VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
INFORMATIKOS KATEDRA

Magistro baigiamasis darbas

Modalumo logikos S4 kai kurios išsprendžiamos klasės

Some Decidable Classes of Modal Logic S4

Atliko:

Viktorija Laučiškaitė (parašas)

Darbo vadovas:

doc. dr. Stanislovas Norgėla (parašas)

Recenzentas:

a. Anželika Šalaviejienė (parašas)

Vilnius
2006

Turinys

Įvadas.

Logika [gr. logike] – mokslas tiriantis priimtinus samprotavimo būdus, taisyklingas mąstymas, samprotavimų eigą.

Logika tyrinėja kurios nors kalbos tvirtinamojo pobūdžio sakinius. Kelia klausimą, tie sakiniai yra teisingi, ar klaidingi. Šitokie sakiniai dar vadinami teiginiais. Teiginių logikos abėcėlę sudaro loginiai kintamieji ir loginės operacijos (neigimas, konjunkcija, disjunkcija bei implikacija). Jų ir skliaustų pagalba mes galime konstruoti formules. Kiekvieną teiginį galime užrašyti formulių pagalba ir išnagrinėjus susijusius teiginius (formules) daryti išvadas. Pvz.: turime teiginius: “Jei studentas lanko paskaitas, tai jis išlaikys egzaminus” ir “Jonas lanko paskaitas”. Iš šių dviejų teiginių galime daryti išvadą, kad Jonas išlaikys egzaminus. Iš tikrųjų matome, kad teiginių logika padeda taisyklingai mąstyti. Bet teiginių logika ne vienintelė žinoma ir nagrinėjama logika, jų yra daug daugiau.

Mano baigiamajame bakalauro darbe buvo išnagrinėta modalumo logiką S4, panašumai ir skirtumai tarp teiginių logikos bei modalumo logikos ir konkreti modalumo logiką S4. Taip pat, kai kurios modalumo logikos S4 formulių klasės bei jų išsprendžiamumas. Šis darbas padėjo geriau suprasti modalumo logikos sampratą, patobulinti įrodinėjimo įgūdžius.

Nagrinėjant bet kurią logiką, įdomu ir reikalinga žinoti, kokios jos formulės yra išsprendžiamos, bei kaip supaprastinti formulių įrodinėjimą. Kaip tik supaprastintam formulių įrodinėjimui naudojamos skirtingos logikos formulių klases, bei jų išsprendžiamumas. Juk jei mes žinome, kad formulė yra neišsprendžiama, nereikia gaišti laiko bandant ją įrodyti. Todėl šio magistrinio darbo tikslas – ne tik pratęsti jau pradėtą darbą, pagilinti įgytas žinias, bet ir panaudoti šias žinias ieškant naujų išsprendžiamumo klasių.

1. Modalumo logika S4.

Modalumo logika, tai papildyta klasikinė logika. Jos pagalba galime nagrinėti teiginius su modalumo operatoriais “būtinai” ir “galbūt”. Apibrėžkime pagrindines sąvokas, naudojamas modalumo logikoje.

Modalumo logikos kalbos **abėcėlė**:

1. Loginės operacijos: $\neg$ (neigimas), & (konjunkcija), $\vee$ (disjunkcija), $\rightarrow$ (implikacija);
2. Bendrumo $\forall$ ir egzistavimo $\exists$ kvantoriai;
3. Modalumo operatoriai: “būtinai” $\Box$, “galbūt” $\Diamond$;
4. Loginiai kintamieji;

Modalumo logikoje **formulė** yra:

1. Loginis kintamasis;
2. Jei F formulė, tai ir $\neg$F irgi formulė;
3. Jei F, S formulės, tai ir (F&S), (F$\vee$S), (F$\rightarrow$S) formulės;
4. Jei F formulė, tai ir $\Box$F, $\Diamond$F formulės;

Modalumo logikos formulėms naudosime standartine S.Kripke semantika. Mums bus reikalingi tokie terminai:

1. Φ = (M, R, V) – S.Kripke struktūra modalumo logikų teiginių formulėj F. Čia, M – netuščia **galimų pasaulių aibė**, R – predikatas, apibrėžtas aibėje M, kitaip vadinamas **sąryšiu tarp pasaulių**, V – **interpretacijų aibė** pasauliuose.

Kada formulę F vadinsime **teisinga**:

1. Jei F yra loginis kintamasis, tai ji yra teisinga tada ir tik tada , kai ji yra teisinga pasaulyje α;
2. Jei F = $\neg$G, tai F teisinga tada ir tik tada, kai G klaidinga pasaulyje α;
3. Jei F = G&H, tai F teisinga tada ir tik tada, kai abi G, H teisingos pasaulyje α;
4. Jei F = G$\vee$H, tai F teisinga tada ir tik tada, kai bent vena iš G, H teisinga pasaulyje α;
5. Jei F = G$\rightarrow$H, tai F teisinga tada ir tik tada, kai G klaidinga, arba H teisinga pasaulyje α;
6. Jei F = $\Box$G, tai F teisinga tada ir tik tada, kai G teisinga visuose tokiuose pasauliuose α’, kad R(α, α’) = t;

7. Jei F = ◊G, tai F teisinga tada ir tik tada, kai atsiras bent vienas toks pasaulis α’, kad R(α, α’) = t ir G teisinga pasaulyje α’;

Formulė F **įvykdoma**, jei egzistuoja tokia struktūra Φ = (M, R, V) ir pasaulis $\alpha \in$ M, kad F įvykdoma pasaulyje α;

Formulė F **tapačiai teisinga**, jei ji teisinga bet kurios struktūros kiekviename pasaulyje;

Formulė F **tapačiai klaidinga**, jei ji klaidinga bet kurios struktūros kiekviename pasaulyje;

Pavyzdys: F = ☐p. Struktūrą Φ = (M, R, V) apibrėžiame tokiu būdu, M – VU studentai, R(x, y) = t tada ir tik tada, kai studentai x ir y paskaitoj sėdi šalia. Interpretacijos V – studentas mokosi vien dešimtukais. Tuomet, priklausomai nuo pasirinkto pasaulio, formulė F gali būti teisinga, arba klaidinga. Jeigu pasirinktas pasaulis – studentas pirmūnas, šalia kurio sėdės dar vienas pirmūnas, tai formulė bus teisinga. Jei pasirinktas pasaulis – blogai besimokinantis studentas, tai ši formulė bus klaidinga. Reiškia, formulė F įrodoma, bet ne tapačiai teisinga.

Papildžius klasikinės teiginių logikos Hilberto skaičiavimus aksiomomis bei taisyklėmis, gaunami skirtingi skaičiavimai. Skaičiavimas, kurio aksiomos yra 1.1 – 4.3, *t*, *k*, *4,* o taisyklės MP ir AT, vadinamas modalumo logikos S4 skaičiavimu, arba tiesiog **modalumo logika S4**.

Aksiomos:

1.1 A→(B→A)

1.2 (A→(B→C)) → ((A→B)→(A→C))

2.1 (A &B) →A

2.2 (A &B) →B

2.3 (A→B) → ((A→C) → (A→ (B &C)))

3.1 A→(A∨B)

3.2 B→ (A∨B)

3.3 (A→C)→((B→C)→((A∨B)→C))

4.1 (A→B)→(¬B→¬A)

4.2 A→¬¬A

4.3 ¬¬A→A

k. □(A→B)→(□A→□B)

t. □A→A

4. □A→□□A

Taisyklės:

Modus ponens (MP): $\dfrac{A, A \rightarrow B}{B}$;

Apibendrinimo (AT): $\dfrac{A}{\Box A}$

Be modalumo logikos **S4** taip pat yra ir kitų modalumo logikų. Skaičiavimas, kuriame yra 1.1 – 4.3 ir *k* aksiomos, vadinamas modalumo logika **K**. Modalumo logika **T** nusakoma skaičiavimu, kuris susideda iš 1.1 – 4.3 ir *k*, *t* aksiomų. Formulę □A→◊A pažymėkime raide *d*, o formulę ◊□A→□A – skaičiumi *5*. Modalumo logikos **D** skaičiavimą sudaro 1.1 – 4.3, *k*, *d*, aksiomos, o logikos **S5** – 1.1 – 4.3, *k*, *t*, *4*, *5* aksiomos. Taisyklės MP, AT yra šių modalumo logikų taisyklės.

Modalumo logikos tarp kurių aksiomų yra aksioma *k*, vadinamos **normaliosiomis**, priešingu atveju – **pusiau normaliosiomis**. Kaip matome, modalumo logika S4 yra normalioji, nes į jos aksiomas įeina aksioma *k*.

Kai kuriose aksiomose yra tam tikrų pasaulių sąryšių apribojimų. Pavyzdžiui, aksiomą *t* atspindi savybę: ∀x R(x,x), o aksioma *4* - ∀x∀y∀z((R(x,y)&R(y,z)) →R(x,z)). Iš čia išplaukia, kad modalumo logikoje S4 formulė yra tapačiai teisinga, tada ir tik tada, kai ji teisinga kiekvienos struktūros, kurios sąryšis yra refleksyvus ir tranzityvus, bet kuriame pasaulyje.

Formulės F **išvedimu** modalumo logikos skaičiavime S4 vadinsime baigtinę formulių seką, kurį baigiasi formule F ir kurios kiekvienas narys yra modalumo logikos S4 skaičiavimo aksioma arba gautas iš kairėje nuo jo esančių narių pagal taisyklę MP ar AT.

Formulės F ir G vadinamos **ekvivalenčiomis** (žymėsime F ≡ G) modalumo logikoje S4, jei jų reikšmės vienodos bet kurios struktūros kiekviename pasaulyje. Pasaulio sąryšiai tenkina logikos S4 sąryšių apribojimus.

Modalumo logikoje S4 galioja tokie ekvivalentumai:

1. $\Diamond\Diamond p \equiv \Diamond p$
2. $\Box\Box p \equiv \Box p$
3. $(\Box\Diamond)^2 p \equiv \Box\Diamond p$
4. $(\Diamond\Box)^2 p \equiv \Diamond\Box p$
5. $\neg\Box p \equiv \Diamond\neg p$
6. $(\Box p \& \Box q) \equiv \Box(p \& q)$
7. $(\Diamond p \vee \Diamond q) \equiv \Diamond (p \vee q)$

Bet $\Box p \vee \Box q$ ir $\Box(p \vee q)$ nėra ekvivalenčios. Lygiai taip pat, kaip ir $\Diamond p \& \Diamond q$, $\Diamond(p \vee q)$.

Nagrinėjame formules pavidalo M_1, $...M_n l$. Čia M_i, $i <= n$ yra viena iš modalumo operatorių $\Box$, $\Diamond$, o l – klasikinės logikos litera. Kai kurias tokio pavidalo formules galima redukuoti į ekvivalenčias, kuriose modalumo operatorių mažiau. Pavyzdžiui, formulė $\Box\Box\Box\neg p$ logikoje S4 redukuojama į $\Box\neg p$, bet neredukuojama į $\neg p$. Išvardinsime visas neredukuotinas modalumo logikos S4 formules: l, $\Box l$, $\Diamond l$, $\Box\Diamond l$, $\Diamond\Box l$, $\Box\Diamond\Box l$, $\Diamond\Box\Diamond l$.

Tarkime A yra kurios nors formulės F poformulis. Tai žymėsime F(A). Klasikinėje logikoje yra teisingas tvirtinimas jei $A \equiv B$, tai ir $F(A) \equiv F(B)$. Deja, tai neteisinga modalumo logikose. Pavyzdžiui, modalumo logikoje S4 iš to, kad $p \equiv q$ neišplaukia $\Box p \equiv \Box q$, nes tokios išvedimo paieškos medžio šakos negalime pratęsti iki aksiomų:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{q, p, \Box p \vdash \Box q}{\ldots}}{q, q \to p, \Box p \vdash \Box q}}{\ldots}}{p \to q, q \to p \vdash \Box p \to \Box q}}{\ldots}}{(p \to q) \& (q \to p) \vdash (\Box p \to \Box q) \& (\Box q \to \Box p)}}{}$$

Bet, jei formulės A, B tenkina savybę, kad logikoje S4 išvedama $\Box(A \equiv B)$, tai keitimas formulėje F, išlaikant ekvivalentumą galimas. Teisingas tvirtinimas (pateiksime be įrodymo):

Kokia bebūtų formulė F ir jos poformulis A, modalumo logikoje S4 iš to, kad $\Box(A \equiv B)$, išplaukia $F(A) \equiv F(B)$.

Taigi, keitimas formulių ekvivalenčiais ne visada leistinas. Tarkime formulėse tėra loginės operacijos $\neg$, &, $\vee$. Įrodyta, kad modalumo logikoje S4 tokioms formulėms galima rasti ekvivalenčias, kuriose neigimas yra tik prieš loginius kintamuosius. Tai gaunama, įkeliant neigimą į skliaustus naudojantis žinomomis klasikinės logikos formulėmis ir $\neg\Box A \equiv \Diamond\neg A$, $\neg\Diamond A \equiv \Box\neg A$. Šiuo atveju, negalime apsieiti tik modalumo operatoriumi $\Box$. Naudojame abu modalumo operatorius. [Nor04]

Taip pat, žinome, kad ir kokia būtų formulė, galima rasti jai ekvivalenčią, kurioje yra tik loginės operacijos $\neg$, &, $\vee$ ir neigimas gali būti tik prieš loginius kintamuosius.

2. Kvantorinė modalumo logika S4

Tą pačią modalumo logiką atitinka skirtingos kvantorinės logikos. Jos skirstomos pagal individinių konstantų aibių, termų žymėjimų bei konstantų egzistavimo reikalavimus.

Individinių konstantų aibė.

Jei individinių konstantų aibė yra viena ir ta pati visuose pasauliuose, tai sakome, kad ji yra pastovi. Jei ne, tai sakoma, kad individinių konstantų aibė yra kintanti.

Termų žymėjimas.

Jei bet kuris simbolis apibrėžiamas vienodai visuose gretimuose pasauliuose v, w, t.y R(v, w) = t, tai logika vadinama fiksuotąja, priešingu atveju – nefiksuotąja.

Objektų (konstantų egzistavimas).

Jei nesvarbu, koks yra pasaulis w, nagrinėjamosios logikos kalbos n-vietis funkcinis simbolis f ir pasaulio w individinių konstantų aibės elementai $a_1, \dots , a_n$, $f(a_1, \dots , a_n)$ taip pat priklauso pasaulio w individinių konstantų aibei, tai logika vadinama lokaliąja, priešingu atveju – nelokaliąja.

Mes nagrinėsime tik kvantorinę modalumo logiką S4, gautą iš klasikinės predikatų logikos, papildžius ją atitinkamomis modalumo operatorių aksiomomis bei taisyklėmis.

Aprašysime sekvencinį kvantorinės modalumo logikos S4 skaičiavimą, kai nagrinėjamose formulėse yra tik loginės operacijos $\neg$, &, $\vee$ ir neigimas yra tik prieš atomines formules. Tokias formules vadiname teigiamosiomis.

Aksiomos: $\Gamma, F, \neg F \vdash$.

Taisyklės:

$$(\&)\ \frac{\Gamma, G, H \vdash}{\Gamma, G\&H \vdash} \qquad (\vee)\ \frac{\Gamma, G \vdash \quad \Gamma, H \vdash}{\Gamma, G\vee H \vdash}$$

$$(\Box)\ \frac{\Gamma, G, \Box G \vdash}{\Gamma, \Box G \vdash} \qquad (\Diamond)\ \frac{\Gamma^*, G \vdash}{\Gamma, \Diamond G \vdash}$$

, kur sąrašas Γ^* susideda iš visų Γ formulių, prasidedančių operatoriumi $\Box$.

$$(\forall)\ \frac{\Gamma, G(t), \forall x G(x) \vdash}{\Gamma, \forall x G(x) \vdash} \qquad (\exists)\ \frac{\Gamma, G(a) \vdash}{\Gamma, \exists x G(x) \vdash}$$

, kur t – kuris nors termas laisvas kintamojo x atžvilgiu formulėje F, a – naujas laisvasis kintamasis, neįeinantis į apatinę sekvenciją.

Pateiksime keletą išvedamų sekvencijų pavyzdžių:

1. Sekvencija $\exists x\Box\forall yP(x,y), \Diamond\exists y\forall x\neg P(x,y)\vdash$ išvedama taip:

$$\begin{array}{cl}
\text{aksioma} & \\
\Box\forall yP(a,y), \forall yP(a,y), P(a,b), \neg P(a,b), \forall x\neg P(x,b)\vdash & \text{Taisyklė } (\forall) \\ \hline
\Box\forall yP(a,y), \forall yP(a,y), P(a,b), \forall x\neg P(x,b)\vdash & \text{Taisyklė } (\forall) \\ \hline
\Box\forall yP(a,y), \forall yP(a,y), \forall x\neg P(x,b)\vdash & \text{Taisyklė } (\Box) \\ \hline
\Box\forall yP(a,y), \forall x\neg P(x,b)\vdash & \text{Taisyklė } (\exists) \\ \hline
\Box\forall yP(a,y), \exists y\forall x\neg P(x,y)\vdash & \text{Taisyklė } (\Diamond) \\ \hline
\Box\forall yP(a,y), \Diamond\exists y\forall x\neg P(x,y)\vdash & \text{Taisyklė } (\exists) \\ \hline
\exists x\Box\forall yP(x,y), \Diamond\exists y\forall x\neg P(x,y)\vdash &
\end{array}$$

2. Sekvencija $\exists x\Box A(x)\vee\exists x\Box B(x)\vdash\Box\exists x(A(x)\vee B(x))$ išvedama taip:

$$\begin{array}{cc}
\text{aksioma} & \text{aksioma} \\ \hline
\Box A(a), A(a), \neg A(a), \neg B(a)\vdash & \Box B(a), B(a), \neg A(a), \neg B(a)\vdash \\ \hline
\Box A(a), A(a), \neg A(a)\& \neg B(a)\vdash & \Box B(a), B(a), \neg A(a)\& \neg B(a)\vdash \\ \hline
\Box A(a), \neg A(a)\& \neg B(a)\vdash & \Box B(a), \neg A(a)\& \neg B(a)\vdash \\ \hline
\Box A(a), \forall x\neg(A(x)\vee B(x)), \neg(A(a)\vee B(a))\vdash & \Box B(a), \forall x\neg(A(x)\vee B(x)), \neg(A(a)\vee B(a))\vdash \\ \hline
\Box A(a), \forall x\neg (A(x)\vee B(x))\vdash & \Box B(a), \forall x\neg (A(x)\vee B(x))\vdash \\ \hline
\Box A(a), \neg\exists x(A(x)\vee B(x))\vdash & \Box B(a), \neg\exists x(A(x)\vee B(x))\vdash \\ \hline
\Box A(a), \Diamond\neg\exists x(A(x)\vee B(x))\vdash & \Box B(a), \Diamond\neg\exists x(A(x)\vee B(x))\vdash \\ \hline
\exists x\Box A(x), \Diamond\neg\exists x(A(x)\vee B(x))\vdash & \exists x\Box B(x), \Diamond\neg\exists x(A(x)\vee B(x))\vdash \\ \hline
\multicolumn{2}{c}{\exists x\Box A(x)\vee\exists x\Box B(x), \Diamond\neg\exists x(A(x)\vee B(x))\vdash} \\ \hline
\multicolumn{2}{c}{\exists x\Box A(x)\vee\exists x\Box B(x), \neg\Box\exists x(A(x)\vee B(x))\vdash} \\ \hline
\multicolumn{2}{c}{\exists x\Box A(x)\vee\exists x\Box B(x)\vdash\Box\exists x(A(x)\vee B(x))}
\end{array}$$

3. Sekvencija $\exists x \Box \forall y A(x,y) \vdash \forall y \exists x \neg \Box \neg A(x,y)$ išvedama taip:

aksioma

$$\Box \forall y A(a,y),\ \forall y A(a,y),\ A(a,b),\ \forall x \Box \neg A(x,b),\ \Box \neg A(a,b),\ \neg A(a,b) \vdash$$

$$\Box \forall y A(a,y),\ \forall y A(a,y),\ A(a,b),\ \forall x \Box \neg A(x,b),\ \Box \neg A(a,b) \vdash$$

$$\Box \forall y A(a,y),\ \forall y A(a,y),\ A(a,b),\ \forall x \Box \neg A(x,b) \vdash$$

$$\Box \forall y A(a,y),\ \forall y A(a,y),\ \forall x \Box \neg A(x,b) \vdash$$

$$\Box \forall y A(a,y),\ \forall x \Box \neg A(x,b) \vdash$$

$$\Box \forall y A(a,y),\ \exists y \forall x \Box \neg A(x,y) \vdash$$

$$\exists x \Box \forall y A(x,y),\ \exists y \forall x \Box \neg A(x,y) \vdash$$

$$\exists x \Box \forall y A(x,y),\ \neg \forall y \exists x \neg \Box \neg A(x,y) \vdash$$

$$\exists x \Box \forall y A(x,y) \vdash \forall y \exists x \neg \Box \neg A(x,y)$$

4. Sekvencija $\Box \forall x A(x) \& \Box \forall x B(x) \vdash \Box \forall x (A(x) \& B(x))$ išvedama taip:

aksioma aksioma

$$A(a),\ \forall x A(x),\ \Box \forall x A(x),\ B(a),\ \forall x B(x),\ \Box \forall x B(x) \vdash A(a) \qquad \Delta$$

$$A(a),\ \forall x A(x),\ \Box \forall x A(x),\ B(a),\ \forall x B(x),\ \Box \forall x B(x) \vdash A(a) \& B(a)$$

$$A(a),\ \forall x A(x),\ \Box \forall x A(x),\ \forall x B(x),\ \Box \forall x B(x) \vdash A(a) \& B(a)$$

$$A(a),\ \forall x A(x),\ \Box \forall x A(x),\ \Box \forall x B(x) \vdash A(a) \& B(a)$$

$$\forall x A(x),\ \Box \forall x A(x),\ \Box \forall x B(x) \vdash A(a) \& B(a)$$

$$\Box \forall x A(x),\ \Box \forall x B(x) \vdash A(a) \& B(a)$$

$$\Box \forall x A(x),\ \Box \forall x B(x) \vdash \forall x (A(x) \& B(x))$$

$$\Box \forall x A(x),\ \Box \forall x B(x) \vdash \Box \forall x (A(x) \& B(x))$$

$$\Box \forall x A(x) \& \Box \forall x B(x) \vdash \Box \forall x (A(x) \& B(x))$$

Kur $\Delta = A(a),\ \forall x A(x),\ \Box \forall x A(x),\ B(a),\ \forall x B(x),\ \Box \forall x B(x) \vdash B(a)$

5. Sekvencija $(\Box\Box A(x))\&(\Box((\Diamond\neg A(x))\vee B(x)))\&(\Box\neg b)\&(\Diamond\neg b) \vdash$ išvedama taip:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{aksioma}}{A(a),\ \forall yA(y),\ \Box\forall yA(y) \vdash A(a)}}{\forall yA(y),\ \Box\forall yA(y) \vdash A(a)}}{\Box\forall yA(y) \vdash A(a)}}{\Box\forall yA(y) \vdash \Box A(a)}}{\Box\forall yA(y) \vdash \forall y\Box A(y)}}{\vdash \Box\forall yA(y) \rightarrow \forall y\Box A(y)}
$$

3. Kai kurių modalumo logikos S4 klasių išsprendžiamumas

Nagrinėjant bet kurią logiką, įdomu ir reikalinga žinoti, kokios jos formulės yra išvedamos, bei kaip supaprastinti formulių įrodinėjimą. Mes nagrinėsime kai kurias kvantorinės modalumo logikos S4 klases bei jų išsprendžiamumą. Nagrinėjamos formulės bus be funkcinių simbolių. Formulėje F bus tik loginės operacijos $\vee$, $\wedge$ ir neigimas sutinkamas tik prieš atomines formules.

1 apibrėžimas:

Formulė $R_{1\ldots}R_nG$, kurioje R_i (i=1...n) kvantoriai ($\forall$ – bendrumo, $\exists$ – egzistavimo), arba modalumo operatoriai, o G – bekvantorė formulė, yra **apibendrintoje normaliojoje priešdėlinėje formoje**. $R_{1\ldots}R_n$ vadinsime prefiksu, o G – matrica.

2 apibrėžimas:

Duota formulė G. Formulė G', kuri gauta, pašalinus iš G visus modalumo operatorius, vadinama formulės G **projekcija**.

Pavyzdys:

Jei F = $\Box p \& (\neg q \vee \Diamond \Box p)$, tai jos projekcija pr(F) = $p \& (\neg q \vee p)$.

Pastebėsime, kad jei klasikinės logikos formulė pr(F) nėra tapačiai teisinga, tai ir F nėra tapačiai teisinga. Iš tikrųjų, atsiras interpretacija, su kuria pr(F) klaidinga. Tuomet struktūra apibrėžiame tokiu būdu. M susideda iš vienintelio elemento a. R(a, a) = t. Aibei V priklauso tik viena interpretacija. Būtent tam su kuria pr(F) klaidinga. Tuomet abiejų formulių F, pr(F) reikšmės sutampa, t.y. F klaidinga.

Antra vertus, jei pr(F) tapačiai teisinga, F nebūtinai tapačiai teisinga. Pavyzdžiui, formule $(p \vee q) \rightarrow (p \vee q)$ tapačiai teisinga, o $\Box(p \vee q) \rightarrow (\Box p \vee \Box q)$ nėra tapačiai teisinga. Tarkim, M – natūralių skaičių aibė. R(x, y) = t tada ir tik tada, kai y = x + 1 arba y = x + 2. V yra tokių interpretacijų aibė: p – pasaulis nusakomas lyginiu skaičiumi, q – pasaulis nusakomas nelyginiu skaičiumi. Tuomet bet kuriame duotosios struktūros pasaulyje formulė $\Box(p \vee q) \rightarrow (\Box p \vee \Box q)$ klaidinga.

1 Lema:

Jei $F(p_1, ..., p_n)$ tapačiai teisinga klasikinės teiginių logikos formulė ir $G_1, ..., G_n$ bet kurios modalumo logikų formulės, tai $F(G_1, ..., G_n)$ išvedama kiekvienoje modalumo logikoje.

Įrodymas:

Kadangi $F(p_1, ..., p_n)$ tapačiai teisinga formulė, tai atsiras tokia baigtinė klasikinės teiginių logikos formulių seka $F_1, ...,F_s$, kad $F = F_s$ ir kiekvienas narys F_i yra viena iš aksiomų 1.1 – 4.3 arba gautas iš kairėje jo esančių formulių F_k, F_m ($k, m < i$) pagal taisyklę modus ponents. Pakeiskime visose išvedime naudojamose formulėse loginius kintamuosius p_i ($i = 1, ..., n$) formulėmis G_i. Tuomet gausime modalumo logikų formulės $F(G_1, ..., G_n)$ išvedimą, kuriame panaudotos tik aksiomos 1.1 – 4.3 ir taisyklė modus ponents. Kadangi šios aksiomos ir taisyklė priklauso visoms nagrinėjamoms modalumų logikoms, tai tuo pačiu gavome ir išvedimą modalumų logikose. Lema įrodyta. [Nor04]

3 apibrėžimas:

Jei P n-vietis predikatinis simbolis ir t1...tn termai, tai P(t1...tn) vadinama **atomine formule**, arba tiesiog **atomu**.

Norėdami palengvinti kai kurių modalumo logikos formulių įrodinėjimą, pabandysim išskirti išsprendžiamas formulių klases. Iš pradžių, apžvelgsime jau aprašytas ir išnagrinėtas modalumo logikos S4 išsprendžiamumo klases.

4 apibrėžimas:

Skaičiavimą vadinsime **minus-normaliuoju**, jei termas t taisyklėje $(\forall \vdash)$

$$(\forall \vdash) \quad \frac{\Gamma, G(t), \forall x G(x) \vdash}{\Gamma, \forall x G(x) \vdash}$$

yra pagrindinis, įeinantis į kurią nors išvados formulę. Jei išvadose nėra pagrindinių termų, tai t yra kuri nors nauja konstanta a.

1 teorema: Jeigu formulė yra išvedama modalumo logikos skaičiavime S4, tai ji yra išvedama ir minus-normaliajame skaičiavime S4.

Įrodymas:

Priminsime, kad nagrinėsime formules be funkcinių simbolių. Ši teorema nėra teisinga formulėms su funkciniais simboliais. Pavyzdžiui, formulė $\forall x \forall y \Diamond \forall z \Diamond (P(x) \& (Q(y) \& \neg Q(f(z)))) \vdash$ yra išvedama skaičiavime S4, bet nėra išvedama minus-normaliajame skaičiavime S4.

Skaičiavime S4 mes galime sukonstruoti išvedimą taip, kad kiekvienas taisyklės ($\exists \vdash$)

$$(\exists \vdash) \quad \frac{\Gamma, G(a) \vdash}{\Gamma, \exists x G(x) \vdash}$$

(kur a – naujas laisvasis kintamasis, neįeinantis į apatinę sekvenciją)

panaudojimas, atitiktų sąlygą: laisvasis kintamasis yra naujas ne tik nagrinėjamoje šakoje, bet ir visame išvedimo medyje. Paskutinė išvedimo medžio formulė bus aksioma. Mes atseksime kelia nuo tos aksiomos iki išvedimo medžio pradžios. Tarkime, radome pirmą taisyklės ($\forall \vdash$)

$$(\forall \vdash) \quad \frac{\Gamma, G(t), \forall x G(x) \vdash}{\Gamma, \forall x G(x) \vdash}$$

(kur t – kuris nors termas laisvas kintamojo x atžvilgiu formulėje F)

panaudojimą, kuris netenkina minus-normalumo sąlygos. Tai reiškia, kad laisvieji kintamieji priklauso formulės išvadai (pavadinkime vieną iš tų laisvųjų kintamųjų a), bet pagrindinis termas t yra naujas laisvasis kintamasis, neįeinantis į išvadą. Tokiu atveju, mes pakeičiam t į a nagrinėjamos taisyklės prielaidose. Po šito keitimo, medis pasilieka išvedimo medžiu. Iš tikrųjų,

1. Laisvieji kintamieji bet kuriame taisyklės ($\exists \vdash$) panaudojime yra naujieji kintamieji išvedimo medyje. Iš šito seka, kad visi nagrinėjami kintamieji skiriasi nuo a.
2. Kiekvienas taisyklės ($\forall \vdash$) panaudojimas, kuris išvedimo medyje yra aukščiau už nagrinėjama panaudojimą, yra minus-normalusis. Jeigu kurios nors taisyklės ($\forall \vdash$) termas buvo t, jis pasikeis į a.

Pastebėsime, kad t pakeitimo į a išvedimo medžio sudėtingumas gali tik sumažėti. Taip pat įmanoma panaikinti visus taisyklės ($\forall \vdash$) panaudojimus, netenkinančius minus-normalumo sąlygos. [Nor01]

5 apibrėžimas:

Tegu M – kai kurių modalumo formulių aibė. M projekcija, pavadinsime visų aibės M formulių projekcijų aibę.

2 teorema:

Egzistuoja neišsprendžiamų modalumo formulių aibė, pavidalo $\Box\forall y_1...\forall y_l\exists x_1...\exists x_m G\&\neg p$ (kur G – bekvantorė formulė, p – teiginių logikos, loginis kintamasis), tenkinančių savybę, kad kiekvienos atominės formulės modalumo laipsnis, santykinai su G neviršija 1 ir G modalumo operatoriai yra tik prieš literas. Taip pat, klasės projekcija sudaro neišsprendžiamą aibę.

Įrodymas:

Nagrinėkime, uždarų modalumo logikos formulių klasę (t.y. tų, kurios neturi laisvųjų kintamųjų), turinčių tik vienviečius predikatinius kintamuosius. Žinoma, kad tokia klasė yra neišsprendžiama. Egzistuoja algoritmas, kuriuo remiantis, įvedant naujus predikatinius kintamuosius, sekvencijos $\vdash$ F išvedimo nustatymas susiveda į galutinės formulių sekos X_F prieštaros nustatymą. Kiekvieną X_F formulė yra viename iš šių pavidalų:

$\Box\forall\exists(L_1\vee...\vee L_i)$, $\Box\forall(L_1\vee\Box L_2)$, $\Box\forall(L_1\vee\Diamond L_2)$, $\neg p$, (1)

kur L_i, i <= 1, 2, 3, - literos. Nagrinėjamame atvejyje, kai formulės neturi laisvųjų kintamųjų p yra teiginių logikos loginis kintamasis.

Tokiu atveju, X_F formulės yra pavidalo:

$\Box(l_1\vee...\vee l_i)$, $\Box(l_1\vee\Box l_2)$, $\Box(l_1\vee\Diamond l_2)$, l,

kur l_i, i <= 3, - literos. Tiksliau, l_1 antroje formulėje yra loginio kintamojo neigimas, o trečioje formulėje – loginis kintamasis. Tuo pat metu, l_2 antroje formulėje yra loginis kintamasis, o trečioje – kai kurio loginio kintamojo neigimas.

Seka X_F transformuojasi į formulę tokiu būdu:

- kablelį keičiame konjunkcija,
- išnešame $\Box$ prieš formulę (pasinaudojam tuo, kad $(\Box A_1\&...\&\Box A_n) \leftrightarrow \Box(A_1\&...\&A_n)$),
- suvedam gautą formulę į normalią priešdėlinę formą, išnešdami iš pradžių visus bendrumo kvantorius, o paskui egzistavimo kvantorius ir pervadindami individinius kintamuosius, jei to prireikia.

Gauta formulė (pažymėkime ją C) turi pavidalą

$\Box\forall^n\exists^m G \& \neg p$ (2)

(kur G – bekvantorė formulė, kurioje modalumo operatoriai yra tik prieš literas) ir tenkina sąlygą, kad sekvencija $C \vdash$ išvedama tada ir tik tada, kai išvedama $X_F \vdash$. Tokiu atveju, klasė formulių, pavidalo (2) neišsprendžiama.

Panaudotas formulių transformacijos algoritmas su naujų kintamųjų įvedimu, remiasi tuo, kad

$\Box\forall(A \leftrightarrow B) \vdash F(A)$ tada ir tik tada, kai $\vdash F(B)$.

Todėl mes galime ne tik įvedinėti naujus kintamuosius, bet ir naikinti juos, pasinaudojus tais pačiais ekvivalentumais. Formulės pavidalo $\Box B$, įvedus naują predikatinį kintamąjį A, keičiamos į

$\Box\forall(\neg P_B \vee \Box P_A)$, $\Box\forall(P_B \vee \Diamond\neg P_A)$.

Naikinant kintamuosius formulės projekcijoje, ši transformacija tampa P_A pervadinimu P_B.

Tokiu atveju, $pr(X_F) \vdash$ išvedama tada ir tik tada, kai $\vdash pr(F)$. Formulė pr(F) yra klasikinės predikatų logikos formulė su vienviečiais predikatiniais kintamaisiais, todėl tokių formulių aibė yra išsprendžiama. Teorema įrodyta. [Nor02]

Panagrinėkime kvantorinės modalumo logikos formules, turinčias tik vienviečius predikatinius kintamuosius ir tenkinančias sąlygas:

- formulėse bus tik loginės operacijos $\vee$, $\wedge$ ir neigimas sutinkamas tik prieš atomines formules,
- formulės yra normaliosios priešdėlinės formos, t.y. yra pavidalo $Q_1x_1 \ldots Q_mx_mG$ ($Q_i \in \{\forall, \exists\}$, G – bekvantorė formulė) ir neturi laisvųjų kintamųjų,
- kiekvienos formulės modalumo laipsnis neviršija 1,
- formulėje nėra skirtingų individinių kintamųjų įeičių, patenkančių į to paties modalumo operatoriaus veikimo sritį.

Pažymėkime tokią klasę A.

Pavyzdžiui:

Formulė

$\forall x\exists y(\Box(P(x) \vee Q(x)) \& (\Diamond(\neg P(x) \& R(x)) \vee (R(y) \& \neg Q(x)))$

priklauso klasei A.

Formulė

$$\forall x\exists y(\Box(P(x) \vee Q(y)) \,\&\, \Diamond(\neg P(x) \,\&\, R(x))$$

nepriklauso klasei A.

3 teorema:

Klasė A išsprendžiama pagal išvedamumą.

Įrodymas:

Tegu F priklauso A ir P_i, i = 1, 2, ..., - nauji predikatiniai kintamieji, neįeinantys į F. Kiekvieną poformulį, prasidedantį $\Box$ (arba $\Diamond$), keičiam į $P_i(x)$, kur x – individinis kintamasis, įeinantis į nagrinėjamą poformulį (pagal apibrėžimą jis yra vienintelis). Skirtingus poformulius, pakeičiam skirtingais P_i. Gauname klasikinio predikatų skaičiavimo formulę F' su vienviečiais predikatiniais kintamaisiais. Formulei F' galima rasti ekvivalenčią jai formulę pavidalo $\exists x_1...x_n\forall y_1...y_m G'$. Tam pasinaudojame kintamųjų pervadinimo taisykles ir žinomais ekvivalentumais, kurių pagalba formulės transformuojamos į konjunkcines ir disjunkcines normalines formas, taip pat ekvivalentumais, padedančiais išnešti kvantorius prieš pagrindinę formulę. Dabar, formulėje G' pakeitę P_i į atitinkamas formules, prasidedančias $\Box$ ir $\Diamond$, gauname kvantorinės modalumo logikos formulę $\exists x_1...x_n\forall y_1...y_m G$. Pastebėsime, kad individinių kintamųjų skaičius, palyginus su F galėjo padidėti. Formulė F išvedama skaičiavime S4 tada ir tik tada, kai išvedama $\exists x_1...x_n\forall y_1...y_m G \vdash$. Iš tikrųjų, S4 teisinga sąlyga

$$\Box\forall(A\leftrightarrow B) \vdash F(A) \leftrightarrow F(B)$$

Anksčiau paminėti ekvivalentumai tenkina sąlygą $\vdash_{S4} \Box(A\leftrightarrow B)$. Nagrinėjamos sekvencijos

$$\exists x_1...x_n\forall y_1...y_m G \vdash \qquad (3)$$

kiekviename išvedimo medyje galima rasti kitą jos išvedimą, kuris tenkiną sąlygą, kad kiekvienoje šakoje naudojamos tik kvantorinės taisyklės ir tik po jų visos likusios. Gali būti, kad keičiant išvedimo medį, reikės pervadinti kai kuriuos sutinkamus individinius kintamuosius. Šalia išvedimo medyje esančius modalumo operatoriaus „būtinai“ ($\Box$) ir vienos iš kvantorinių taisyklių panaudojimus galima sukeisti vietomis. Jeigu kokioje nors šakoje sutinkamas modalumo operatoriaus „galbūt“ ($\Diamond$) panaudojimas, tai aukščiau jo negali būti panaudotos kvantorinės taisyklės. Mes nagrinėjome tik normaliosios priešdėlinės formos formules, todėl su taisyklės ($\Diamond$) panaikinamos visos formulės, prasidedančios kvantoriais.

Tokiu atveju, turėdami omeny, minus-normalinių formulių sudarymo galimybę, žinome, kad kiekviename pavidalo (3) sekvencijos išvedimo medyje galima rasti kitą tos sekvencijos išvedimo medį, kuris tenkiną šias sąlygas:

- iš pradžių, panaudojamos n kvantorinės taisyklės, jų panaudojimo metu, $x_1...x_n$ bus pakeisti į poromis skirtingus laisvuosius kintamuosius (pažymėsime juos $a_1...a_n$),
- aukščiau m kartų taikoma taisyklė ($\forall$), jų taikymo metu vietoj y_i, $i = 1, ..., m$, į formulę (3) įrašome vieną iš a_j, $j = 1, ..., n$,
- kiekvienoje šakoje, aukščiau už taisyklių ($\forall$), ($\exists$) panaudojimą, sutinkami tik klasikinės ir modalumo logikų taisyklės.

Po pirmo pirmo klasikinės, ar modalumo logikos taisyklės taikymo mes gauname sekvenciją pavidalo:

$$\exists x_1...x_n \forall y_1...y_m G, G\sigma_1, G\sigma_2, ..., G\sigma_s \vdash \quad (4)$$

kur σ_i – keitinys pavidalo $\{a_1/x_1, ..., a_n/x_n, t_1/y_1, ..., t_m/y_m\}$, $t_j \in \{a_1, ..., a_n\}$, $j = 1, ..., m$. Iš viso tokių keitinių negali būti daugiau už m^n. Galima laikyti, kad keitiniai $\sigma_1, ..., \sigma_s$ yra poromis skirtingi. Jeigu kai kurie du $\sigma_k = \sigma_l$, k, l <= s, tai ir formulės $G\sigma_k = G\sigma_l$. Tada sekvencija (4) išvedama tada ir tik tada, kai išvedama sekvencija, kuri skiriasi nuo (4) tuo, kad iš jos pašalinta $G\sigma_l$. Reiškia, klasė A yra išsprendžiama. Teorema įrodyta.

Atkreipkite dėmesį, kad formulės nebūtinai turi turėti tik vienviečius predikatinius kintamuosius. [Nor02]

6 apibrėžimas:

Panagrinėsime kai kurias modalumo operatorių įeitis į formulę $Qx_1...Qx_nG$. Tegul $x_{1i}...x_{is}$, $i1 < i2 < ... < is$, - pilnas individinių kintamųjų, įeinančių į nagrinėjamo modalumo operatoriaus veikimo sritį, skaičius. Tada $Q_{i1}...Q_{is}$ vadinamas nagrinėjamo modalumo operatoriaus įeities prefiksu.

7 apibrėžimas:

Tegu formulės tenkina tokią sąlygą: jeigu į kokio nors modalumo operatoriaus veikimo sritį patenka ne mažiau dviejų individinių kintamųjų, tai visos jų įeitys patenka tik į nagrinėjamo operatoriaus veikimo sritį ir kiekvieno modalumo operatoriaus įeitis turi pavidalą $\forall^k\exists^l$. Tokių formulių klasę pažymėsime B.

Pastebėsime, kad nagrinėjamoms formulėms aibė $\forall^k\exists^l$ negali būti tuščia.

4 teorema:

Klasė B išsprendžiama pagal išvedamumą.

Įrodymas:

Įrodymas yra analogiškas teoremai 3. [Nor02]

5 teorema:

Tarkime, turime tokią apibendrintosios normaliosios priešdėlinės formos formulę $R_{1\ldots}R_nG$, kurios prefiksas neturi savyje modalumo operatoriaus ◊ ("gal būt"). Be to, formulėje neigimas gali būti sutinkamas tik prieš atomines formules. Tai $R_{1\ldots}R_nG \vdash$ yra įrodoma tada ir tik tada, kai yra įrodoma jos projekcija $R_{i1\ldots}R_{is}G \vdash$.

Įrodymas:

Taisyklės

$$(\Box\vdash)\quad \frac{\Gamma, \Box F, F \vdash}{\Gamma, \Box F \vdash}$$

panaudojimas duoda mums galimybę pakartoti taisykles

$$(\forall\vdash)\quad \frac{F(t), \forall x F(x), \Gamma \vdash}{\forall x\, F(x), \Gamma \vdash}$$

bei

$$(\exists\vdash)\quad \frac{F(t), \Gamma \vdash \Delta}{\exists x\, F(x), \Gamma \vdash \Delta}$$

su ta pačia pagrindine formule $R_{1\ldots}R_nG$ arba su G_σ, kur σ keitimas. Mums nereikalinga speciali dubliavimo taisyklė, nes taisyklės ($\forall\vdash$) panaudojimas taip pat išsaugo pagrindinę formulę. Formulių prasidedančių $\forall$ bei G_σ kartojimas irgi nebūtinas, nes silpnesnė taisyklė klasikiniame predikatų skaičiavime yra nereikalinga. Teorema įrodyta.

Įrodėme, kad normaliosios priešdėlinės formos formulių be modalumo operatoriaus ◊ klasė yra įrodomas tada ir tik tada, kai įrodoma tų formulių projekcija. Taip pat įrodysime, kad šios klasės formulės gali būti ne būtinai normaliosios priešdėlinės formos.

Apžvelgėme kai kurias išsprendžiamumo klases, kurios buvo aprašytos ir išnagrinėtos doc. Norgėlos. Pabandysime panaudojus jas kaip pavyzdžius aprašyti ir išnagrinėti kitas išsprendžiamumo klases.

Penktoje teoremoje nagrinėjome apibendrintosios normaliosios priešdėlinės formos formules, kurių prefiksas neturi savyje modalumo operatoriaus ◊ (“gal būt”). Taip pat, tose formulėse neigimas gali būti sutinkamas tik prieš atomines formules. Įrodėme, kad tokios formulės yra įrodomos tada ir tik tada, kai yra įrodomos jų projekcijos. Panagrinėkime panašų atvejį, tik dabar nagrinėjamos formulės neturi savyje bendrumo kvantorio.

6 teorema:

Klasė formulių, kuriose nėra modalumo operatoriaus ◊ (“gal būt”) įeities bei bendrumo kvantorio ($\forall$), išsprendžiama. $\vdash$ F įrodoma tada ir tik tada, kai yra įrodoma $\vdash$pr(F).

Įrodymas:

Priminsime, kad neigimas $\neg$ tik prieš atomines formules, todėl jeigu formulė nebuvo normaliosios priešdėlinės formos, panaudojus taisykles

$$(\& \vdash)\quad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \,\&\, B \vdash \Delta}, \qquad (\vee \vdash)\quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}$$

ją galima suskaidyti į normaliąsias priešdėlines formules $G_{1\ldots}G_n$. Įrodymą tesime analogiškai, kaip ir teoremoje 5.

Tarkim duota išsprendžiama klasikinio predikatų skaičiavimo normalių priešdėlinių formulių klasę A. Naudodami ją sukonstruosime dar vieną modalumo logikos normalių priešdėlinių formulių klasę A_M.

8 apibrėžimas:

Tarkim, į formulės F = $R_{1\ldots}R_nG$ prefiksą $R_{1\ldots}R_n$ neįeina modalumo operatorius ◊, arba operatorius ◊ yra paskutinio modalumo operatoriaus □ dešinėje, o matricoje nėra modalumo operatorių □ ir ◊. Tai formulė F priklauso $A_{M,}$ tada ir tik tada, kai jos projekcija $R_{i1\ldots}R_{is}G$ priklauso klasei A.

7 teorema: Klasė A_M yra išsprendžiama.

Įrodymas:

Pirmas atvejis: Modalumo operatorius ◊ neįeina į formulės prefiksą. Todėl, pagal penktą teoremą, formulė $R_{1\ldots}R_nG$ įrodoma tada ir tik tada, kai įrodoma jos projekcija $R_{i1\ldots}R_{is}G$.

Antras atvejis: Operatoriai ◊ yra dešinėje nuo paskutinio operatoriaus □, kitaip sakant, mes nagrinėsime formules, pavidalu:

$$R_1\ldots R_i\Diamond\forall x_{i+1}\ldots\forall x_{i+s}\exists x_{i+s}Q_{i+s+1}x_{i+s+1}\ldots Q_nx_nG \qquad (1)$$

Operatorius ◊ yra pozicijoj (i + 1) ir jam iš dešinės yra tik kvantoriai. Tarkime, kad kvantorius $\exists$ pirmą kartą atsiranda pozicijoje (i + s) (atsižvelgiant į paskutinio modalumo operatoriaus ◊ poziciją). Be to, tarkim, kad turime matricą G normaliojoje konjunkcinėje formoje su k poformulių. Nepraradus bendrumo, mes galime nagrinėti skaičiavimą su tokia taisykle $(\vee\wedge\vdash)$:

$$\frac{\Gamma, L_1^1,\ldots,L_{n1}^1 \vdash \ \ldots\Gamma, L_1^k,\ldots,L_{nm}^k \vdash}{\Gamma,(L_1^1\wedge\ldots\wedge L_{n1}^1)\vee\ldots\vee(L_1^k\wedge\ldots\wedge L_{nm}^k) \vdash}$$

kur L_j^i (i = 1, ..., k; j = 1, 2, …, max(n_1, n_m)) yra litera.

Mes naudosime, tokią įrodymo strategiją: kai tik aptiksime G_σ (keitimą), naudosime taisyklę $(\vee\wedge\vdash)$. Kai formulėje F_σ nebus modalumo operatorių, strategija įvykdyta. Tarkime, kad formulė (1) išvedama ir mes turime jos dedukcinį medį. Laikysime, kad k aksiomų gaunamos kaip taisyklės $(\vee\wedge\vdash)$ taikymo rezultatas. Mes atseksim visą kelią nuo tų aksiomų iki dedukcinio medžio šaknų. Tarkim, radome pirmą taisyklės

$$(\Diamond\vdash)\qquad \frac{\Gamma^*, F\vdash}{\Gamma, \Diamond F\vdash}$$

panaudojimą. Panaudojus taisyklę $(\Diamond\vdash)$, mes išmetame visas atomines formules, todėl kiekviena papildoma pora gali būti tik keitinys tu taisyklių taikymo, kurių pagrindinės formulės yra $R_{v\ldots}R_nG$ (v >= i+1) formos. Tai yra, formulė (1) yra išvedama tada ir tik tada, kai yra toks keitinys:

$$\sigma = \{t_1/x_1, \ldots, t_i/x_i, t_{i+2}/x_{i+2}, \ldots, t_{i+s-1}/x_{i+s-1}\},$$

kuriam formulė $\exists x_{i+s}R_{i+s+1\ldots}R_nG_\sigma$ yra išvedama.

Aibė nagrinėtų keitinių yra lygi keičiamų kintamųjų skaičiui. Todėl, klasė A_M yra išsprendžiama, nes klasės A_M formulių išvedamumas suvedamas į išsprendžiamos klasės A formulių išvedamumą. Teorema įrodyta.

Pabandykime klasę A_M sukonstruoti kitu principu ir įrodyti, kad ši klasė taip pat išsprendžiama.

8 teorema:

Tarkim, į formulės $F = R_{1\dots}R_nG$ prefiksą $R_{1\dots}R_n$ neįeina modalumo operatorius ◊, arba prefiksas baigiasi operatoriumi ◊. O formulės dalis G yra bekvantorė, kurioje yra tik modalumo operatorius □. Tai formulė F priklauso $A_{M,}$ tada ir tik tada, kai jos projekcija $R_{i1\dots}R_{is}G$ priklauso klasei A. Įrodysime, kad mūsų naujai sukonstruota klasė A_M yra išsprendžiama.

Įrodymas:

Pirmas atvejis: Modalumo operatorius ◊ neįeina į formulės prefiksą. Pagal šeštą teoremą, formulė $R_{1\dots}R_nG$ įrodoma tada ir tik tada, kai įrodoma jos projekcija $R_{i1\dots}R_{is}G$.

Antras atvejis: Formulės prefiksas baigiasi modalumo operatoriumi ◊. Kitaip sakant mes nagrinėjame formules, pavidalu:

$R_1 \dots R_i \Diamond G$ (2)

Operatorius ◊ yra pozicijoj (i+1). Prieš jį yra tik kvantoriai, bei modalumo operatorius □. Tarkime, kad formulė G yra normalioje konjunkcinėje formoje su k poformulių. Galime nagrinėti skaičiavimą su tokia taisykle ($\vee\wedge\vdash$):

$$\frac{\Gamma, L_1^1, \dots, L_{n1}^1 \vdash \quad \dots \Gamma, L_1^k, \dots, L_{nm}^k \vdash}{\Gamma, (L_1^1 \wedge \dots \wedge L_{n1}^1) \vee \dots \vee (L_1^k \wedge \dots \wedge L_{nm}^k) \vdash}$$

kur L_j^i (i = 1, ..., k; j = 1, 2, …, max(n_1, n_m)) yra litera (modalumo litera vadiname klasikinės logikos literas bei formules pavidalo □l, ◊l; čia l – klasikinės logikos litera).

Naudodami taisykles ($\Box\vdash$), ($\forall\vdash$) mes išsaugom pagrindinę formulę, bei atliekame keitimus. Kai tik aptiksime keitimą, taikysime taisyklę ($\vee\wedge\vdash$), kai formulės prefikse neliks modalumo operatorių, strategija įvykdyta. Keitimų bus < i. Todėl, kai sutiksim modalumo operatorių ◊ ir panaudosim taisyklę:

$$(\Diamond\vdash)\quad \frac{\Gamma^{*}, F\vdash}{\Gamma, \Diamond F\vdash}$$

liks baigtinis skaičius formulių tik su modalumo operatoriumi □ ir kvantoriais, ir mes galėsim pritaikyti pirmą šios teoremos atvejį.

Įrodėme, kad formulė F, į kurios prefiksą neįeina modalumo operatorius ◊, arba prefiksas baigiasi operatoriumi ◊, o formulės matrica yra bekvantorė, kurioje yra tik modalumo operatorius □, yra išsprendžiama tada ir tik tada, kai yra išsprendžiama jos projekcija. Pabandysime įrodyti dar bendresnį atvejį, kai formulės F prefiksas yra bet koks, o formulės matrica yra bekvantorė, kurioje yra tik modalumo operatorius □.

9 teorema:

Tarkim, formulės $F = R_{1\ldots}R_nG$ prefiksas $R_{1\ldots}R_n$ yra bet koks. O formulės matrica G yra bekvantorė, kurioje yra tik modalumo operatorius □. Tai formulė F yra išsprendžiama tada ir tik tada, kai yra išsprendžiama jos projekcija $R_{i1\ldots}R_{is}G$.

Įrodymas:

Ankstesnėse teoremose mes įrodėme atvejus, kai į formulės $F = R_{1\ldots}R_nG$ prefiksą $R_{1\ldots}R_n$ neįeina modalumo operatorius ◊, operatorius ◊ yra paskutinio modalumo operatoriaus □ dešinėje, arba formulės prefiksas baigiasi modalumo operatoriumi ◊. Šioje teoremoje lieka įrodyti atvejį, kai formulės prefikse $R_{1\ldots}R_n$ modalumo operatorius ◊ yra sutinkamas prieš modalumo operatorių □. Kitaip sakant, mes nagrinėsime formules, pavidalu:

$$R_1\ldots R_i\Diamond\Box\forall x_{i+2}\ldots\forall x_{i+s}\exists x_{i+s}Q_{i+s+1}x_{i+s+1}\ldots Q_nx_nG \qquad (1)$$

Tarkim pirmą kartą formulėje operatorius ◊ sutinkamas pozicijoj (i + 1) ir jam iš dešinės yra tik kvantoriai ir modalumo operatoriai □.

Kiekvieną kartą, taikydami taisyklę:

$$(\Diamond\vdash)\quad \frac{\Gamma^{*}, F\vdash}{\Gamma, \Diamond F\vdash}$$

mes išmetame visas atomines formules, todėl kiekviena papildoma formulė gali būti tik prieš tai taikytų taisyklių keitinys. Mes neprarandame pagrindinės formulės, o pagalbinės formulės yra tik anksčiau taikytų taisyklių keitiniai ir tokių formulių yra baigtinis skaičius. Reiškia neprarandant bendrumo mes galim taikyti taisyklę ($\Diamond\vdash$), kol formulės prefikse modalumo operatorius $\Diamond$ liks tik paskutinio modalumo operatoriaus $\Box$ dešinėje. Ankstesnėse teoremose mes jau įrodėme tokį atvejį, reiškia toliau teoremos įrodymą galim pratęsti analogiškai. Teorema įrodyta.

10 teorema:

Nagrinėsime normaliųjų priešdėlinių formulių klasę. Jeigu formulių matrica susideda tik iš vienviečių predikatų ir neturi modalumo operatoriaus $\Box$, ji yra išsprendžiama.

Įrodymas:

Priminsime, kad neigimas sutinkamas tik prieš atomines formules. Pasirinkime formulę $F = R_{1\ldots}R_nM$, kur M yra matrica, tai yra bekvantorė formulė. Mes turime surasti klasikinio skaičiavimo formulę G tokią, kad seka $F\vdash$ būtų įrodoma modalumo logikoje S4 tada ir tik tada, kai seka $G\vdash$ įrodoma klasikiniame predikatų skaičiavime. Priminsime, kad bekvantorė formulė M yra m-ojoje normaliojoje disjunkcinėje formoje tada, kai yra $N_1\vee \ldots \vee N_m$ formoje, kur N_i (i=1...m) yra literų konjunkcija ir formulės prasideda $\Diamond$.

Panaudojus gerai žinomas teiginių logikos ekvivalentiškumus ir šiuos modalumo logikos S4 ekvivalentiškumus:

$$\Diamond\Diamond A \equiv \Diamond A$$

$$\Diamond(A\vee B) \equiv \Diamond A\vee\Diamond B$$

mes galime gauti ekvivalentišką formulę M’, kuri yra m-ojoje normaliojoje disjunkcinėje formoje ir kiekvienam jos poformuliui $\Diamond A$, t.y. poformuliui, kuris prasideda $\Diamond$ galioja sąlyga: A taip pat yra m-ojoje normaliojoje disjunkcinėje formoje.

Formulė M’ m-ojoje normaliojoje disjunkcinėje formoje ir ekvivalenti pradinės formulės F matricai M.

Iš šito seka, kad “poformulis” reiškia “poformulis su fiksuotu reiškiniu”. Kitaip sakant, mes nagrinėsime skirtingus tos pačios formulės reiškinius kaip skirtingus poformulius. Apibrėšime transformaciją *El*, t.y. operatoriaus $\Diamond$ eliminavimą, kaip indukcija pagal M poformulius.

Tarkime, kad $\Diamond G_1$, ..., $\Diamond G_n$ yra sąrašas visų M poformulių, kurių modalumo laipsnis yra lygus vienam ir v_{i1}, ..., v_{in} yra nauji individualus kintamieji neįeinantys į M. Pakeisime poformulius $\Diamond G_j$ (j = 1, ..., n) formulėmis, kurios gaunamos iš G_j pakeitus visus vienviečius predikatus naujais dviviečiais su tuo pačiu pavadinimu. Kintamasis v_{ij} yra antras individualus kintamasis visiems G_j poformuliams.

Pradinės formulės modalumo laipsnis yra didesnis negu gautos formulės. Jeigu gauta formulė turi modalumo operatorių, mes kartojame eliminavimo procedūrą. Pastebėsime, kad nagrinėjama formulė turi dviviečius predikatus, bet mes pakeitėme tik vienviečius predikatus naujais individualiais kintamaisiais neįeinančiais į nagrinėjamą formulę.

Mes pakeitėme pradinę formulę $F = R_{1\ldots}R_nM'$ formule $R_{1\ldots}R_n\exists v_{i1}\ldots\exists v_{is}El(M')$, kur $v_{i1},\ldots,v_{is}$ yra nauji kintamieji įvesti eliminavus operatorių $\Diamond$ formulėje M’. Parodysime, kad seka $F \vdash$ įrodoma modalumo logikoje S4 tada ir tik tada, kai seka

$$R_{1\ldots}R_n\exists v_{i1}\ldots\exists v_{is}\,El(M') \vdash$$

įrodoma klasikiniame predikatų skaičiavime.

Iš tikrųjų, jeigu mes galime surasti $F \vdash$ dedukciniame medyje tokį keitinį σ, kad $\Diamond G_\sigma \vdash$ formos seka (vadinasi, $\Diamond G$ yra F poformulis) yra išvedama, tada mes dar galime surasti keitinį σ' tokį, kad $El(G)\sigma'$ yra įrodoma klasikiniame skaičiavime ir atvirkščiai. Pakanka panaudoti keitinį $\sigma' = \sigma \cup \{a/v_{ij}\}$, kur a yra naujas laisvas kintamasis, o v_{ij} yra kintamasis įvestas eliminavus operatorių $\Diamond$. Pastebėsime, kad litera esanti $\Diamond G_\sigma$ gali suformuoti papildomą porą dedukcijos medyje tik su $\Diamond G_\sigma$ literom. Tai yra rezultatas priklauso tik nuo σ. Formulė $\Diamond G_\sigma$ yra ekvivalenti bet kuriai loginiai konstantai *teisinga*, ar *klaidinga*.

Tai reiškia, kad gavome klasikinio predikatų skaičiavimo formulę su vienviečiais, ar dviviečiais predikatais, kuri yra įrodoma tada ir tik tada, kai pradinė modalumo logikos formulė yra įrodoma logikoje S4. Gauta klasikinio predikatų skaičiavimo formulė priklauso išvedamai klasei K, todėl kad kiekvienas F prefiksas yra ilgio 1 ir baigiasi kvantoriumi $\exists$ (priminsime, kad mes nagrinėjame formulę iš kairės sekos pusės). Teorema įrodyta. [Nor01]

Išnagrinėjome normaliųjų priešdėlinių formulių klasę. Kurių matrica susideda tik iš vienviečių predikatinių kintamųjų ir neturi modalumo operatoriaus $\Box$. Sužinojome, kad ji yra išsprendžiama. Apibrėžkime kitą formulių klasę, tardami, kad aukščiau nagrinėtos klasės formulių prefiksas gali turėti savyje modalumo operatorius, bet paskutinis modalumo operatorius šiame prefikse bus $\Diamond$ – ”galbūt“. Pabandysime įrodyti, kad tokia formulių klasė yra išsprendžiama.

11 Teorema:

Nagrinėsime apibendrintosios normaliosios priešdėlinės formos formules, kuriose bus tik loginės operacijos $\vee$, $\wedge$ ir neigimas sutinkamas tik prieš atomines formules. Formulės bus pavidalo $R_{1\ldots}R_nG$, kur R_i (i=1...n) $\in$ {$\forall$, $\exists$, $\Box$, $\Diamond$}, formulės matrica G – bekvantorė, į kurią įeina tik modalumo operatorius $\Diamond$ – ”galbūt“. Taip pat, matricoje G tik vienviečiai predikatiniai kintamieji. Paskutinis modalumo operatorius, esantis formulės prefikse, yra modalumo operatorius $\Diamond$ – ”galbūt“. Tokia formulių klasė yra išsprendžiama.

Įrodymas:

Nagrinėsime aprašyto pavidalo formules, t.y $P_{1\ldots}P_n\Diamond Q_{1\ldots}Q_mG$, kur $P_i \in$ {$\forall$, $\exists$, $\Box$, $\Diamond$}, o Q_j $\in$ {$\forall$, $\exists$}. Tarkime, kad matricą G yra normaliojoje konjunkcinėje formoje su k poformulių. Nepraradus bendrumo, mes galime nagrinėti skaičiavimą su tokia taisykle ($\vee\wedge\vdash$):

$$\frac{\Gamma, L_1^1, \ldots, L_{n1}^1 \vdash \quad \ldots \Gamma, L_1^k, \ldots, L_{nm}^k \vdash}{\Gamma, (L_1^1 \wedge \ldots \wedge L_{n1}^1) \vee \ldots \vee (L_1^k \wedge \ldots \wedge L_{nm}^k) \vdash}$$

kur L_j^i (i = 1, ..., k; j = 1, 2, …, max(n_1, n_m)) yra modalumo litera.

Mes naudosime, tokią įrodymo strategiją: kai tik aptiksime G_σ (keitimą), naudosime taisyklę ($\vee\wedge\vdash$). Kai formulėje F_σ nebus modalumo operatorių, strategija įvykdyta. Tarkime, kad formulė (1) išvedama ir mes turime jos dedukcinį medį. Laikysime, kad k aksiomų gaunamos kaip taisyklės ($\vee\wedge\vdash$) taikymo rezultatas. Mes atseksim visą kelią nuo tų aksiomų iki dedukcinio medžio šaknų. Tarkim, radome pirmą taisyklės

$$(\Diamond\vdash) \quad \frac{\Gamma^*, F\vdash}{\Gamma, \Diamond F\vdash}$$

panaudojimą. Panaudojus taisyklę ($\Diamond\vdash$), mes išmetame visas atomines formules, todėl kiekviena papildoma pora gali būti tik keitinys tu taisyklių taikymo, kurių pagrindinės formulės yra $Q_{1\ldots}Q_mG$ formos. Tai yra, pradinė formulė yra išvedama tada ir tik tada, kai yra toks keitinys:

$$\sigma = \{t_1/x_1, \ldots, t_i/x_i, t_{i+2}/x_{i+2}, \ldots, t_n/x_n\},$$

kuriam formulė $Q_{1\ldots}Q_mG_\sigma$ yra išvedama.

Aibė nagrinėtų keitinių yra lygi keičiamų kintamųjų skaičiui. Todėl, mūsų apibrėžta formulių klasė yra išsprendžiama, tada kai jos dalis $Q_{1\dots}Q_mG$ yra išsprendžiama. O jos dalis $Q_{1\dots}Q_mG$ yra normaliosios priešdėlinės formos, jos matrica susideda tik iš vienviečių predikatinių kintamųjų ir neturi modalumo operatoriaus □, todėl pagal 6 teoremą ji yra išsprendžiama. Teorema įrodyta.

9 Apibrėžimas:

Sakysime, kad formulė yra neigiamos normalinės formos, jei joje yra tik loginės operacijos ¬, &, ∨ ir neigimas yra sutinkamas tik prieš atomines formules.

Žemiau nagrinėsime tik neigiamos normaliosios formos formules, kuriose nėra ◊ įeičių.

12 Teorema:

Formulė Γ├ išvedama skaičiavime S4 tada ir tik tada, kai pr(Γ)├ išvedama klasikiniame skaičiavime.

Įrodymas:

Naudosime indukciją pagal Γ├ išvedimo aukštį. Pažymėkime jį raide l.

Tarkime, kad Γ├ išvedama, kai l = 1. Tada galimi tokie penki atvejai, priklausomai nuo centrinės formulės pavidalo:

1) Centrinė formulė (G&H). Tuomet išvedimo medis atrodo šitaip:

$$\frac{\Gamma', G, H \vdash}{\Gamma', G\&H \vdash}$$

Kadangi Γ’, G&H ├ nėra aksioma, tai tarp sekos Γ’ formulių atsiras ¬G arba ¬H (arba G = ¬H). Kadangi pr(¬G) = ¬pr(G), pr(¬H) = ¬pr(H), tai pr(Γ’, G&H) irgi bus išvedama, t.y. tarp formulių pr(Γ’, G, H) atsiras poros pr(G), pr(¬G) arba pr(H), pr(¬H).

2) Centrinė formulė (G∨H). Tuomet išvedimo medis atrodo šitaip:

$$\frac{\Gamma', G \vdash \qquad \Gamma', H \vdash}{\Gamma', G\vee H \vdash}$$

Kadangi Γ’, G&H $\vdash$ nėra aksioma, tai tarp sekos Γ’ formulių turi atsirasti ¬G ir ¬H. Kadangi pr(¬G) = ¬pr(G), pr(¬H) = ¬pr(H), tai pr(Γ’, G∨H) irgi bus išvedama, t.y. tarp formulių pr(Γ’, G, H) atsiras poros pr(G), pr(¬G) ir pr(H), pr(¬H).

3) Centrinė formulė ∀xG(x). Tuomet išvedimo medis atrodo šitaip:

$$\frac{\Gamma', G(t), \forall x G(x) \vdash}{\Gamma', \forall x G(x) \vdash}$$

Kur t – kuris nors termas, laisvas kintamojo x atžvilgiu. Kadangi Γ’, ∀xG(x) $\vdash$ nėra aksioma, tai tarp sekos Γ’ formulių atsiras ¬G(t). Kadangi pr(¬G(t)) = ¬pr(G(t)), tai pr(Γ’, ∀xG(x)) irgi bus išvedama, t.y. tarp formulių Γ’ atsiras formulė pr(¬G(t)).

4) Centrinė formulė ∃xG(x). Tuomet išvedimo medis atrodo šitaip:

$$\frac{\Gamma', G(a) \vdash}{\Gamma', \exists x G(x) \vdash}$$

Kur a – naujas laisvasis kintamasis neįeinantis į apatinę sekvenciją. Matome, kad pradinė formulė ∃xG(x) negali būti išvedama per vieną žingsnį, nes a – laisvasis kintamasis neįeinantis į apatinę sekvenciją.

5) Centrinė formulė □G. Tuomet išvedimo medis atrodo šitaip:

$$\frac{\Gamma', G, \Box G \vdash}{\Gamma', \Box G \vdash}$$

Kadangi Γ’, □G $\vdash$ nėra aksioma, tai tarp sekos Γ’ formulių turi atsirasti ¬G. Kadangi pr(¬G) = ¬pr(G), tai pr(Γ’, □G) irgi bus išvedama, t.y. tarp formulių pr(Γ’, □G) atsiras pora pr(G) ir pr(¬G).

Tarkime, kad mūsų teiginys teisingas, kai l = k, tada lieka įrodyti, kad mūsų teiginys teisingas, kai l = k+1. T.y. išvedimo medžio aukštis yra k+1. Pirmajame žingsnyje, galimi tokie penki formulių taikymo variantai:

1) Pirmame žingsnyje taikome taisyklę formulei G&H. Mūsų išvedimo medis atrodys šitaip:

$$\begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \Delta \\ \hline \dots \\ \hline \Gamma', G, H \vdash \end{array}\right\} k \\ \hline \left.\begin{array}{c} \Gamma', G\&H \vdash \end{array}\right\} k+1 \end{array}$$

Pagal mūsų prielaidą, formulė Γ’, G, H ├ yra išvedama per k žingsnių, todėl formulė Γ’, G&H├ bus išvedama tada ir tik tada, kai seka pr(Γ’), pr(G), pr(H) išvedama.

2) Pirmame žingsnyje taikome taisyklę formulei G∨H. Mūsų išvedimo medis atrodys šitaip:

$$\begin{array}{l} \left.\begin{array}{cc} \Delta & \Delta \\ \hline \dots & \dots \\ \hline \Gamma', G \vdash & \Gamma', H \vdash \end{array}\right\} k \\ \hline \left.\begin{array}{c} \Gamma', G \vee H \vdash \end{array}\right\} k+1 \end{array}$$

Pagal mūsų prielaidą, formulės Γ’, G ├ ir Γ’, H ├ yra išvedamos per k žingsnių, todėl formulė Γ’, G∨H ├ bus išvedama tada ir tik tada, kai bus išvedamos dvi sekos pr(Γ’), pr(G) ir pr(Γ’), pr(H).

3) Pirmame žingsnyje taikome taisyklę formulei $\forall xG(x)$. Mūsų išvedimo medis atrodys šitaip:

$$\left.\begin{array}{c}\Delta\\ \hline \dots \\ \hline \Gamma', G(t), \forall xG(x) \vdash\end{array}\right\}k$$
$$\left.\begin{array}{c}\hline \Gamma', \forall xG(x) \vdash\end{array}\right\}k+1$$

, kur t – kuris nors laisvas termas, kintamojo x atžvilgiu. Pagal mūsų prielaidą, formulė Γ', G(t), $\forall$xG(x) $\vdash$ yra išvedama per k žingsnių, todėl formulė Γ', $\forall$xG(x) $\vdash$ bus išvedama tada ir tik tada, kai bus išvedama seka pr(Γ'), pr(G(t)) (formulę pr($\forall$xG(x) galime išmesti iš sekos kaip perteklinę).

4) Pirmame žingsnyje taikome taisyklę formulei $\exists xG(x)$. Mūsų išvedimo medis atrodys šitaip:

$$\left.\begin{array}{c}\Delta\\ \hline \dots \\ \hline \Gamma', G(a) \vdash\end{array}\right\}k$$
$$\left.\begin{array}{c}\hline \Gamma', \exists xG(x) \vdash\end{array}\right\}k+1$$

, kur a – naujas laisvasis kintamasis, neįeinantis į apatinę sekvenciją. Pagal mūsų prielaidą, formulė Γ', G(a) $\vdash$ yra išvedama per k žingsnių, todėl formulė Γ', $\exists$xG(x) $\vdash$ bus išvedama tada ir tik tada, kai bus išvedama seka pr(Γ'), pr(G(a)).

5) Pirmame žingsnyje taikome taisyklę formulei $\Box G$. Mūsų išvedimo medis atrodys šitaip:

$$\left.\begin{array}{c} \Delta \\ \hline \ldots \\ \hline \Gamma', G, \Box G \vdash \end{array}\right\} k$$

$$\left.\begin{array}{c} \hline \Gamma', \Box G \vdash \end{array}\right\} k+1$$

Pagal mūsų prielaidą, formulė $\Gamma', G, \Box G \vdash$ yra išvedama per k žingsnių, todėl formulė $\Gamma', \Box G \vdash$ bus išvedama tada ir tik tada, kai bus išvedama seka pr(Γ'), pr(G) (formulę $\Box G$ galime išmesti kaip perteklinę).

Teorema įrodyta, panaudojant indukciją pagal formulės išvedimo aukštį.

4. Išsprendžiamumo klasių formavimas, naudojantis formulių transformavimu į klasikinę predikatų logiką

Nagrinėsime kvantorinės modalumo logikos S4 formules, kuriose bus tik loginės operacijos $\vee$, $\wedge$ ir neigimas sutinkamas tik prieš atomines formules.

Kad ir kokia būtų modalumo logikos formulė F, galima rasti tokią klasikinės predikatų logikos formulę $[F]_\tau$, kad F įvykdoma tada ir tik tada, kai įvykdoma $[F]_\tau$.

Taikydami indukciją pagal F pavidalą, apibrėšime $[F]_\tau$: $[p]_\tau = P(\tau)$, čia p – loginis kintamasis, $P(\tau)$ – vienvietis predikatinis kintamasis.

$[\neg G]_\tau = \neg [G]_\tau$

$[H \& G]_\tau = [H]_\tau \,\&\, [G]_\tau$

$[H \vee G]_\tau = [H]_\tau \vee [G]_\tau$

$[H \rightarrow G]_\tau = [H]_\tau \rightarrow [G]_\tau$

$[\Box G]_\tau = \forall x\,(R(\tau,x) \rightarrow [G]_x)$, kur x – naujas individinis kintamasis.

$[\Diamond G]_\tau = \exists x\,(R(\tau,x) \,\&\, [G]_x)$, kur x – naujas individinis kintamasis.

$[\forall x\, G]_\tau = \forall x\, [G]_\tau$

$[\exists x\, G]_\tau = \exists x\, [G]_\tau$

Transformavimo į klasikinę logiką pavyzdys:

$[\Diamond(\Box p \rightarrow \Box(\neg q \vee r))]_\tau = \exists x\,(R(\tau,x) \,\&\, [\Box p \rightarrow \Box(\neg q \vee r)]_x) =$

$= \exists x\,(R(\tau,x) \,\&\, ([\Box p]_x \rightarrow [\Box(\neg q \vee r)]_x)) =$

$= \exists x\,(R(\tau,x) \,\&\, ((\forall y\,(R(x,y) \rightarrow P(y)) \rightarrow [\Box(\neg q \vee r)]_x)) =$

$= \exists x\,(R(\tau,x) \,\&\, ((\forall y\,(R(x,y) \rightarrow P(y)) \rightarrow \forall z\,(R(x,z) \rightarrow [(\neg q \vee r)]_z))) =$

$= \exists x\,(R(\tau,x) \,\&\, ((\forall y\,(R(x,y) \rightarrow P(y)) \rightarrow \forall z\,(R(x,z) \rightarrow ([(\neg q]_z \vee R(z))))) =$

$= \exists x\,(R(\tau,x) \,\&\, ((\forall y\,(R(x,y) \rightarrow P(y)) \rightarrow \forall z\,(R(x,z) \rightarrow (\neg Q(z) \vee R(z)))))$

Pagal apibrėžimą, kad ir kokia būtų kvantorinės modalumo logikos formulė F, galima rasti tokią klasikinės predikatų logikos formulę $[F]_\tau$, kad F įvykdoma tada ir tik tada, kai įvykdoma $[F]_\tau$. Todėl pasinaudojus aprašyta transformacija, galim pagal klasikinės predikatų logikos formulės pavidalo apribojimą aprašyti modalumo logikos formulių išsprendžiamumo klases.

Klasikinės predikatų logikos normaliosios priešdėlinės formos formulės klasifikuojamos į išsprendžiamas ir neišsprendžiamas klases pagal prefiksą ir predikatinius kintamuosius. Raide p^i žymėsime i-vietį predikatinį kintamąjį. Klases žymėsime poromis (Π,σ), kur Π - žodis abėcėlėje $A = \{\forall, \exists, \forall^\infty, \exists^\infty, \forall^n, \exists^n\}(n = 2,3,...)$, σ - predikatinių kintamųjų aibė.

Tarkime, yra du abėcėlės A žodžiai B ir C. Sakysime, kad B yra C dalis, jei B gali būti gauta iš C pritaikius baigtinį skaičių operacijų:

1) Išbraukus žodyje C simbolį $\forall$ arba $\exists$.
2) Pakeitus žodyje C simbolį $\forall^\infty$ į $\forall^n$ arba $\exists^\infty$ į $\exists^n$ (n = 1,2,...)
3) Pakeitus žodyje C simbolį $\forall^n$ į $\forall^m$ arba $\exists^n$ į $\exists^m$ (m < n)

1 apibrėžimas: Pora (Π,σ) žymime klasę $Q_1x_1...Q_nx_n$ normaliosios priešdėlinės formos formulių, tenkinančių sąlygas:

1) $Q_1...Q_n = \Pi$,
2) Egzistuoja predikatinių kintamųjų formulėje G ir σ abipusiškai vienareikšmė atitiktis.

Pavyzdžiui, formulė $\forall x\exists y((P(x) \vee P(y))\&(Q(x, y) \vee R(y)))$ priklauso klasei $(\forall\exists,\{P^2, P_0^1, P_1^1\})$.

2 apibrėžimas: Sakome, kad klasė $(\Pi,\sigma) <= (\Pi_1,\sigma_1)$, jei:

1) Π lygus Π_1 arba yra jo dalis,
2) σ izomorfinis σ_1 poaibiui.

Klasė (Π,σ) išsprendžiama pagal išvedamumą, jei:

a) σ sudaro tik vienviečiai predikatiniai kintamieji,
b) $\Pi = \forall^\infty\exists^\infty$,
c) $\Pi = \forall^\infty\exists^2\forall^\infty$.

Taip pat klasė (Π',σ') išsprendžiama, jei $(\Pi',\sigma') <= (\Pi,\sigma)$, kur (Π,σ) yra viena iš išvardytų a, b, c.

Formulė pavidalo $\forall^\infty\exists^\infty G$. Kvantorių $\exists$ gauname pritaikius transformaciją $[\Diamond G]_{\tau}$, kvantorių $\forall$ pritaikius transformaciją $[\Box G]_{\tau}$.

Pritaikom transformaciją formulei pavidalo □◊F, kur F formulė be modalumo operatorių bei kvantorių, neigimas tik prieš atomines formules. Naudojamos loginės operacijos – tik $\vee$, & ir $\neg$.

$[\Box\Diamond F]_\tau = \forall x\,(R(\tau, x) \rightarrow [\Diamond F]_\tau =$

$= \forall x\,(\neg R(\tau, x) \vee [\Diamond F]_x) =$

$= \forall x\,(\neg R(\tau, x) \vee \exists y\,(Q(x, y)\ \&\ [F]_y)) =$

$= \forall x\,(\neg R(\tau, x) \vee \exists y\,(Q(x, y)\ \&\ F(y))) =$

$= \forall x\,\exists y\,(\neg R(\tau, x) \vee (Q(x, y)\ \&\ F(y))).$

Gavom formulę pavidalo $\forall\exists G$, didinam modalumo operatorių “būtinai” (□) kiekį.

$[\Box\Box\Diamond F]_\tau = \forall x\,(R(\tau, x) \rightarrow [\Box\Diamond F]_\tau = \forall x\,(\neg R(\tau, x) \vee [\Box\Diamond F]_x) =$

$= \forall x\,(\neg R(\tau, x) \vee \forall y\,(Q(x, y) \rightarrow [\Diamond F]_y)) =$

$= \forall x\,(\neg R(\tau, x) \vee \forall y\,(\neg Q(x, y) \vee [\Diamond F]_y)) =$

$= \forall x\,(\neg R(\tau, x) \vee \forall y\,(\neg Q(x, y) \vee \exists z\,(P(y, z)\ \&\ [F]_z))) =$

$= \forall x\,(\neg R(\tau, x) \vee \forall y\,(\neg Q(x, y) \vee \exists z\,(P(y, z)\ \&\ F(z)))) =$

$= \forall x\,(\neg R(\tau, x) \vee \forall y\,\exists z\,(\neg Q(x, y) \vee (P(y, z)\ \&\ F(z)))) =$

$= \forall x\,\forall y\,\exists z\,(\neg R(\tau, x) \vee (\neg Q(x, y) \vee (P(y, z)\ \&\ F(z))))$

Gavom formulę pavidalo $\forall\forall\exists G$. Taikydami transformaciją $[\Box G]_\tau$, kiekvieną kartą gauname bendrumo kvantorių su naujų kintamuoju, neįeinančių į tolimesnę formulę, todėl bendrumo kvantorių galime iškelti į formulės prieki ir suvesti ją į normaliąją priešdėlinę formą. Kuo daugiau formulėje bus modalumo operatorių “būtinai”, tuo po transformacijos formulės prieky bus daugiau bendrumo kvantorių. Mūsų pavidalo formulėse jie visą laiką bus prieš egzistavimo kvantorius.

Toliau, didinam modalumo operatorių “galbūt” (◊) kiekį ir pritaikom transformaciją:

$[\Box\Diamond\Diamond F]_\tau = \forall x\,(R(\tau, x) \rightarrow [\Diamond\Diamond F]_x =$

$= \forall x\,(\neg R(\tau, x) \vee [\Diamond\Diamond F]_x) =$

$= \forall x\,(\neg R(\tau, x) \vee \exists y\,(Q(x, y)\ \&\ [\Diamond F]_y)) =$

$= \forall x\,(\neg R(\tau, x) \vee \exists y\,(Q(x, y)\ \&\ \exists z\,(P(y, z)\ \&\ [F]_z))) =$

$= \forall x\,(\neg R(\tau, x) \vee \exists y\,(Q(x, y)\ \&\ \exists z\,(P(y, z)\ \&\ F(z)))) =$

$= \forall x\,(\neg R(\tau, x) \vee \exists y\,\exists z\,(Q(x, y)\ \&\ (P(y, z)\ \&\ F(z)))) =$

$= \forall x\,\forall y\,\exists z\,(\neg R(\tau, x) \vee (Q(x, y)\ \&\ (P(y, z)\ \&\ F(z))))$

Gavom formulę pavidalo $\forall\exists\exists G$. Taikydami transformaciją $[\Diamond G]_\tau$, kiekvieną kartą gauname egzistavimo kvantorių su naujų kintamuoju, neįeinančių į tolimesnę formulę, todėl egzistavimo kvantorių galime iškelti į formulės prieki ir suvesti ją į normaliąją priešdėlinę formą. Kuo daugiau formulėje bus modalumo operatorių “galbūt”, tuo po transformacijos formulės prieky bus daugiau egzistavimo kvantorių. Mūsų pavidalo formulėse jie visą laiką bus po bendrumo kvantorius.

Iš to galima padaryti išvadą, kad taikant transformaciją formulėms pavidalo $\Box...\Box\Diamond...\Diamond F$ mes gauname klasikinės predikatų logikos formulių klasę išsprendžiamą pagal išvedamumą. Pagal apibrėžimą, modalumo logikos formulė F išsprendžiama tada ir tik tada, kai išsprendžiama jos transformacija $[F]_\tau$, reiškia, modalumo logikos formulių klasė pavidalo $\Box...\Box\Diamond...\Diamond F$ yra išsprendžiama.

Nagrinėjamos formulės prefikse gali būti ne tik modalumo operatoriai, bet ir kvantoriai, todėl ne tik formulės pavidalo $\Box...\Box\Diamond...\Diamond F$ yra išsprendžiamos. Tokiu pat principu galima įrodyti, kad išsprendžiamos yra formulės pavidalo $R_1R_2...R_nP_1P_2...P_mF$, kur $R_1R_2...R_n$ yra sudarytas iš bendrumo kvantorių $\forall$ arba modalumo operatorių „būtinai“ $\Box$, o $P_1P_2...P_m$ yra sudarytas iš egzistavimo kvantorių $\exists$ arba modalumo operatorių „gal būt“ $\Diamond$. Tik šiuo atveju, nereikia pamiršti, kad $\Box\forall xF \neq \forall x\Box F$.

Pavyzdžiui:

$\Box\exists x\exists y\Box\forall z\Diamond\Diamond\forall w(P(x)\&(Q(y)\vee(R(z)\rightarrow S(w))))$

Formulė pavidalo $\forall^\infty\exists^2\forall^\infty G$. Kaip ir praeitoje formulėje, kvantorių $\exists$ gauname pritaikius transformaciją $[\Diamond G]_\tau$, kvantorių $\forall$ pritaikius transformaciją $[\Box G]_\tau$.

Pritaikom transformaciją formulei pavidalo $\Box\Diamond\Box F$, kur F formulė be modalumo operatorių bei kvantorių, neigimas tik prieš atomines formules. Naudojamos loginės operacijos – tik $\vee$, $\&$ ir $\neg$.

$[\Box\Diamond\Box F]_\tau = \forall x\, (R(\tau, x) \rightarrow [\Diamond\Box F]_\tau$

$= \forall x\, (\neg R(\tau, x) \vee [\Box\Diamond F]_x) =$

$= \forall x\, (\neg R(\tau, x) \vee \exists y\, (Q(x, y) \,\&\, [\Box F]_y))$

$= \forall x\, (\neg R(\tau, x) \vee \exists y\, (Q(x, y) \,\&\, \forall z\, (P(y, z) \rightarrow [F]_z))) =$

$= \forall x\, (\neg R(\tau, x) \vee \exists y\, (Q(x, y) \,\&\, \forall z\, (P(y, z) \rightarrow F(z)))) =$

$= \forall x\, (\neg R(\tau, x) \vee \exists y\, (Q(x, y) \,\&\, \forall z\, (\neg P(y, z) \vee F(z)))) =$

$= \forall x\, (\neg R(\tau, x) \vee \exists y\, \forall z\, (Q(x, y) \,\&\, (\neg P(y, z) \vee F(z)))) =$

$= \forall x\, \exists y\, \forall z\, (\neg R(\tau, x) \vee (Q(x, y) \,\&\, (\neg P(y, z) \vee F(z))))$

Taip pat kaip ir aukščiau nagrinėtoj formulėj, kiekvienas transformacijų $[\Diamond G]_\tau$ ir $[\Box G]_\tau$ panaudojimas duoda kvantorių su naujais kintamaisiais, neįeinančiais į tolimesnę formulę, todėl kvantorius galima iškelti į formulės priekį ir suvesti ją į normalinę priešdėlinę formą. Reiškia, formulę pavidalo $\forall^{\infty}\exists^{2}\forall^{\infty}G$ mes galim gauti pritaikius transformaciją modalumo logikos formulėms pavidalo □...□◊◊□...□F. Iš viso to seka, kad modalumo logikos formulių klasė pavidalo □...□◊◊□...□F yra išsprendžiama.

Nagrinėjamos formulės prefikse gali būti ne tik modalumo operatoriai, bet ir kvantoriai, todėl ne tik formulės pavidalo □...□◊◊□...□F yra išsprendžiamos. Tokiu pat principu galima įrodyti, kad yra išsprendžiamos formulės pavidalo $R_1R_2...R_n\exists\lozenge R_{n+1}R_{n+2}...R_mF$, $R_1R_2...R_n\lozenge\exists R_{n+1}R_{n+2}...R_mF$ ir $R_1R_2...R_n\exists\exists R_{n+1}R_{n+2}...R_mF$, kur į $R_1R_2...R_m$ įeina tik modalumo operatoriai „būtinai“ □ ir bendrumo kvantoriai ∀.

Pavyzdžiui:

$\forall x\forall y\Box\Box\forall z\lozenge\exists\Box\Box\forall w(P(x)\vee Q(y)\&(R(z)\rightarrow S(w)))$.

Išvados

Šiame darbe mes apžvelgėme modalumo logiką S4 bei kvantorinę modalumo logiką S4. Taip pat jų taisykles, aksiomas ir naudojamus skaičiavimus. Pateikėme kelias sekvencijų išvedimo pavyzdžių. Taip pat, apžvelgėme kai kurių, atskirų šių logikų klasių išsprendžiamumą. Sužinojome ir įrodėme, kad normaliosios priešdėlinės formos modalumo logikos S4 formulių be modalumo operatoriaus ◊ klasė yra įrodomas tada ir tik tada, kai įrodoma tų formulių projekcija.

Taip pat įrodėme, kad jeigu modalumo logikos formulių matrica susideda tik iš vienviečių predikatų ir ta formulė neturi modalumo operatoriaus □, ji yra išvedama. Suradome naujas išsprendžiamumo klases. Pavyzdžiui, įrodėme, kad formulė $\Gamma \vdash$ išvedama kvantoriniame skaičiavime S4 tada ir tik tada, kai $pr(\Gamma) \vdash$ išvedama klasikiniame skaičiavime.

Taipogi šiame darbe buvo nagrinėjama labai įdomi tema – išsprendžiamumo klasių formavimas, naudojantis formulių transformavimų į klasikinę predikatų logiką.

Mano manymu, šis darbas padėjo geriau suprasti modalumo logikos sampratą, patobulinti įrodinėjimo įgūdžius. Įgytas žinias nesunku bus pritaikyti praktikoje.

Summary (Some Decidable Classes of Modal Logic S4)

Logic is the branch of mathematics that deals with the formal principles, methods and criteria of validity of inference, reasoning and knowledge. Logic is concerned with what is true and how we can know whether something is true. This involves the formalization of logical arguments and proofs in terms of symbols representing propositions and logical connectives.

The goal of this work is to learn more about modal logic S4 and to consider some it decidable classes of formulas. It's important, because decidable classes helps the substantiation of different formulas. In this work we will consider the formulas of modal logic without functional symbols. The formulas F contain only logical connectives $\neg$, &, $\vee$ and no logical or modal symbol in F occur in the scope of negation.

Literatūros sąrašas

[Nor01] S.Norgėla. Some Decidable Classes of Formulas of Modal Logic S4, Special issue of Lietuvos matematikos rinkinys, t. 41, 408-412, 2001.

[Nor96] S.Norgėla. Teiginių skaičiavimas. Knygoje: R.Lassaigne, M. de Rougemont. Logika ir informatikos pagrindai. Žodynas, Vilnius, 1996.

[LR96] R.Lassaigne, M de Rougemont. Logika ir informatikos pagrindai. Žodynas, Vilnius, 1996

[Nor04] S.Norgėla. Matematinė logika. TEV, Vilnius, 2004.

[Nor02] S.Norgėla. Decidability of some classes of modal logic. Lietuvos matematikos rinkinys, 42, No 2. 2002, p.218-229