VILNIAUS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

Evelina Paunksnytė ir Viktorija Iščiukaitė

ATSTUMAI TARP ARITMETINIŲ SKIRSTINIŲ

Magistro darbas

Vilnius 2006

Darbas atliktas **Tikimybių teorijos ir skaičių teorijos katedroje**

Darbo vadovas **doc. dr. J. Šiaulys**

Recenzentas

Darbas apgintas ____________________

Gynimo posėdžio protokolo Nr. ________

Registravimo Nr. 1105/ __

2006-05- ____________

Turinys

Įvadas

Sakykime, S_F yra baigtinė arba suskaičiuojama aibė. Atsitiktinis dydis X vadinamas diskrečiu, jeigu $P(X \in S_F) = 1$. Tokio dydžio pasiskirstymo funkcija F irgi vadinama diskrečiąja. Aišku, kad nagrinėjamu atveju pasiskirstymo funkciją F galime užrašyti taip:

$$F(x) = \sum_{x_k < x} P(X = x_k).$$

Pasiskirstymo funkcijų savybės bei ribinė elgsena pakankamai plačiai nagrinėjama J. Kubiliaus knygoje (žr. [1]).

Atstumus tarp skirstinių galima matuoti naudojant įvairias metrikas. Šiame darbe bus naudojamos tokios metrikos tarp diskrečių skirstinių: pagal variaciją, l_r, lokalioji ir tolygioji (žr. [2]).

Pirmoje darbo dalyje pateiksime keletą žinomų tikimybių teorijos faktų – adityvių bei stipriai adityvių funkcijų aprašymus (žr. [3]), atstumų tarp skirstinių apibrėžimus. Pateikiamus faktus ir apibrėžimus iliustruosime pavyzdžiais.

Tegu $x \geqslant 3$, apibrėžkime tokius matus:

$$\nu_x = \nu_x\big(n \leqslant x : f_x(n) < z\big) = \frac{1}{[x]}\#\big\{n \leqslant x : f_x(n) < z\big\},$$

$$P_x = P\Bigg(\sum_{p \leqslant x} \xi_{xp} < z\Bigg),$$

čia $\xi_{xp}(p \leqslant x)$ – nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai (kiekvienam fiksuotam x) apibrėžti lygybe

$$\begin{cases} P\big(\xi_{xp} = f_x(p)\big) = \frac{1}{p}, \\ P(\xi_{xp} = 0) = 1 - \frac{1}{p}. \end{cases}$$

Tegul, be to,

$$\mu_x = \mu_x\big(p \leqslant x : f_x(p) < z\big) = \frac{1}{\sum_{p \leqslant x} \frac{\log p}{p}} \cdot \sum_{\substack{p \leqslant x \\ f_x(p) < z}} \frac{\log p}{p}.$$

J. Šiaulio ir G. Stepanausko straipsnyje (žr. [4]) nagrinėjamos sveikareikšmės stipriai adityvios funkcijos su aprėžtomis reikšmėmis ant pirminių skaičių. Šiame darbe ištirta, ar būtinai funkcijos f_x turi priklausyti Kubiliaus klasei (žr. [4]), jei atstumas tarp ν_x ir P_x artėja į 0, kai x neaprėžtai auga.

Remiantis jau gautais rezultatais, tirsime analogišką klausimą esant kitoms sąlygoms. Nagrinėsime sveikareikšmes stipriai adityvias funkcijas, kurioms $f_x(p) \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ ir

$$\exists D\colon \limsup_{x\to\infty} \sum_{\substack{p\leqslant x\\ f_x(p)>D}} \frac{1}{p} = 0.$$

1. Natūralieji skaičiai ir matai juose

Mato teorijai svarbiausios yra dvi aibių klasės: algebros ir σ-algebros.

Apibrėžimas. Bet kurios aibės Ω (gali būti ir $\varnothing$) poaibių sistema $\mathcal{A}$ vadinama *aibių algebra*, jei ji tenkina šias sąlygas:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$;
2. Jei $A \in \mathcal{A}$, tai $A^c \in \mathcal{A}$;
3. Jei $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{A}$, tai $A \bigcup B \in \mathcal{A}$.

Apibrėžimas. Kurios nors aibės Ω poaibių sistema $\mathcal{A}$ vadinama *aibių σ-algebra*, kai ji tenkina sąlygas:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$;
2. Jei $A \in \mathcal{A}$, tai ir $A^c \in \mathcal{A}$;
3. Jei $A_1, A_2, \ldots$ yra sistemos $\mathcal{A}$ aibės, tai ir $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$.

Tarkime, kad $\mathcal{A}$ – netuščios aibės Ω poaibių algebra, kuri gali ir nebūti σ-algebra. Neneigiama funkcija μ (gali įgyti ir reikšmes $+\infty$), apibrėžta visoms algebros $\mathcal{A}$ aibėms, vadinama *matu*, kai $\mu(\varnothing) = 0$ ir μ yra visiškai adityvi.

Kitais žodžiais tariant, *matu* vadiname aibės funkciją $\mu : \mathcal{A} \to \bar{\mathbb{R}}$, turinčią savybes:

1. μ yra neneigiama;
2. $\mu(\varnothing) = 0$;
3. Jei $A_1, A_2, \ldots$ – bet kuri disjunkčių algebros $\mathcal{A}$ aibių seka ir $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$, tai $\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$.

Matas μ vadinamas *baigtiniu*, kai $\mu(\Omega) < \infty$ ir *σ-baigtiniu*, kai aibę Ω galima išreikšti skaičios sistemos aibių $C_k \in \mathcal{A}$ sąjunga su sąlyga $\mu(C_k) < \infty$, $(k = 1, 2, \ldots)$.

Jei $\mu(\Omega) = 1$, tai matas vadinamas *tikimybiniu*.

Sakykime, $\mathbb{N}$ yra natūraliųjų skaičių aibė. Natūraliųjų skaičių aibėje galima apibrėžti daug tikimybinių matų. Aptarsime populiariausius iš jų.

I. Sakykime, x – pakankamai didelis skaičius. Aibės A_x dažniu $\nu_x(A_x)$ vadiname dydį:

$$\nu_x(A_x) = \frac{1}{[x]} \#\{n \leqslant x : n \in A_x\} = \frac{1}{[x]} \sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \in A_x}} 1.$$

Dažnis ν_x bet kuriam aibės $\mathbb{N}$ elementui, neviršijančiam x, priskiria skaičių $\frac{1}{[x]}$. Nesunku pastebėti, kad ν_x yra tikimybinis matas išmatuojamoje erdvėje $(\{1,2,\ldots,[x]\},\varPhi_x)$, kur $\varPhi_x$ yra σ-algebra, susidedanti iš visų galimų aibės $\{1,2,\ldots,[x]\}$ poaibių. Aišku, kad bet kuris poaibis $A_x \in \varPhi_x$ gali priklausyti nuo pasirinkto x.

Kai kurioms aibėms A_x dažnis ν_x nesunkiai randamas. Pavyzdžiui, jei A – lyginių skaičių aibė, tai

$$\nu_x(A) = \frac{1}{[x]} \sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\text{-lyginis}}} 1 = \frac{1}{[x]}\left[\frac{x}{2}\right] = \frac{1}{2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Jei $B = \{n : n = 3+10k,\, k \in \{0,1,2,\ldots\}\}$, tai

$$\nu_x(B) = \frac{1}{[x]} \sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\equiv 3 \bmod 10}} 1 = \frac{1}{[x]}\left(\left[\frac{x-3}{10}\right]+1\right) = \frac{1}{10} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Jei $C = \{n : n\text{-pirminis}\}$, tai

$$\nu_x(C) = \frac{1}{[x]} \sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\text{-pirminis}}} 1 = \frac{1}{[x]}\left(\frac{x}{\ln x} + \mathrm{O}\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)\right) = \frac{1}{\ln x} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\ln^2 x}\right).$$

II. Kitas populiarus matas aibėje $\mathbb{N}$ yra logaritminis dažnis μ_x. Bet kuriai aibei $A_x \subset \mathbb{N}$:

$$\mu_x(A_x) = \frac{1}{\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n}} \sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A_x}} \frac{1}{n}.$$

Bet kuriam aibės $\mathbb{N}$ elementui, neviršijančiam x, logaritminis dažnis μ_x priskiria skaičių

$$\frac{1}{n\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n}}.$$

Logaritminis dažnis taip pat yra tikimybinis matas išmatuojamoje erdvėje $(\{1,2,\ldots,[x]\},\varPhi_x)$. Kai kurioms aibėms A_x matas μ_x taip pat nesunkiai apskaičiuojamas.

Pavyzdžiui, jei A – lyginių skaičių aibė, tai

$$\begin{aligned}\mu_x(A) &= \frac{1}{\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n}} \sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\text{-lyginis}}} \frac{1}{n} = \frac{1}{\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n}} \sum_{k\leqslant \frac{x}{2}} \frac{1}{2k}\\ &= \frac{1}{\ln x + \mathrm{O}(1)}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{x}{2} + \mathrm{O}(1)\right) = \frac{1}{2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\ln x}\right).\end{aligned}$$

Jeigu $B = \{n : n \equiv 3 \bmod 10\}$, tai

$$\begin{aligned}\mu_x(B) &= \frac{1}{\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n}} \sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\equiv 3 \bmod 10}} \frac{1}{n} = \frac{1}{\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n}} \sum_{k\leqslant \frac{x-3}{10}} \frac{1}{10k+3}\\ &= \frac{1}{\ln x + \mathrm{O}(1)}\left(\frac{1}{10}\ln\frac{x-3}{10} + \mathrm{O}(1)\right) = \frac{1}{10} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\ln x}\right).\end{aligned}$$

Jeigu $C = \{n\colon n\text{-pirminis}\}$, tai

$$\mu_x(C) = \frac{1}{\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n}} \sum_{\substack{n\leqslant x\\ n-\text{pirminis}}} \frac{1}{n} = \frac{1}{\ln x + \mathrm{O}(1)}\big(\ln\ln x + \mathrm{O}(1)\big) = \frac{\ln\ln x}{\ln x} + \mathrm{O}\bigg(\frac{1}{\ln x}\bigg).$$

III. Sakykime, turime pirminių skaičių $p \leqslant r$ poaibį. Pažymėkime $E(p^\alpha)$, $(p \leqslant r, \alpha = 0, 1, \dots, [\frac{\ln r}{\ln p}])$, – natūraliųjų skaičių aibės $\mathbb{N}$ poaibį, susidedantį iš natūraliųjų skaičių n, kuriems

$$\beta_p(n) := \min\left(\alpha_p(n), \left[\frac{\ln r}{\ln p}\right]\right) = \alpha,$$

čia $\alpha_p(n)$ yra rodiklis, su kuriuo pirminis p įeina į skaičiaus n išdėstymą pirminiais skaičiais. Bet kokiam

$$k = \prod_{p\leqslant r} p^{\alpha_p}, \quad 0 \leqslant \alpha_p \leqslant \gamma_p,$$

apibrėžkime aibę

$$E_k = \bigcap_{p\leqslant r} E\big(p^{\alpha_p(k)}\big).$$

Aišku, kad aibė E_k susideda iš natūraliųjų skaičių n, kuriems $\beta_p(n) = \alpha_p(k)$, kai $p \leqslant r$. Aibės E_k generuoja natūraliųjų skaičių aibėje algebrą. Sakykime, ši algebra yra J. Šios algebros aibės A turi pavidalą

$$A = \bigcup_k E_k,$$

čia sąjunga imama pagal kažkokius k, be to, skirtingiems k aibės E_k nesikerta. Bet kokiai $A \in J$ apibrėžus

$$P_r(A) = \sum_k P_r(E_k), \qquad P_r(E_k) = \prod_{p\leqslant r} \pi\big(p^{\alpha_p}(k)\big),$$

$$\text{kur } \pi\big(p^{\alpha_p}\big) = \begin{cases} \frac{1}{p}\big(1 - \frac{1}{p}\big), & \text{jei } 0 \leqslant \alpha < \big[\frac{\ln r}{\ln p}\big], \\ \frac{1}{p^\alpha}, & \text{jei } \alpha = \big[\frac{\ln r}{\ln p}\big], \end{cases}$$

gauname tikimybinę erdvę $(\mathbb{N}, J, P)$.

Pavyzdžiui, jei $r = 10$, $A = \{n \in \mathbb{N} : 2^2\|n, 3\|n, 5 \nmid n, 7 \nmid n\}$, tai

$$P_r(A) = \frac{1}{2^2}\bigg(1 - \frac{1}{2}\bigg)\frac{1}{3}\bigg(1 - \frac{1}{3}\bigg)\bigg(1 - \frac{1}{5}\bigg)\bigg(1 - \frac{1}{7}\bigg) = \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7} = \frac{2}{105}.$$

Viena iš tikimybinės skaičių teorijos problemų yra nustatyti aibes, kurioms išvardinti matai ν_x, μ_x, P_x yra artimi (žinoma, dideliems x).

2. Adityvios ir stipriai adityvios funkcijos

Apibrėžimas. Aritmetinė funkcija vadinama *adityviąja*, jei bet kokiai porai tarpusavyje pirminių natūrinių skaičių m ir n galioja lygybė:

$$f(m \cdot n) = f(m) + f(n). \tag{2.1}$$

Iš šio apibrėžimo išplaukia, kad $f(1) = 0$, be to,

$$f(m) = \sum_{p^\alpha \| m} f(p^\alpha) = \sum_{p} f(p^{\alpha_p(m)}).$$

Pastarąjį skaidinį vadiname *kanoniniu skaidiniu*.

Apibrėžimas. Jei adityvioji funkcija (2.1)-ąją lygybę tenkina visoms poroms m, n, tai ją vadiname *visiškai adityviąja* funkcija. Tokiai funkcijai

$$f(m) = \sum_{p^\alpha \| m} \alpha f(p).$$

Apibrėžimas. Jei adityvioji funkcija $f(m)$ tenkina sąlygą $f(p^\alpha) = f(p)$ kiekvienam $\alpha \in \mathbb{N}$ ir kiekvienam pirminiam skaičiui p, tai $f(m)$ vadinama *stipriai adityviąja* funkcija. Šiuo atveju kanoninis skaidinys supaprastėja:

$$f(m) = \sum_{p|m} f(p). \tag{2.2}$$

Pavyzdžiai:

1. $\Omega(m) = \sum_{p \| m} \alpha$ – visų skaičiaus m pirminių daliklių kiekis, įskaitant jo kartotinumus. $\Omega(m)$ – adityvi funkcija.

2. $\alpha_p(m)$ – rodiklis, su kuriuo pirminis skaičius įeina į m skaidinį, t.y.

$$\alpha_p(m) = \begin{cases} \alpha, & \text{jei } p^\alpha \| m, \\ 0, & \text{priešingu atveju,} \end{cases}$$

   $\alpha_p(m)$ – visiškai adityvi, o tuo pačiu ir adityvi funkcija.

3. $\Omega_3(n) = \sum\limits_{\substack{p^\alpha \| n \\ (p+1) \text{ dalijasi iš } 3}} \alpha$ – adityvi funkcija.

4. $\Omega_3(n) = \sum\limits_{\substack{p^\alpha \| n \\ (p+2) \text{ dalijasi iš } 3}} \alpha$ – adityvi funkcija.

5. $\ln \varphi(n)$ – adityvi funkcija. Čia $\varphi(n)$ – Oilerio funkcija – kiekis natūrinių skaičių, neviršijančių n ir tarpusavy pirminių su n, t. y. $\varphi(n) = \sum_{k \leqslant n, (k,n)=1} 1$.

6. $\ln \tau(n)$ – adityvi funkcija. Čia $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$ – skaičiaus n skirtingų natūrinių daliklių kiekis.

7. $\omega(n)$ – stipriai adityvi funkcija. $\omega(n) = \sum_{p|n} 1$ – skaičiaus n skirtingų pirminių daliklių kiekis.

8. $\ln \frac{\varphi(n)}{n}$ – stipriai adityvi funkcija, čia $\varphi(n)$ – Oilerio funkcija, apibrėžta 5-ame pavyzdyje.

3. Stipriai adityvių funkcijų sekos. Jų skirstiniai dažnio atžvilgiu

Jei $f_x(n)$ yra stipriai adityvių funkcijų šeima, tai pagal (2.2) aišku, kad

$$f_x(n) = \sum_{p|n} f_x(p).$$

Parinkę skaičius $f_x(p)$, čia p-pirminis, gauname stipriai adityvių funkcijų seką.

Pavyzdžiai:

1.
$$f_x(p) = \begin{cases} 1, & \text{jei } p \leqslant \ln x, \\ 0, & \text{jei } p > \ln x. \end{cases}$$

Tada visiems $x \geqslant 2$ gausime

$$f_x(n) = \sum_{\substack{p|n \\ p \leqslant \ln x}} 1 = \#\{p \leqslant \ln x : p|n\}.$$

Vadinasi, $\nu_x(n \leqslant x : f_x(n) = 1)$ – dažnis natūraliųjų $n \leqslant x$, kurie turi lygiai vieną pirminį, neviršijantį $\ln x$. O $\nu_x(n \leqslant x : f_x(n) = 0)$ – dažnis natūraliųjų $n \leqslant x$, kurie yra tarpusavyje pirminiai su visais pirminiais, neviršijančiais $\ln x$.

2.
$$g_x(p) = \begin{cases} 1, & \text{jei } \sqrt{x} < p \leqslant x, \\ 0, & \text{jei } p \leqslant \sqrt{x},\ p > x. \end{cases}$$

Tada visiems $x \geqslant 2$ gausime

$$g_x(n) = \sum_{\substack{p|n \\ \sqrt{x} \leqslant p < x}} 1 = \#\big\{\sqrt{x} \leqslant p < x : p|n\big\}.$$

$$g_{10}(5) = \#\{\sqrt{10} \leqslant p < 10 : p|5\} = 1,$$
$$g_{20}(4) = \#\{\sqrt{20} \leqslant p < 20 : p|4\} = 0,$$
$$g_{24}(7) = \#\{\sqrt{24} \leqslant p < 24 : p|7\} = 1,$$
$$g_{32}(23) = \#\{\sqrt{32} \leqslant p < 32 : p|23\} = 1.$$

Šiuo atveju, $\nu_x(n \leqslant x : g_x(n) = 0)$ – dažnis natūraliųjų $n \leqslant x$, kurie tarpusavyje pirminiai su visais pirminiais iš intervalo $[\sqrt{x}, x]$. $\nu_x(n \leqslant x : g_x(n) = 1)$ – dažnis natūraliųjų $n \leqslant x$, kurie turi pirminį daliklį iš intervalo $[\sqrt{x}, x]$.

3.
$$h_x(p) = \begin{cases} 1, & \text{jei } \sqrt{x} < p \leqslant \frac{x}{2}, \\ -1, & \text{jei } p \leqslant \sqrt{x},\ p > \frac{x}{2}. \end{cases}$$

Tada visiems $x \geqslant 2$ gausime

$$\begin{aligned} h_x(n) &= \sum_{\substack{p|n \\ \sqrt{x}<p\leqslant\frac{x}{2}}} 1 + \sum_{\substack{p|n \\ p\leqslant\sqrt{x},\ p>\frac{x}{2}}} (-1) \\ &= \#\Big\{\sqrt{x} < p \leqslant \frac{x}{2} : p|n\Big\} - \#\Big\{p \leqslant \sqrt{x},\ p > \frac{x}{2} : p|n\Big\}. \end{aligned}$$

Naudojantis šia išraiška aišku, kad:

$$h_{25}(4) = -1,$$
$$h_{37}(34) = 1 + (-1) = 0,$$
$$h_{24}(770) = 3 - 1 = 2.$$

Šiuo atveju, $\nu_x(n \leqslant x : h_x(n) = 0)$ yra dažnis natūraliųjų skaičių, kurie pirminių daliklių aibėse $(\sqrt{x}, \frac{x}{2}]$ ir $[2, \sqrt{x}] \cup (\frac{x}{2}, x]$ turi po lygiai.

Jeigu $f_x(n)$ – stipriai adityvių funkcijų šeima ir, be to,

$$\nu_x\big(n \leqslant x : f_x(n) \leqslant u\big) \Rightarrow F(u),$$

kur $F(u)$ yra kokia nors pasiskirstymo funkcija, tai iš užrašytos lygybės akivaizdžiai išplaukia, kad

$$\#\{n \leqslant x : b < f_x(n) \leqslant a\} \sim \big(F(a) - F(b)\big) \cdot x,$$

kai $x \to \infty$.

4. Atstumas tarp diskrečių skirstinių

Matas μ vadinamas *sveikaskaičiu*, jei $\mu\{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}\} = 0$. Krūvis $\varDelta$ irgi vadinamas sveikaskaičiu, jeigu $\varDelta\{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}\} = 0$. Kiekvieną sveikaskaitį krūvį $\varDelta$ galima užrašyti taip:

$$\varDelta(A) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} E_j \varDelta_j(A), \quad \text{čia } \varDelta_j(A) = \begin{cases} 1, & j \in A, \\ 0, & j \notin A, \end{cases} \quad A \in B(\mathbb{R}).$$

Jo variacija –

$$\|\varDelta\| = \sum_{j\in\mathbb{Z}} |E_j|.$$

Jeigu μ yra sveikaskaitis matas, tai aišku, kad $\|\mu\| = 1$.

Sakykime, F ir G yra krūviai aibėje $\mathbb{Z}$. Atstumus tarp jų galima tirti naudojant žemiau išvardintas metrikas.

$$\rho_r(F, G) = \left\{ \sum_{l\in\mathbb{Z}} \left|F(l) - G(l)\right|^r \right\}^{1/r}, \quad r \geqslant 1, \tag{4.1}$$

$\rho_r(F, G)$ vadinama l_r *atstumu*, o kai $r = 1$ – atstumu pagal variaciją.

$$\hat{\rho}(F, G) = \sup_l \left|F(l) - G(l)\right|, \tag{4.2}$$

$\hat{\rho}(F, G)$ vadinama *lokaliąja* metrika.

$$\tilde{\rho}(F, G) = \sup_u \left| \sum_{l<u} F(l) - \sum_{l<u} G(l) \right|, \tag{4.3}$$

$\tilde{\rho}(F, G)$ vadinama *tolygiąja* metrika.

Pavyzdžiai:

1. Pasirenkame $F(1) = \frac{1}{2}$, $F(2) = \frac{1}{2}$, ir $G(1) = \frac{1}{2}$, $G(3) = \frac{1}{2}$. Skaičiuosime atstumus pagal (4.1), (4.2) ir (4.3) metrikas. Pasirenkame, jog $r = 1$. Tada atstumas pagal variaciją apskaičiuojamas taip:

$$\rho_1(F, G) = \left(\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right| + 2 \cdot \left|\frac{1}{2} - 0\right| \right) = 1.$$

Toliau apskaičiuosime lokalųjį atstumą:

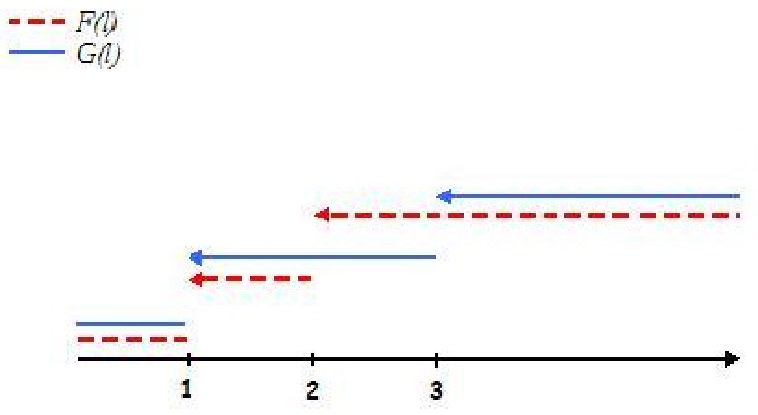
$$\hat{\rho}(F, G) = \sup_l \left|F(l) - G(l)\right| = \frac{1}{2},$$

o pagal tolygiosios metrikos apibrėžimą:

$$\tilde{\rho}(F, G) = \sup_u \left| \sum_{l<u} F(l) - \sum_{l<u} G(l) \right| = \frac{1}{2},$$

nes

$$\sum_{l<u} F(l) = \begin{cases} 0, & \text{jei } u < 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{jei } 1 \leqslant u < 2, \\ 1, & \text{jei } u \geqslant 2, \end{cases} \qquad \sum_{l<u} G(l) = \begin{cases} 0, & \text{jei } u < 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{jei } 1 \leqslant u < 3, \\ 1, & \text{jei } u \geqslant 3. \end{cases}$$



2. Sakykime, dabar abu matai sukoncentruoti taškuose $l = 0, 1, 2, 3$ ir

$$F(0) = \frac{1}{4}, \qquad F(1) = \frac{1}{4}, \qquad F(2) = \frac{1}{4}, \qquad F(3) = \frac{1}{4},$$
$$G(0) = \frac{1}{3}, \qquad G(1) = \frac{1}{3}, \qquad G(2) = \frac{1}{6}, \qquad G(3) = \frac{1}{6}.$$

Skaičiuosime atstumus pagal (4.1), (4.2) ir (4.3) metrikas:

$$\begin{aligned} \rho_r(F, G) &= \left(\left| \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right|^r + \left| \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right|^r + \left| \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right|^r + \left| \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right|^r \right)^{1/r} \\ &= \left(\frac{1}{12^r} \cdot 4 \right)^{1/r} = \frac{1}{12} \cdot 4^{1/r}, \\ \hat{\rho}(F, G) &= \sup_l \left| F(l) - G(l) \right| = \max \left(\left| \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right|, \left| \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right| \right) = \frac{1}{12}, \\ \tilde{\rho}(F, G) &= \sup_u \left| \sum_{l<u} F(l) - \sum_{l<u} G(l) \right| = \max_u \left\{ \left| \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right|, \left| \frac{2}{4} - \frac{2}{3} \right|, \left| \frac{3}{4} - \frac{5}{3} \right|, 0 \right\} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

3. Imkime geometrinį pasiskirstymą:

$$F_\eta(x) = \sum_{0 \leqslant s < x} p(1-p)^s,$$

$$P(\eta_1 = m) = pq^m, \quad q = 1 - p.$$

Pasirenkame tikimybes $p_1 = 0{,}64,\ p_2 = 0{,}4$. Apskaičiuojame $P(m,\, p_1)$ ir $F(x)$:

m	$P(m,\, p_1)$	$F(x)$
1	0,64000	0,64000
2	0,23040	0,87040
3	0,08294	0,95334
4	0,02986	0,98320
5	0,01075	0,99395
6	0,00387	0,99782
7	0,00139	0,99922
8	0,00050	0,99972
9	0,00018	0,99990
10	0,00006	0,99996
11	0,00002	0,99999
12	0,00001	1

Taip pat randame $P(m,\, p_2)$ ir $G(x)$:

m	$P(m,\, p_2)$	$G(x)$
1	0,40000	0,40000
2	0,240000	0,64000
3	0,014400	0,78400
4	0,08640	0,87040
5	0,05184	0,92224
6	0,03110	0,95334
7	0,01866	0,97201
8	0,01120	0,98320
9	0,000672	0,98992
10	0,00403	0,99395
11	0,00242	0,99637
12	0,00145	0.99782
>12	0,00218	1

$$\rho_r(F,G) = \big(0{,}24^r + 0{,}0096^r + 0{,}06106^r + 0{,}05654^r + 0{,}04109^r$$
$$+ 0{,}02723^r + 0{,}01070^r + 0{,}00654^r + 0{,}00397^r$$
$$+ 0{,}0024^r + 0{,}00144^r + 0{,}00218^r\big)^{1/r},$$
$$\hat{\rho}(F,G) = \max(0{,}24;\ 0{,}0096;\ 0{,}06106;\ 0{,}05654;\ 0{,}04109;\ 0{,}02723;$$
$$0{,}01070;\ 0{,}00654;\ 0{,}00397;\ 0{,}0024;\ 0{,}00144;\ 0{,}00218) = 0{,}24,$$
$$\tilde{\rho}(F,G) = 0{,}24.$$

4. Tegu krūviai F ir G yra pasiskirstę pagal binominį skirstinį su skirtingais parametrais n ir p: $F \sim B(n_1, p_1)$, $p_1 = 0{,}2$, $n_1 = 4$, ir $G \sim B(n_2, p_2)$, $p_2 = 0{,}3$, $n_2 = 4$. F ir G galimų reikšmių įgijimo tikimybės skaičiuojamos pagal formules:

$$P(F = l|n_1, p_1) = C_{n_1}^l p^l q^{n_1 - l}$$

ir

$$P(G = l|n_2, p_2) = C_{n_2}^l p^l q^{n_2 - l}.$$

Taigi, paskaičiuojame tikimybes:

$$P(F = 0|4;\ 0{,}2) = 0{,}4096,$$
$$P(F = 1|4;\ 0{,}2) = 0{,}4096,$$
$$P(F = 2|4;\ 0{,}2) = 0{,}1536,$$
$$P(F = 3|4;\ 0{,}2) = 0{,}0256,$$
$$P(F = 4|4;\ 0{,}2) = 0{,}0016,$$
$$P(G = 0|3;\ 0{,}3) = 0{,}343,$$
$$P(G = 1|3;\ 0{,}3) = 0{,}441,$$
$$P(G = 2|3;\ 0{,}3) = 0{,}189,$$
$$P(G = 3|3;\ 0{,}3) = 0{,}027,$$

$$\rho_r(F,G) = \Big||0{,}4096 - 0{,}343|^r + |0{,}4096 - 0{,}441|^r + |0{,}1536 - 0{,}189|^r$$
$$+ |0{,}0256 - 0{,}027|^r + |0{,}0016 - 0|^r\Big|^{1/r}$$
$$= \Big|0{,}0666^r + 0{,}0314^r + 0{,}0354^r + 0{,}0014^r + 0{,}0016^r\Big|^{1/r},$$
$$\hat{\rho}(F,G) = \max\big\{|0{,}4096 - 0{,}343|;\ |0{,}4096 - 0{,}441|;\ |0{,}1536 - 0{,}189|;$$
$$|0{,}0256 - 0{,}027|;\ |0{,}0016 - 0|\big\}$$
$$= \max\{0{,}0666;\ 0{,}0314;\ 0{,}0354;\ 0{,}0014;\ 0{,}0016\} = 0{,}0666,$$

$$\tilde{\rho}(F,G) = \max\big\{|0-0|;\ |0{,}4096-0{,}343|;\ |0{,}8192-0{,}784|;$$
$$|0{,}9728-0{,}9731|;\ |0{,}9984-1|;\ |1-1|\big\}$$
$$= \max\{0;\ 0{,}0666;\ 0{,}0352;\ 0{,}0002;\ 0{,}0016\} = 0{,}0666.$$

5. Tegu matai F ir G pasiskirstę pagal nupjautą Puasono skirstinį su skirtingais parametrais λ: $F \sim P(\lambda_1),\ \lambda_1 = 5$ ir $G \sim P(\lambda_2),\ \lambda_2 = 3,\ l \in [0,5)$.

   F ir G galimų reikšmių įgijimo tikimybės skaičiuojamos pagal formules:

$$P(F = l|\lambda_1) = \frac{\lambda_1^l}{l!}e^{-\lambda_1}$$

   ir

$$P(G = l|\lambda_2) = \frac{\lambda_2^l}{l!}e^{-\lambda_2}.$$

$$P(F = 0|5) = 0{,}0067,$$
$$P(F = 1|5) = 0{,}0335,$$
$$P(F = 2|5) = 0{,}0838,$$
$$P(F = 3|5) = 0{,}1396,$$
$$P(F = 4|5) = 0{,}1745,$$
$$P(F = 5|5) = 0{,}5619,$$
$$P(G = 0|3) = 0{,}0498,$$
$$P(G = 1|3) = 0{,}1494,$$
$$P(G = 2|3) = 0{,}2240,$$
$$P(G = 3|3) = 0{,}2240,$$
$$P(G = 4|3) = 0{,}1680,$$
$$P(G = 5|3) = 0{,}1848,$$

$$\rho_r(F,G) = \Big||0{,}0067-0{,}0498|^r + |0{,}0335-0{,}1494|^r + |0{,}0838-0{,}2240|^r$$
$$+ |0{,}1396-0{,}2240|^r + |0{,}1745-0{,}1680|^r + |0{,}5619-0{,}1848|^r\Big|^{1/r}$$
$$= \Big|0{,}0431^r + 0{,}1159^r + 0{,}1402^r + 0{,}0844^r + 0{,}2935^r + 0{,}3771^r\Big|^{1/r},$$
$$\hat{\rho}(F,G) = \max\big\{|0{,}0067-0{,}0498|;\ |0{,}0335-0{,}1494|;\ |0{,}0838-0{,}2240|;$$
$$|0{,}1396-0{,}2240|;\ |0{,}1745-0{,}1680|;\ |0{,}5619-0{,}1848|\big\}$$
$$= \max\{0{,}0431;\ 0{,}1159;\ 0{,}1402;\ 0{,}0844;\ 0{,}2935;\ 0{,}3771\} = 0{,}3771,$$

$$\tilde{\rho}(F,G) = \max\big\{|0-0|;\ |0{,}0067-0{,}0498|;\ |0{,}0402-0{,}1992|;$$
$$|0{,}124-0{,}4232|;\ |0{,}2636-0{,}6472|;\ |0{,}4381-0{,}8152|;\ |1-1|\big\}$$
$$= \max\{0;\ 0{,}0431;\ 0{,}159;\ 0{,}2992;\ 0{,}3836;\ 0{,}3771\} = 0{,}3836.$$

5. Stipriai adityvių funkcijų Kubiliaus klasės

Apibrėžimas. Realioji stipriai adityvi aritmetinė funkcija f priklauso *Kubiliaus klasei* H ($f \in H$), jei

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{B_x^2} \sum_{x^t < p \leqslant x} \frac{f^2(p)}{p} = 0, \quad \forall t \in (0,1),$$

čia $B_x^2 = \sum_{p \leqslant x} \frac{f^2(p)}{p}$.

Apibrėžimas. Stipriai adityvių funkcijų šeima $f_x \in H$, jei

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{x^t < p \leqslant x} \frac{f_x^2(p)}{p} = 0, \quad \forall t \in (0,1).$$

Apibrėžimas. Stipriai adityvių funkcijų šeimą f_x, tenkinančią sąlygą

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{\substack{x^t < p \leqslant x \\ |f_x(p)| > \delta}} \frac{1}{p} = 0, \quad \forall t \in (0,1),\ \forall \delta > 0,$$

vadinsime *Kubiliaus tipo* šeima ir žymėsime $f_x \in \mathcal{K}$.

Jeigu f_x yra sveikareikšmių stipriai adityvių funkcijų šeima, tai paskutinė sąlyga ekvivalenti sąlygai

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{\substack{x^t < p \leqslant x \\ f_x(p) \neq 0}} \frac{1}{p} = 0, \quad \forall t \in (0,1).$$

Paskutinis reikalavimas ekvivalentus tokiam:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\ln x} \sum_{\substack{p \leqslant x \\ f_x(p) \neq 0}} \frac{\ln p}{p} = 0. \tag{5.1}$$

Vadinasi, sveikareikšmių stipriai adityvių funkcijų šeima f_x priklauso klasei $\mathcal{K}$ tada ir tik tada, kai išpildyta sąlyga (5.1).

Kubiliaus tipo adityvių funkcijų šeimos apibrėžimas pirmą kartą pateiktas I. Z. Rusza straipsnyje (žr. [5]).

Iš rėčio metodu gautų rezultatų (žr. [6], 11 skyrius) išplaukia, kad tokios adityviųjų funkcijų šeimos skirstiniai ν_x ir P_x atžvilgiu asimptotiškai sutampa, t. y.

$$\nu_x\big(n \leqslant x : f_x(n) - \alpha(x) < u\big) \sim P\bigg(\sum_{p\leqslant x} \xi_{xp} - \alpha(x) < n\bigg), \tag{5.2}$$

kai $x \to \infty$. Čia $\xi_{xp},\ p \leqslant x$, yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, kurie įgyja reikšmes 0 ir $f_x(p)$ su tikimybėmis $1 - \frac{1}{p}$ ir $\frac{1}{p}$ atitinkamai.

Šiame darbe nagrinėjamas atvirkštinis klausimas – ar iš sąlygos (5.2) išplaukia, kad f_x priklauso klasei $\mathcal{K}$.

6. Pagrindinis rezultatas

Sakykime, $f_x(n)$ – stipriai adityvių sveikareikšmių funkcijų seka, $f_x(p) \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, kiekvienam pirminiam p ir egzistuoja konstanta D, kuriai

$$\limsup_{x\to\infty} \sum_{\substack{p\leqslant x\\ f_x(p)>D}} \frac{1}{p} = 0.$$

Sakykime, $\xi_{xp},\ p \leqslant x$ – nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, (kiekvienam fiksuotam x), pasiskirstę pagal dėsnį:

$$\xi_{xp} = \begin{cases} f_x(p), & \text{su tikimybe } \frac{1}{p},\\ 0, & \text{su tikimybe } 1 - \frac{1}{p}.\end{cases}$$

Tegul, be to,

$$\rho(\nu_x, P_x) = \sup_k \bigg|\nu_x\big(n \leqslant x : f_x(n) = k\big) - P\bigg(\sum_{p\leqslant x} \xi_{xp} = k\bigg)\bigg|,$$

$$E(x) = \sum_{\substack{p\leqslant x\\ f_x(p)\neq 0}} \frac{1}{p},$$

$$\gamma(x) = \frac{1}{\ln x} \sum_{\substack{p\leqslant x\\ f_x(p)\neq 0}} \frac{\ln p}{p}.$$

Teorema. *Esant nurodytoms sąlygoms,*

$$\rho(\nu_x, P_x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \min\left\{\gamma(x), \frac{1}{E(x)}\right\} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0.$$

7. Teoremos įrodymas

Pakankamumas.

Pakankamumo įrodymas išplaukia tiesiogiai iš žemiau pateikiamos lemos.

Lema. *Tegu $x \geqslant 3$, f_x – stipriai adityvių sveikareikšmių funkcijų šeima. Tada*

$$\sup_k \left| \nu_x\big(n \leqslant x : f_x(n) = k\big) - P\left(\sum_{p \leqslant x} \xi_{xp} = k\right)\right| \ll \left(\min\left\{\gamma(x); \frac{1}{E(x)}\right\}\right)^{1/2} + x^{-4/5}.$$

Lemos įrodymą žiūrėti [4].

Būtinumas.

Sakykime, kad $f_x(p) \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ ir

$$\exists D : \limsup_{x\to\infty} \sum_{\substack{p\leqslant x\\ f_x(p)>D}} \frac{1}{p} = 0. \tag{7.1}$$

Tegul, be to,

$$\rho(\nu_x, P_x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0.$$

Įrodysime, kad

$$\min\left\{\gamma(x), \frac{1}{E(x)}\right\} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0.$$

Jeigu $E(x) \to \infty$, tai aišku, kad

$$\min\left\{\gamma(x), \frac{1}{E(x)}\right\} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0.$$

Sakykime dabar, kad $E(x) \not\to \infty$ kažkokiame posekyje $x = x_{(1)}$. Tada $E(x)$ yra aprėžta visiems x iš šio posekio, t. y. $E(x) \ll 1$ visiems $x \in x_{(1)}$. Paprastumo dėlei toliau nagrinėsime tik x iš šio posekio. Įrodysime, kad šiuo likusiu atveju

$$\gamma(x) = \frac{1}{\ln x} \sum_{\substack{p\leqslant x\\ f_x(p)\neq 0}} \frac{\ln p}{p} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0.$$

Apibrėžkime naują stipriai adityvių funkcijų šeimą f_{xD}:

$$f_{xD}(n) = \sum_{\substack{p\mid n\\ f_x(p)\leqslant D}} f_x(p).$$

Tegul, be to, ξ_{xDp}, $p \leqslant x$ yra nepriklausomų (kiekvienam fiksuotam x) atsitiktinių dydžių, turinčių pasiskirstymus

$$\xi_{xDp} = \begin{cases} f_{xD}(p), & \text{su tikimybe } \frac{1}{p}, \\ 0, & \text{su tikimybe } 1 - \frac{1}{p}, \end{cases}$$

šeima.

Iš trikampio nelygybės turime

$$\rho(\nu_{xD}, P_{xD}) \leqslant \rho(\nu_{xD}, \nu_x) + \rho(\nu_x, P_x) + \rho(P_x, P_{xD}), \tag{7.2}$$

čia

$$\nu_{xD} = \nu_x\big(n \leqslant x : f_{xD}(n) = k\big),$$
$$P_{xD} = P\bigg(\sum_{p\leqslant x} \xi_{xDp} = k\bigg).$$

Aišku, kad

$$\begin{aligned}
\rho(\nu_{xD}, \nu_x) &= \sup_k \big|\nu_x\big(n \leqslant x : f_x(n) = k\big) - \nu_x\big(n \leqslant x : f_{xD}(n) = k\big)\big| \\
&= \sup_k \bigg|\frac{1}{[x]} \sum_{\substack{n\leqslant x \\ f_x(n)=k}} 1 - \frac{1}{[x]} \sum_{\substack{n\leqslant x \\ f_{xD}(n)=k}} 1\bigg| = \sup_k \Bigg|\frac{1}{[x]} \sum_{\substack{n\leqslant x \\ f_x(n)=k \\ f_{xD}(n)\neq k}} 1\Bigg| \\
&\leqslant \sup_k \frac{1}{[x]} \sum_{\substack{n\leqslant x \\ f_x(n)\neq f_{xD}(n)}} 1 = \frac{1}{[x]} \sum_{\substack{n\leqslant x \\ f_x(n)\neq f_{xD}(n)}} 1 \leqslant \frac{1}{[x]} \sum_{\substack{n\leqslant x \\ \exists p|n : f_x(p)>D}} 1 \\
&\leqslant \frac{1}{[x]} \sum_{\substack{p\leqslant x \\ f_x(p)>D}} \sum_{\substack{n\leqslant x \\ p|n}} 1 \leqslant \frac{1}{[x]} \sum_{\substack{p\leqslant x \\ f_x(p)>D}} \left[\frac{x}{p}\right] \leqslant \sum_{\substack{p\leqslant x \\ f_x(p)>D}} \frac{1}{p}.
\end{aligned}$$

Iš sąlygos (7.1) išplaukia, kad

$$\rho(\nu_{xD}, \nu_x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0. \tag{7.3}$$

Antra vertus,

$$\begin{aligned}
\rho(P_x, P_{xD}) &= \sup_k \bigg|P\bigg(\sum_{p\leqslant x} \xi_{xp} = k\bigg) - P\bigg(\sum_{p\leqslant x} \xi_{xDp} = k\bigg)\bigg| \\
&= \sup_k \bigg|\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bigg\{ \prod_{p\leqslant x} \bigg(e^{itf_x(p)}\frac{1}{p} + e^{it\cdot 0}\Big(1 - \frac{1}{p}\Big)\bigg) \\
&\qquad - \prod_{p\leqslant x} \bigg(e^{itf_{xD}(p)}\frac{1}{p} + e^{it\cdot 0}\Big(1 - \frac{1}{p}\Big)\bigg)\bigg\} e^{-itk}\, dt\bigg| \\
&= \sup_k \bigg|\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bigg(\prod_{p\leqslant x} \bigg(1 + \frac{e^{itf_x(p)} - 1}{p}\bigg) \\
&\qquad - \prod_{p\leqslant x} \bigg(1 + \frac{e^{itf_{xD}(p)} - 1}{p}\bigg)\bigg) e^{-itk}\, dt\bigg|
\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\prod_{p\leqslant x}\left(1+\frac{e^{itf_x(p)}-1}{p}\right)-\prod_{p\leqslant x}\left(1+\frac{e^{itf_{xD}(p)}-1}{p}\right)\right|dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\prod_{p\leqslant x}\left(1+\frac{e^{itf_x(p)}-1}{p}\right)\right.$$

$$\left.-\prod_{\substack{p\leqslant x\\ f_x(p)\leqslant D}}\left(1+\frac{e^{itf_x(p)}-1}{p}\right)\cdot\prod_{\substack{p\leqslant x\\ f_x(p)>D}}\left(1+\frac{1-1}{p}\right)\right|dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\prod_{p\leqslant x}\left(1+\frac{e^{itf_x(p)}-1}{p}\right)-\prod_{\substack{p\leqslant x\\ f_x(p)\leqslant D}}\left(1+\frac{e^{itf_x(p)}-1}{p}\right)\right|dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\prod_{\substack{p\leqslant x\\ f_x(p)\leqslant D}}\left(1+\frac{e^{itf_x(p)}-1}{p}\right)\cdot\prod_{\substack{p\leqslant x\\ f_x(p)>D}}\left(1+\frac{e^{itf_x(p)}-1}{p}\right)\right.$$

$$\left.-\prod_{\substack{p\leqslant x\\ f_x(p)\leqslant D}}\left(1+\frac{e^{itf_x(p)}-1}{p}\right)\right|dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\prod_{\substack{p\leqslant x\\ f_x(p)\leqslant D}}\left|1+\frac{e^{itf_x(p)}-1}{p}\right|\cdot\left|\prod_{\substack{p\leqslant x\\ f_x(p)>D}}\left(1+\frac{e^{itf_x(p)}-1}{p}\right)-1\right|dt$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\prod_{\substack{p\leqslant x\\ f_x(p)>D}}\left(1+\frac{e^{itf_x(p)}-1}{p}\right)-1\right|dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\prod_{\substack{p\leqslant x\\ f_x(p)>D}}\left(1+\frac{e^{itf_x(p)}-1}{p}\right)-\prod_{\substack{p\leqslant x\\ f_x(p)>D}}1\right|dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{\substack{p\leqslant x\\ f_x(p)>D}}\left(1+\frac{e^{itf_x(p)}-1}{p}-1\right)\prod_{q<p}\left(1+\frac{e^{itf_x(q)}-1}{q}\right)\prod_{p<q\leqslant x}1\right|dt$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{\substack{p\leqslant x\\ f_x(p)>D}}\left|\frac{e^{itf_x(p)}-1}{p}\right|\prod_{q<p}\left|1+\frac{e^{itf_x(q)}-1}{q}\right|dt$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{\substack{p\leqslant x\\ f_x(p)>D}}\frac{|e^{itf_x(p)}-1|}{p}dt\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{\substack{p\leqslant x\\ f_x(p)>D}}\frac{2}{p}dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{\substack{p\leqslant x\\ f_x(p)>D}}\frac{1}{p}\int_{-\pi}^{\pi}dt=2\sum_{\substack{p\leqslant x\\ f_x(p)>D}}\frac{1}{p}.$$

Iš sąlygos (7.1) išplaukia, kad

$$\rho(P_x, P_{xD}) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0. \tag{7.4}$$

Iš (7.2), (7.3) ir (7.4) gauname, kad

$$\rho(\nu_{xD}, P_{xD}) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0.$$

Iš teoremos (žr. [4]) išplaukia, kad

$$\min\left\{\frac{1}{\sum\limits_{\substack{p\leqslant x\\ f_x(p)\neq 0\\ f_x(p)\leqslant D}}\frac{1}{p}}, \frac{1}{\sum_{p\leqslant x}\frac{\ln p}{p}}\sum_{\substack{p\leqslant x\\ f_x(p)\neq 0\\ f_x(p)\leqslant D}}\frac{\ln p}{p}\right\} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0.$$

Kadangi

$$\sum_{\substack{p\leqslant x\\ f_x(p)\neq 0\\ f_x(p)\leqslant D}}\frac{1}{p} \leqslant \sum_{\substack{p\leqslant x\\ f_x(p)\neq 0}}\frac{1}{p} = E(x) \ll 1,$$

tai

$$\frac{1}{\sum_{p\leqslant x}\frac{\ln p}{p}}\sum_{\substack{p\leqslant x\\ f_x(p)\neq 0\\ f_x(p)\leqslant D}}\frac{\ln p}{p} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0.$$

Tačiau

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{\ln p}{p} \sim \ln x,$$

vadinasi

$$\frac{1}{\ln x}\sum_{\substack{p\leqslant x\\ f_x(p)\neq 0\\ f_x(p)\leqslant D}}\frac{\ln p}{p} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0. \tag{7.5}$$

Be to,

$$\gamma(x) = \frac{1}{\ln x}\sum_{\substack{p\leqslant x\\ f_x(p)\neq 0}}\frac{\ln p}{p} = \frac{1}{\ln x}\sum_{\substack{p\leqslant x\\ f_x(p)\neq 0\\ f_x(p)\leqslant D}}\frac{\ln p}{p} + \frac{1}{\ln x}\sum_{\substack{p\leqslant x\\ f_x(p)> D}}\frac{\ln p}{p} \tag{7.6}$$

ir

$$\frac{1}{\ln x}\sum_{\substack{p\leqslant x\\ f_x(p)> D}}\frac{\ln p}{p} \leqslant \sum_{\substack{p\leqslant x\\ f_x(p)> D}}\frac{1}{p}.$$

Iš (7.1) gauname, kad

$$\frac{1}{\ln x}\sum_{\substack{p\leqslant x\\ f_x(p)> D}}\frac{\ln p}{p} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0.$$

Vadinasi, iš (7.5) ir (7.6) išplaukia, kad nagrinėjamu atveju $\gamma(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$.

Teorema įrodyta.

Reziumė

Atstumai tarp aritmetinių skirstinių

Darbe nagrinėjamos sveikareikšmės stipriai adityvios funkcijos, jų sekos bei pasiskirstymai. Pagrindinis rezultatas yra nustatyti, ar esant sąlygoms:

$$f_x(p) \in \{0, 1, 2, \ldots\},$$

$$\exists D : \limsup_{x\to\infty} \sum_{\substack{p\leqslant x\\ f_x(p)>D}} \frac{1}{p} = 0,$$

yra teisinga

$$\rho(\nu_x, P_x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \min\left\{\gamma(x), \frac{1}{E(x)}\right\} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0.$$

Summary

Distances between arithmetical distributions

Integer – valued strongly additive functions, their sequences and distributions are studied in this paper. The main result is to find out if having the conditions:

$$f_x(p) \in \{0, 1, 2, \ldots\}$$

$$\exists D : \limsup_{x\to\infty} \sum_{\substack{p\leqslant x\\ f_x(p)>D}} \frac{1}{p} = 0,$$

the statement

$$\rho(\nu_x, P_x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \min\left\{\gamma(x), \frac{1}{E(x)}\right\} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$$

holds.

Literatūra

[1] J. Kubilius, *Tikimybių teorija ir matematinė statistika*. Mokslas, Vilnius, 1980.

[2] J. Šiaulys, V. Čekanavičius, Sveikareikšmių adityviųjų funkcijų pasiskirstymų aproksimavimas diskrečiaisiais krūviais I, *Liet. Mat. Rink.* **28**(4), 795–810 (1988).

[3] E. Manstavičius, *Tikimybinė skaičių teorija*. Vilnius, 1987.

[4] J. Šiaulys, G. Stepanauskas, Kubiliaus tipo sveikareikšmių stipriai adityvių funkcijų sekos, *Liet. Mat. Rink. II*, 2005.

[5] I. Z. Ruzsa, Generalization of Kubilius' class of additive functions. I, New Trends in Probab. and Statist., F. Schweiger and E. Manstavičius (Eds.), VSP, TEV, 1992, 269–283.

[6] P. D. T. A. Elliot, *Probabilistic number theory, I, II,* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1979, 1980.

[7] J. Kruopis, *Matematinė statistika*, Mokslo ir enciklopedijų leidykla, Vilnius, 1993.

[8] К. Прахар, *Распределение простых чисел*. Мир, Москва, 1967.