1}_{\{\varepsilon^2(c_1+c_2(1+y^{-1})^2)\leqslant 1\}}2)\ln\varepsilon^2\big] - \ln y^2\\ \leqslant{}& \max\big(\ln(c_1+c_2(1+a^{-1})^2), -2\ln(c_1+c_2(1-a^{-1})^2)\big)\\ &+2\,\mathrm{E}|\ln\varepsilon^2| - 2\ln a\\ \leqslant{}& -1\ ,\end{aligned}$$

kai a pakankamai didelis. Jei $|y| < b < 1$, tai

$$\begin{aligned}\Delta V(Y) = \mathrm{E}\big[&(\mathbf{1}_{\{\varepsilon^2(c_1+c_2(1+y^{-1})^2)>1\}} - \mathbf{1}_{\{\varepsilon^2(c_1+c_2(1+y^{-1})^2)\leqslant 1\}}2)\\ &\times \ln\big((c_1+c_2(1+y^{-1})^2)\varepsilon^2\big)\big] - 2\ln y^{-2}\\ = {}&\ln\big(c_1+c_2(1+y^{-1})^2\big)\\ &\times\big(\mathrm{P}\big\{\varepsilon^2(c_1+c_2(1+y^{-1})^2)>1\big\} - 2\,\mathrm{P}\big\{\varepsilon^2(c_1+c_2(1+y^{-1})^2)\leqslant 1\big\}\big)\\ &+\mathrm{E}\big[(\mathbf{1}_{\{\varepsilon^2(c_1+c_2(1+y^{-1})^2)>1\}} - \mathbf{1}_{\{\varepsilon^2(c_1+c_2(1+y^{-1})^2)\leqslant 1\}}2)\ln\varepsilon^2\big] - 2\ln y^{-2}\\ \leqslant{}& \big(\ln(c_1y^2+c_2(1+y)^2)+\ln y^{-2}\big)\,\mathrm{P}\big\{\varepsilon^2(c_1+c_2(1+y^{-1})^2)>1\big\}\\ &+2\,\mathrm{E}|\ln\varepsilon^2| - 2\ln y^{-2}\\ \leqslant{}& \ln(c_1+4c_2)+2\,\mathrm{E}|\ln\varepsilon^2| - \ln b^{-2}\\ \leqslant{}& -1\ ,\end{aligned}$$

kai b pakankamai mažas. Taigi, $\Delta V(Y) \leqslant -1$ už kompakto $C = \{-1, 1\} \times \{[-a, -b]\bigcup[b, a]\}$ ribų. Iš logaritmo tolydumo, funkcijos V apibrėžimo ir sąlygos S3 gauname, kad pačiame kompakte $\Delta V(Y)$ yra aprėžta. □

Tarkime, kad tenkinamos ką tik gauto teiginio sąlygos ir π žymi stacionarų sekos (Y_n) skirstinį. Tada iš didžiųjų skaičių dėsnio turime, kad

$$\int |f(x)|d\pi(x) < \infty \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(Y_i) = \mathrm{E}_\pi\big[f(Y_0)\big]\ ,$$

t.y. egzistuoja riba

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\ln y_i^2 = \gamma\ ,$$

jei tik $\int|\ln x_2^2|d\pi(x_1, x_2) < \infty$. Naudojantis analogija su ARCH(2) procesu yra pagrindo manyti, kad HARCH(2) turi stacionarų skirstinį, kai $\gamma < 0$, ir neturi, kai $\gamma > 0$.

5 Pavyzdys

Tam, kad empiriškai pagrįsti teorinius samprotavimus buvo parašyta programėlė, kurios pagalba sugeneruotos dvi sekos. Viena seka, kuri pagal prielaidą nėra stacionari, ir seka, kuri turėtų turėti stacionarų sprendinį. Laikyta, kad

$\mathfrak{L}(\varepsilon_n) = N(0,1), n \geqslant 2$, tiek vienu, tiek kitu atveju. Skaičiaus γ įverčiu laikyta suma

$$\widehat{\gamma} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \ln y_i^2$$

Nestacionarios sekos atveju paimti tokie parametrai

$$c_0 = 0.1, c_1 = 0.5, c_2 = 4,$$

gautas $\widehat{\gamma} = 0.4440253002$. Stacionarios sekos atveju paimti tokie parametrai

$$c_0 = 0.1, c_1 = 0.5, c_2 = 0.001,$$

gautas $\widehat{\gamma} = -1.870343855$. Imties tūris $n = 65$ abiem atvejais, kadangi nestacionarios sekos atveju generuojant didelę imtį kartais gaudavosi perpildymas.

Priede pateikiamos lentelės ir grafikai iliustruoja sekos elgesį vienu ir kitu atveju.

References

[1] P. Bougerol and N.Picard. Stationarity of garch processes and of some non negative time series. *Econometrics*, pages 115–127, 1992.

[2] S. P. Meyn and R.L. Tweedie. *Markov Chains and Stochastic Stability.* Springer-Verlag, London, 1996.

[3] A. W. Van Der Vaart. *Asymptotic statistics.* Cambridge university press, Cambridge, United Kingdom, 2000.